

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР
імені Б. І. Веркіна

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР
імені Б. І. Веркіна

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Константинов Олександр Михайлович

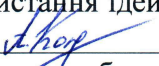
УДК 538.93

ДИСЕРТАЦІЯ

ТЕРМОПОЛЯРИЗАЦІЙНІ ЕФЕКТИ У НАДПЛИННИХ
БОЗЕ-СИСТЕМАХ

01.04.02 – теоретична фізика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів та текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело  О. М. Константинов
(підпис здобувача)

Науковий керівник: **Шевченко Сергій Іванович**,
доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник

Харків – 2020

АНОТАЦІЯ

Константинов О. М. Термополяризаційні ефекти у надплинних бозе-системах.– Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Фізико-технічний інститут низьких температур імені Б.І. Веркіна НАН України, Харків, 2020.

Дисертація присвячена теоретичному дослідженню процесів поляризації та механізмів термополяризації надплинних бозе-систем. В роботі передбачено два нових ефекти у надплинних системах: нестационарний термоелектричний ефект, породжуваний третім звуком, і термомагнітний ефект. Побудовано теорію цих нових явищ. У дисертаційній роботі також розвинена мікроскопічна теорія поляризації надплинної системи у моделі слабконеідеального бозе-газу.

У вступі коротко обґрунтована актуальність теми дисертаційної роботи та її зв'язок з науковими програмами, планами, темами відділу. Визначено мету та основні завдання роботи, а також об'єкти, предмет і методи досліджень. Сформульована та викладена наукова новизна і практична значимість отриманих результатів, наведено дані про особистий внесок дисертанта, апробацію роботи та публікації за темою дисертації. Також наведено інформацію про структуру та обсяг дисертаційної роботи.

У першому розділі дисертації «Електричні властивості надплинних систем (Огляд)» надано огляд теоретичних робіт, присвячених дослідженню питання про електричну активність надплинних систем, а саме, про появу в них макроскопічної поляризації за відсутності зовнішніх електромагнітних полів. Обговорюються можливі механізми поляризації надплинних систем: поляризація при їх прискореному русі (аналог ефекту Толмена-Стьюарта), поляризація, яка викликана неоднорідністю (аналог флексоелектричного ефекту в рідких кристалах), а також поляризація за рахунок ван-дер-ваальсової взаємодії атомів системи з атомами стінок, що обмежують систему.

У другому розділі «Дипольний момент квантових вихорів при наявності потоків» розв'язується задача про електричну активність надплинних систем при наявності потоків. Розгляд здійснюється в моделі розрідженого бозе-газу атомів лужних металів. Вперше отримано фундаментальний вираз для поляризаційного заряду ρ неоднорідної надплинної системи через її параметр порядку $\rho(\mathbf{r}) = e \int d\mathbf{r}' \left[|\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 - |\Phi(\mathbf{r}', \mathbf{r})|^2 \right]$. Тут e – елементарний електричний заряд, $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – параметр порядку, який має зміст хвильової функції атомів з урахуванням внутрішнього руху валентних електронів, при цьому перша координата відноситься до атомного остову, а друга – до валентного електрону. Показано, що при зміні параметра порядку на макроскопічних відстанях поляризаційний заряд пропорційний лапласіану, а поляризація \mathbf{P} – градієнту густини системи n , тобто $\rho \sim A \nabla^2 n$, $\mathbf{P} \sim A \nabla n$. Для системи невзаємодіючих атомів коефіцієнт пропорційності A не залежить від густини, а при урахуванні взаємодії між ними коефіцієнт A пропорційний густині n . Виявлено цікавий і несподіваний результат, а саме, поява в неоднорідній системі макроскопічного поляризаційного заряду навіть за відсутності взаємодії між атомами. Показано, що цей ефект пов'язаний з незбіжністю мас валентного електрону і атомного остову і, як наслідок, з незбіжністю об'ємів, що припадають на електрон і атомний остов. Врахування взаємодії між атомами приводить до малої поправки до поляризації, проте саме вона відповідальна за появу зовнішніх електричних полів, що створюються неоднорідною системою. Знайдено зміну густини бозе-газу при наявності потоків, що обтікають вихор. Встановлено, що прямолінійний квантований вихор створює поза системою електричний потенціал, подібний потенціалу дипольного моменту, що дозволяє приписати вихору дипольний момент. Цей дипольний момент є сумою двох доданків, один з яких пропорційний відносній швидкості потоків \mathbf{w} у надплинній системі, а другий – пропорційний $\mathbf{k} \times \mathbf{w}$, де \mathbf{k} – циркуляція вихору.

У третьому розділі «Нестаціонарний термоелектричний ефект, породжуваний третім звуком» наведені результати теоретичного дослідження термоелектричної активності тонких надплинних плівок. Виконано розрахунок середнього електричного поля над системою «атом-тверде тіло». Показано, що це поле еквівалентно полю наведеного підкладкою дипольного моменту атома і його зображення. Розглянуто також поляризацію системи, пов'язану з її неоднорідністю, що є аналогом флексоелектричного ефекту. Встановлено, що врахування цього ефекту приводить лише до невеликого перенормування дипольного моменту атома, який наводиться підкладкою. Передбачено, що коливання температури при поширенні по тонкій надплинній плівці третього звуку приводять до своєрідного нестаціонарного термоелектричного ефекту – появи у навколишньому просторі змінного електричного поля, доступного спостереженню сучасними експериментальними методами. Встановлено, що величина поля істотно залежить від виду підкладки та способу її покриття. Показано, що диференціальна термоелектрорушійна сила, тобто відношення амплітуди електричного потенціалу до амплітуди температури плівки, може перевершувати таку в металах і досягати 10^{-4} V / K . Враховано можливість появи в плівці термічно активованих вихорів та наведено процедуру знаходження рівняння руху надплинної компоненти усередненого за положеннями вихрових пар. Виявлено, що вплив на термоелектричний ефект термічно активованих вихорів навіть поблизу надплинного переходу є слабким. Розглянуто особливості ефекту для низьких ($T \ll 1\text{K}$) та високих ($T \sim 1\text{K}$) температур. Для низькотемпературної області електричне поле, яке створює плівка, пропорційне оберненому кубу рівноважної товщини плівки h_0 . Для області високих температур електричне поле, що створюється у навколишньому просторі, не залежить від h_0 . Цей результат справедливий, доки добавка до температури породжує відхилення товщини плівки h' , яке задовольняє умові $h' \ll h_0$.

У четвертому розділі «Надтеплопровідність і електрична активність надплинних систем» досліджується стаціонарний і нестаціонарний термомагнітний ефект для надплинних діелектричних систем. Передбачено, що за наявності магнітного поля, потік тепла у надплинному гелії, ортогональний до магнітного поля, приводить до появи електричного поля у навколишньому просторі, тобто реалізується термомагнітний ефект, який можна вважати подібним до ефекту Нернста-Еттінгсхаузена в провідних системах. Ефект має місце у електронейтральних надплинних системах завдяки наявності у них протитечієвої теплопровідності (яку часто називають надтеплопровідністю). Розглянуто особливості ефекту для ряду зразків з різною геометрією і показано, що величина поля істотно залежить від форми зразка з гелієм і напрямку магнітного поля відносно зразка. Зокрема, було розраховано електричний потенціал для еліптичного капіляра моделюючого щілину і показано, що результат змінюється на декілька порядків величини в залежності від орієнтації магнітного поля відносно капіляра. Розглядається ламінарний режим потоку рідини. Визначено, що потенціал та електричне поле, які створюються системою у навколишньому просторі, пропорційні кубу характерного поперечного розміру зразка d . Однак, змінюючи розмір зразка, величину ефекту можна значно збільшити лише в певних межах. Причина полягає в тому, що при збільшенні d при фіксованій швидкості рідини, ламінарний рух стає турбулентним, і ми виходимо за межі застосованого у роботі методу розрахунку. Знайдено максимально можливі значення електричного поля для ламінарного режиму. Показано, що для отримання максимального електричного потенціалу необхідно використовувати щілину в магнітному полі, яке спрямовано поперек неї. Визначено поперечний розмір щілини, що відповідає максимальному значенню потенціалу. Встановлено, що термомагнітний ефект реалізується як при стаціонарному, так і при нестаціонарному градієнті температури, а саме, при поширенні другого і третього звуків. Виконано порівняння електричних полів, які виникають над наноплівкою рідкого гелію під час поширення третього звуку

в присутності та за відсутності магнітного поля. Поява електричних полів над плівкою за відсутності магнітного поля розглядається у третьому розділі роботи.

Ключові слова: квантований вихор, дипольний момент, поляризація, третій звук, термоелектричний ефект, термомагнітний ефект, надтеплопровідність.

ABSTRACT

Konstantinov A. M. Thermopolarization effects in superfluid Bose systems. – Manuscript.

Thesis for a candidate's degree in physics and mathematics in speciality 01.04.02 – theoretical physics. – B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, the NAS of Ukraine, Kharkiv, 2020.

The thesis is devoted to the theoretical study of polarization processes and thermopolarization mechanisms of superfluid Bose systems. In the thesis two new effects in superfluid systems are predicted: the non-stationary thermoelectric effect and the thermomagnetic effect. The theory of these new phenomena is constructed. The thesis also develops the microscopic theory of polarization of the superfluid system in the model of a weakly non-ideal Bose gas.

The introduction briefly explains the relevance of the topic of the thesis and its relationship with the scientific plans, programs and topics of the department. The purpose, main tasks, objects of study, subjects and methods of the research are determined. The scientific novelty and practical significance of the obtained results are formulated; data on the applicant's personal contribution, the approbation of scientific research and publications on the topic of the thesis are provided. Information on the structure and volume of the dissertation is also given.

The first chapter of the thesis, "Electrical properties of superfluid systems (Review)", provides an overview of the theoretical works that deal with the study of superfluid systems' electrical activity, specifically the emergence of macroscopic polarization in the absence of external electromagnetic fields. The possible mechanisms of polarization of superfluid systems are discussed, namely: polarization

during accelerated motion (similarly to the Tolman-Stuart effect), polarization caused by inhomogeneity (similarly to the flexoelectric effect in liquid crystals), and polarization due to the van der Waals interaction between the atoms of the system and the atoms of the walls of the vessel bounding the system.

The second chapter, "On the dipole moment of quantum vortices in the presence of flows", solves the problem of electrical activity of superfluid systems in the presence of flows. The analysis is performed in a model of a diluted Bose gas of alkali metal atoms. For the first time, a fundamental expression for the polarization charge ρ of an inhomogeneous superfluid system in terms of the order parameter $\rho(\mathbf{r}) = e \int d\mathbf{r}' \left[|\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 - |\Phi(\mathbf{r}', \mathbf{r})|^2 \right]$ is derived. Here e is the elementary electric charge and $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ is the order parameter, which is interpreted as the wave function of the atoms taking into account the internal motion of valence electrons. The first coordinate in $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ refers to the atomic skeleton, and the second to the valence electron. It is shown that if the order parameter changes on macroscopic distances, the polarization charge is proportional to the Laplacian, and the polarization \mathbf{P} , to the gradient of the system density n , i.e. $\rho \sim A \nabla^2 n$, $\mathbf{P} \sim A \nabla n$. For non-interacting atoms, the proportionality coefficient is independent of density, whereas in the presence of interaction between atoms the coefficient is proportional to the density. An interesting and unexpected result was revealed: the appearance of a macroscopic polarization charge in an inhomogeneous system even in the absence of interaction between atoms. It is shown that this effect is associated with the mismatch of the masses of the valence electron and the atomic skeleton and, consequently, with the mismatch of the volumes allocated to the electron and the atomic skeleton. The interaction between atoms leads to a small polarization correction, which is responsible for the appearance of the external electric fields created by the heterogeneous system. The change of the Bose gas density due to the presence of flows passing the vortex is found. It is also determined that a rectilinear quantized vortex creates an electric potential outside the system. This potential has the form of a dipole's potential, permitting the assignment

of a dipole moment to the vortex. The dipole moment is a sum of two terms, the first being proportional to the relative flow velocity \mathbf{w} in the superfluid system and the second being proportional to $\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{w}$, where $\boldsymbol{\kappa}$ is the vortex circulation.

In the third chapter, "Non-stationary Thermoelectric Effect Generated by Third Sound", the results of a theoretical study of the thermoelectric activity of thin superfluid films are presented. The calculation of the average electric field above the "atom-solid" system is performed. It is shown that this field is equivalent to the field of the dipole moment of the atom induced by the substrate and its image. The polarization of the system associated with its inhomogeneity (the flexoelectric effect) is also considered. It is established that this effect only slightly renormalizes the dipole moment of the atom induced by the substrate. It is predicted that oscillations of temperature during the propagation of the third sound in a thin superfluid film cause the appearance of an alternating electric field in the surrounding space (a peculiar non-stationary thermoelectric effect), which may be observed by modern experimental methods. The magnitude of this field depends significantly on the substrate type and the method of its coating. It is shown that the differential thermal EMF (the ratio of the electric potential amplitude to the film temperature amplitude) can exceed the value seen in metals and reach $10^{-4} B / K$. The possibility of thermally activated vortices in the film is considered and the procedure for finding the equation of motion of the superfluid component averaged over the positions of vortex pairs is given. It is shown that the influence of thermally activated vortices on this effect is weak even near the superfluid transition. The region of low ($T \ll 1K$) and high ($T \sim 1K$) temperatures is considered. For the low-temperature region, the electric field produced by the film is inversely proportional to the cube of the equilibrium film thickness h_0 . For the high-temperature region, the generated electric field is independent of h_0 . The last result is valid as long as the temperature addition T' creates a deviation h' satisfying the condition $h' \ll h_0$.

In the fourth chapter, "Thermal Counterflow and Electrical Activity of Superfluid Systems", stationary and non-stationary thermomagnetic effects for superfluid

dielectric systems are considered. It is predicted that in the presence of a magnetic field, the heat flow in superfluid helium, orthogonal to the magnetic field, leads to the emergence of an electric field in the surrounding space, i.e. a thermomagnetic effect is realized and it can be considered to be similar to the Nernst-Ettingshausen effect in conducting systems. This effect is caused by the counterflow nature of thermal conductivity in electroneutral superfluid systems (often referred to as superthermal conductivity). The features of the effect for several samples with various geometries are considered. It is established that the magnitude of the arising electric field significantly depends on the shape of the helium-containing sample and on the direction of the magnetic field with respect to the sample. In particular, the electric potential for an elliptical capillary, which models a slit, is calculated and it is shown that the result varies by several orders of magnitude depending on the orientation of the magnetic field relative to the capillary. The laminar mode of liquid flow is considered. It is determined that the potential and electric field created by the system in the surrounding space are proportional to the cube of the characteristic transverse size of the sample d . However, by changing the sample size d , the effect can be significantly increased only within certain limits. The reason is that if d is increased while the fluid velocity remains fixed, the laminar motion becomes turbulent, and the method of calculation used ceases to be valid. The maximum possible values of the electric field for the laminar mode are found. It is shown that in order to obtain the maximum electric potential it is necessary to use a slit in the magnetic field, which is directed across it. The transverse slit size corresponding to the maximum potential value is determined. The existence of this effect as a result of both static and time-dependent temperature gradients (the second-sound and the third-sound) is established. The electric fields that arise above the nanofilm during the propagation of the third sound in the presence and in the absence of a magnetic field are compared. The appearance of electric fields above the film in the absence of a magnetic field is presented in the third chapter of the work.

Keywords: quantized vortex, dipole moment, polarization, third sound, thermoelectric effect, thermomagnetic effect, super thermal conductivity.

Список публікації здобувача

Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у 20 наукових працях, серед яких 5 статей у провідних фахових іноземних та вітчизняних наукових журналах [1-5] і 15 тез статей в працях міжнародних конференцій [6-20]:

1. Shevchenko S.I. On the Dipole Moment of Quantized Vortices in the Presence of Flows / S.I. Shevchenko, **А.М. Константинов** // J. Low. Temp. Phys. – 2016. – V. 185, No 5/6. – P. 384–391.

2. Шевченко С.И. О возможности нового электрического эффекта в сверхтонких сверхтекучих пленках / С.И. Шевченко, **А.М. Константинов** // Письма в ЖЭТФ. – 2016. – V. 104, № 7. – С. 518–522.

3. Shevchenko S.I. Non-stationary Thermal Electromotive Force Generated by Third Sound / S.I. Shevchenko, **А.М. Константинов** // J. Low. Temp. Phys. – 2019. – V. 194, No 1/2. – P. 1–13.

4. Шевченко С.И. Сверхтеплопроводность и электрическая активность сверхтекучих систем / С.И. Шевченко, **А.М. Константинов** // Письма в ЖЭТФ. – 2019. – V. 109, № 12. – С. 829–833.

5. Шевченко С.И. Противотоковая теплопроводность и электрическая активность сверхтекучих систем в магнитном поле / С.И. Шевченко, **А.М. Константинов** // ФНТ – 2020. – V. 46, № 1. – С. 57–69.

6. Шевченко С.И. О дипольном моменте квантованных вихрей, порождаемом потоками / С.И. Шевченко, **А.М. Константинов** // XXXVII совещания по физике низких температур (НТ-37), 29 июня – 3 июля, 2015: тезисы докл. – Россия, Казань, 2015. – С. 236–237.

7. Шевченко С.И. Об особенностях поляризации неоднородных систем при наличии и отсутствии межатомного взаимодействия / С.И. Шевченко, **А.М. Константинов** // XII Міжнародна наукова конференція «Фізичні явища в твердих тілах», 1 – 4 грудня, 2015: тези доповідей. – Україна, Харків, 2015. – С. 19.

8. Shevchenko S.I. On the dipole moment of quantized vortices in the presence of flows / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // VII International Conference for Young Scientist “Low Temperature Physics”, June 6 – 10, 2016: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2016. – P. 108.

9. Shevchenko S.I. On the possibility of a new electric effect in ultra-thin superfluid films / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // VII Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics”, December 13 – 15, 2016: book of abstr. – Ukraine, Kyiv, 2016. – P. 23.

10. Shevchenko S.I. On the possibility of a new electric effect in 2D superfluid systems / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // VIII International Conference for Professionals & Young Scientist “Low Temperature Physics”, May 29 – June 2, 2017: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2017. – P. 119.

11. Shevchenko S.I. Possibility of generation of a giant electromotive force by third sound / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // 8th International Conference “Physics of Liquid Matter: Modern Problems”, May 18 – 22, 2018: book of abstr. – Ukraine, Kyiv, 2018. – P. 71.

12. Shevchenko S.I. Non-stationary thermal electromotive force generated by third sound / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // IX International Conference for Professionals and Young Scientist “Low Temperature Physics”, June 4 – 8, 2018: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2018. – P. 110.

13. Шевченко С.И. О нестационарной термоэлектродвижущей силе, порождаемой третьим звуком / С.И. Шевченко, **А.М. Константинов** // XXXVIII совещания по физике низких температур (НТ-38), 17 – 22 сентября, 2018: тезисы докл. – Россия, г. Москва – г. Ростов-на-Дону – пос. Шепси, 2018. – С. 153–154.

14. Shevchenko S.I. The third sound as an electric field generator / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // IX Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics”, December 4 – 5, 2018: book of abstr. – Ukraine, Kyiv, 2018. – P. 20.

15. **Konstantinov A.M.** The third sound as a generator of non-stationary thermal emf / **A.M. Konstantinov**, S.I. Shevchenko, **A.M. Константинов** // Школа-конференція молодих вчених «Сучасне матеріалознавство: фізика, хімія, технології», 27 – 31 травня, 2019: тези доповідей. – Україна, Ужгород, 2019. – С. 176.

16. **Konstantinov A.M.** On the one thermomagnetic effect in superfluid systems / **A.M. Konstantinov**, S.I. Shevchenko // X International Conference for Professionals and Young Scientist “Low Temperature Physics”, June 3 – 7, 2019: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2019. – P. 92.

17. Shevchenko S.I. The Third Sound as a Generator of Non-stationary Thermal EMF / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // International Symposium on Quantum Fluids and Solids 2019 (QFS2019), August 7 – 13, 2019: book of abstr. – Canada, Alberta, 2019. – P. 68.

18. Shevchenko S.I. Superheat conductivity and electrical activity of superfluid systems / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // International Symposium on Quantum Fluids and Solids 2019 (QFS2019), August 7 – 13, 2019: book of abstr. – Canada, Alberta, 2019. – P. 68.

19. **Konstantinov A.M.** Superheatconductivity and electrical activity of superfluid systems / **A.M. Konstantinov**, S.I. Shevchenko // Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics”, September 24 – 26, 2019: book of abstr. – Ukraine, Kyiv, 2019. – P. 62.

20. Shevchenko S.I. Thermal counterflow and electrical activity of superfluid systems in a magnetic field / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // X Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics”, December 23 – 24, 2019: book of abstr. – Ukraine, Kyiv, 2019. – P. 2.

ЗМІСТ

| | |
|--|-----|
| ВСТУП..... | 15 |
| РОЗДІЛ 1 ЕЛЕКТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ НАДПЛИННИХ СИСТЕМ (ОГЛЯД) | 21 |
| 1.1. Поляризація прискоренням | 21 |
| 1.2. Поляризація неоднорідністю..... | 25 |
| 1.2.1. Дипольні моменти у пари атомів He II. | 25 |
| 1.2.2. Електричні поля, що породжуються квантовими вихорами..... | 27 |
| 1.3. Поляризація поблизу границі..... | 31 |
| РОЗДІЛ 2 ДИПОЛЬНИЙ МОМЕНТ КВАНТОВИХ ВИХОРИВ ПРИ НАЯВНОСТІ ПОТОКІВ..... | 35 |
| 2.1. Поляризація неоднорідної надплинної системи..... | 35 |
| 2.2. Дипольний момент квантованого вихору..... | 46 |
| Висновки | 52 |
| РОЗДІЛ 3 НЕСТАЦІОНАРНИЙ ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНИЙ ЕФЕКТ, ПОРОДЖУВАНИЙ ТРЕТІМ ЗВУКОМ..... | 54 |
| 3.1. Електричне поле системи «атом - тверде тіло»..... | 54 |
| 3.2. Флексоелектричний ефект..... | 61 |
| 3.3. Поляризація плівки надплинного гелію | 63 |
| 3.4. Термоелектрорушійна сила, яка породжується третім звуком | 69 |
| 3.5. Вклад термічно активованих вихорів в термоелектричний ефект | 75 |
| Висновки | 80 |
| РОЗДІЛ 4 НАДТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ І ЕЛЕКТРИЧНА АКТИВНІСТЬ НАДПЛИННИХ СИСТЕМ | 81 |
| 4.1. Термомагнітний ефект в надплинних системах..... | 82 |
| 4.2. Стаціонарний випадок | 86 |
| 4.3. Нестационарний випадок | 98 |
| Висновки | 104 |
| ВИСНОВКИ | 106 |

| | |
|---|-----|
| СПИСОК ВИКОРИСТОВАНИХ ДЖЕРЕЛ | 108 |
| ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ | 119 |
| ДОДАТОК Б. ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ | 122 |

ВСТУП

Актуальність теми. Останнім часом все більш актуальною постає проблема електричної активності надплинного гелію, в якому макроскопічна поляризація може виникати за відсутності зовнішніх електромагнітних полів. Відомо, що в S -станах дипольний, квадрупольний та інші мультипольні електричні моменти атомів ^4He дорівнюють нулю. Тому перші ж результати експериментів О.С. Рибалко (2004), у яких спостерігалась електрична активність He II при розповсюдженні в ньому другого звуку, викликали значний інтерес. За останні півтора десятиліття проведено низку теоретичних досліджень, присвячених проблемі електричних явищ у надплинних системах при розповсюдженні в них другого звуку. Але передбачені у цих теоріях величини поляризації і виникаючих електричних полів занадто малі, щоб бути відповідальними за ті явища, які спостерігаються в експерименті. Це стимулює подальший пошук нових механізмів виникнення поляризації у надплинних бозе-системах і формування більш широкого погляду на існуючу проблему.

