ВІДГУК
офіційного опонента на дисертаційну роботу
Ямпольського Олександра Леонідовича
«Геометрія підмноговидів у розшарованих просторах»,
представлену на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія

У період з 1960 до приблизно 2000 року активного розвитку отримала внутрішня геометрія дотичного і сферичного розшарувань перш за все завдяки тому, що на сферичному дотичному розшаруванні існує так звана структура Сасакі, що визначається певним одиничним векторним полем на ньому. У розвиток цього напряму геометрії сферичного розшарування зробили внесок С. Сасакі, Д. Блер, О. Ковальський, П. Домбровський та інші відомі геометри. Інтегральні траєкторії характеристичного векторного поля структури Сасакі є геодезичними лініями на одиничному сферичному розшаруванні. Саме тому дослідження автора з геометрії геодезичних ліній і цілком геодезичних розподілів на одиничному розшаруванні складали актуальну на той час задачу. Так само актуальною є і задача про секційну кривину сферичних розшарувань, адже до досліджень автора лише секційна кривина одиничного розшарування двовимірної сфери була досліджена у спільній роботі В. Клінгенберга і С. Сасакі (1975).

Геодезичні лінії, що трансверсальні шарам розшарування, складають тривіальний з точки зору вимірності клас цілком геодезичних підмноговидів розшарування. П. Вальчак (1989) запропонував розгляд підмноговидів максимальної вимірності, що трансверсальні шарам і знайшов, що за певних умов такі підмноговиди можуть бути цілком геодезичними. Щоправда, ці умови виявились обтяжливими. Тому ідея автора розглянути підмноговиди, що трансверсальні до шарів і мають вимірність меншу за максимальну, виявилась новою, а пошук цілком геодезичних підмноговидів цього класу склав актуальну і нетривіальну проблему.

Автор розвинув геометрію одиничного векторного поля на рімановому многовиді з точки зору геометрії підмноговидів. Започаткували такий напрям досліджень H. Gluck і W. Ziller у 1986 році в глобальній постановці, а в роботах 2000 – 2002 років O. Gil-Medrano та E. Llinmares-Fuster запропонували підхід до локальної локальний векторного поля. Перш за все ці автори цікавились питаннями мінімальності підмноговиду одиничного дотичного розшарування, що породжувався одиничним векторним полем. Значний вклад в пошук прикладів мінімальних одиничних векторних полів протягом 2002-2012 років внесли L. Vanhecke, E. Boeckx, K. Tsukada, M. Sekizawa та інші відомі геометри. Мінімальність підмноговиду означає, що слід всіх матриць другої фундаментальної форми дорівнює 0. Певним недоліком праць O. Gil-Medrano та ін. була відсутність обчислення всієї другої фундаментальної форми підмноговида, що був породжений векторним полем. Дослідження другої фундаментальної форми залишається і досі актуальною проблемою, бо відкриває шлях до всебічного розвитку геометрії векторного поля з точки зору геометрії підмноговидів.

Означення метрики Сасакі було перенесене О. Борисенком на випадок нормального розшарування підмноговиду ріманового простору. Ця метрика була предметом дослідження автора в його кандидатській дисертації. Щодо інших типів розшарувань довгий час питання їх метризації не розглядалося, але з очевидністю поширення метрики Сасакі-Борисенка на загальний випадок складало актуальну задачу геометрії розшарованих просторів. Розділ 5 присвячений саме такому узагальненню.

Виділимо найбільш важливі, з точки зору опонента, результати дисертації.

Перший розділ дисертації містить означення і основні поняття з геометрії дотичного і сферичного дотичного розшарувань. Сформульовані результати, що стали основою досліджень, представлених в дисертації.

У другому розділі розглянуто задачу існування на одиничному дотичному розшаруванні ріманова многовиду інтегрованого розподілу з властивостями підмноговидів сталої кривини. *Найбільш повний результат* тут складає **Теорема 2.2,** яка дає необхідні і достатні умови для того, щоби одиничне дотичне розшарування $T_1(M^n, K)\,(n \geq 3)$ простору сталої кривини $K > 0$ мало невертикальний сильно-сферичний розподіл L^s з показчиком сферичності $c > 0$.