Зокрема, становить інтерес теоретичне дослідження динаміки квантових вихорів в надплинній рідині на предмет наявності у них електричного дипольного моменту. Результати попереднього теоретичного дослідження, які одержані в роботі В.Д. Нацика (2005), показують, що вихоровий рух атомів в надплинній рідині супроводжується їх поляризацією. У випадку прямолінійного вихору вектор поляризації має тільки радіальну компоненту. При цьому повний дипольний момент вихору дорівнює нулю. Такий результат є наслідком симетрії задачі. За наявності зовнішніх потоків симетрія вектора поляризації порушиться і стає можливим виникнення у вихора сумарного дипольного моменту. У цьому випадку факт появи дипольного моменту у квантованих вихорів в надплинній рідині може бути встановлений за допомогою електричних вимірювань і дозволить у перспективі використовувати їх для самого детектування вихорів.

У ряді теорій електричну активність гелію при поширенні в ньому другого звуку пов'язують з поляризацією гелію стінками, які його обмежують. Роль приповерхневих поляризованих шарів особливо велика в тонких надплинних плівках. Тому видається цікавим розглянути поляризацію плівки гелію при поширенні в ній третього звуку. Механізм поляризації плівки підкладкою може стати відповідальним за те, що температурні коливання у плівці надплинного гелію, які викликають поширення хвилі третього звуку, будуть приводити до появи змінного за часом і в навколишньому просторі електричного поля, тобто виникне нестационарний термоелектричний ефект.

Відомо, що рух будь-якого діелектрика в магнітному полі приводить до його поляризації. Специфіка надплинних систем полягає в тому, що в них теплові потоки супроводжуються макроскопічними потоками частинок. Тому слід очікувати, що стаціонарні і нестационарні потоки тепла у надплинних системах, які знаходяться у магнітному полі, здатні привести до появи у навколишньому просторі електричних полів. Питання про такий термомагнітний ефект в надплинних системах в роботі ставиться вперше і раніше в науковій літературі не розглядалося.

Вищеописане коло невирішених важливих питань теорії поляризаційних явищ та термополяризаційних ефектів у надплинних бозе-системах визначає **актуальність** даної дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Фізико-технічному інституті низьких температур імені Б.І. Веркіна НАН України в рамках тематичного плану ФТІНТ імені Б.І. Веркіна НАНУ за відомчими тематиками: «Теоретичні дослідження нелінійних та квантових явищ в наноструктурах і нових матеріалах» (номер державної реєстрації 0112U002642, термін виконання 2012 – 2016 рр.), «Теоретичні дослідження колективних явищ у квантових конденсованих структурах та наноматеріалах» (номер державної реєстрації 0117U002292, термін виконання 2017 – 2021 рр.).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є теоретичний опис процесів поляризації та механізмів термополяризації надплинних бозе-систем.

Для досягнення цієї мети були поставлені такі *задачі*:

- розвинути мікроскопічну теорію надплинного стану в моделі розрідженого бозе-газу лужного металу, в якому атоми металу розглядаються як складові бозони, утворені парами ферміонів та отримати зв'язок поляризаційної густини заряду і параметра порядку неоднорідної надплинної системи;
- знайти дипольний момент прямолінійного квантованого вихору при наявності відносного руху нормальної і надплинної компонент;
- побудувати теорію термоелектричних явищ в тонких надплинних плівках при поширенні в них хвиль третього звуку;
- отримати вирази для електричних полів у навколишньому просторі, які породжуються стаціонарним і нестаціонарним тепловим потоком у надплинній системі, що знаходиться в зовнішньому магнітному полі; отримати залежності цих полів від геометричних параметрів системи.

Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є електричні явища в електронейтральних надплинних бозе-системах.

Предметом дослідження є процеси поляризації та механізми термополяризації надплинних бозе-систем.

Методи дослідження. При виконанні дисертаційної роботи використовувалися надійно апробовані методи теоретичної фізики конденсованого стану та теорії поля, а також чисельні методи. Зокрема, для знаходження зміни густини бозе-газу при наявності потоків, що обтікають вихор, було використано розрахунковий метод у наближенні Томаса-Фермі. При обчисленні середньої густини потоку циркуляцій було використано рівняння Фокера-Планка і рівняння Ланжевена. При знаходженні електричного поля над

системою «атом-тверде тіло» був використаний підхід Дзялошінського в рамках інваріантної теорії збурень Фейнмана.

Наукова новизна отриманих результатів.

1. Вперше знайдено явний вираз для поляризаційного заряду неоднорідної надплинної бозе-системи через двочастинковий параметр порядку, що описує таку систему. Показано, що при зміні на макроскопічних відстанях параметра порядку поляризаційний заряд є пропорційним лапласіану, а поляризація – градієнту густини системи.

2. Вперше встановлено, що у надплинних бозе-системах потік, який обтікає прямолінійний квантований вихор, приводить до появи у вихора електричного дипольного моменту. Показано, що дипольний момент є пропорційним швидкості відносного руху нормальної і надплинної компонент.

3. Вперше передбачено нестационарний термоелектричний ефект у тонкій плівці надплинного гелію в умовах поширення у плівці третього звуку. Встановлено, що коливання температури на краях плівки, яке викликає коливання товщини плівки, приводить до появи в навколишньому просторі змінного за часом і в просторі електричного поля, доступного спостереженню сучасними експериментальними методами.

4. Вперше показано, що при розповсюдженні по тонкій плівці надплинного гелію третього звуку наявність термічно активованих вихорів слабо впливає на електричну активність системи навіть поблизу надплинного переходу. Показано, що термічно активовані вихори суттєво впливають лише на швидкість третього звуку.

5. Вперше передбачено термомагнітний ефект у надплинному гелії. Виявлено, що в надплинному гелії, який розміщено в магнітному полі, потік тепла під дією градієнта температури приводить до появи електричного поля в навколишньому просторі. Показано, що ефект реалізується як при стаціонарному, так і при нестационарному потоках тепла.

Практичне значення отриманих результатів. Результати теоретичних досліджень, які представлені в дисертаційній роботі, мають фундаментальне значення, оскільки поглиблюють і поширюють знання щодо поляризаційних властивостей надплинних бозе-систем. Передбачений термоелектричний ефект в тонких плівках надплинного гелію, може бути використаний як основа для надчутливого сенсору для вимірювання температури. Встановлені порогові значення величини електричного потенціалу для ламінарного типу руху надплинної рідини у передбаченому термомагнітному ефекті можуть слугувати експериментальним тестом з виявлення переходу надплинної рідини з ламінарного у турбулентний стан.

Особистий внесок здобувача. У всіх роботах, які увійшли до дисертації та виконані у співавторстві, здобувачем самостійно виконано всі аналітичні та чисельні розрахунки. Автор брав активну участь в обговоренні та трактуванні отриманих аналітичних і чисельних результатів, формуванні висновків і написанні статей. Зокрема, здобувачем самостійно отримано вираз для дипольного моменту квантового прямолінійного вихору при наявності потоків. Автором особисто знайдено поправку до рівняння руху плівки надплинної рідини, яка обумовлена наявністю термічно активованих вихорів. Дисертантом самостійно розраховано електричний потенціал над плівкою надплинного гелію, уздовж якої розповсюджується третій звук та отримано вирази для електричних полів, породжуваних тепловим потоком у надплинних системах, які поміщені у магнітне поле. Усі основні результати були представлені здобувачем особисто у вигляді доповідей на наукових семінарах, радах та конференціях. Таким чином, особистий внесок дисертанта є визначальним.

Апробація результатів дисертації. Матеріали, що містять основні результати дисертації, доповідались на наступних міжнародних та вітчизняних наукових конференціях:

- XII Міжнародна наукова конференція «Фізичні явища в твердих тілах» (Харків, Україна, 1 – 4 грудня, 2015).

- XXXVII Сопещания по физике низких температур (Казань, Россия 29 июня – 3 июля 2015).
- VII International Conference for Young Scientists “Low Temperature Physics” (Kharkiv, Ukraine, June 6 – 10, 2016).
- VII Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics”» (Kyiv, Ukraine, December 13 – 15, 2016).
- VIII International Conference for Professionals & Young Scientists “Low Temperature Physics” (Kharkiv, Ukraine, May 29 – June 2, 2017).
- 8th International Conference “Physics of Liquid Matter: Modern Problems” (Kyiv, Ukraine, May 18 – 22, 2018).
- IX International Conference for Professionals and Young Scientists “Low Temperature Physics” (Kharkiv, Ukraine, June 4 – 8, 2018).
- XXXVIII Сопещания по физике низких температур (г. Москва – г. Ростов-на-Дону – пос. Шепси, Россия 17 – 22 сентября, 2018).
- IX Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics” (Kyiv, Ukraine, December 4 – 5, 2018).
- Школа-конференція молодих вчених «Сучасне матеріалознавство: фізика, хімія, технології» (Ужгород, Водограй, Україна, 27 – 31 травня, 2019).
- X International Conference for Professionals and Young Scientists “Low Temperature Physics” (Kharkiv, Ukraine, June 3 – 7, 2019).
- Quantum Fluids & Solids (Edmon, Alberta, Canada, August 7 – 13, 2019).
- Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics” (Kyiv, Ukraine, September 24 – 26, 2019).
- X Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics” (Kyiv, Ukraine, December 23 – 24, 2019).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані в 20 наукових працях, у тому числі в 5 статтях у провідних фахових наукових виданнях [1-5] і в 15 тезах доповідей у збірниках праць міжнародних і вітчизняних наукових конференцій [6-20].

РОЗДІЛ 1

ЕЛЕКТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ НАДПЛИННИХ СИСТЕМ (ОГЛЯД)

Інтерес до можливості електричної активації He II тепловими потоками і течією рідини виник у зв'язку з експериментами [21, 22]. Зокрема, в роботі [21] виявлено, що стояча хвиля другого звуку в надплинному гелії супроводжується електричним відгуком. В роботі [22] виявлено механоелектричний ефект, який полягав у виникненні різниці потенціалів між вимірювальним електродом і стінками камери, що були покриті плівкою гелію, при механічних коливаннях камери. Результати [21] були відтворені в недавно виконаних роботах [23-27]. В [28] аналогічний ефект зареєстрований у випадку стоячої хвилі першого звуку. У роботах [24, 27] виявлено, що при деякій критичній потужності теплового потоку амплітуда електричного сигналу суттєво зменшується.

Результати наведених експериментальних робіт викликали особливий інтерес, оскільки було відомо, що атоми ^4He в основному стані не мають мультипольних моментів, а також мають надзвичайно малу поляризованість. В результаті виконано багато теоретичних досліджень [27, 29-61], в яких зроблені спроби пояснити явища, що спостерігалися. Хоча загальноприйнятого пояснення експериментів в даний час немає, був передбачений ряд цікавих ефектів, пов'язаних з поляризацією нормальних і надплинних систем.

1.1. Поляризація прискоренням

В експериментах [21-28] електрична активність надплинного гелію проявлялася при його нерівномірному русі (перший і другий звуки), тому однією з перших ідей було пов'язати поляризаційні ефекти рідини з її прискореним рухом [32, 34, 35, 39, 44] за аналогією з відомим ефектом Толмена-Стьюарта в металах [62]. Зокрема, в роботі [34] стверджується, що нерухомий діелектрик, що знаходиться в гравітаційному полі, набуває поляризацію $P_g = \gamma \mathbf{g}$, де \mathbf{g} –

прискорення вільного падіння, γ – «гравітоелектрична сприйнятливість». Залежність величини γ від параметрів діелектрика можна знайти, використовуючи такі міркування. Розглянемо дипольний момент одного атома. У зовнішньому електричному полі \mathbf{E} на атом буде діяти деформуюча сила, що дорівнює різниці сил, що діють на ядро і електронну хмару. Ця сила дорівнює $F_e \sim 2EZe$, де Z – атомний номер, e – елементарний електричний заряд. Сила гравітації фактично діє лише на ядро і дорівнює $F_g \sim Mg$, де M – маса атома. Якщо ці дві сили компенсують одна одну, то дипольний момент повинен дорівнювати нулю, звідки $\gamma\mathbf{g} + \chi\mathbf{E} = 0$, де $\chi = (\epsilon - 1)/4\pi$ – діелектрична сприйнятливість, ϵ – діелектрична проникність. Рівність $F_e = F_g$ в результаті дає

$$\gamma \sim \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \frac{1}{2Ze} M. \quad (1.1)$$

Відповідно до принципу еквівалентності сил гравітації та інерції в загальній теорії відносності, для діелектрика, що рухається з прискоренням \mathbf{a} , наведена поляризація повинна дорівнювати $\mathbf{P}_g = \gamma(\mathbf{g} - \mathbf{a})$. У випадку надплинної рідини даний вираз має бути усереднено по елементарним тепловим збудженням (фонони і ротони) так, що $\langle \mathbf{P}_g \rangle = -\gamma \langle d\mathbf{v} / dt \rangle$. Тут t – час, \mathbf{v} – барицентрична швидкість, яка пов'язана зі швидкостями нормальної і надплинної компонент (\mathbf{v}_n і \mathbf{v}_s відповідно) через густину потоку маси $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} = \rho_s\mathbf{v}_s + \rho_n\mathbf{v}_n$, де ρ_n і ρ_s – нормальна і надплинна густини, ρ – густина рідини. Для області низьких температур результат усереднення приводить до наступного виразу

$$\langle \mathbf{P}_g \rangle = \frac{\gamma C \rho_n}{3\rho s} \frac{d\mathbf{w}}{dt} - \frac{\gamma}{\rho} \left(1 - \frac{W(T) - W(0)}{3c_1^2} \right) \frac{d\mathbf{j}}{dt}. \quad (1.2)$$

Тут $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ – швидкість відносного руху, C – теплоємність, s – питома ентропія, $W(T)$ – ентальпія як функція температури T , c_1 – швидкість першого звуку.

В роботі [44] явище електричної активності надплинного гелію, що спостерігалось при збудженні стоячих хвиль першого та другого звуків в акустичному резонаторі, також описувалося в рамках механізму інерційної поляризації атомів, коли поляризація пропорційна механічному прискоренню. При цьому у випадку поширення першого звуку вектор макроскопічної поляризації повинен бути пропорційним $d\mathbf{j}/dt$, а у випадку другого звуку пропорційним $d\mathbf{w}/dt$, що узгоджується з (1.2). Результат узагальнюється на область температур $T > 1K$, для якої внесок рівноважного бальцманівського газу ротонів в термодинамічні властивості He II стає визначальним.

Інерційна природа поляризації надплинної рідини розглядається також в роботах [32, 35, 39] стосовно до квантованих вихорів – специфічної для надплинних систем стаціонарної азимутальної течії рідини навколо деяких ліній, яка має відмінну від нуля і квантовану циркуляцію. Поблизу кора вихору на атоми діють відцентрові сили $\mathbf{f}^{(a)} = \hbar^2 \mathbf{r} / Mr^4$, де \hbar – стала Планка, \mathbf{r} – радіус-вектор, що відраховується від лінії вихору в перпендикулярній їй площині. Дія цієї сили має приводити до зсуву $\mathbf{u}(r)$ атомних ядер відносно центрів мас електронних оболонок. В результаті такого зміщення у кожного атома виникає дипольний момент $\mathbf{d}^{(a)} = Ze\mathbf{u}(r)$ і, як наслідок, поляризація вихору. Як стверджується в роботі [32], зміщення ядра $\mathbf{u}(r)$ визначається співвідношенням $k_{el}\mathbf{u}(r) = \mathbf{f}^{(a)}(r)$, де k_{el} – коефіцієнт пружності для силового зв'язку ядра з електронною оболонкою. Зв'язок коефіцієнта k_{el} з поляризованістю атома α встановлюється за допомогою таких міркувань. При наявності зовнішнього електричного поля \mathbf{E} , яке компенсує дію відцентрової сили $\mathbf{f}^{(a)}$, дипольний момент виділеного атома дорівнює нулю, тобто $Ze\mathbf{u}(r) + \alpha\mathbf{E} = 0$. Як наслідок, рівняння балансу електричної сили $2Ze\mathbf{E}$ і сили пружності $k_{el}\mathbf{u}(r)$ приводить до співвідношення $k_{el} = 2(Ze)^2 \alpha^{-1}$. Вектор поляризації рідини \mathbf{P}_v спрямований по

нормалі до осі вихору і у випадку прямолінійного вихору вектор поляризації утворює аксіально симетричний «поляризаційний їжак»

$$\mathbf{P}_v(r) = n(r)\mathbf{d}^{(a)}(r) = n(r) \cdot \frac{\hbar^2 \alpha}{2ZeMr^3} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.3)$$

де $n(r)$ – атомна густина як функція відстані до вихору. Внаслідок радіальної симетрії поляризації відносно лінії вихору його повний дипольний момент тотожно дорівнює нулю. Пізніше виявлено, що при наявності відносного руху нормальної і надплинної компонент дипольний момент вихору стає відмінним від нуля [1]. Ця задача розв'язується в підрозділі 2.2 даної дисертаційної роботи.

За відсутності зовнішніх потоків вихор в цілому набуває поляризацію тільки в квадрупольному наближенні. Тензор квадрупольного моменту вихору на одиницю довжини визначається інтегралом

$$q_{ij}^V = \int d\mathbf{r} n(r) \left[3(r_i d_j^{(a)} + r_j d_i^{(a)}) - 2\mathbf{r} d^{(a)} \delta_{ij} \right], \quad (1.4)$$

де i та j – координатні індекси, δ_{ij} – символ Кронекера. Головні значення цього тензора даються безпосереднім інтегруванням (1.4) і дорівнюють

$$q_{11}^V = q_{22}^V = \frac{1}{2} \bar{q}; \quad q_{33}^V = -\bar{q}(R_{ex}), \quad (1.5)$$

де

$$\bar{q}(R_{ex}) \approx \frac{2\pi\hbar^2\alpha n_0}{ZeM} \ln \frac{R_{ex}}{\xi}. \quad (1.6)$$

Тут n_0 – середнє значення атомної густини, ξ – характерний розмір серцевини вихору (для гелію $\xi \sim 3 \cdot 10^{-8}$ см), R_{ex} – характерний зовнішній розмір задачі. Узагальнивши результат на випадок вихорового кільця радіуса r_c , отримані головні значення тензора його квадрупольного моменту

$$q_{33}^{(r)} = \pi r_c \bar{q}(r_c); \quad q_{11}^{(r)} = q_{22}^{(r)} = -\frac{1}{2} q_{33}^{(r)}. \quad (1.7)$$

1.2. Поляризація неоднорідністю

1.2.1. Дипольні моменти у пари атомів He II.

Прискорений рух рідини не є єдиним можливим механізмом її поляризації за відсутності зовнішніх електромагнітних полів. У ряді робіт звернено увагу на можливість появи поляризації рідин і газів, що обумовлена неоднорідністю системи [30, 34, 35, 41, 43, 46, 47]. Аналогічний ефект добре відомий в рідких кристалах під назвою флексоелектричний ефект [63].

Причиною появи цього ефекту в рідині є виникнення у пари атомів дипольних моментів, обумовлених їх взаємодією. Завдяки флуктуаціям електронної густини в атомах між ними виникає ван-дер-ваальсова взаємодія, що приводить до перерозподілу електронної густини кожного з атомів. Розглядаючи два атома гелію, з симетрійних міркувань можна стверджувати, що дипольні моменти атомів, які виникають в результаті їх взаємодії, будуть рівні за модулем і протилежні за напрямком. Очевидно також, що ці моменти орієнтовані уздовж лінії, що з'єднує центри атомів. Залежність цих дипольних моментів від відстані між атомами вперше була знайдена в роботі [64]. Позначимо радіус-вектори атомів як \mathbf{r}_1 і \mathbf{r}_2 , а їх дипольні моменти, відповідно, як \mathbf{d}_{12} і \mathbf{d}_{21} ($|\mathbf{d}_{12}| = |\mathbf{d}_{21}| \equiv d$). Якщо відстань між атомами R багато більша за розмір атома, але багато менша характерних довжин хвиль в спектрах взаємодіючих атомів (так, що ефектами запізнювання можна знехтувати), дипольні моменти \mathbf{d}_{12} і \mathbf{d}_{21} даються розкладом

$$\mathbf{d}_{12} = -\mathbf{d}_{21} = \mathbf{n}d = \mathbf{n}e a_B^8 \left(\frac{D_7}{R^7} + \frac{a_B^2 D_9}{R^9} + \dots \right), \quad (1.8)$$

де $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) / R$, a_B – радіус Бора, D_7 і D_9 – числові константи. До результату (1.8) можна також прийти, скориставшись інваріантною теорією збурень [65]. Відзначимо, що при обчисленні дипольного моменту \mathbf{d}_{12} слід враховувати як дипольні, так і квадрупольні флуктуаційні електричні моменти атомів, що впливає з симетрійних міркувань (подробіці див. в підрозділі 3.1). Отриманий в диполь-дипольному наближенні дипольний момент \mathbf{d}_{12} в роботі [38] в

подальшому було спростовано в роботі [48]. Величина коефіцієнта D_7 була оцінена в роботах [66-68]. Для атомів гелію $D_7 \approx 18.4$.

Щоб отримати значення дипольного моменту деякого атома в середовищі необхідно провести підсумовування моментів, що наводяться на цьому атомі усіма іншими атомами [41, 47]. Після множення цього дипольного моменту на атомну густину отримуємо вираз для поляризації рідкого гелію

$$\mathbf{P} = -n(0) \int \frac{D_7}{R^7} \frac{\mathbf{R}}{R} n(\mathbf{R}) d\mathbf{R}, \quad (1.9)$$

де $n(\mathbf{R})$ – атомна густина в точці \mathbf{R} . З огляду на швидке спадання функції, що стоїть перед $n(\mathbf{R})$, густину можна вважати функцією координат, що змінюється повільно. В результаті її можна представити у вигляді $n(\mathbf{R}) \approx n(0) + \mathbf{R} \cdot \nabla n(0)$. Після підстановки $n(\mathbf{R})$ в (1.9) і безпосереднього інтегрування, отримуємо

$$\mathbf{P} = -\frac{4\pi e a_B^8 D_7}{9a^3} n \nabla n, \quad (1.10)$$

де a – середня міжатомна відстань. Об'ємна поляризація пропорційна градієнту густини, що приводить до флексоелектричний ефекту.