Теорема 2.2 виявляє нову властивість поля Сасакієвої структури. Більше того, в подальшому в Главі 4 була знайдена ще одна характеристика поля Сасакієвої структури.

Іншим *важливим результатом другого розділу* є **теорема 2.6** про межі секційної кривини метрики Сасакі одиничного розшарування простору сталої кривини. Знайдені межі є точними, тобто, знайдені двовимірні площинки, вздовж яких ці кривини досягаються. Результат Теореми 2.6 значно посилює як результат Клінґенберга і Сасакі, так і попередній результат автора, що увійшов до кандидатської дисертації. Як випливає з теореми 2.6, на розшаруванні простору сталої кривини вимірності більше 3 завжди досягається нуль секційної кривини. Логічно було поставити питання про те, чи існують многовиди з додатною кривиною одиничного розшарування. Таке питання було розглянуте О. Ковальським зі співавторами (2001); вони дали негативну відповідь у вимірності $n = 4$. В дисертації фактично зняте це питання, завдячуючи наступній теоремі.

Теорема 2.5. *Нехай (M^n, g) - ріманів многовид. Якщо $n \neq 2, 4, 8$ то в кожній точці $q \in M^n$ існує трійка одиничних взаємно перпендикулярних векторів $X, Y, Z \in T_q M^n$ така, що тензор кривини метрики g задовольняє властивості $R_q(X, Y)Z = 0$ і, як наслідок, секційна кривина метрики Сасакі $T_1 M$ завжди приймає значення 0 (тобто, не може бути додатною).*

Доведення використовує відому теорему Адамса. При $n = 2$ вичерпний результат щодо додатності кривини $T_1 M^2$ також належить дисертанту і був включений в його кандидатську дисертацію.

Найбільш цікаві ***результати третього розділу*** пов'язані зі спробами знайти цілком геодезичні підмноговиди дотичного розшарування, що трансверсальні шарам. Доведено, що такі підмноговиди породжуються векторними полями уздовж підмноговидів бази (**теорема 3.13**). Знайдено умови цілком геодезичності таких підмноговидів. Одновимірні підмноговиди цього класу є просто невертикальними геодезичними лініями. Якщо база локально-симетрична, то такі лінії породжуються векторними полями уздовж кривих зі сталими кривинами (P.Nagy, 1978). Якщо база має сталу кривину, то відповідними кривими на базі є гелікси (гвинтові лінії). Простори сталої кривини належать до більш загального класу просторових форм, підкласу локально-симетричних просторів. В роботі розглянуто цей клас і доведена

Теорема 3.2. *Нехай* $\mathrm{M}(c)$ *– просторова форма сталої кривини* $c \neq 0$. *Нехай* Γ *– невертикальна геодезична лінія на дотичному або дотичному сферичному розшаруванні над* $\mathrm{M}(c)$. *Нехай* $\gamma = \pi \circ \Gamma$ *– проекція* Γ *на* $\mathrm{M}(c)$. *Тоді геодезичні кривини* $k_1, k_2 \ldots$ *кривої* γ *сталі і* (a) $k_3 = \ldots = k_{n-1} = 0$ *для дійсної просторової форми;* (b) $k_6 = \ldots = k_{2n-1} = 0$ *для комплексної просторової форми;* (c) $k_{10} = \ldots = k_{4n-1} = 0$ *для кватерніонної просторової форми.*

Досить цікаво, що результат P.Nagy зберігається при деформації дотичних сфер (шарів одиничного дотичного розшарування) вздовж траєкторій поля Хопфа на них, так званої Берже-деформації дотичних сфер. А саме, має місце

Теорема 3.9. *Нехай* $\gamma = \pi \circ \Gamma$ *– проекція кривої* Γ *на дотичному сферичному Берже-розшаруванні над ермітовим локально симетричним многовидом* M. *Тоді усі геодезичні кривини* γ *сталі.*

Підмноговиди *максимальної* вимірності, що трансверсальні шарам, породжуються векторними полями на базі. Задачу цілком геодезичності таких підмноговидів розглядав П. Вальчак (1989). В дисертаційній роботі значно узагальнено результат Вальчака в наступному твердженні.