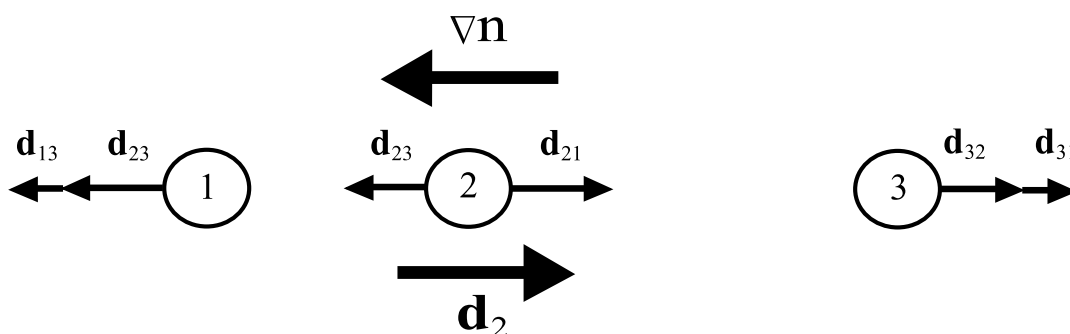


Рис. 1.1 Дипольні моменти, що виникають у атомів внаслідок їх взаємодії.

Зауважимо, що знайдена поляризація спрямована проти градієнту густини, що можна візуально продемонструвати на прикладі трьох атомів, розташованих уздовж однієї прямої (див. рис. 1.1). Сумарний дипольний момент атома (атом 2), що умовно знаходиться в об'ємі, дорівнює $\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_{21} + \mathbf{d}_{23}$. Тут \mathbf{d}_{ij} –

дипольний момент, наведений у атома i внаслідок його взаємодії з атомом j . Як видно, дипольний момент \mathbf{d}_2 спрямовано в сторону меншої густини атомів, що відповідає виразу (1.10).

1.2.2. Електричні поля, що породжуються квантовими вихорами.

Як відомо, швидкість, яка створюється квантованим вихором, спадає при віддалені від осі вихору як $1/r$, де r – відстань до осі вихору. Неоднорідність цієї швидкості приводить до неоднорідності густини в рідині. Завдяки флексоелектричному ефекту ця неоднорідність рідини поблизу осі вихору приводить до появи поляризації. У випадку прямолінійного вихору вектор поляризації має тільки радіальну компоненту і може бути спрямований як «від», так і «до» осі вихору, тобто можна сказати, що виникає «поляризаційний їжак».

Як було згадано вище, поляризація рідкого гелію, яка викликана прискореним рухом навколо квантових вихорів, приводить до їх поляризації. Виконані в роботі [39] оцінки показують, що флексоелектричний ефект превалює над інерційним ефектом. В результаті, вираз для вектора поляризації (1.3) має бути замінено на вираз (1.10). Вважаючи, згідно [35], що атомна густина поблизу вихорової лінії дорівнює

$$n(r) = n_0 \exp\left[-(r_0 / r)^2\right], \quad (1.11)$$

де $r_0 = \hbar / \sqrt{2}Mc_1$, знаходимо для поляризації рідини

$$\mathbf{P}_v \approx -\frac{8ea_B^8 D_7 r_0^2 n_0^2 \mathbf{r}}{3a^3 r^3}. \quad (1.12)$$

З урахуванням (1.12), величина (1.6), яка визначає квадрупольний момент вихору, також повинна бути замінена на

$$\bar{q}(R_{ex}) = -\frac{32\pi ea_B^8 D_7 \xi^2}{3a^9} \ln \frac{R_{ex}}{\xi}. \quad (1.13)$$

Грунтуючись на виразі (1.8), автором роботи [39] було показано, що вихорова течія в рідині викликає також її магнітну поляризацію. В результаті, прямолінійна вихорова нитка набуває магнітний момент $\boldsymbol{\mu}_v$, що дорівнює

$$\boldsymbol{\mu}_v = \frac{8\pi\hbar e a_B^8 D_7}{3cMa^9} L \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.14)$$

Тут c – швидкість світла у вакуумі, L – довжина вихорової лінії, $\hat{\mathbf{z}}$ – орт осі z , яка спрямована уздовж лінії вихору.

Паралельно з феноменологічними моделями, в роботах [41, 47, 53] побудована мікроскопічна теорія, яка описує надплинний стан розрідженого електрон-діркового газу [41, 47] і розрідженого газу атомів лужних металів [53]. В рамках цієї теорії виявлений флексоелектричний ефект і кількісно описані наведені вище ефекти. Зокрема, виконано мікроскопічний розрахунок поляризації квантових вихорів за відсутності і при наявності магнітного поля [46, 52]. Наведемо деякі подробиці цього розрахунку.

Для розрідженого електрон-діркового газу за відсутності магнітного поля поляризація \mathbf{P} дорівнює [41, 47]

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}) = A\gamma e a_B^5 n(\mathbf{R}) \nabla n(\mathbf{R}), \quad \gamma = \frac{m_h - m_e}{m_h + m_e}, \quad |A| \approx 120, \quad (1.15)$$

де m_h і m_e – маса дірки і електрона відповідно. Густина системи $n(\mathbf{R})$ визначається квадратом модуля конденсатної хвильової функції $\Psi(\mathbf{R})$, яка задовольняє стаціонарному рівнянню Гросса-Пітаєвського

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Psi - \mu \Psi + \tilde{g} |\Psi|^2 \Psi = 0, \quad (1.16)$$

де μ – хімічний потенціал, \tilde{g} – константа взаємодії. Розглядаючи в якості джерела неоднорідності прямолінійний квантований вихор, розв'язок (1.16) слід шукати у вигляді

$$\Psi(r) = \sqrt{n_0} f(\zeta) e^{i\theta}. \quad (1.17)$$

Тут $\zeta = r / \xi$, $\xi = (\hbar^2 / 2Mgn_0)^{1/2}$ – довжина когерентності, яка збігається з характерним розміром серцевини вихору, θ – полярний кут. Підстановка (1.17) в (1.16) приводить до рівняння

$$\frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{df}{d\zeta} \right) - \frac{f}{\zeta^2} + f - f^3 = 0. \quad (1.18)$$

Аналітичний розв'язок цього рівняння вдається знайти в двох граничних випадках (див., наприклад, [69])

$$f = k\zeta, \quad \zeta \ll 1, \quad (1.19)$$

$$f = 1 - \frac{1}{2\zeta^2}, \quad \zeta \gg 1, \quad (1.20)$$

де k – безрозмірний коефіцієнт порядку одиниці. Чисельний розв'язок рівняння (1.18) (який наведено на рис. 1.2) дозволяє встановити, що $k \approx 5.83$. Відповідно до (1.15), поляризація в цих двох граничних випадках дорівнює

$$\mathbf{P} = \frac{2A\gamma e a_B^5 n_0^2 k^4}{\xi^4} r^2 \mathbf{r}, \quad \zeta \ll 1, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{P} = 2A\gamma e a_B^5 n_0^2 \frac{\xi^2}{r^3} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \zeta \gg 1. \quad (1.22)$$

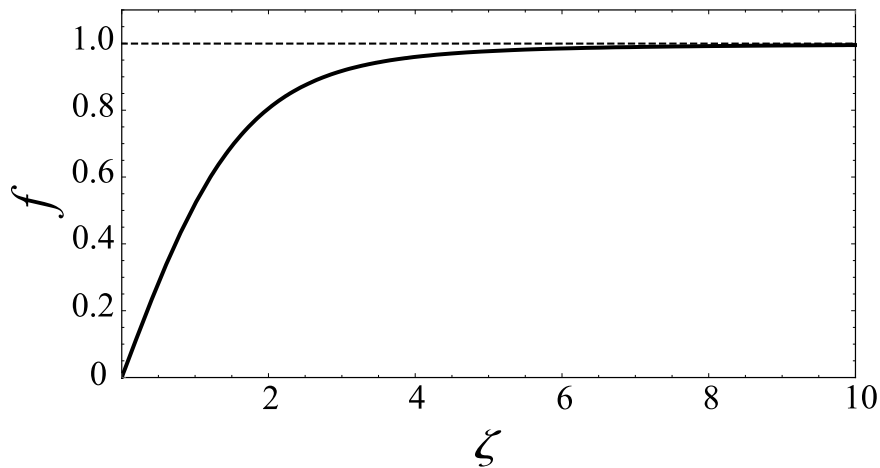


Рис. 1.2 Залежність функції f від відстані до вихору, що вимірюється в одиницях довжини когерентності ξ .

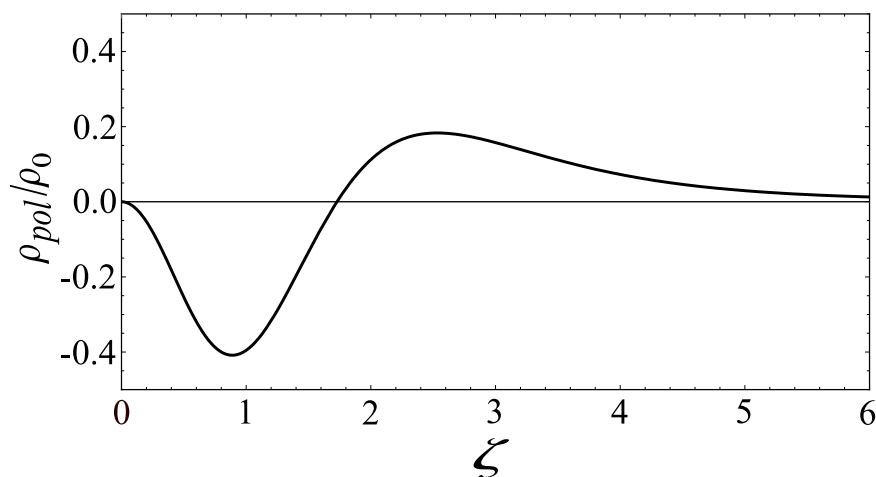


Рис. 1.3 Розподіл поляризаційного заряду в прямолінійному вихорі від відстані до вихору, що вимірюється в одиницях довжини когерентності ξ .

За відомою поляризацією можна отримати густину поляризаційного заряду $\rho_{pol} = -\text{div} \mathbf{P}$ як функцію відстані до осі вихору. Чисельний розв'язок (1.18) дає розподіл заряду в прямолінійному вихорі (див. рис. 1.3, де $\rho_0 = A\gamma e a_B^5 n_0^2 / 2$). Оцінки показують, що занулення повного поляризаційного заряду відбувається вже на відстанях порядку декількох довжин когерентності.

В роботі [52] показано, що при наявності зовнішнього магнітного поля з вихором буде пов'язаний відмінний від нуля поляризаційний електричний заряд. Величина цього заряду пропорційна циркуляції вихору, тому заряд, як і циркуляція, квантується. Компенсуючий заряд протилежного знака виникає на поверхні системи. У загальному випадку, заряд вихору і його зображення на поверхні розділені на макроскопічно велику відстань.

У серії робіт [58-61] наводяться аргументи на користь того, що електричні явища, які спостерігаються в експериментах [21, 22], істотним чином визначаються властивостями квантованих вихорових кілець (КВК). Йдеться про анізотропну залежність енергії кільця від його імпульсу при наявності відносної швидкості \mathbf{w} і існуванні у кільця крім квадрупольного моменту (1.5) дипольного моменту \mathbf{d}_c . Останнє припущення висловлено в роботі [38], в якій пропонувалося два механізми виникнення \mathbf{d}_c : інерційний і заснований на

неоднорідності густини перед і за кільцем. Однак явний вираз для цього дипольного моменту не вдалося отримати. Ґрунтуючись на результатах досліджень [58-60], в роботі [61] обчислені добавки до електричних потенціалів, що виникають в хвилі другого звуку при наявності зовнішнього електричного поля і зумовлені власним дипольним моментом КВК, поляризацією КВК і коливаннями густини. Однак результати експерименту [26] не підтвердили наявність цих добавок, пов'язаних з КВК.

1.3. Поляризація поблизу границі

Окрім взаємодії атомів гелію один з одним джерелом поляризації може стати взаємодія атомів гелію зі стінками, що обмежують гелій [41, 46], і з вимірювальними електродами на протилежних кінцях зразка [40, 50]. На відміну від флексоелектричного ефекту, взаємодія атомів гелію зі стінками приводить до появи відмінного від нуля середнього дипольного моменту.

Поява дипольного моменту \mathbf{d}_a у атома, розташованого поблизу поверхні, була передбачена в роботах [70-72]. В роботі [70] дипольний момент обчислювався шляхом розв'язку рівняння Шредінґера варіаційним методом з пробною хвильовою функцією φ , яка записувалася у вигляді

$$\varphi = \left(1 + \sum \lambda_i z_i\right) \psi_0, \quad (1.23)$$

де ψ_0 – хвильова функція основного стану збудженого атома, z_i – проекція на нормаль до поверхні відстані від i -го електрона до ядра, λ_i – варіаційні параметри, які знаходяться з умови мінімуму енергії системи. Використовуючи потенціал взаємодії атома і поверхні, відповідно до метода зображень вдалося отримати, що дипольний момент \mathbf{d}_a для атома водню над металевою поверхнею дорівнює

$$d_a(H) = 4.5e \frac{a_B^5}{l^4}, \quad (1.24)$$

де l – відстань від атома до поверхні.

У роботах [41, 46] для розрахунку дипольного моменту електрон-діркової пари поблизу поверхні був використаний аналогічний метод. При цьому використовувалася пробна хвильова функція виду

$$\varphi \sim \psi_0 \left(\lambda_1 \frac{z}{l^2} + \lambda_2 \frac{r^2}{l^3} + \lambda_3 \frac{z^2}{l^3} + 3\lambda_4 \frac{r^2 z}{l^4} + 3\lambda_5 \frac{z^3}{l^4} \right), \quad (1.25)$$

де z і r – відносні координати електрона і дірки (орт $\hat{\mathbf{z}}$ спрямовано по нормалі до поверхні, r – радіальна координата). Ця варіаційна функція дає більш низьке значення енергії, ніж функція (1.24), а, отже, є більш точною. Для атома водню (маса дірки багато більша за масу електрона) поблизу металевої поверхні отримано

$$d_a(H) = 12.5e \frac{a_B^5}{l^4}. \quad (1.26)$$

В роботі [71] розрахунок дипольного моменту \mathbf{d}_a базується на обчисленні потенціалу осцилюючого заряду поблизу поверхні по теорії збурень Релея-Шредінгера, що не залежить від часу. В наближенні незалежних електронів в атомі, отримано

$$d_a = \frac{1}{8} \frac{\alpha^2 C \hbar \omega_a}{e l^4} \frac{b_1}{b_2(\omega_a + b_2)}. \quad (1.27)$$

Тут ω_a – ефективна частота збудження атома, b_1 і b_2 – константи, які визначаються поверхнею, C – безрозмірна константа порядку одиниці, що визначається атомом. Для атома водню $C = 9/2$, для атома гелію $C = 9/4$, для атомів інших розріджених газів $C \approx 9/25$. У випадку твердої кристалічної поверхні, що складається з N_0 гармонійних осциляторів на одиницю об'єму з власною частотою ω_0 , маємо $b_1 = 2\pi N_0 \alpha_0 \omega_0^2$ і $b_2^2 = \omega_0^2 + b_1/3$, де α_0 – поляризованість атомів поверхні. У випадку металевої поверхні в наближенні хаотичних фаз $b_1 = b_2^2 = \omega_p^2/2$, де ω_p – плазмова частота. Зокрема, для атома

водню над металевою поверхнею, приймаючи $\alpha = 4.5a_B^3$, $\hbar\omega_a = e^2 / 2a_B$ і $\omega_p \gg \omega_a$, отримано

$$d_a(H) = 5.7e \frac{a_B^5}{l^4}. \quad (1.28)$$

В роботі [72] дипольний момент \mathbf{d}_a розрахований за допомогою техніки Дзялошинського [73], що враховує взаємодію атомів при наявності ефектів запізнювання. За оцінками, наведеними в роботі [72], для атома водню над металевою поверхнею

$$d_a(H) = 10e \frac{a_B^5}{l^4}. \quad (1.29)$$

Як видно з цитованих робіт, загальний висновок полягає в тому, що дипольний момент атома, індукований підкладкою, убуває як четвертий ступінь відстані від атома до поверхні. При цьому у випадку металевої стінки дипольний момент \mathbf{d}_a спрямований по нормалі від поверхні, тобто центр мас електронної хмари атома знаходиться ближче до поверхні, ніж ядро.

Перша спроба зв'язати спостережувані в роботах [21, 22] ефекти з дипольним моментом \mathbf{d}_a , наведеним підкладкою на атомах гелію, була зроблена в роботі [40]. У цій роботі передбачається, що величина поверхневого дипольного моменту може істотно змінюватися при надплинному переході за рахунок зміни змочування поверхні рідким гелієм. Однак зміна змочування означала б зміну енергії взаємодії атомів гелію з поверхнею, для чого при надплинному переході немає підстав.

В роботі [50] робиться акцент на вплив поверхневої поляризації гелію поблизу електродів на величину спостережуваного електричного сигналу. Зокрема, стверджується, що величина сигналу може істотно залежати від групи металу, з якого виготовлені електроди.

Роль приповерхневих поляризованих шарів особливо велика в тонких надплинних плівках і приводить до нового електричного ефекту в надплинних

системах, який передбачається в роботах [2, 3]. Його суть полягає в наступному. Періодичне нагрівання країв надплинної плівки, що покриває підкладку, приводить до поширення по плівці хвилі третього звуку. Ця хвиля супроводжується коливаннями товщини плівки, що, в свою чергу, приводить до коливань індукованого стінкою дипольного моменту плівки і до появи в навколишньому просторі осцилюючого електричного поля. Різниця потенціалів, що виникає, пропорційна градієнту температур, тобто повинен мати місце нестационарний термоелектричний ефект, що неможливо в нормальних системах. Третій розділ даної дисертаційної роботи присвячено розгляду саме цього ефекту.

РОЗДІЛ 2

ДИПОЛЬНИЙ МОМЕНТ КВАНТОВИХ ВИХОРИВ ПРИ НАЯВНОСТІ ПОТОКІВ

2.1. Поляризація неоднорідної надплинної системи

За відсутності зовнішніх електромагнітних полів поляризація гелію можлива за рахунок взаємодії атомів гелію один з одним і за рахунок взаємодії атомів гелію з атомами стінок, що обмежують гелій. В експериментах [21, 22] з виявлення електричної активності надплинного гелію вивчався об'ємний гелій [21] і насичена плівка гелію [22]. Тому в цих випадках визначальний внесок в поляризацію рідини має давати взаємодія атомів гелію один з одним.

У даній роботі побудована мікроскопічна теорія поляризації розрідженого слабконеідеального бозе-газу. Подібно теорії Боголюбова, яка вирішила ряд фундаментальних питань теорії надплинності, в роботі досліджуються деякі глибинні аспекти даної проблеми, які не знайшли відображення в феноменологічному аналізі. На даний момент відсутня послідовна мікроскопічна теорія надплинності гелію. Однак, спираючись на результати робіт Боголюбова з розрахунку спектра елементарних збуджень слабконеідеального бозе-газу, вдалося побудувати мікроскопічну теорію надплинного стану для такого газу (див., наприклад, [74, 75]). Тому в даній роботі для вирішення поставленого завдання також розглядається слабконеідеальний бозе-газ, але з урахуванням внутрішньої структури атомів, які утворюють газ. Незважаючи на те, що така теорія дасть лише якісний опис природи спостережуваних електричних явищ в надплинному гелії, вона дозволить отримати кількісні результати для таких реальних фізичних систем, як газ електрон-діркових пар (екситонів) і розріджений газ атомів лужних металів (вивченням якого ми обмежимося).

Розглянемо розріджений слабконеідеальний бозе-газ, утворений атомами деякого лужного металу, в якому враховуються внутрішні ступені свободи, пов'язані з рухом електронів відносно ядер [53]. У лужних металах енергія

зв'язку на один електрон, що знаходиться на внутрішній оболонці, набагато більше енергії зв'язку валентного електрона, що знаходиться на зовнішній оболонці. Тому рухом електронів усередині атомного остова можна знехтувати і вважати, що кожен атом складається з двох ферміонів: валентного електрона з негативним зарядом $-e$ і масою m_e , а також атомного остова з позитивним зарядом e і масою m_c . Оскільки електрон і атомний остов утворюють зв'язаний стан, то можна очікувати, що хвильова функція основного стану системи $|\Phi_0\rangle$ являє собою узагальнений когерентний стан [41, 47, 76]

$$|\Phi_0\rangle = \exp\left\{\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \left[\Psi_c^+(\mathbf{r}_1)\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\Psi_e^+(\mathbf{r}_2) - h.c.\right]\right\}|0\rangle \equiv \hat{D}|0\rangle. \quad (2.1)$$

Тут $\Psi_e^+(\mathbf{r})$ і $\Psi_c^+(\mathbf{r})$ є оператори народження, відповідно, електрона і атомного остова в точці \mathbf{r} , які задовольняють фермієвським комутаційним співвідношенням, $|0\rangle$ – вакуумний стан. Функцію $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, що входить в цей вираз, будемо називати параметром порядку, причому $|\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2$ є ймовірність знайти остов в точці \mathbf{r}_1 за умови, що валентний електрон знаходиться в точці \mathbf{r}_2 . Для знаходження енергії системи E як функціонала від параметра порядку $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ здійснюється перехід від операторів $\Psi(\mathbf{r})$ до нових операторів $\tilde{\Psi}(\mathbf{r})$, які знаходяться за допомогою унітарного перетворення $\tilde{\Psi} = \hat{D}^+\Psi\hat{D}$. В результаті

$$\tilde{\Psi}_e(\mathbf{r}) = \int \left[C(\mathbf{r}', \mathbf{r})\Psi_e(\mathbf{r}') + S(\mathbf{r}', \mathbf{r})\Psi_c^+(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}', \quad (2.2)$$

$$\tilde{\Psi}_c(\mathbf{r}) = \int \left[\Psi_c(\mathbf{r}')\tilde{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \Psi_e^+(\mathbf{r}')S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}'. \quad (2.3)$$

Матриці $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\tilde{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ і $S(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ являють собою нескінченні ряди за ступенями функцій $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ і $\Phi^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \Phi^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$:

$$C(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\Phi\Phi^+)^n, \quad (2.4)$$

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Phi(\Phi^+\Phi)^n. \quad (2.5)$$

Тут добуток функцій Φ і Φ^+ потрібно розуміти в сенсі інтегральних згорток, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ – дельта-функція. Матриця $\tilde{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, що входить в (2.3), відрізняється від матриці $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ перестановкою функцій Φ і Φ^+ . В результаті рівняння для функції $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, яка мінімізує енергію системи, буде містити $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ в довільній ступені. Ряди по $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ можна обірвати при розгляді систем з низькою густиною, в яких відстані між атомами істотно перевершують їх розмір. В цьому випадку, в виразах для матриць $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ і $S(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ досить залишити тільки два перших доданки. Варіюючи різницю $E - \mu N$ (μ – хімічний потенціал, N – число частинок в системі) по $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ і прирівнюючи результат нулю, приходимо до отриманого раніше в [53] рівняння

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\hbar^2}{2m_c} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_2^2} - U_{ce}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right) \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \\ & + \int R_d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \Phi^+(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3) \Phi(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \\ & + \int R_{ex}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) \Phi^+(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3) \Phi(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 = \mu \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ядра R_d і R_{ex} , зумовлені, відповідно, прямою і обмінною взаємодіями між атомами, мають вигляд

$$R_d = U_{ee}(r_{24}) + U_{cc}(r_{13}) + U_{ec}(r_{23}) + U_{ce}(r_{14}), \quad (2.7)$$

$$R_{ex} = -\left\{ \frac{1}{2} [U_{ce}(r_{14}) + U_{ec}(r_{34}) + U_{ce}(r_{32}) + U_{ec}(r_{12})] + U_{ee}(r_{42}) + U_{cc}(r_{31}) \right\}, \quad (2.8)$$

де $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. У формулах (2.6)–(2.8) під U_{ij} слід розуміти потенціал взаємодії між частинками i та j (ці індекси можуть набувати значень c – атомний остов, і e – валентний електрон).

Усі електричні характеристики газу і, зокрема, його поляризація \mathbf{P} виражаються через параметр порядку $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Для знаходження поляризації в даній точці $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ зручно скористатися відомим співвідношенням $\rho_{pol}(\mathbf{r}) = -\text{div} \mathbf{P}(\mathbf{r})$, де $\rho_{pol}(\mathbf{r})$ – густина поляризаційного заряду. Середня (у

квантовомеханічному сенсі) густина поляризаційного заряду у довільній точці \mathbf{r} дорівнює сумі середнього заряду атомного остова і електронного заряду. З урахуванням того, що заряд електрона має знак протилежний заряду остова, отримуємо

$$\begin{aligned}\rho_{pol}(\mathbf{r}) &= e \langle \Phi_0 | [\Psi_c^+(\mathbf{r})\Psi_c(\mathbf{r}) - \Psi_e^+(\mathbf{r})\Psi_e(\mathbf{r})] | \Phi_0 \rangle = \\ &= e \langle 0 | [\tilde{\Psi}_c^+(\mathbf{r})\tilde{\Psi}_c(\mathbf{r}) - \tilde{\Psi}_e^+(\mathbf{r})\tilde{\Psi}_e(\mathbf{r})] | 0 \rangle.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Враховуючи вираження (2.2) і (2.3) для операторів $\tilde{\Psi}$, знайдемо, що

$$\langle \Phi_0 | [\Psi_c^+(\mathbf{r})\Psi_c(\mathbf{r})] | \Phi_0 \rangle = \int d\mathbf{r}' |S(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2, \quad (2.10)$$

$$\langle \Phi_0 | [\Psi_e^+(\mathbf{r})\Psi_e(\mathbf{r})] | \Phi_0 \rangle = \int d\mathbf{r}' |S(\mathbf{r}', \mathbf{r})|^2. \quad (2.11)$$

При низькій густині досить утримати лише перший член розкладу (2.5). В результаті середня густина негативного (електронного) заряду в деякій точці \mathbf{r} буде мати вигляд

$$\langle \Phi_0 | [\hat{\Psi}_e^+(\mathbf{r})\hat{\Psi}_e(\mathbf{r})] | \Phi_0 \rangle = \int d\mathbf{r}' |\Phi(\mathbf{r}', \mathbf{r})|^2, \quad (2.12)$$

а середня густина позитивного заряду, пов'язаного з остовом атома, буде дорівнювати

$$\langle \Phi_0 | [\hat{\Psi}_c^+(\mathbf{r})\hat{\Psi}_c(\mathbf{r})] | \Phi_0 \rangle = \int d\mathbf{r}' |\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2, \quad (2.13)$$

і значить, з урахуванням (2.9)

$$\rho_{pol}(\mathbf{r}) = e \int d\mathbf{r}' [|\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 - |\Phi(\mathbf{r}', \mathbf{r})|^2]. \quad (2.14)$$

Цей вираз має дуже прозорий фізичний зміст, і він міг би бути написаний виходячи з фізичних міркувань без обчислень. Наприклад, з визначення $|\Phi(\mathbf{r}', \mathbf{r})|^2$ як ймовірності знайти електрон в точці \mathbf{r} за умови, що остов знаходиться в точці \mathbf{r}' , випливає, що ймовірність знайти електрон в точці \mathbf{r} при довільному положенні остова, виходить інтегруванням $|\Phi(\mathbf{r}', \mathbf{r})|^2$ по координаті остова \mathbf{r}' . Аналогічним чином, ймовірність знайти в точці \mathbf{r} остов атома

виходить інтегруванням $|\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2$ по координаті електрона. Повний поляризаційний заряд, який виходить після інтегрування $\rho_{pol}(\mathbf{r})$ по всьому простору, дорівнює нулю.

При розв'язку рівняння для параметра порядку $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ враховується, що енергія зв'язку валентного електрона з остовом ε_0 істотно перевершує енергію взаємодії між атомами $\varepsilon_{int} = gn$ (тут g – константа взаємодії, n – густина числа частинок системи), і енергію, обумовлену неоднорідністю у задачі $\varepsilon_{inhom} = \hbar^2 / 2ML^2$, де $M = m_c + m_e$ – маса атома, L – характерний масштаб неоднорідності. В результаті, розв'язок для $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ можна шукати у вигляді

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi(\mathbf{R}_{12}) \cdot [\phi_0(\mathbf{r}_{12}) + \phi_1(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{R}_{12})], \quad (2.15)$$

У лівій стороні цього виразу здійснений перехід від координат остова \mathbf{r}_1 і електрона \mathbf{r}_2 до координати центру мас \mathbf{R}_{12} і відносної координати \mathbf{r}_{12} , які визначаються наступними виразами

$$\mathbf{R}_{12} = \frac{m_c \mathbf{r}_1 + m_e \mathbf{r}_2}{m_e + m_c}, \quad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (2.16)$$

Функція $\psi(\mathbf{R}_{12})$ описує рух атома як цілого і повільно змінюється на довжині когерентності $\xi \equiv [\hbar^2 / 2Mgn]^{1/2}$. Хімічний потенціал μ записуємо у вигляді, аналогічному (2.15),

$$\mu = \mu_0 + \mu_1. \quad (2.17)$$

Функція ϕ_0 являє собою функцію основного стану атома, а функція $\psi(\mathbf{R}_{12})$ повинна задовольняти рівнянню Гросса-Пітаєвського, яке виникає в теорії, як умова розв'язності рівняння першого (по взаємодії між атомами) наближення для функції ϕ_1 . У нульовому наближенні $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi(\mathbf{R}_{12})\phi_0(\mathbf{r}_{12})$. Підставляючи цю функцію $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ в вираз для зарядової густини $\rho_{pol}(\mathbf{r})$ отримуємо, наприклад, для першого доданка в (2.14)

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r}' |\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 &= \int d\mathbf{r}' \phi_0^2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \left| \psi \left(\frac{m_c \mathbf{r} + m_e \mathbf{r}'}{M} \right) \right|^2 = \\ &= \int d\mathbf{r}'' \phi_0^2(r'') \left| \psi \left(\mathbf{r} + \frac{m_e \mathbf{r}''}{M} \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Помічаючи, що характерна довжина, на якій змінюється функція $\psi(\mathbf{r})$, багато більша за довжину, на якій змінюється функція $\phi_0(r)$, розкладемо ψ поблизу точки $\mathbf{r}'' = 0$. Враховуючи, що $|\psi(\mathbf{r})|^2 = n(\mathbf{r})$ і утримуючи лише перші незникаючі члени розкладу, знаходимо з (2.18)

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r}'' \phi_0^2(r'') n \left(\mathbf{r} + \frac{m_e \mathbf{r}''}{M} \right) &= \\ = \int d\mathbf{r}'' \phi_0^2(r'') \left[n(\mathbf{r}) + \frac{m_e}{M} (\mathbf{r}'' \nabla) n(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \left(\frac{m_e}{M} (\mathbf{r}'' \nabla) \right)^2 n(\mathbf{r}) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Відзначимо, що лінійні по \mathbf{r}'' доданки звертаються в нуль після інтегрування, завдяки парності функції $\phi_0(r)$. Забігаючи наперед, скажемо, що функція $\phi_1(\mathbf{r})$ має непарний по \mathbf{r} доданок. В результаті у поляризаційній густині заряду першого наближення першими незникаючими членами розкладу будуть лінійні по \mathbf{r}'' доданки.

Виконуючи аналогічні обчислення для другого доданка в (2.14), знаходимо в нульовому наближенні щодо взаємодії між атомами поляризаційний заряд системи

$$\rho_{pol}^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{e m_e - m_c}{2 m_e + m_c} \int d\mathbf{r}'' \phi_0^2(r'') (\mathbf{r}'' \nabla)^2 n(\mathbf{r}) = -C_0 a_B^2 e \gamma \cdot \nabla^2 n(\mathbf{r}), \quad (2.20)$$

де $\gamma = (m_c - m_e) / (m_c + m_e)$. Оскільки в атомі $m_c \gg m_e$, в подальшому приймається, що $\gamma = 1$. Константа C_0 , яка виникає у (2.20), порядку одиниці і визначається виразом

$$C_0 = \frac{1}{6a_B^2} \int d\mathbf{r} r^2 \phi_0^2(r). \quad (2.21)$$

Вираз (2.20) має сенс лише на далеких у порівнянні з a_B відстанях від границі системи.

Поява макроскопічного заряду у системі невзаємодіючих частинок здається дивною. Заряд кожного атома дорівнює нулю – звідки ж при неоднорідному розподілі у просторі виникає відмінна від нуля макроскопічна густина $\rho_{pol}(\mathbf{r})$? Причина в тому, що завдяки сильній нерівності $m_c \gg m_e$ ймовірність виявити ядро атома (тобто позитивний заряд) в деякій точці \mathbf{r}_0 можна вважати пропорційною дельта-функції $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, в той час як густина негативного заряду визначається розподілом валентного електрона в атомі. Тому густина заряду в кожній точці всередині атома відмінна від нуля. Для невзаємодіючих атомів в S -стані, коли у системі відсутній виділений напрям, ρ_{pol} має бути пропорційно до $\nabla^2 n$.

Звернемося тепер до знаходження поправки першого порядку ϕ_1 до функції нульового наближення ϕ_0 . Враховуючи розрідженість системи (розміри атомів багато менше середньої відстані між атомами), розв'язуємо рівняння (2.6) по теорії збурень, вважаючи взаємодію атомів малою. Як говорилося вище, вираз для $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ при цьому можна шукати у вигляді (2.15), де ϕ_0 – власна функція основного стану атома. Функція ϕ_1 , що входить у вираз (2.15), повинна задовольняти рівнянню

$$\begin{aligned} \mu_0 \phi_1 \psi = & \hat{H}_{int} \phi_1 \psi - \mu_1 \phi_0 \psi + \hat{K} \phi_0 \psi + \\ & + \int R_d \phi_0(\mathbf{r}_{12}) \phi_0(\mathbf{r}_{34}) \phi_0(\mathbf{r}_{34}) \psi(\mathbf{R}_{12}) \psi^*(\mathbf{R}_{34}) \psi(\mathbf{R}_{34}) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 + . \\ & + \int R_{ex} \phi_0(\mathbf{r}_{14}) \phi_0(\mathbf{r}_{34}) \phi_0(\mathbf{r}_{32}) \psi(\mathbf{R}_{14}) \psi^*(\mathbf{R}_{34}) \psi(\mathbf{R}_{32}) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Тут введені позначення

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2}; \quad \hat{H}_{int} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} - U_{ce}(r), \quad (2.23)$$

де m – приведена маса валентного електрона і остова. Умова розв'язності рівняння (2.22) полягає в ортогональності його правої частини рішенню $\phi_0(r)$

відповідного однорідного рівняння. Помноживши обидві сторони (2.22) на $\phi_0(r_{12})$ і інтегруючи по \mathbf{r}_{12} , приходимо до рівняння

$$\hat{K}\psi(\mathbf{R}) + g|\psi(\mathbf{R})|^2\psi(\mathbf{R}) - \mu_1\psi(\mathbf{R}) = 0. \quad (2.24)$$

Константа взаємодії g дорівнює

$$g = \int R_d \phi_0^2(r_{12}) \phi_0^2(r_{34}) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 d\mathbf{r}_{12} + \int R_{ex} \phi_0(r_{14}) \phi_0(r_{34}) \phi_0(r_{32}) \phi_0(r_{12}) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 d\mathbf{r}_{12}. \quad (2.25)$$

При отриманні (2.24) у кубічних по ψ доданках вважалося, що аргументи всіх функцій $\psi(\mathbf{R}_{ij})$ збігаються і дорівнюють \mathbf{R} . У рівнянні (2.24) ми впізнаємо стаціонарне рівняння Гросса-Пітаєвського. Нагадаємо, що ми обмежувалися розглядом лише стаціонарного випадку.

При розв'язанні рівняння (2.22) враховується, що завдяки наявності трьох функцій ϕ_0 в останньому і передостанньому доданках правої сторони (2.22) аргументи всіх ψ -функцій повинні бути близькі до \mathbf{R}_{12} . Це дозволяє розкласти ψ -функції поблизу точки \mathbf{R}_{12} . Наприклад, для доданка, пов'язаного з прямою взаємодією, отримаємо

$$\psi(\mathbf{R}_{12})\psi^*(\mathbf{R}_{34})\psi(\mathbf{R}_{34}) = \left\{ |\psi(\mathbf{R}_{12})|^2 + \frac{m_c(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) + m_e(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2)}{M} \frac{\partial |\psi(\mathbf{R}_{12})|^2}{\partial \mathbf{R}_{12}} \right\} \psi(\mathbf{R}_{12}). \quad (2.26)$$

У доданку з обмінною взаємодією добуток $\psi(\mathbf{R}_{14})\psi^*(\mathbf{R}_{34})\psi(\mathbf{R}_{32})$ має подібний вигляд. Після підстановки (2.26) в праву сторону рівняння для ϕ_1 , вона буде містити члени, кубічні по ψ , і члени виду $\psi \partial |\psi|^2 / \partial \mathbf{R}$. Перші з них дозволяють знайти парну по \mathbf{r} складову функції ϕ_1 , а другі – непарну (лінійну) по \mathbf{r} частину. Друга частина істотно менше за першу, але ми утримаємо тільки її, цікавлячись лінійним по \mathbf{r} доданком, який, як буде видно нижче, є визначальним для ефекту, що розглядається. В результаті рішення (2.22) знаходимо

$$\phi_1(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{R}_{12}) = \mathbf{G}(\mathbf{r}_{12}) \frac{\partial |\psi(\mathbf{R}_{12})|^2}{\partial \mathbf{R}_{12}}. \quad (2.27)$$

Явний вираз для векторної функції $\mathbf{G}(\mathbf{r}_{12})$, непарної за \mathbf{r}_{12} , не може бути знайдено для атома лужного металу, оскільки потенціали взаємодії валентного електрона з остовом на малих відстанях невідомі. Порядок величини \mathbf{G} оцінюється з розмірних міркувань. Для цього слід перейти до безрозмірних змінних. Довжини вимірюються у радіусах Бора a_B , а енергії – в одиницях e^2 / a_B . Тоді функція ϕ_0 і ядра R_d , R_{ex} можна переписати у вигляді $\phi_0 = a_B^{-3/2} \tilde{\phi}_0$, $R = e^2 \tilde{R} / a_B$, де функції з тильдою є безрозмірними функціями. Враховуючи вираз (2.26) і вважаючи, що $m_c \gg m_e$, знаходимо з (2.22)

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = C'' \frac{1}{\mu_0} \frac{e^2}{a_B} a_B^{5/2} F(\tilde{r}) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.28)$$

де F – безрозмірна функція $\tilde{r} = r / a_B$, C'' – інтеграл від безрозмірних функцій $\tilde{\phi}_0$ і \tilde{R} . Відзначимо, що у випадку кулонівської взаємодії $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ вдається обчислити точно (порівняй з [41]).

Використовуючи (2.14), (2.15) і (2.27), запишемо добавку до зарядової густини (2.20), обумовлену функцією ϕ_1

$$\rho_{pol}^{(1)}(\mathbf{r}) = -e \int d\mathbf{r}' \left[\phi_0^*(r') \mathbf{G}(\mathbf{r}') + h.c. \right] \left\{ \mathbf{f}\left(\mathbf{r} + \frac{m_e}{M} \mathbf{r}'\right) + \mathbf{f}\left(\mathbf{r} + \frac{m_c}{M} \mathbf{r}'\right) \right\}, \quad (2.29)$$

де $\mathbf{f}(\mathbf{r}) \equiv |\psi(\mathbf{r})|^2 \partial |\psi(\mathbf{r})|^2 / \partial \mathbf{r}$. Так як функція $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ змінюється на макроскопічних відстанях, а функція $\phi_0(r)$ змінюється на відстанях, порядку Борівського радіуса, розкладемо функцію \mathbf{f} поблизу точки $r' = 0$. При цьому, на відміну від (2.20), перші незникаючі доданки, які дають внесок в $\rho_{pol}^{(1)}$, лінійні за \mathbf{r}' . Зважаючи на те, що функція $\phi_0(r)$ парна, а функція $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ – непарна за \mathbf{r} , отримуємо

$$\begin{aligned} \rho_{pol}^{(1)}(\mathbf{r}) &= -e \int d\mathbf{r}' \left[\phi_0^*(\mathbf{r}') \mathbf{G}(\mathbf{r}') + h.c. \right] \left\{ \frac{m_c + m_e}{M} (\mathbf{r}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}) \mathbf{f}(\mathbf{r}) \right\} = \\ &= -C_1 e a_B^5 \nabla [n(\mathbf{r}) \nabla n(\mathbf{r})] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Тут C_1 – нова безрозмірна константа, яка визначається виразом

$$C_1 = \frac{1}{a_B^5} \int d\mathbf{r}' [\phi_0^*(\mathbf{r}')\mathbf{G}(\mathbf{r}') + h.c.] \mathbf{r}'. \quad (2.31)$$

Об'єднуючи результати (2.20) і (2.30), отримуємо вираз для вектора електричної поляризації системи слабо взаємодіючих атомів

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(0)} + \mathbf{P}^{(1)} = (C_0 e a_B^2 + C_1 n e a_B^5) \nabla n \equiv A \nabla n. \quad (2.32)$$

Задача про знаходження такого дипольного моменту вирішувалася у роботах [41, 47, 53]. У цих роботах поляризація \mathbf{P} обчислювалася відповідно до формули

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{R}) &= \int [\phi_0^*(r) + \phi_1^*(\mathbf{r}, \mathbf{R})] \psi^*(\mathbf{R}) \mathbf{e} r [\phi_0(r) + \phi_1(\mathbf{r}, \mathbf{R})] \psi(\mathbf{R}) dr = \\ &= e n(\mathbf{R}) \int [\phi_0^*(r) \phi_1(\mathbf{r}, \mathbf{R}) + h.c.] \mathbf{r} dr. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Враховуючи (2.27), легко бачити, що $\mathbf{P}(\mathbf{R}) = C_1 n e a_B^5 \nabla n$. Це означає тотожність розрахунку частини поляризації $\mathbf{P}^{(1)}$, обумовленої добавкою ϕ_1 , через поляризаційний заряд $\rho_{pol}^{(1)}$ і безпосередньо за допомогою формули (2.33). Однак, при розрахунку за допомогою (2.33) втрачається знайдена вище поляризація системи нульового наближення $\mathbf{P}^{(0)}$.

Важливо відзначити, що для розріджених систем (до яких може бути застосована побудована теорія) $a_B^3 n \ll 1$. Тому другий доданок в дужках виразу (2.32) багато менше першого і, здавалося б, їм можна знехтувати. Проте саме він відповідальний за появу зовнішніх електричних полів, що створюються неоднорідною надплинною системою.

Електричне поле в точці \mathbf{r}_0 поза системою визначається рівнянням Пуассона

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \int \frac{\rho_{pol}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \int \frac{e \left(|\Phi(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')|^2 - |\Phi^2(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')|^2 \right)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}''. \quad (2.34)$$

Якщо знехтувати крайовими ефектами можна поміняти місцями змінні інтегрування $\mathbf{r}' \leftrightarrow \mathbf{r}''$. Тоді

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \int e |\Phi(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')|^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}''|} \right) d\mathbf{r}' d\mathbf{r}''. \quad (2.35)$$

Для системи невзаємодіючих атомів $\Phi(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \psi(\mathbf{R})\phi_0(r)$. Як було згадано вище, функція $\phi_0(r)$ змінюється на відстанях порядку a_B , а функція $\psi(\mathbf{R})$, яка описує рух атома як цілого, повільно змінюється на таких відстанях. Це дозволяє розкласти вираз в круглих дужках в (2.35) за малим відношенням $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|/r$. Після переходу від змінних \mathbf{r}' і \mathbf{r}'' до координати центру мас \mathbf{R} і відносної координаті \mathbf{r} та після інтегрування по \mathbf{r} отримуємо

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = C_0 e a_B^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \int |\psi(\mathbf{R})|^2 \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_0|} d\mathbf{R}. \quad (2.36)$$

Аналізуючи цей вираз, врахуємо, що $|\psi(\mathbf{R})|^2$ є густина частинок в точці \mathbf{R} , і що $\nabla^2(1/|\mathbf{R} - \mathbf{r}_0|) = -4\pi\delta(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0)$. Тоді з (2.36) випливає, що за відсутності взаємодії між атомами неоднорідність у системі атомів, що займає певний об'єм V , не приводить до появи електричних полів поза цим об'ємом, так як $\delta(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0) = 0$, якщо \mathbf{R} всередині, а \mathbf{r}_0 – поза цим об'ємом. Цей результат є цілком природним, оскільки за відсутності взаємодії неоднорідно розподілені атоми не створюють стаціонарних електричних полів.

При врахуванні взаємодії параметр порядку $\Phi(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ отримує добавку, пропорційну $\phi_1(\mathbf{r}, \mathbf{R})$. Після підстановки в (2.35) відповідного виразу для $\Phi(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$, отримаємо з лінійною за взаємодією точністю

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) &= -C_1 e a_B^5 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \int |\psi(\mathbf{R})|^2 \frac{\partial |\psi(\mathbf{R})|^2}{\partial \mathbf{R}} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_0|} d^3 R = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \int \mathbf{P}(\mathbf{R}) \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_0|} d^3 R \end{aligned} \quad (2.37)$$

Вектор $\mathbf{P}(\mathbf{R})$ в цьому виразі збігається з вектором поляризації $\mathbf{P}(\mathbf{R})$ у (2.32), в якому слід покласти $C_0 = 0$.

Таким чином, в даному пункті розділу отримано фундаментальний вираз для густини поляризаційного заряду через параметр порядку слабконеідеального бозе-газу і показано, що у випадку, коли параметр порядку змінюється на

макроскопічних масштабах, в системі з'являється поляризація, пропорційна градієнту густини. Виявлено цікавий і несподіваний результат, пов'язаний з появою всередині неоднорідної системи макроскопічного поляризаційного заряду (а, отже, і поляризації) навіть за відсутності взаємодії між атомами. Показано, що цей ефект пов'язаний з асиметрією атома за масами частинок, які входять до його складу. Врахування взаємодії атомів приводить до малої поправки до поляризації, проте встановлено, що саме вона відповідальна за появу зовнішніх електричних полів, що створюються неоднорідною системою. За відсутності взаємодії між атомами неоднорідність у системі атомів, що займає певний об'єм, не приводить до появи електричних полів поза цим об'ємом.