Теорема 3.20. *Нехай* ξ *– векторне поле сталої довжини вздовж підмноговиду* $F^l \subset M^n$. *Підмноговид* $\xi(F^l)$ *буде цілком геодезичним підмноговидом в* TM^n, *тоді і тільки тоді коли* F^l *є цілком геодезичним підмноговидом в* M^n *і* ξ *є паралельним векторним полем на* M^n *вздовж* F^l.

Також, наведено приклади реалізації **теореми 3.20**. В цьому розділі була висвітлена особлива роль векторних полів на многовидах, якщо розглядати їх як вкладення бази у дотичне розшарування. Найбільш природний розвиток ця ідея отримала в четвертому розділі.

У четвертому розділі розглянуто підмноговиди одиничного дотичного розшарування, що породжені одиничними векторними полями. А саме, одиничне векторне поле ξ на многовиді M^n розглядається як вкладення $\xi : M^n \to T_1M^n$. В такому разі підмноговид $\xi(M^n) \subset T_1M^n$ отримує індуковану метрику і певну зовнішню геометрію. Як результат, векторному полю ξ можна приписати властивості підмноговиду $\xi(M^n) \subset T_1M^n$ і говорити про мінімальні, цілком геодезичні поля, про їх секційну кривину, кривину Річі тощо. Саме ця ідея була розвинена в дисертації. Постановка задачі є здебільшого локальною, бо на загал на многовиді не існує глобально заданого одиничного векторного поля.

Перш за все, автора цікавить питання про цілком геодезичні одиничні векторні поля. В локальній постановці вичерпний результат отриманий для двовимірних многовидів у **Теоремі 4.38**. Для більших вимірностей слід відзначити наступний результат.

Теорема 4.18. *Нехай* M^{2n+1} *- многовид Сасакі і* ξ *- характеристичне векторне поле. Тоді* $\xi(M^{2n+1})$ *- цілком геодезичний підмноговид в* T_1M^{2n+1}.

Прикладом многовиду Сасакі є одинична сфера. Характеристичне векторне поле Сасакієвої структури на ній утворює поле Хопфа, тобто поле, що огинає шари у розшаруванні Хопфа $S^{2n+1} \xrightarrow{S^1} CP^n$. Стосовно підмноговиду $\xi(S^{2n+1}) \subset T_1S^{2n+1}$ доведено, що він є не просто цілком геодезичним підмноговидом, але й контактним підмноговидом для контактної структури на T_1S^{2n+1} і більше того є Сасакієвою просторовою формою кривини 5/4 (**Теорема 4.26**). Цей результат прояснює геометричний зміст іншого результату автора про те, що секційна кривина T_1S^n змінюється в межах [0,5/4]. Доведено, також, що секційна кривина підмноговиду $\xi(S^{2n+1}) \subset T_1S^{2n+1}$ знаходиться в межах [1/4, 5/4] (**Теорема 4.27**).

Спеціальний клас одиничних векторних полів на многовиді складають поля одиничних нормалей ріманового (локального) гіпершарування. Наприклад, поле натурально параметризованих радіальних (тобто таких, що виходять з фіксованої точки) геодезичних ліній. Такі векторні поля не породжують цілком геодезичний підмноговид, але можуть породжувати мінімальні підмноговиди. З огляду на це, відзначимо наведену в дисертації формулу для середньої кривини поля нормалей гіпершарування.

Інший важливий клас векторних полів складають поля Кілінга, тобто поля локальних ізометрій ріманового многовида. Цілком природно було б розглянути саме ці поля на предмет цілком геодезичності. Було доведено наступне.

Теорема 4.19. *Нехай ξ – одиничне Кілінгове векторне поле на 3-вимірному рімановому многовиді M^3. Якщо $\xi(M^3)$ цілком геодезичний в T_1M^3, то або M^3 є Сасакієвим і ξ то його характеристичне векторне поле, або $M^3 = M^2 \times E^1$ метрично і ξ є одиничним векторним полем, дотичним до евклідового фактору.*

Знову слід відзначити особливу роль характеристичного векторного поля Сасакієвої структури.