2.2. Дипольний момент квантованого вихору

Як було показано в попередньому підрозділі, поляризація системи породжується її неоднорідністю і для знаходження електричного поля (2.37) слід знайти густину системи $n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$ як функцію координат. Записуючи функцію $\psi(\mathbf{r}, t)$ у вигляді $\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} \exp[i\phi(\mathbf{r}, t)]$ (тут $\phi(\mathbf{r}, t)$ – фаза), підставляючи її в рівняння Гросса-Пітаєвського (2.24) і відокремлюючи дійсну і уявну частини, отримуємо два рівняння, одним з яких є рівняння неперервності

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla n \mathbf{v} = 0, \quad (2.38)$$

а друге є аналог класичного рівняння Ейлера

$$\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \frac{M v^2}{2} - gn + \mu, \quad (2.39)$$

де $\mathbf{v} = \hbar \nabla \phi / M$ – швидкість надплинної компоненти.

Розглянемо в якості джерела неоднорідності прямолінійну вихорову лінію, паралельну осі z . При наявності у системі надплинних потоків, що обтікають лінію, вона може рухатися зі швидкістю \mathbf{v}_L . При малих швидкостях \mathbf{v}_L вихорова лінія рухається як ціла без деформації її структури і

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r} - \mathbf{v}_L t). \quad (2.40)$$

В результаті

$$\frac{\hbar}{M} \frac{\partial}{\partial t} \phi = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_L. \quad (2.41)$$

Як відомо, істотна деформація густини n має місце у серцевині вихору (в вихоровому корі). Радіус серцевини дорівнює $\xi = [\hbar^2 / 2Mgn]^{1/2}$. У надплинному ^4He товщина вихорової лінії має порядок міжатомної відстані. У слабконеідеальному бозе-газі серцевина може мати макроскопічну товщину, але вона завжди багато менша за характерний розмір системи. На відстанях, далеких у порівнянні з розмірами кора вихору, можна нехтувати першим доданком у правій стороні (2.39), що містить похідні по координаті (наближення Томаса-Фермі). Це дозволяє отримати вираз для добавки $n'(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t) - n_0$ до густини (n_0 – середнє значення густини), пов'язаної з рухом газу

$$n' = -\frac{M}{2g} \cdot [\mathbf{v}^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_L]. \quad (2.42)$$

У випадку, коли в системі присутній однорідний надплинний потік зі швидкістю \mathbf{v}_{s0} , швидкість \mathbf{v} у (2.42) складається зі швидкості \mathbf{v}_v кругового руху навколо вихорового кора і швидкості \mathbf{v}_{s0} . З (2.42) і з (2.32) (в якому $C_0 = 0$) випливає, що поляризація газу, обумовлена наявністю прямолінійної вихорової лінії, дорівнює

$$\mathbf{P} = -\frac{C_1 n_0 e a_B^5 M}{2g} \nabla [\mathbf{v}_v^2 + 2\mathbf{v}_v \cdot (\mathbf{v}_{s0} - \mathbf{v}_L)] \equiv \mathbf{P}_h + \mathbf{P}_f. \quad (2.43)$$

Перший доданок в дужках має аксіальну симетрію: пов'язана з ним частина поляризації \mathbf{P}_h в кожній точці спрямована нормально до осі вихорової лінії так, що виникає «поляризаційний їжак» (див. рис. 2.1). Сумарний дипольний момент «поляризаційного їжака», вочевидь, дорівнює нулю і внесок в створювані цією частиною поляризації електричні поля будуть давати мультипольні моменти вихору вищих порядків [35]. Надалі ми сконцентруємо увагу на аксіально-

асиметричну частину поляризації \mathbf{P}_f , яка, як буде показано, приводить до відмінного від нуля дипольного моменту вихору.

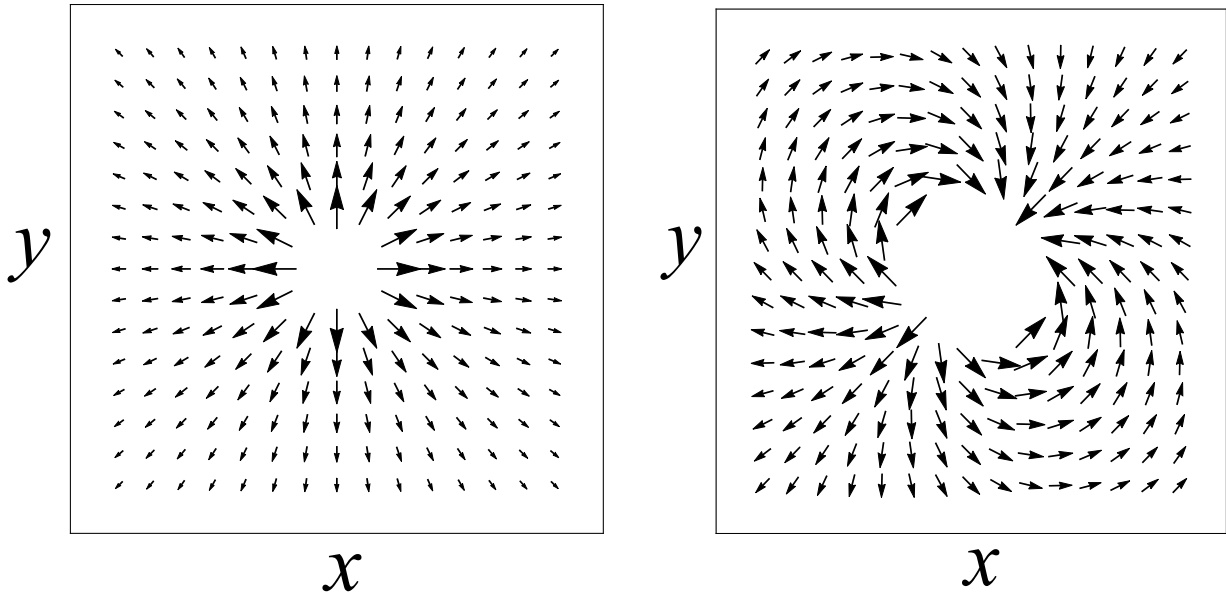


Рис. 2.1 Схематичне зображення розподілу аксіально симетричної частини поляризації \mathbf{P}_h (лівий рисунок) та аксіально асиметричної частини поляризації \mathbf{P}_f (правий рисунок) навколо вихорової лінії. Вісь y на рисунках спрямовано вздовж вектора \mathbf{w} .

Вираз для \mathbf{P}_f у (2.43) залишається невизначеним, доки невизначена швидкість вихору \mathbf{v}_L . Для її знаходження вийдемо за рамки мікроскопічного розрахунку, справедливого лише при нульовій температурі $T = 0$. Для відмінних від нуля температурах слід враховувати появу в системі збуджень. В рамках феноменологічного опису швидкість \mathbf{v}_L можна знайти з рівняння балансу сил, що діють на вихор (див., наприклад, [77-81]). Рух вихорового кора відносно локальної надплинної швидкості приводить до сили Магнуса

$$\mathbf{F}_M = \rho_s \kappa [\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_{s0})], \quad (2.44)$$

де $\kappa = 2\pi n\hbar / M$ – циркуляція вихору ($n = \pm 1$), $\hat{\mathbf{z}}$ – орт осі z . Рух вихорового кора щодо локальної нормальної компоненти приводить до сили тертя

$$\mathbf{F}_D = -D(\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_n) - \frac{\kappa}{|\kappa|} D' [\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_n)], \quad (2.45)$$

яка має поздовжню і поперечну складові відносно $\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_n$. Поперечна складова цієї сили є сила Йорданського. Коефіцієнти тертя D і D' , що входять до (2.45), визначаються розсіюванням на вихорі фононів або ротонів. Рух вихору визначається балансом сил \mathbf{F}_M і \mathbf{F}_D , тобто $\mathbf{F}_M + \mathbf{F}_D = 0$, звідки

$$\rho_s \kappa [\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_{s0})] = D(\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_n) + \frac{\kappa}{|\kappa|} D' [\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_n)]. \quad (2.46)$$

Розв'язуючи рівняння балансу сил, знаходимо швидкість вихорової лінії

$$\mathbf{v}_L = \frac{\kappa \rho_s D_1}{T} [\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{w}] + D_2 \mathbf{w} + \mathbf{v}_{s0}, \quad (2.47)$$

де $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{s0}$ – відносна швидкість нормальної і надплинної компонент.

Коефіцієнти D_1 і D_2 даються виразами

$$D_1 = \frac{TD}{[|\kappa| \rho_s - D']^2 + D^2}, \quad (2.48)$$

$$D_2 = 1 - \frac{|\kappa| \rho_s (\kappa \rho_s - D')}{[|\kappa| \rho_s - D']^2 + D^2}. \quad (2.49)$$

Відзначимо, що при $D = D' = 0$ коефіцієнти D_1 і D_2 також обертаються у нуль. Таким чином, за відсутності сил тертя вихор рухався б зі швидкістю зовнішнього надплинного потоку \mathbf{v}_{s0} . В протилежному випадку при $D, D' \rightarrow \infty$ коефіцієнти D_1 і D_2 наближаються до нуля і одиниці відповідно. В результаті вихор рухався б зі швидкістю нормальної компоненти \mathbf{v}_n .

Знайдемо електричний потенціал, що створюється неоднорідною системою, яку будемо вважати безмежної в напрямках, перпендикулярних осі z , і яка має висоту h . При цьому створювана вихором швидкість рідини, що визначає функціональну залежність поляризації (2.43) від координати, дорівнює

$$\mathbf{v}_v = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{[\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}]}{r^2}, \quad (2.50)$$

де вектор \mathbf{r} є радіальною координатою в циліндричній системі координат. Електричний потенціал φ в деякій точці $\mathbf{R}_0 = (r_0, \theta_0, z_0)$ дається стандартною формулою електростатики

$$\varphi(\mathbf{R}_0) = \int \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{R}_0 - \mathbf{R})}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}|^3} d^3R. \quad (2.51)$$

Підставляючи замість \mathbf{P} вираз для \mathbf{P}_f з (2.43), вважаючи для простоти $\theta_0 = 0$ і нехтуючи доданками, інтегрування яких по полярному кутку дає нуль, приходимо до наступного виразу

$$\varphi(\mathbf{R}_0) = \frac{C_1 n_0 e a_B^5 M}{g} \frac{\kappa}{2\pi} [\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{v}_{s0} - \mathbf{v}_L)] \hat{\mathbf{x}} \int \frac{r \cos \theta - r_0 \cos 2\theta}{r^2 |\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}|^3} d^3R, \quad (2.52)$$

де $\hat{\mathbf{x}}$ – орт осі x . Інтеграл від першого доданка обчислюється безпосередньо:

$$\int \frac{r \cos \theta}{r^2 |\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}|^3} r dr d\theta = \frac{2\pi (\sqrt{r_0^2 + (z_0 - z)^2} - (z_0 - z))}{r_0 (z_0 - z) \sqrt{r_0^2 + (z_0 - z)^2}}. \quad (2.53)$$

Інтеграл по r від другого доданка розходиться на нижній границі і має бути обрізаний на довжині когерентності ξ (що відповідає наближенню Томаса-Фермі). Подальше інтегрування по θ показує, що частина інтеграла, що залежить від ξ , не дає вкладу в електричний потенціал. В результаті, інтеграл від другого доданка в (2.52) може бути перетворено до виду

$$\begin{aligned} \int \frac{r_0 \cos 2\theta}{r^2 |\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}|^3} d^2r &= \frac{2r_0}{(z_0 - z)} \frac{\partial}{\partial z_0} \int_0^\pi \ln \left(1 - \frac{r_0 \cos \theta}{\sqrt{r_0^2 + (z_0 - z)^2}} \right)^{\frac{\cos 2\theta}{\sqrt{r_0^2 + (z_0 - z)^2}}} d\theta = \\ &= \pi \frac{2(z_0 - z)^2 \left(\sqrt{r_0^2 + (z_0 - z)^2} - (z_0 - z) \right) + r_0^2 \left(2\sqrt{r_0^2 + (z_0 - z)^2} - 3(z_0 - z) \right)}{(z_0 - z) r_0 \left(r_0^2 + (z_0 - z)^2 \right)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Використовуючи (2.53) і (2.54) в (2.52), отримуємо

$$\varphi(\mathbf{R}_0) = \int dz \frac{C_1 n_0 e a_B^5 M \kappa}{2g} [\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{v}_{s0} - \mathbf{v}_L)] \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{\left(r_0^2 + (z_0 - z)^2 \right)^{3/2}}. \quad (2.55)$$

Вводячи радіальну координату вихору і точки спостереження (\mathbf{r}_L і $\mathbf{r}_0 = (r_0, \theta_0)$ відповідно) і використовуючи (2.47), отримуємо остаточну відповідь для електричного потенціалу в загальному вигляді

$$\varphi(\mathbf{R}_0) = \int \frac{\mathbf{d}_v \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_L) dz}{\left((\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_L)^2 + (z_0 - z)^2 \right)^{3/2}}, \quad (2.56)$$

де

$$\mathbf{d}_v = -\frac{C_1 e n_0 a_B^5 M}{2g} \left(\frac{\rho_s \kappa^2 D_1}{T} \hat{\mathbf{z}} \times [\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{w}] + \kappa D_2 [\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{w}] \right). \quad (2.57)$$

Вираз для \mathbf{d}_v можна інтерпретувати як лінійну густину дипольного моменту вихору. Ми бачимо, що відносний рух нормальної і надплинної компонент приводить до появи у кожного елемента вихорової лінії дипольного моменту. Цей дипольний момент складається з двох доданків, один з яких паралельний, а інший – ортогональний відносній швидкості \mathbf{w} . При цьому від знака циркуляції залежить лише другий доданок. Відзначимо, що вираз для лінійної густини дипольного моменту вихору \mathbf{d}_v можна отримати шляхом безпосереднього інтегрування поляризації \mathbf{P}_f , тобто

$$\mathbf{d}_v = \int \mathbf{P}_f d^2 r = -\frac{C_1 e n_0 a_B^5 M}{g} \oint \mathbf{v}_v (\mathbf{v}_{s0} - \mathbf{v}_L) d\mathbf{l}. \quad (2.58)$$

Використовуючи (2.47) і (2.50) після обчислень отримуємо для величини \mathbf{d}_v , визначеної у (2.58), вираз, який повністю збігається з виразом (2.57).

Корисно оцінити порядок величини знайденого дипольного моменту для гелію. При оцінці константи взаємодії $g = 4\pi\hbar^2 a_s / M$ вважатимемо довжину розсіювання рівною $a_s \sim 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. При температурі близько 1 K ($\kappa \rho_s D_1 / T \sim D_2 \sim 1$) і відносній швидкості $w = 1 \text{ см/с}$ отримуємо оцінку для лінійної густини дипольного моменту вихору $d_v \sim e \cdot 10^{-7}$. Оскільки повний дипольний момент \mathbf{d} створюється атомами в циліндричній трубці з радіусом порядку ξ і з висотою h , то при $h = 1 \text{ см}$ число цих атомів має порядок

$\pi\xi^2 h n_0 \sim 10^7$, а отже, у кожного атома в вихорі дипольний момент має порядок $e \cdot (10^{-14} \text{ см})$. Такий дипольний момент виникав би у одного атома гелію при розміщенні його в зовнішнє електричне поле напруженістю $E \sim 10^2 \text{ В/см}$ (поляризованість гелію дорівнює $\alpha = 2 \cdot 10^{-25} \text{ см}^3$).

Залежність величини електричного потенціалу $\varphi(\mathbf{R}_0)$ від висоти зразка h виходить в результаті інтегрування виразу (2.56) по z :

$$\varphi(\mathbf{R}_0) = \frac{\mathbf{d}_v \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_L)}{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_L)^2} \left[\frac{z_0}{\sqrt{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_L)^2 + z_0^2}} - \frac{z_0 - h}{\sqrt{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_L)^2 + (z_0 - h)^2}} \right]. \quad (2.59)$$

Фіксуючи відстань від поверхні гелію до точки спостереження $z_0 - h$, знаходимо для випадків $h \ll z_0 - h$ (плівка гелію) і $h \gg z_0 - h$ (об'ємний зразок гелію), що потенціал $\varphi(\mathbf{R}_0)$ дорівнює

$$\varphi(\mathbf{R}_0) = \begin{cases} \frac{h \mathbf{d}_v \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_L)}{\left((\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_L)^2 + (z_0 - h)^2 \right)^{3/2}}, & h \ll z_0 - h \\ \frac{\mathbf{d}_v \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_L)}{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_L)^2} \left(1 - \frac{z_0 - h}{\sqrt{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_L)^2 + (z_0 - h)^2}} - \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_L)^2}{2h^2} \right), & h \gg z_0 - h \end{cases} \quad (2.60)$$

Як видно, при збільшенні висоти зразка h потенціал лінійно зростає з ростом h і виходить на постійне значення (по змінній h) при $h \gg z_0 - h$. Вважаючи $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_L| = z_0 - h = 1 \text{ см}$, отримуємо для об'ємного гелію $\varphi \sim 4 \cdot 10^{-15} \text{ В}$.

Висновки

1. Розвинена теорія надплинного стану в моделі розрідженого бозе-газу лужного металу, в якій частково врахована внутрішня структура атомів, які утворюють газ, а саме, враховано рух валентного електрона і рух атомного остова як цілого.

2. Знайдено фундаментальне вираз, що пов'язує густину поляризаційного заряду системи і комплексний параметра порядку, що має сенс хвильової функції атомів з урахуванням внутрішнього руху валентних електронів.

3. Виявлено цікавий і несподіваний результат, пов'язаний з появою в неоднорідній системі макроскопічного поляризаційного заряду (а, отже, і поляризації) навіть в наближенні невзаємодіючих атомів. Показано, що цей ефект пов'язаний з асиметрією атома по масам частинок, які входять до його складу. Встановлено, що знайдена поляризація приводить до виникнення електричних полів поза неоднорідною надплинною системою тільки при врахуванні взаємодії атомів.

4. Встановлено, що при наявності в надплинній системі квантованої прямолінійної вихорової лінії відносний рух нормальної і надплинної компонент приводить до появи електричного потенціалу поза системою. Цей потенціал має вигляд потенціалу диполя, що дозволяє приписати дипольний момент вихору.

РОЗДІЛ 3

НЕСТАЦІОНАРНИЙ ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНИЙ ЕФЕКТ, ПОРОДЖУВАНИЙ ТРЕТІМ ЗВУКОМ

В даному розділі роботи увага приділяється тонким надплинним плівкам гелію ^4He , для яких домінуючим джерелом поляризації слугує взаємодія плівки з підкладкою. Величина цієї поляризації і характер її залежності від товщини плівки будуть розглянуті в пункті 3.1. При цьому поправка до поляризації за рахунок неоднорідності системи (флексоелектричний ефект) є несуттєвою (на відміну від об'ємного зразка надплинного гелію, як було показано в розділі 2). Більш детально це питання висвітлено в пункті 3.2. Так, як в експерименті простіше спостерігати змінну частину електричного поля, в пункті 3.3 в якості джерела нестационарної поляризації плівки розглядається третій звук. В результаті передбачається, що коливання температури при поширенні по тонкій надплинній плівці третього звуку приводять до появи в навколишньому просторі змінного електричного поля (своєрідний нестационарний термоелектричний ефект). Залежність величини поля від виду підкладки та способу її покриття розглядається в пункті 3.4. Нарешті, в пункті 3.5 буде показано, що вплив на ефект термічно активованих вихорів навіть поблизу надплинного переходу є слабким.

3.1. Електричне поле системи «атом - тверде тіло»

Звертаючись до проблеми спостереження передбачених в теоретичних роботах ефектів електричної активності надплинних систем, відзначимо, що є труднощі принципового характеру. Ця трудність зумовлена природою механізму поляризації за відсутності зовнішнього електричного поля. За відсутності зовнішнього електричного поля, джерелом поляризації є взаємодія між атомами системи. «Елементарним елементом» поляризації є дипольні моменти, що виникають у пари атомів в результаті ван-дер-ваальсової взаємодії між ними. Як

відомо (див., наприклад, [68]), у пари однакових атомів виникають рівні і протилежно спрямовані дипольні моменти, величина яких залежить від відстані між атомами. Сумарний дипольний момент пари дорівнює нулю. У неоднорідній системі може відбуватися перерозподіл цих дипольних моментів по системі, що приводить до локальної поляризації. Повний дипольний момент системи (в стаціонарному випадку) повинен дорівнювати нулю. Спостереження локальних значень поляризації може бути виконано якимось зовнішнім «щупом».

У попередньому розділі йшлося про об'ємні ефекти в надплинних системах – фактично ми обмежимося розглядом властивостей He II. В реальних умовах гелій завжди знаходиться в посудині. Взаємодія атомів гелію зі стінками посудини приводить до появи відмінного від нуля середнього дипольного моменту, величина якого може значно перевершувати величину моменту, обумовленого взаємодією атомів гелію один з одним. Взаємодія зі стінкою істотна в тонкому шарі поблизу стінки. Спостережувані ефекти будуть максимальні в плівках з товщиною порядку цього шару. Тому становить інтерес задача про електричну активність надтонких надплинних плівок ^4He , розгляду якої присвячений даний розділ.

Питання про поляризацію атома над діелектричної або металевою підкладкою, як зазначено в підрозділі 1.3, розглядалось низкою авторів [41, 70-72, 81-84]. Загальний висновок полягає в тому, що дипольний момент атома, індукований підкладкою, спадає як четвертий ступінь відстані від атома до поверхні. Нас, однак, буде цікавити повне електричне поле над плівкою, в яке дають вклад не тільки дипольні моменти атомів плівки, але і підкладки. Для знаходження цього поля ми скористаємося підходом [73], який використано в роботі [65] для обчислення дипольного моменту атома.

Нехай атом знаходиться у вакуумі на відстані l над плоскою поверхнею твердого тіла з діелектричної проникністю $\epsilon(\omega)$. Будемо вважати, що осі x і y лежать в площині поверхні, а вісь z нормальна до поверхні (див. рис. 3.1).

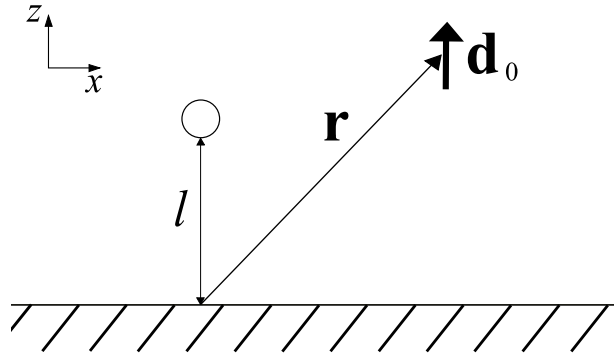


Рис. 3.1 Схематичне зображення атома, віддаленого від твердого тіла на відстань l , та пробного диполя \mathbf{d}_0 .

Повний гамільтоніан H можна представити у вигляді суми гамільтоніана атома і середовища за відсутності взаємодії між ними H_0 і оператора взаємодії атома і середовища

$$V_1 = -d_i E_i(\mathbf{r}_a) - \frac{1}{6} Q_{ij} (\nabla_a)_j E_i(\mathbf{r}_a). \quad (3.1)$$

Тут d_i і Q_{ij} – оператори дипольного і квадрупольного моментів атома відповідно, $\mathbf{r}_a = (0, 0, l)$ – координата центру мас атома, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ – оператор електричного поля, яке створюється твердим тілом в точці \mathbf{r} , E_i – i -та компонента оператора \mathbf{E} . Повне середнє електричне поле дорівнює

$$\langle \mathbf{E}^{tot}(\mathbf{r}) \rangle \equiv \langle \psi | \mathbf{E}^{tot}(\mathbf{r}) | \psi \rangle, \quad (3.2)$$

де ψ – власна функція гамільтоніана H . Як буде видно з наступних обчислень, це поле буде відмінно від нуля лише при врахуванні взаємодії із зовнішнім полем як дипольного моменту атома, так і його квадрупольного моменту. Для обчислення $\langle \mathbf{E}^{tot}(\mathbf{r}) \rangle$ зручно вважати, що в точці \mathbf{r} знаходиться деякий класичний «сторонній» дипольний момент \mathbf{d}_0 (див. рис. 3.1). В результаті, гамільтоніан системи отримує добавку

$$V_2 = -\mathbf{d}_0 \mathbf{E}^{tot}(\mathbf{r}) = -\mathbf{d}_0 (\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_a(\mathbf{r})), \quad (3.3)$$

де $\mathbf{E}_a(\mathbf{r})$ – оператор електричного поля, яке створюється атомом. Якщо ввести S -оператор (тут і нижче $\hbar = c = 1$)

$$S = T_\tau \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} [V_1(t) + V_2(t)] dt \right\}, \quad (3.4)$$

де $V_{1,2}(t)$ – оператори $V_{1,2}$ в картині взаємодії, T_τ – оператор хронологічного впорядкування, то повна енергія взаємодії електричного поля з атомом і пробним диполем U буде дорівнювати [85]

$$U = -\frac{1}{it} \langle S \rangle_0. \quad (3.5)$$

Тут $\langle S \rangle_0$ – середнє від S -оператора по хвильовій функції основного стану ізолюваного атома і конденсованого середовища. Середнє електричне поле

$$\langle \mathbf{E}^{tot}(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle + \langle \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) \rangle = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{d}_0} \Big|_{\mathbf{d}_0=0} = \frac{1}{it} \frac{\partial \langle S \rangle_0}{\partial \mathbf{d}_0} \Big|_{\mathbf{d}_0=0}. \quad (3.6)$$

Будемо розглядати ситуацію, коли атом знаходиться на відстані від твердого тіла, що значно перевищує міжатомну відстань. При цьому взаємодія атома з полем \mathbf{E} є малою і для знаходження середнього поля $\langle \mathbf{E}^{tot} \rangle$ можна скористатися розкладом S -оператора (3.4) за ступенями $V_{1,2}(t)$. Перший незникаючий доданок в цьому розкладі при розрахунку середнього поля $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle$, яке створюється твердим тілом, з'явиться в третьому порядку теорії збурень:

$$\langle E_i(\mathbf{r}) \rangle = -\frac{1}{it} \frac{1}{3!} \int dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 \langle T_\tau E_i(t_1, \mathbf{r}) V_1(t_2) V_1(t_3) V_1(t_4) \rangle. \quad (3.7)$$

Цей вираз звертається в нуль, якщо не враховувати можливість появи у атома квадрупольного моменту, оскільки в цьому випадку підінтегральний вираз в (3.7) непарний або по оператору \mathbf{E} , або по оператору \mathbf{d} . Усереднення операторів дипольних і квадрупольних моментів у цьому виразі відбувається за основним станом атома, а оператори електричного поля усереднюються за основним

станом твердого тіла. Після підстановки (3.1) в цей вираз приходимо до результату

$$\langle E_i(\mathbf{r}) \rangle = -\frac{1}{it} \int dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 D_{ij}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, t_1, t_2) \Phi_{jklm}(t_2, t_3, t_4) (\nabla_a)_m D_{kl}^E(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_a, t_3, t_4). \quad (3.8)$$

Тут грінівська функція фотона в середовищі

$$D_{ij}^E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \langle T_\tau E_i(\mathbf{r}_1, t_1) E_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (3.9)$$

і введено позначення

$$\Phi_{jklm}(t_1, t_2, t_3) = -\frac{1}{6} \langle T_\tau d_j(t_1) d_k(t_2) Q_{lm}(t_3) \rangle. \quad (3.10)$$

Остання величина входить у вираз для середнього дипольного моменту атома над твердим тілом [72]

$$\langle d_i \rangle = \frac{1}{t} \int dt_1 dt_2 dt_3 \Phi_{iklm}(t_1, t_2, t_3) (\nabla_a)_m D_{kl}^E(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_a, t_2, t_3). \quad (3.11)$$

Виявляється, що середнє поле $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle$ вдається виразити через дипольний момент (3.11). Для цього перейдемо в (3.8) до функції $D_{ij} = -i \langle T_\tau A_i(\mathbf{r}_1, t_1) A_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$ (\mathbf{A} – оператор векторного потенціалу), пов'язаної з функцією Гріна D_{ij}^E співвідношенням $D_{ij}^E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = i \partial^2 / \partial t^2 D_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$ і виконаємо перетворення Фур'є для функцій D_{ij} і Φ_{jklm} відносно змінних $t_{1,2,3,4}$. Враховуючи що $D_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = D_{ij}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, |\omega|)$, де $D_{ij}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \omega)$ – запізнїла функція Гріна, після відповідного інтегрування отримаємо

$$\langle E_i(\mathbf{r}) \rangle = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \Phi_{jklm}(0, i\omega) (\nabla_a)_m D_{kl}^R(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_a, i\omega) \left\{ \omega_1^2 D_{ij}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \omega_1) \right\}_{\omega_1=0}. \quad (3.12)$$

Виконавши аналогічні дії в (3.11) знаходимо

$$\langle d_i(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \Phi_{jklm}(0, i\omega) (\nabla_a)_m D_{kl}^R(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_a, i\omega), \quad (3.13)$$

звідки робимо висновок, що

$$\langle E_i(\mathbf{r}) \rangle = -\langle d_z \rangle \left\{ D_{iz}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \omega) \omega^2 \right\}_{\omega=0}. \quad (3.14)$$

Як відомо [69], запізніла функція Гріна задовольняє рівнянню

$$\left[\text{rot}_{lk} \text{rot}_{ki} - \omega^2 \epsilon(\omega, \mathbf{r}) \delta_{il} \right] D_{ij}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \omega) = -4\pi \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (3.15)$$

яке є наслідком рівнянь Максвелла. Відзначимо, що друга координата \mathbf{r}_a і другий індекс j не беруть участі в диференціальних або алгебраїчних операціях, які здійснюються над $D_{ij}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \omega)$, тобто грають лише роль зовнішніх параметрів. Функція $D_{ij}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \omega)$ повинна відповідати певним умовам на границі твердого тіла: повинні бути безперервними (по змінній \mathbf{r}) функції $D_{ij}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \omega)$ і $\text{rot}_{li} D_{ij}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \omega)$. Можна уникнути необхідності вирішувати рівняння (3.15), якщо врахувати, що це рівняння (при фіксованих значеннях j і \mathbf{r}_a) збігається з рівнянням для електричного поля, яке створює точковий диполь $d_j(\omega) = -\omega^{-2} \delta_{ij}$, що знаходиться в точці \mathbf{r}_a . Це поле легко знайти за відомими формулами електростатики. Необхідно, однак, враховувати, що нас зараз цікавить не повне поле $\langle \mathbf{E}^{tot} \rangle$, а тільки поле від твердого тіла. Це поле $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})$ обумовлено диполем-зображенням

$$\mathbf{d}_{im}(\omega) = \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega) + 1} \{-d_x, -d_y, d_z\}, \quad (3.16)$$

який виникає в середовищі в точці з координатами $\mathbf{r}_{im} = (0, 0, -l)$. В результаті знаходимо, що нормальна складова середнього електричного поля (3.14) дорівнює

$$\langle E_z(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\epsilon(0) - 1}{\epsilon(0) + 1} \cdot \frac{3(z+l)^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{im}|^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{im}|^5} \langle d_z \rangle. \quad (3.17)$$

Повне електричне поле $\langle \mathbf{E}^{tot}(\mathbf{r}) \rangle$ в (3.6) дається сумою виразу (3.17) і поля, яке створюється диполем $\langle d_z \rangle$. На далеких відстанях ($z \gg l$)

$$\langle E_z^{tot}(\mathbf{r}) \rangle = \left[1 + \frac{\epsilon(0) - 1}{\epsilon(0) + 1} \right] \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \langle d_z \rangle. \quad (3.18)$$

Цей вираз показує, що в твердому тілі індукується дипольний момент аналогічний отриманому методом зображень. Тут варто зазначити, що метод зображень в даній системі не завжди дає коректний результат. Це, наприклад, відноситься до розрахунку енергії взаємодії атома і твердого тіла (див. [86]).

З виразу (3.18) також видно, що електричне поле системи «атом - тверде тіло» на відстанях, далеких у порівнянні з відстанню від атома до поверхні, еквівалентно полю диполя $2\epsilon(0)\langle d_z \rangle / (\epsilon(0) + 1)$, розташованого безпосередньо на підкладці. Нижче під ефективним диполем атома ми будемо розуміти саме цей диполь.

Як було згадано вище, середній дипольний момент атома $\langle \mathbf{d} \rangle$, наведений підкладкою, був розрахований в ряді робіт. Ми скористаємося результатом роботи [71] (див. також (1.27)). Якщо типові значення плазмової частоти ω_p (у випадку металевої підкладки) багато більше частот збуджень ω_a атома, то дипольний момент атома $\langle \mathbf{d} \rangle$, що наводиться підкладкою, і відповідний ефективний дипольний момент \mathbf{p} будуть дорівнювати

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \frac{1}{8} \frac{\alpha^2}{e l^4} C \hbar \omega_a \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{p} = \frac{2\epsilon(0)\langle d_z \rangle}{\epsilon(0) + 1} \hat{\mathbf{z}} \equiv A e a_B \left(\frac{a_B}{l} \right)^4 \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.20)$$

Тут C – числовий коефіцієнт порядку одиниці, $\hat{\mathbf{z}}$ – одиничний вектор, спрямований по нормалі до поверхні середовища. Надалі нас буде цікавити електричне поле, обумовлене наявністю плівки гелію. Для атома ${}^4\text{He}$ поляризованість $\alpha = 2 \cdot 10^{-25} \text{ см}^3$, а коефіцієнт $C = 9/4$. У випадку металевої підкладки після підстановки числових значень букв (з урахуванням того, що для металу $\epsilon \rightarrow \infty$ и що $\hbar \omega_a = (1/2)e^2 a_B^{-1}$) отримаємо $A = C\alpha^2 / 8a_B^6 \approx 0.5$.

Таким чином, в даному підрозділі була розглянута система «атом - тверде тіло» і знайдено повне середнє електричне поле, що породжується такою

системою в навколишньому просторі. Показано, що це поле відповідає полю наведеного підкладкою (твердим тілом) диполя атома і його зображення.

3.2. Флексоелектричний ефект

Взаємодія атома з підкладкою є не єдиним можливим механізмом його поляризації в гелієвій плівці. Розглядаючи плівку гелію, яка покриває підкладку, потрібно також враховувати дипольні моменти, що наводяться на атомі сусідніми атомами. Як було зазначено в підпункті 1.2.1, взаємодія двох атомів гелію один з одним приводить до перерозподілу електронної густини кожного з них. В результаті у пари атомів з'являються рівні за модулем і протилежно спрямовані дипольні моменти. Оскільки середня відстань R між атомами в плівці гелію багато більше розміру атома, центр розподілу електронної густини одного атома виявляється зміщеним в сторону другого. В силу того, що відстань R також багато менше характерних довжин хвиль в спектрах взаємодіючих атомів і при розгляді ван-дер-ваальсової взаємодії можна знехтувати ефектами запізнювання, вираз для величини дипольного моменту, що наводиться іншим атомом, у першому наближенні має вигляд (див. (1.8))

$$d_0 = D_7 \frac{ea_B^8}{R^7}. \quad (3.21)$$

Для атомів гелію $D_7 \approx 18.4$. Дипольний момент деякого атома в середовищі виходить підсумовуванням моментів, що наводяться в цьому атомі усіма іншими атомами. Виявляється, що при наявності неоднорідності, у атомів в об'ємі плівки виникає відмінний від нуля дипольний момент, який дорівнює (порівняй з (1.10))

$$\mathbf{d}_f = -\frac{4\pi D_7 ea_B^8}{9a^3} \nabla n_3. \quad (3.22)$$

Тут a – середня відстань між атомами гелію, n – тривимірною густина атомів в плівці. Таким чином, просторова неоднорідність системи породжує в ній локальний дипольний момент (аналог флексоелектричного ефекту в кристалах).

Пов'язаний з неоднорідністю сумарний дипольний момент компенсується дипольними моментами, що виникають в поверхневому шарі плівки і в шарі, що контактує з підкладкою. Дипольні моменти в шарах істотно перевершують їх значення (3.22) в об'ємі та в головному наближенні компенсують один одного. Створювані цими моментами електричні потенціали в цьому ж наближенні також компенсують один одного. У наступному наближенні виникають поправки до потенціалу такого ж порядку, як від дипольних моментів (3.22). Тому для їх оцінки досить знайти вклад в потенціали від дипольних моментів (3.22).

Щоб оцінити цей внесок, врахуємо, що градієнт густини ∇n , що входить в (3.22), знаходиться з умови балансу сили тиску $\nabla p / \rho$ (ρ – масова густина гелію, p – тиск) і сили Ван-дер-Ваальса \mathbf{F}_v , яка діє на атоми з боку підкладки. Враховуючи що $\nabla p = (\partial p / \partial \rho) \nabla \rho = c_1^2 \nabla \rho$, де $c_1 \approx 2.4 \cdot 10^4 \text{ см/с}$ – швидкість першого звуку в рідкому гелії, отримуємо

$$\nabla n = \frac{n}{c_1^2 M} \cdot \mathbf{F}_v. \quad (3.23)$$

Якщо відстань від атома до підкладки не надто велика так, що ефекти запізнювання несуттєві (ця умова виконується у випадку тонких плівок гелію, які розглядаються), і якщо знову вважати, що $\omega_p \gg \omega_a$, то сила Ван-дер-Ваальса дорівнює [84]

$$\mathbf{F}_v = \frac{\hbar \omega_a \alpha}{8l^4} \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.24)$$

Тут α – статична поляризованість атома гелію, $\hat{\mathbf{z}}$ – одиничний вектор, спрямований по нормалі до поверхні середовища. З (3.22) – (3.24) знаходимо

$$\mathbf{d}_f = \frac{4\pi D_7 e a_B^8 n \hbar \omega_a \alpha}{72 a^3 M c_1^2} \frac{1}{l^4} \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.25)$$

Повний дипольний момент атома дається сумою (3.19) і (3.25)

$$\mathbf{d}_{tot} = \langle \mathbf{d} \rangle + \mathbf{d}_f = \left(1 + \frac{4\pi D_7 e^2 a_B^8 n}{9C\alpha a^3 M c_1^2} \right) \langle \mathbf{d} \rangle. \quad (3.26)$$

Приймаючи $a = 4.44 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ [87] і враховуючи, що для рідкого гелію середня густина $n = 2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, а маса атома гелію $M = 6.648 \cdot 10^{-24} \text{ г}$, отримуємо, що другий доданок в дужках дорівнює 0.48 так, що флексоелектричний ефект приводить лише до невеликого перенормування дипольного моменту атома, який наводиться підкладкою. Мале перенормування дипольного моменту приводить до малої поправки для електричного потенціалу. Це дозволяє надалі опускати поправку, пов'язану з неоднорідністю.

3.3. Поляризація плівки надплинного гелію

У пункті 3.1 було показано, що з кожним атомом плівки гелію буде пов'язаний ефективний дипольний момент (3.20). У випадку плівки гелію на металевій поверхні це приводить до появи в плівці поляризації

$$\mathbf{P}(z) = Aea_B \left(\frac{a_B}{l} \right)^4 n \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.27)$$

З цього виразу видно, що поляризація швидко убуває при видаленні від поверхні металу. Ми будемо розглядати плівки з товщиною близько ефективного шару, в якому відбувається взаємодія. В цьому випадку можна вважати, що з плівкою пов'язана двовимірною поляризація \mathbf{P}_S , вираз для якої виходить інтегруванням (3.27) по l від дна плівки (тобто від $l = a$) до її поверхні (тобто до $l = h$, де h – товщина плівки). В результаті

$$\mathbf{P}_S = \frac{1}{3} Aea_B^2 \left(\frac{a_B^3}{a^3} - \frac{a_B^3}{h^3} \right) n \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.28)$$

У випадку, коли товщина плівки h і її густина n не змінюються з плином часу, підкладка індукує постійний дипольний момент \mathbf{P}_S . Спостереження ефектів, обумовлених появою на поверхні плівки постійного дипольного моменту, представляє значні експериментальні труднощі. Значно простіше спостерігати,

наприклад, за допомогою резонансних вимірювань змінну (у часі і просторі) добавку до \mathbf{P}_s . Поява такої добавки, як видно з (3.28), може бути пов'язана зі змінною добавкою до товщини плівки h або густини n . Зміна товщини при незмінній густині буде мати місце при поширенні у плівці третього звуку, а зміна густини при постійній товщині плівки відбувається при поширенні четвертого звуку. Коливання густини або товщини плівки можна генерувати створенням змінної різниці температур між кінцями плівки. Поширення третього або четвертого звуку в плівці пов'язано з дією сили на границі системи. Покажемо, що для надплинних плівок гелію, починаючи з товщини порядку міжатомної відстані, буде реалізовуватися третій звук.

Зміна хімічного потенціалу $\delta\mu$ при зміні масової густини $\delta\rho$ і товщини плівки гелію δh записується у вигляді

$$\delta\mu = \frac{c_1^2}{\rho_0} \delta\rho + \frac{\alpha_v}{h_0^4} \delta h, \quad (3.29)$$

де h_0 і ρ_0 – рівноважні значення товщини і масової густини плівки гелію, α_v – параметр, що характеризує інтенсивність сил Ван-дер-Ваальса, які діють на плівку з боку підкладки. Тут опущено внесок в $\delta\mu$ від добавки до температури δT . При поширенні четвертого звуку облік температурної добавки приводить до необхідності заміни коефіцієнта c_1^2 / ρ_0 на c_4^2 / ρ_s , де c_4 – швидкість четвертого звуку, ρ_s – надплинна густина. Але швидкість c_4 пов'язана зі швидкістю першого звуку c_1 и другого звуку c_2 співвідношенням $c_4^2 = c_1^2 \rho_s / \rho_0 + c_2^2 \rho_n / \rho_0$, де ρ_n – нормальна густина. Майже при всіх температурах другий доданок в цій рівності багато менше першого. В результаті ми повертаємося до коефіцієнта перед $\delta\rho$, який записано в (3.29).

Переходячи до доведення зробленого вище твердження, відзначимо, що при поширенні у плівці четвертого звуку добавка до густини на одиницю площі дорівнює $h_0 \delta\rho$. При незмінній густині додаткові частинки приведуть до зміни

товщини плівки на δh , причому зі збереження кількості речовини випливає, що $h_0 \delta \rho = \rho_0 \delta h$. З урахуванням цієї рівності неважко переконатися, що доданки в (3.29) зрівнюються при $h_0 = \sqrt[3]{\alpha_v / c_1^2} \equiv h_0^{cr}$. Для характерних числових значень ($c_1^2 \approx 5,76 \cdot 10^8 \text{ см} / \text{с}$ і, зокрема, для фториду кальцію (CaF_2) (див., наприклад, [88]) $\alpha_v \approx 2,2 \cdot 10^{-14} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 / \text{г}$) отримаємо $h_0^{cr} \approx 3,4 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Для металевій підкладки з (3.24) константа $\alpha_v = \hbar \omega_a \alpha / 8M \approx 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 / \text{г}$ і, відповідно, $h_0^{cr} \approx 5,2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. При $h_0 \gg h_0^{cr}$ перший доданок в (3.29) істотно перевершує інший, й сила на границі плівки буде приводити до поширення у плівці саме третього звуку. З наведених оцінок видно, що поширення четвертого звуку могло б мати місце в моношарових плівках. Як відомо, перший шар гелію на металевій підкладці є кристалічним. Тому можливість поширення четвертого звуку в тонких плівках не реалізується. Далі ми будемо розглядати випадок, коли в плівці поширюється третій звук. При цьому змінною величиною в (3.28) є товщина плівки h . Припускаючи, що коливання в системі є малими, будемо записувати товщину плівки у вигляді $h = h_0 + h'(t, \mathbf{r})$, де $h'(t, \mathbf{r}) \ll h_0$ (h_0 – рівноважна товщина плівки). Лінійна по $h'(t, \mathbf{r})$ добавка до \mathbf{P}_S дорівнює

$$\mathbf{P}'_S = A e a_B n \left(\frac{a_B}{h_0} \right)^4 h'(t, \mathbf{r}) \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.30)$$

Таким чином, за рахунок наявності у кожного атома гелію ефективного дипольного моменту (3.20), при поширенні хвилі третього звуку в плівці гелію виникає неоднорідна поляризація $\mathbf{P}'_S(t, \mathbf{r})$ (див. рис. 3.2), що супроводжується появою в навколишньому просторі осцилюючого електричного потенціалу.

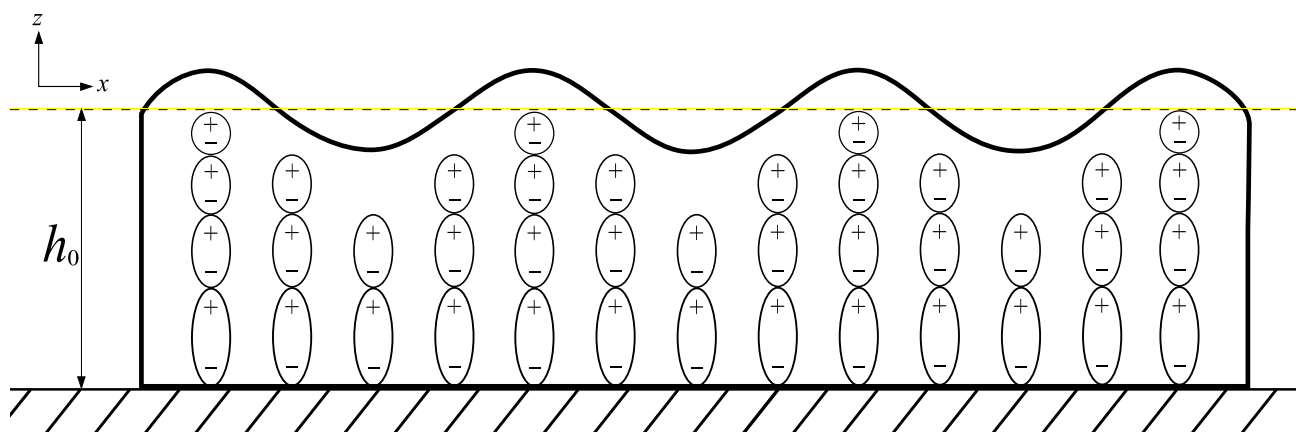


Рис. 3.2 Схематичне зображення розподілу дипольних моментів атомів в плівці гелію при поширенні третього звуку.