У диференціальній геометрії тривимірні групи Лі складають клас многовидів на яких часто перевіряються ті чи інші гіпотези, бо вони мають відносно просту але нетривіальну геометричну будову. Цей факт стимулював автора на дослідження інваріантних одиничних векторних полів з метою знаходження полів з цілком геодезичною властивістю. Як результат, такі векторні поля були знайдені і описані в **теоремах 4.47, 4.48 та 4.51**. На унімодулярних групах такі поля знову пов'язані з певними контактними структурами (**Пропозиція 4.49**). Надалі автор з'ясовує питання про стійкість цілком геодезичних підмноговидів класу, що розглядається. Причому стійкість з'ясовується для більш загального класу варіацій, ніж в роботах Gil-Medrano. В результаті було доведено, що стійким цілком геодезичним полем виявився лише аналог поля Хопфа на одиничній сфері. Більш докладно, доведене наступне твердження.

Теорема 4.57. *Нехай ξ цілком геодезичне лівоінваріантне одиничне векторне поле на компактному факторі 3-вимірної унімодулярної неплоскої групи Лі G з лівоінваріантною метрикою. Тоді $\xi(\Gamma \setminus G)$ класично стійкий цілком геодезичний підмноговид в $T_1(\Gamma \setminus G)$ тоді і тільки тоді, коли G є групою $SO(3)$ або $SU(2)$ сталої кривини $+1$. При цьому ξ є довільним лівоінваріантним полем.*

Відносно вужчого класу варіацій існують і інші стійкі векторні поля. Відповідний результат містить **теорема 4.60**.

У **п'ятому розділі** міститься узагальнення метрики Сасакі на випадок метризованого векторного розшарування зі зв'язністю, отримані аналоги результатів, що вже стали майже класичними, розвинена геометрія перерізів розшарувань і доведені аналоги теорем щодо цілком геодезичної властивості перерізів.

Результати, що наведені у дисертації, є новими, повністю обґрунтованими та отриманими О.Л. Ямпольським самостійно. Результати роботи повністю висвітлені у 21 статті у провідних вітчизняних та міжнародних фахових виданнях, доповідались на багатьох міжнародних наукових конференціях, семінарах з геометрії у провідних університетах та наукових установах НАН України. Зміст автореферату цілком відповідає основним положенням дисертації.

Зауваження. Друкарські помилки і недоліки:

стр. $35_{8\text{-}11}$: Позначення для алгебри одиничних векторних полій не співпадає з позначенням на стор. 19

Стор. $49^{10\text{-}11}$: у виразі $Z(\xi)(\xi)$ зайве (ξ).

Стр 60^5: зайва вертикальна риска в знаменнику.

Стор. 61_4: в індексі має бути (IJ) замість (IY)

Стор. 90: позначення розділу 3.3 не узгоджені з позначеннями інших розділів.

Стор. 100_{13}: у виразі « A_ξ - оператор формы F^l » має бути «оператор второй квадратичной формы»

Стор. 123_7: не узгоджені позначення для скалярного добутку.

Стор. 237: В таблиці треба додати групу SU(2).

Наведені зауваження не відбиваються на загальному позитивному враженні від дисертації і не мають впливу на достовірність отриманих результатів.

Вважаю, що дисертаційна робота Ямпольського Олександра Леонідовича «Геометрія підмноговидів у розшарованих просторах» є завершеною науковою працею, актуальність якої не підлягає сумніву. Дисертація відповідає всім вимогам, що висувають до докторських дисертацій, а її автор, Ямпольський Олександр Леонідович, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія.

Офіційний опонент,
доктор фізико-математичних наук
професор кафедри геометрії і топології,
декан механіко-математичного факультету М.М. Зарічний

Підпис Зарічного М.М.
ПІДТВЕРДЖУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ імені ІВАНА ФРАНКА

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ФРАНКА
ЗКПО 02070987