Отже, розглянемо тонку надплинну плівку, в якій поширюється третій звук. Третій звук являє собою поверхневу хвилю, довжина хвилі якої істотно перевершує товщину плівки, причому нормальна компонента залишається в спокої (відносно підкладки), а надплинна компонента осцилює паралельно підкладці [89, 90]. У якості джерела третього звуку розглянемо осциляції температури на границі плівки [91]. Коливання температури на границі будуть приводити до коливань температури в плівці, викликаючи рух надплинної компоненти. Це, в свою чергу, приводить до коливань товщини плівки. Таким чином, величинами, які описують поведінку плівки при поширенні третього звуку, є температура $T = T_0 + T'(t, x)$ (T_0 – рівноважна температура плівки), швидкість надплинної компоненти $v_s = v_s(t, x)$ і товщина плівки $h = h_0 + h'(t, x)$. Тут ми вважаємо, що плівка покриває плоску підкладку і лежить в площині xOy , звукова хвиля поширюється вздовж осі x і система однорідна вздовж осі y .

Перш, ніж записати рівняння для цих величин, відзначимо, що поведінка системи залежить від інтенсивності відводу тепла в підкладку, швидкості випаровування атомів з поверхні плівки і ефектів вихроутворення. Нижче буде показано, що наявність вихорів приводить тільки до перенормування швидкості третього звуку і їх вплив на величину електричного поля, пов'язаного з хвилею

третього звуку, є слабким навіть поблизу надплинного переходу. Тому зараз ми будемо нехтувати можливістю появи в системі вихорів. У разі тонких плівок відведенням тепла в підкладку також можна знехтувати. З урахуванням ефектів випаровування і конденсації атомів гелію рівняння, що описують поведінку плівки, мають вигляд

$$\rho \frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \rho_s \frac{\partial v_s}{\partial x} = -J_m, \quad (3.31)$$

$$\rho s T_0 \frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \rho C_h \frac{\partial T'}{\partial t} = -s_g T_0 J_m - J_Q, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = s \frac{\partial T'}{\partial x} - \frac{\alpha_v}{h_0^4} \frac{\partial h'}{\partial x}. \quad (3.33)$$

Тут s – питома ентропія гелію, C_h – теплоємність на одиницю маси гелію, s_g – питома ентропія парової фази, J_m – масовий потік, а J_Q – тепловий потік з поверхні плівки в парову фазу.

Рівняння (3.31) є рівняння безперервності, в правій частині якого враховуються ефекти випаровування. Рівняння (3.32) виражає закон збереження ентропії. Права частина (3.32) враховує потік ентропії з плівки в парову фазу, обумовлений потоком маси (перший доданок) і теплопровідністю парової фази. Останнє рівняння (3.33) є рівняння руху надплинної компоненти. У правій частині цього рівняння стоїть вираз для градієнта хімічного потенціалу, в якому враховані сили Ван-дер-Ваальса (другий доданок), що діють на плівку з боку підкладки. Вирази для J_m і J_Q були отримані в роботі [92]

$$J_m = \frac{4J_0}{k_B T_0} \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho}\right)^{-1} \left[\mu_f - \mu_g + \left(s_g - \frac{k_B}{2M}\right) (T' - T'_g) \right], \quad (3.34)$$

$$J_Q = -J_0 \left[\mu_f - \mu_g + \left(s_g - \frac{9k_B}{2M}\right) (T' - T'_g) \right]. \quad (3.35)$$

Тут μ_f – добавка до хімічного потенціалу рідини ($\mu_f = -sT' + (\alpha_v / h_0^4)h'$), μ_g – добавка до хімічного потенціалу парової фази

($\mu_g = -(s_g + k_B / M)T_g' + (k_B T / M \rho_g) \rho_g'$), ρ_g' і T_g' – осцилюючі частини густини і температури пари відповідно, k_B – стала Больцмана, $J_0 = \rho_g (k_B T_0 / 8\pi M)^{1/2}$. Додаток до густини парової фази ρ_g' , що входить у вирази для хімічних потенціалів μ_f і μ_g , може бути виключена за допомогою рівнянь руху парової фази. В результаті з (3.35) випливає

$$J_Q = -J_0 \left[\frac{L_{ev}}{T_0} T' + \frac{\alpha_v}{h_0^4} h' - \frac{9k_B}{2M} (T' - T_g') \right], \quad (3.36)$$

де L_{ev} – прихована теплота пароутворення ($L_{ev} = T_0(s_g - s)$). При не дуже низьких температурах кожен з доданків (3.36), якщо він не скорочується з іншими, приводить до великого тепловому потоку J_Q . При цьому права частина в рівнянні (3.32) багато більше його лівої частини. Щоб задовольнити рівнянню (3.32) слід аби виконувалася умова $J_Q = 0$ [92]. У випадку ненасичених плівок $T' - T_g' \ll T'$ і третім доданком в (3.36) можна знехтувати. Тоді з $J_Q = 0$ випливає

$$h' = -\frac{L_{ev} h_0^4}{\alpha_v T_0} T', \quad (3.37)$$

Після підстановки h' з (3.37) в (3.30) знайдемо зв'язок між поляризацією плівки \mathbf{P}_s' і її температурою T' .

З огляду на (3.37), з рівнянь (3.31) – (3.33) можна знайти закон дисперсії третього звуку. Припускаючи, як і вище, що $T' - T_g' \ll T'$, і здійснюючи пошук рішень у вигляді біжучих хвиль (тобто $T' \sim \exp[i(\omega t - kx)]$ і аналогічно для h' і v_s), отримаємо $(\omega / k)^2 = c_3^2$, де ω і k – частота і хвильове число, а квадрат швидкості третього звуку

$$c_3^2 = \frac{\alpha_v \rho_s}{\rho h_0^3} \left(1 + \frac{s T_0}{L_{ev}} \right)^2. \quad (3.38)$$

Відзначимо, що потоки J_m і J_Q пропорційні густині парової фази, яка затухає при зменшенні температури експоненційно. У роботах [93, 94] показано, що при низьких температурах енергія зв'язку атома гелію з поверхнею дорівнює $7.15K$. Тому при температурах $T_0 \ll 7.15K$ праві частини в рівняннях (3.31) і (3.32) будуть експоненційно малими і ними можна знехтувати. Розв'язуючи рівняння (3.31) – (3.33) при $J_m = J_Q = 0$, легко знайти, що тепер

$$h' = -\frac{h_0 C_h}{sT} T', \quad (3.39)$$

а квадрат швидкості третього звуку

$$c_3^2 = \frac{\rho_s}{\rho} \left[\frac{\alpha_v}{h_0^3} + \frac{s^2 T_0}{C_h} \right]. \quad (3.40)$$

Відзначимо, що в даному випадку генерації третього звуку температурними осциляціями відхилення висоти плівки h' від її рівноважного значення h_0 , як видно з (3.37) і (3.39), по-різному залежить від h_0 . У випадку низьких температур $h' \sim h_0$, а при високих – $h' \sim h_0^4$. Останнє приводить до дещо несподіваного результату, що при високих температурах добавка до рівноважної поляризації \mathbf{P}_s' не залежить від h_0 . Цей результат справедливий, доки добавка до температури T' породжує відхилення h' , яке задовольняє умові $h' \ll h_0$, що, згідно (3.37), еквівалентно нерівності

$$h_0 \ll \sqrt[3]{\frac{\alpha_v T_0}{L_{ev} T'}}. \quad (3.41)$$

3.4. Термоелектрорушійна сила, яка породжується третім звуком

Переходячи до обчислення електричних полів, що породжуються в просторі осцилюючими дипольними моментами плівки і підкладки, врахуємо, що надплинна плівка розповзається по поверхні твердого тіла, повністю покриваючи всю поверхню (якщо температура тіла нижче температури

надплинного переходу). Тому в загальному випадку відповідь залежить від форми підкладки. Нижче ми обмежимося випадком циліндричного зразка.

Будемо приймати, що внутрішній радіус циліндра дорівнює R_1 , зовнішній радіус – R_2 , причому приймається, що $R_2 + R_1 \gg R_2 - R_1$. Надалі будемо використовувати позначення $R = (R_1 + R_2) / 2$. Виберемо циліндричну систему координат з початком координат в геометричному центрі циліндра і будемо тепер вважати, що вісь z спрямована уздовж осі циліндра. Будемо також вважати, що радіус циліндра R і координата точки спостереження поля z_0 задовольняють нерівностям $L_z \gg R$ і $L_z \gg z_0$, де L_z – висота циліндра (див. рис. 3.3).

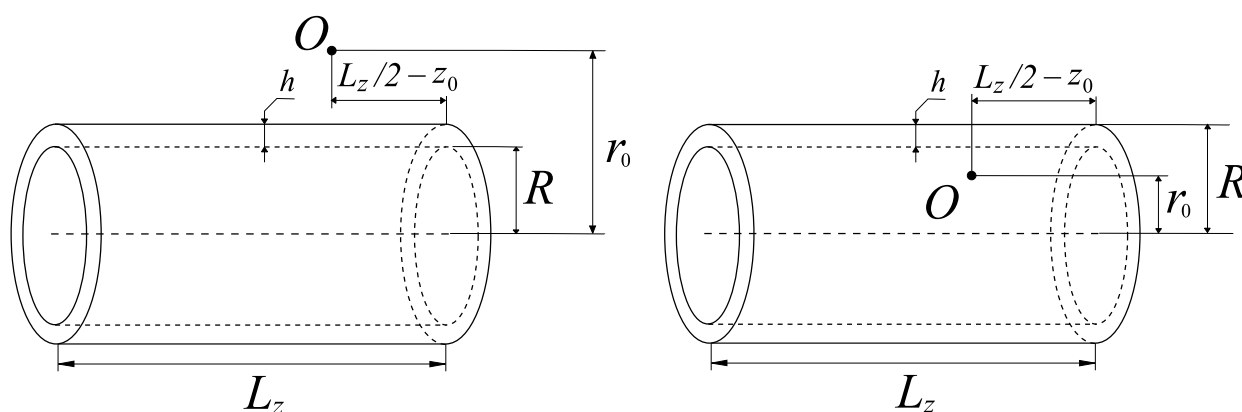


Рис. 3.3 Плівка надплинного гелію товщиною h , що покриває циліндр зовні (лівий рисунок) або зсередини (правий рисунок). Точка O є точкою спостереження електричного поля.

Нехай в умовах експерименту реалізується режим стоячої хвилі, тобто температурні коливання даються сумою двох біжучих уздовж циліндра хвиль, що поширюються назустріч одна одній. Якщо третій звук збуджується протифазними коливаннями температури на краях циліндра, то $T' = 2T'_A \sin kz \exp[i(\omega t + \pi / 2)]$, де T'_A – амплітудне значення температури. З огляду на, що частоти третього звуку ω істотно менше атомних частот, за заданою поляризацією $\mathbf{P}'_s(\mathbf{r})$ потенціал електричного поля в навколишньому

просторі можна знайти за допомогою відомого виразу електростатики (2.51), який може бути перетворено до виду

$$\varphi(r_0, z_0) = \tilde{P}(t) \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R(R - r_0 \cos \theta) \sin kz}{\left(R^2 - 2Rr_0 \cos \theta + r_0^2 + (z - z_0)^2\right)^{3/2}} d\theta dz. \quad (3.42)$$

Тут $\mathbf{R}_0 = (r_0, \theta_0, z_0)$ – радіус-вектор точки спостереження. Вираз для $\tilde{P}(t)$ має різний вигляд при високих і низьких температурах. При високих температурах з (3.30) і (3.37) випливає, що двовимірна поляризація

$$\tilde{P}(t) = \left(2Aea_B n \left(\frac{a_B}{h_0} \right)^4 \frac{L_{ev} h_0^4 T'_A}{\alpha_v T_0} \right) \exp[i(\omega t - \pi / 2)]. \quad (3.43)$$

При низьких температурах з (3.30) і (3.39) знаходимо

$$\tilde{P}(t) = \left(2Aea_B n \left(\frac{a_B}{h_0} \right)^4 \frac{h_0 C_h T'_A}{s T_0} \right) \exp[i(\omega t - \pi / 2)]. \quad (3.44)$$

Тут враховано, що коливання товщини плівки і температури знаходяться в протифазі.

Інтеграл, який виникає в (3.42) не вдається обчислити при довільних r_0, z_0 . Можна, однак, переконатися, що при $L_z \gg z_0$ вираз для $\varphi(r_0, z_0)$ факторизується і може бути записано у вигляді

$$\varphi(r_0, z_0) = f(r_0) \sin kz_0, \quad (3.45)$$

де

$$f(r_0) = \tilde{P}(t) \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R(R - r_0 \cos \theta) \cos kz d\theta dz}{\left(R^2 - 2Rr_0 \cos \theta + r_0^2 + z^2\right)^{3/2}}. \quad (3.46)$$

Інтегрування в (3.46) як і раніше не вдається виконати при довільних r_0 , але функцію $f(r_0)$ можна знайти, виходячи з таких міркувань. У навколишньому просторі відсутні вільні заряди і тому потенціал $\varphi(r_0, z_0)$ повинен задовольняти рівнянню Лапласа $\nabla_0^2 \varphi(r_0, z_0) = 0$ (за винятком поверхні циліндра). Підстановка в

це рівняння виразу (3.45) показує, що функція $f(r_0)$ повинна задовольняти рівнянню

$$\frac{d^2 f}{dr_0^2} + \frac{1}{r_0} \frac{df}{dr_0} - k^2 f = 0. \quad (3.47)$$

Розв'язок цього рівняння, як відомо, має вигляд

$$f(r_0) = C_1 I_0(kr_0) + C_2 K_0(kr_0). \quad (3.48)$$

Тут і надалі $I_n(kr_0)$ і $K_n(kr_0)$ – модифіковані функції Бесселя n -ого порядку першого і другого роду відповідно. Коефіцієнти C_1 і C_2 стрибком змінюються при переході через поверхню циліндра і знаходяться з таких міркувань. При $r_0 > R$ функція $I_0(kr_0)$ зростає експоненційно, тому, в цьому випадку, коефіцієнт C_1 перед $I_0(kr_0)$ в (3.48) слід покласти рівним нулю. Коефіцієнт C_2 перед $K_0(kr_0)$ можна знайти, обчисливши функцію $f(r_0)$ при конкретному значенні r_0 . Аналогічно, при $r_0 < R$ слід врахувати, що функція $K_0(kr_0)$ розходиться в нулі і тому тепер слід покласти $C_2 = 0$. Щоб знайти коефіцієнт C_1 , знову досить знайти функцію $f(r_0)$ при деякому конкретному значенні r_0 . Зручно зробити це при $r_0 = R(1 + \delta)$, $|\delta| \ll 1$. При цьому

$$C_1 = \frac{f(R(1 - |\delta|))}{I_0(kR)}, \quad (3.49)$$

$$C_2 = \frac{f(R(1 + |\delta|))}{K_0(kR)}. \quad (3.50)$$

Обчислимо значення функції $f(R(1 + \delta))$. Вважаючи, що на довжині циліндра укладає багато довжин хвиль третього звуку так, що $kL_z \gg 1$, після інтегрування (3.46) по z маємо

$$f(R(1 + \delta)) = 8\tilde{P}(t)kR \int_0^{\pi/2} \frac{[2\sin^2 \theta - \delta] K_1(kR\sqrt{4\sin^2 \theta + \delta^2})}{\sqrt{4\sin^2 \theta + \delta^2}} d\theta. \quad (3.51)$$

Як видно, вираз можна розбити на два інтеграла, перший з яких в нульовому наближенні за δ дає

$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cdot K_1(2kR \sin \theta) d\theta = \frac{\pi}{4} [I_0(kR)K_1(kR) - I_1(kR)K_0(kR)]. \quad (3.52)$$

З другого інтеграла в першому неznикаючому порядку по δ отримуємо

$$\delta \int_0^{\pi/2} \frac{K_1(kR \sqrt{4 \sin^2 \theta + \delta^2})}{\sqrt{4 \sin^2 \theta + \delta^2}} d\theta = \frac{\pi}{4kR} \frac{\delta}{|\delta|} \equiv \frac{\pi}{4kR} \operatorname{sgn}(\delta). \quad (3.53)$$

В результаті, отримуємо для шуканого інтеграла

$$f(R(1 + \delta)) = 2\pi \tilde{P}(t) kR \left[I_0(kR)K_1(kR) - I_1(kR)K_0(kR) - \frac{\operatorname{sgn}(\delta)}{kR} \right]. \quad (3.54)$$

З огляду на співвідношення між модифікованими функціями Бесселя

$$I_0(x)K_1(x) + I_1(x)K_0(x) = \frac{1}{x}, \quad (3.55)$$

з (3.45), (3.48) – (3.50) та (3.54) отримуємо остаточне вираження для потенціалу електричного поля

$$\varphi(r_0, z_0) = 4\pi \tilde{P}(t) kR \sin kz_0 \cdot \begin{cases} K_1(kR)I_0(kr_0) & , r_0 < R \\ -I_1(kR)K_0(kr_0) & , r_0 > R \end{cases} \quad (3.56)$$

Поведінка потенціалу φ як функції kr_0 істотно залежить від величини kR . При $kR \ll 1$ і $kr_0 \ll 1$ з (3.56) випливає, що потенціал повного електричного поля над плівкою дорівнює

$$\varphi(r_0, z_0) = 4\pi \tilde{P}(t) \sin kz_0 \begin{cases} 1 & , r_0 < R \\ \left((kR)^2 / 2 \right) \ln kr_0 & , r_0 > R \end{cases} \quad (3.57)$$

При $kR \ll 1$ і $kr_0 \gg 1$

$$\varphi(r_0, z_0) = 2\pi \tilde{P}(t) (kR)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2kr_0}} \exp(-kr_0) \sin kz_0. \quad (3.58)$$

При $kR \gg 1$ потенціал $\varphi(r_0)$ не малий, якщо точка спостереження r_0 знаходиться поблизу поверхні циліндра. При цьому

$$\varphi(r_0, z_0) = \operatorname{sgn}(R - r_0) 2\pi \tilde{P}(t) \exp(-k|R - r_0|) \sin kz_0. \quad (3.59)$$

Відзначимо, що вирази (3.57) – (3.59) є наближеними (опущено поправки порядку $kr_0 \ll 1$) і тому вони не повинні задовольняти рівнянню Лапласа. Для точного виразу (3.56) маємо $\nabla_0^2 \varphi(r_0, z_0) = 0$.

Отже, коливання температури на границях плівки приводять до коливань товщини плівки. З коливаннями товщини пов'язані коливання дипольного моменту, що наводиться підкладкою і взаємодією між атомами. Коливання дипольного моменту породжують в навколишньому просторі електричні поля. Таким чином, ми виявляємо існування зв'язку між електричними полями і температурою, тобто своєрідний термоелектричний ефект.

Щоб знайти зв'язок між градієнтом температури в плівці і електричним потенціалом, що породжується цим градієнтом, слід підставити в (3.56) вираз (3.43) при високих температурах і (3.44) при низьких. Як видно, величина потенціалу, що виникає, істотно залежить від точки спостереження. При $kR \gg 1$ найбільші значення потенціалу $\varphi(r_0)$ досягаються поблизу поверхні циліндра незалежно від того, покриває плівка циліндр зовні або зсередини. При $kR \ll 1$ через наявність множника $(kR)^2 \ll 1$ амплітуда електричного потенціалу має істотно більше значення, якщо плівка покриває циліндричний зразок зсередини.

Отримаємо оцінку величини електричного потенціалу. Для низьких температур слід використовувати вираз (3.44). Ентропія і теплоємність гелію в цих умовах визначаються фононним газом, так що $C_h / s = 3$ (див. [95]). Значення електричного потенціалу сильно залежить від рівноважної товщини плівки h_0 . З (3.44) випливає, що при низьких температурах $\varphi \sim h_0^{-3}$. Найменша рівноважна товщина плівки, в якій спостерігався третій звук [96], становила два атомних шари. Вважаючи $h_0 = 2 \cdot a \approx 8.88 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ (де a – міжатомна відстань) і $n = 2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, отримуємо, що найбільше можливе значення амплітуди електричного потенціалу $|\varphi| = T'_A \cdot 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ В} \cdot (T'_A / T_0)$.

Для високих температур оцінка електричного потенціалу може бути отримана за допомогою (3.43) і (3.56). Як зазначалося вище, в цьому випадку потенціал $|\varphi|$ не залежить від рівноважної товщини плівки. Беручи $L_{ev} = 10^8 \text{ эрг} / \text{г}$, $\alpha_v = 2,2 \cdot 10^{-14} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 / \text{г}$ і $n = 2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, отримуємо $|\varphi| = 6,8 \cdot 10^{-4} \text{ В} \cdot (T'_A / T_0)$. При $T'_A \sim 10^{-3} \text{ К}$ ця оцінка, як випливає з (3.41), справедлива до товщини порядку $h_0 \approx 13,6 \cdot a \approx 6 \cdot 10^{-7} \text{ см}$.

Відношення $|\varphi| / T'_A$, як відомо, називається диференційною термоелектрорушійною силою (термо-е.р.с.). Саме ця величина є характеристикою термоелектричних властивостей речовини. Для чистих немагнітних металів ця величина порядку $10^{-6} - 10^{-8} \text{ В} / \text{К}$ (див., наприклад, [97]). Тому диференційну термо-е.р.с., пов'язану з третім звуком, можна було б навіть назвати гігантською. Причиною великої термо-е.р.с. є аномально великий термомеханічний ефект в надплинному гелії. Для прийнятого вище відношення амплітудного значення температури до рівноважної температури плівки $T'_A / T_0 \sim 10^{-3}$ термоелектричний потенціал φ буде досить малим ($\varphi \approx 10^{-7} \text{ В}$).

Таким чином, в даному пункті показано, що дві унікальні властивості надплинних систем – здатність протікати без дисипації по шорсткій поверхні і аномально великий термомеханічний ефект – приводять до ще однієї унікальної властивості – нестационарного термоелектричного ефекту, пов'язаного з третім звуком. Ефект можна вважати електричним аналогом ефекту фонтанування.

3.5. Вклад термічно активованих вихорів в термоелектричний ефект

До сих пір ми не враховували можливість появи в плівці термічно активованих вихорів. Появу вихорів необхідно враховувати поблизу температури переходу Березинського-Костерлица-Таулесса T_c в надплинний стан. Як відомо, нижче температури T_c вихори з протилежною циркуляцією

пов'язані в пари, дисоціація яких приводить до переходу плівки в нормальний стан. Нижче ми обмежуємося розглядом тільки області температур $T < T_c$. При наявності в плівці пов'язаних пар, рівняння руху надплинної компоненти (3.33) має бути змінено. Ця зміна відома в літературі (див., наприклад, [78, 98]). Ми наведемо просте його виведення, засноване на рівнянні Гросса-Пітаєвського, реальна частина якого дорівнює

$$\frac{\hbar}{M} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M^2} (\nabla \phi(\mathbf{r}, t))^2 + \mu_f. \quad (3.60)$$

Надплинна швидкість $\mathbf{v}_s = (\hbar / M) \nabla \phi$ тепер записується у вигляді $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{s0} + \mathbf{v}_v$, і визначається як потенціальними потоками ($\text{rot } \mathbf{v}_{s0} = 0$), так і вихорами ($\text{div } \mathbf{v}_v = 0$). При отриманні рівняння для \mathbf{v}_s при наявності вихорів, слід врахувати, що потік, що обтікає вихор, приводить до руху вихору як цілого зі швидкістю \mathbf{v}_L (див. (2.40) – (2.41)). З огляду на цю обставину, а також, на те, що $-\nabla(\mathbf{v}_L \cdot \mathbf{v}_v) = \partial \mathbf{v}_v / \partial t + \hat{\mathbf{z}} \times \kappa \mathbf{v}_L \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_L)$ (тут вісь z спрямована по нормалі до плівки, κ – циркуляція вихору, \mathbf{r}_L – радіальна координата вихору), отримуємо за допомогою (3.60), що при наявності вихорів

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = \nabla \mu_f + \frac{2\pi \hbar}{M} \sum_i (\mathbf{v}_{Li} - \mathbf{v}_s) \times n_i \hat{\mathbf{z}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Li}), \quad (3.61)$$

де $n_i = \pm 1$ – знак циркуляції i -го вихору, що рухається зі швидкістю \mathbf{v}_{Li} . З цього рівняння випливає, що при наявності в системі вихорів зміна рівняння (3.33) не зводиться до простої заміни в цьому рівнянні \mathbf{v}_{s0} на $\mathbf{v}_{s0} + \mathbf{v}_v$. До правої частини (3.33) слід додати другий доданок правої частини (3.61), що є силами Магнуса, що діють на вихори.

Для подальшого зручно ввести вектор густини потоку циркуляції $\mathbf{J}_v = (2\pi \hbar / M) \sum_i n_i \mathbf{v}_{Li} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Li})$. За його допомогою рівняння (3.61) можна привести до виду

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}_v = -\nabla \left(\frac{v_s^2}{2} + \mu_f \right). \quad (3.62)$$

Ми будемо цікавитися ефектами, лінійними по швидкості \mathbf{v}_s , тобто будемо нехтувати першим доданком в правій частині (3.62). Густина потоку \mathbf{J}_v залежить від орієнтації вихорових пар і задача полягає в тому, щоб усереднити рівняння (3.62) по їх положенню. Середнє значення густини потоку циркуляції, пов'язаної з парами вихорів, визначається виразом

$$\langle \mathbf{J}_v \rangle \equiv \int \frac{d^2 r}{A} \langle \mathbf{J}_v \rangle_l = \frac{2\pi\hbar}{M} \int d^2 l \frac{d\mathbf{l}}{dt} \Gamma(\mathbf{l}, t), \quad (3.63)$$

де \mathbf{l} – вектор, що з'єднує вихор від'ємної циркуляції з вихором додатної циркуляції вихорової пари, A – площа півки. Функція $\Gamma(\mathbf{l}, t)$ є число пар розміру \mathbf{l} на одиницю площі в елементі об'єму $d^2 l$. Ця функція задовольняє рівнянню Фоккера-Планка

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 2D \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial U_v}{\partial \mathbf{l}} \Gamma + \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{l}} \right) \equiv -\frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \mathbf{j}. \quad (3.64)$$

Тут U_v – енергія вихорової пари при наявності зовнішнього потоку \mathbf{v}_{s0} , D – коефіцієнт дифузії, \mathbf{j} – густина потоку в «просторі розмірів» пар. Підкреслимо, що Γ є функція \mathbf{l} , а не $d\mathbf{l}/dt$ і, щоб виконати усереднення в (3.63), слід виразити $d\mathbf{l}/dt$ через \mathbf{l} . Для цього достатньо врахувати, що розмір пари \mathbf{l} змінюється відповідно до рівняння Ланжевена

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = -\frac{2D}{T} \frac{\partial U_v}{\partial \mathbf{l}} + \boldsymbol{\eta}, \quad (3.65)$$

де $\boldsymbol{\eta}$ – флуктуаційна добавка. За допомогою (3.64) і (3.65) отримаємо з (3.63)

$$\int d^2 l \frac{d\mathbf{l}}{dt} \Gamma(\mathbf{l}, t) = \int \mathbf{j} d^2 l + 2D \int \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{l}} d^2 l. \quad (3.66)$$

При виконанні інтегрування в (3.66) слід мати на увазі таку фізичну картину (порівняй з [98, 99]). За відсутності потоку (тобто при $\mathbf{v}_{s0} = 0$) енергія вихорової пари $U_v(\mathbf{l}) = U_v(l)$, причому $U_v(l)$ зростає з ростом розміру пари l . При цьому,

якщо $T < T_c$, всі пари є пов'язаними. При наявності потоку зі швидкістю $\mathbf{v}_{s0} = (v_{s0}, 0)$ енергія $U_v(\mathbf{l})$ має сідлову точку при $\mathbf{l}_c = (l_c, 0)$, де $l_c \sim \hbar / Mv_{s0}$. Пари, які під дією випадкових теплових поштовхів перетнули сідлову точку, швидко скочуються з потенційної гірки і їх можна вважати вільними. Вибір границі, що розділяє області пов'язаних і вільних пар, є дещо умовним. В якості такої можна вибрати коло радіусом l_c . З точністю, яка нас цікавить, відповідь не залежить від цього вибору. Ми будемо вважати, що на границі $\Gamma = 0$ і тому другий інтеграл в (3.66) обертається в нуль. Перший інтеграл можна обчислити, якщо врахувати, що (див. (3.64))

$$\int \mathbf{l} \frac{\partial \Gamma(\mathbf{l}, t)}{\partial t} d^2 l = - \int \mathbf{l} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \cdot \mathbf{j} \right) d^2 l = \int \mathbf{j} d^2 l - \oint_C (d\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{l}, \quad (3.67)$$

де \mathbf{n} – вектор нормалі до контура інтегрування C , що розділяє області пов'язаних і розірваних пар. Вира з в лівій стороні цієї рівності є $d\langle \mathbf{l} \rangle / dt$. В результаті з (3.63), (3.66) і (3.67) випливає

$$\langle \mathbf{J}_v \rangle = \frac{2\pi\hbar}{M} \left(\frac{d}{dt} \int \mathbf{l} \Gamma(\mathbf{l}, t) d^2 l + \oint_C (d\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{l} \right). \quad (3.68)$$

Можна показати [99], що другий доданок в (3.68) пропорційний v_{s0}^i , де $i \geq 2$, і з точністю, яка нас цікавить, його слід опустити. Перший доданок легко зв'язати з потоком надплинної рідини \mathbf{j}_v , який створюється вихорами. Дійсно,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j}_v \rangle &\equiv \rho_{s0} \frac{\hbar}{M} \int \frac{d^2 r}{A} \left\langle \sum_{\alpha} \hat{\mathbf{z}} \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_+^{\alpha}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+^{\alpha}|^2} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_-^{\alpha}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-^{\alpha}|^2} \right) \right\rangle_l = \\ &= \rho_{s0} \frac{2\pi\hbar}{MA} \left\langle \sum_{\alpha} \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r}_-^{\alpha} - \mathbf{r}_+^{\alpha}) \right\rangle_l \end{aligned} \quad (3.69)$$

де \mathbf{r}_+^{α} і \mathbf{r}_-^{α} – координати вихорів додатної і від'ємної циркуляції α -ої пари відповідно, ρ_{s0} – надплинна густина за відсутності вихорів. З огляду на визначення усереднення $\langle \dots \rangle_l$ (див. (3.63)), отримуємо

$$\langle \mathbf{j}_v \rangle = -\frac{2\pi\hbar\rho_{s0}}{M} \hat{\mathbf{z}} \times \int \mathbf{l} \Gamma(\mathbf{l}, t) d^2l. \quad (3.70)$$

Повертаючись до вираження (3.68), знаходимо

$$\langle \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}_v \rangle = -\frac{1}{\rho_{s0}} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{j}_v \rangle. \quad (3.71)$$

При наявності вихорів надплинну густину ρ_s природно ввести за допомогою співвідношення $\rho_s(T)\mathbf{v}_{s0} = \rho_{s0}(T)\mathbf{v}_{s0} + \langle \mathbf{j}_v \rangle$. Можна також традиційно визначити «діелектричну проникність» $\varepsilon(T) = \rho_{s0}(T) / \rho_s(T)$. Це дозволяє переписати (3.71) у вигляді

$$\langle \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}_v \rangle = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \mathbf{v}_{s0}}{\partial t}. \quad (3.72)$$

Перш ніж підставляти отриманий вираз в (3.62) відзначимо, що рівняння (3.62) визначає зміну з часом як поздовжньої \mathbf{v}_{s0} , так і поперечної \mathbf{v}_v частини надплинної швидкості. Нас же цікавить рівняння для поздовжньої частини, оскільки саме воно визначає поширення третього звуку. Рівняння для поперечної частини визначає згасання звуку, яке нижче T_c є малим. У рівнянні для поздовжньої частини швидкість \mathbf{v}_s можна замінити на \mathbf{v}_{s0} . Якщо густина вихорових пар мала в порівнянні з повною густиною так, що $\rho_{s0} - \rho_s \ll \rho_{s0}$, легко бачити, що $1 - 1/\varepsilon \approx \varepsilon - 1$. Якщо прийняти, що нерівність $\rho_{s0} - \rho_s \ll \rho_{s0}$ виконується при всіх T включаючи T_c , то, з урахуванням (3.72), отримуємо з рівняння (3.62)

$$\varepsilon(T) \frac{\partial \mathbf{v}_{s0}}{\partial t} = -\nabla \mu_f. \quad (3.73)$$

З цього рівняння випливає, що наявність в плівці вихорових пар приводить до появи множника $\varepsilon(T)$ перед $\partial \mathbf{v}_s / \partial t$ в рівнянні (3.33), що, в свою чергу, приводить до перенормування швидкості третього звуку

$$c_3^2 = c_{03}^2 / \varepsilon(T), \quad (3.74)$$

де c_{03}^2 – квадрат неперенормованої швидкості третього звуку, визначення для якої дається виразами (3.38) (область високих температур) і (3.40) (область низьких температур).

Таким чином, показано, що вплив на термоелектричний ефект термічно активованих вихорів навіть поблизу надплинного переходу є слабким.

Висновки

1. Знайдено вираз для повного електричного поля, що виникає над системою «атом гелію поблизу підкладки» за рахунок взаємної поляризації атома і підкладки. Показано, що це поле аналогічно полю наведеного підкладкою диполя атома і його зображення.

2. Побудовано теорію поширення третього звуку в надплинних наноплівках з урахуванням поляризації плівок підкладкою, ефектів випаровування і конденсації, дифузійного руху вихорів і вихорових пар і впливу цього руху на швидкість надплинної компоненти.

3. Передбачено, що унікальна можливість течії надплинних рідин по шорсткій поверхні без дисипації і їх аномально великий термомеханічний ефект ведуть до ще одного унікального ефект – нестационарної термо-е.р.с., яка породжується при поширенні третього звуку в надплинних наноплівках. Показано, що величина диференційної термо-е.р.с. в передбаченому ефекті може досягати 10^{-4} B / K .

РОЗДІЛ 4

НАДТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ І ЕЛЕКТРИЧНА АКТИВНІСТЬ НАДПЛИННИХ СИСТЕМ

В даному розділі розглядається новий механізм поляризації, який повинен реалізовуватися в надплинних діелектричних системах при наявності градієнта температури і магнітного поля. Як було зазначено вище, He II характеризується двома унікальними властивостями, однією з яких є надплинність, а іншу часто називають протитоковою теплопровідністю, або надтеплопровідністю (остання назва запропонована в роботі [100]). Величезне значення ефективного коефіцієнта теплопровідності при переході в надплинний стан пояснюється тим, що перенесення тепла в He II пов'язане з рухом нормальної компоненти. Потік маси, який переноситься нормальною компонентою, компенсується потоком маси, який переноситься надплинною компонентою, тобто виникає протитоковий стан, при якому перенесення тепла здійснюється шляхом внутрішньої конвекції. Надзвичайно важливою обставиною є те, що умова відсутності потоку маси має виконуватися лише в середньому, тобто повинен звертатися в нуль лише потік маси, усереднений по площі системи. Локальний потік маси в загальному випадку не повинен звертатися в нуль. Оскільки рух будь-якого діелектрика в магнітному полі приводить до його поляризації, то при наявності магнітного поля з локальним потоком маси в надплинному гелії буде пов'язаний локальний дипольний момент і поза системою може виникнути середнє електричне поле. В результаті в надплинних системах може мати місце термомагнітний ефект, аналогічний ефекту Нернста-Еттінгсхаузена в провідних системах.

Даний розділ має таку структуру. У пункті 4.1 викладається суть термомагнітного ефекту для надплинних систем. Отримано загальний вираз для поляризації надплинного гелію в зовнішньому магнітному полі при наявності градієнта температур, що породжує протитоковий рух рідини. Обговорюється

питання про вплив на результат граничних умов. У пункті 4.2 розглядаються особливості ефекту для зразків з різною геометрією. Отримано розподіл електричного поля в просторі для випадків гелію, що заповнює капіляр кругового, еліптичного і трикутного перерізів, а також для плівки гелію, що покриває капіляр еліптичного перерізу. Знайдено максимально можливі значення величини електричного поля при ламінарному режимі течії рідини. У пункті 4.3 досліджується термомагнітний ефект у випадку нестационарного градієнта температур, зокрема, при поширенні другого і третього звуків. Для третього звуку наведено порівняння величини термомагнітного ефекту з величиною термоелектричного ефекту за відсутності магнітного поля (див. розділ 3).

4.1. Термомагнітний ефект в надплинних системах

Будемо виходити з отриманого Мінковським (див., наприклад, [101]) виразу для індукції \mathbf{D} в діелектрику з діелектричною проникністю ϵ і магнітною проникністю μ_H при його русі зі швидкістю \mathbf{v}

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \frac{\epsilon \mu_H - 1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}). \quad (4.1)$$

Тут \mathbf{E} і \mathbf{H} – напруженості стаціонарних електричного і магнітного полів відповідно. Вираз (4.1) написано з лінійної точністю по v/c .

Для ${}^4\text{He}$ з високим ступенем точності можна вважати, що $\mu_H = 1$. Зв'язок діелектричної проникності ϵ з поляризованістю α атома ${}^4\text{He}$ і об'ємною густиною атомів n можна знайти за допомогою співвідношення Клаузіуса-Моссотті

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi n \alpha}{3}, \quad (4.2)$$

яке є наслідком того факту, що атом поляризує не середнє поле \mathbf{E} , а локальне електричне поле. Для ${}^4\text{He}$ густина $n = 2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, поляризованість $\alpha = 2 \cdot 10^{-25} \text{ см}^3$ і добуток $n\alpha$ істотно менше одиниці. Тому різниця $\epsilon - 1$ є розклад за ступенями $n\alpha$

$$\epsilon - 1 = 4\pi n\alpha + \frac{16}{3}(\pi n\alpha)^2 + \dots, \quad (4.3)$$

в якому досить утримати тільки перший член розкладу $4\pi n\alpha$. З огляду на, що індукція $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, отримуємо з (4.1) і (4.3), що поляризація діелектрика дорівнює

$$\mathbf{P} = \alpha n\mathbf{E} + \frac{\alpha}{c}n\mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (4.4)$$

За відсутності зовнішнього електричного поля з урахуванням, що потік маси $\mathbf{j} = M n \mathbf{v}$ (M – маса атома гелію) отримуємо

$$\mathbf{P} = \frac{\alpha}{Mc}[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]. \quad (4.5)$$

Потік маси в He II в загальному випадку дорівнює $\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s$, де \mathbf{v}_n , \mathbf{v}_s – швидкості нормальної і надплинної компонент, а ρ_n , ρ_s – їх масові густини. Вираз (4.5) не залежить від способу приведення He II до руху. Нижче ми будемо вважати, що рух рідини індукується градієнтом температури.

Розглянемо задачу про стаціонарний тепловий потік в He II, що заповнює капіляр, між кінцями якого підтримується мала різниця температур ΔT . При ламінарному русі (аналізом якого ми обмежимося) швидкості \mathbf{v}_n і \mathbf{v}_s не залежать від поздовжньої координати (уздовж капіляра). При цьому $(\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = 0$ і рівняння дворідинної гідродинаміки мають вигляд

$$\eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n = \frac{\rho_n}{\rho} \nabla p + \rho_s s \nabla T, \quad (4.6)$$

$$\nabla p = \rho s \nabla T. \quad (4.7)$$

Тут η_n – коефіцієнт в'язкості нормальної компоненти, $\rho = \rho_n + \rho_s$ – повна масова густина, ∇p і ∇T – градієнти тиску і температури, s – питома ентропія. Друге з цих рівнянь, зване рівнянням Лондона, є наслідком механічної рівноваги, що виникає при протіканні надплинної рідини між кінцями капіляра, в результаті

чого $\mu(p_1, T_1) = \mu(p_2, T_2)$. Тут μ – хімічний потенціал, а p_1, T_1 і p_2, T_2 – тиск і температура відповідно на кінцях капіляра. З (4.6) і (4.7) випливає рівняння

$$\eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n = \nabla p, \quad (4.8)$$

яке еквівалентно рівнянню Пуазейля в класичній гідродинаміці.

Швидкість надплинного руху не може залежати від поперечної координати r тому, що $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$. Її значення можна знайти з умови відсутності повного потоку маси, тобто з умови $\rho_n \langle \mathbf{v}_n \rangle + \rho_s \mathbf{v}_s = 0$. Тут $\langle \mathbf{v}_n \rangle$ є швидкість нормальної компоненти, яка усереднена по площі поперечного перерізу капіляра. З урахуванням цієї умови, отримуємо з (4.5)

$$\mathbf{P} = \frac{\alpha \rho_n}{Mc} [(\mathbf{v}_n - \langle \mathbf{v}_n \rangle) \times \mathbf{H}]. \quad (4.9)$$

Ми бачимо, що при наявності магнітного поля поляризація системи локально відмінна від нуля, а її повний дипольний момент звертається в нуль разом зі зверненням в нуль повного потоку маси. Електричний потенціал $\varphi(\mathbf{R}_0)$ поза системою в точці \mathbf{R}_0 визначається формулою електростатики (2.51). Звернення в нуль повного дипольного моменту не приводить до відсутності електричного поля зовні системи. У загальному випадку потенціал $\varphi(\mathbf{R}_0)$ відмінний від нуля і залежить від магнітного поля \mathbf{H} і швидкості нормальної компоненти \mathbf{v}_n , яка, в свою чергу, залежить від градієнта температури. В результаті $\varphi(\mathbf{R}_0)$ є функцією ∇T і магнітного поля, тобто ми приходимо до термомагнітного ефекту.

Розв'язання рівняння (4.8) залежить від граничних умов і обраної геометрії задачі. В якості граничної умови зазвичай використовується рівність нулю швидкості нормальної компоненти на стінках капіляра. На мікроскопічному рівні цій умові відповідає дифузне розсіювання фононів на границі. У задачах про теплопровідності часто допускається, що крім дифузного розсіювання є деяка частка дзеркального розсіювання. Процес розсіювання фононів на границі може наближатися до дзеркального при зниженні температури, коли середня довжина хвилі теплових фононів стає більшою за характерний розмір шорсткості зразка.

Цей факт, в свою чергу, модифікує граничну умову [102], яку можна отримати з умови механічної рівноваги тонкого шару рідини, що прилягає до поверхні зразка. Нехай товщина цього шару буде істотно менше характерного розміру зразка, але істотно більше довжини вільного пробігу фонона щодо нормальних зіткнень l^N . З боку границі на шар діє сила, яка дорівнює імпульсу, що поглинається стінкою за одиницю часу. З іншого боку, ця сила повинна дорівнювати силі тертя. Направимо вісь z по нормалі до границі, а вісь x – уздовж градієнта температури. Умова рівноваги дає

$$v \left| \frac{\partial v_{nx}}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_b} = \left[\int_{c_{1z}>0} d\mathbf{p} p_x c_{1z} n(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + \int_{c_{1z}<0} d\mathbf{p} p_x c_{1z} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{c'_z>0} d\mathbf{p}' R_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} n(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \right] \times \left[\int_{c_{1z}>0} d\mathbf{p} p_x^2 n'_0(\varepsilon) \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_b}^{-1} \quad (4.10)$$

Тут $v \approx c_1 l^N$ – кінематична в'язкість, c_1 – швидкість звуку, $n(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ – функція розподілу фононів, $R_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$ – ймовірність переходу зі стану з імпульсом \mathbf{p}' у стан з імпульсом \mathbf{p} як наслідок розсіювання на границі, $n_0(\varepsilon) = (e^{\varepsilon/T} - 1)^{-1}$, $n'_0(\varepsilon) = \partial n_0(\varepsilon) / \partial \varepsilon$, \mathbf{r}_b – координата точки поверхні системи. У випадку розсіювання, близького до дзеркального, на границі зміни зазнає лише нормальна складова фононного імпульсу. Тому кінетичне рівняння матиме дрейфове рішення аж до границі і функцію розподілу $n(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ в (4.10) можна замінити на дрейфову так, що $n(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \approx n_0(\varepsilon - \mathbf{v}_n \mathbf{p}) \approx n_0(\varepsilon) - \mathbf{v}_n \mathbf{p} n'_0(\varepsilon)$. В результаті знаходимо шукану граничну умову

$$l^N \left| \frac{\partial v_{nx}}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_b} = F v_{nx} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_b}, \quad (4.11)$$

$$F = \left[\int_{c_{1z}>0} d\mathbf{p} p_x^2 c_{1z} n'_0(\varepsilon) + \int_{c_{1z}<0} d\mathbf{p} p_x c_{1z} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{c'_z>0} d\mathbf{p}' p'_x R_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} n'_0(\varepsilon') \right] \times \left[c_1 \int_{c_{1z}>0} d\mathbf{p} p_x^2 n'_0(\varepsilon) \right]^{-1}_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_b}, \quad (4.12)$$

де величина F має сенс ймовірності дифузного розсіювання при одному зіткненні зі стінкою. Значна частка дзеркального розсіювання фононів на границі може мати місце або у випадку унікально гладкої поверхні, або, як було зазначено вище, у випадку низьких температур. Однак подальші обчислення показують, що найбільш сприятливою для отримання найбільшого термомагнітного ефекту є область високих температур. Обмежившись в даній роботі розглядом систем, в яких поверхня не є абсолютно гладкою, нижче ми будемо розв'язувати рівняння (4.8) зі стандартною граничною умовою $\mathbf{v}_n(\mathbf{r} = \mathbf{r}_b) = 0$.

4.2. Стаціонарний випадок

Розглянемо спочатку випадок циліндричного кругового капіляра радіуса R . Введемо полярну систему координат з початком в центрі кругового перерізу і віссю z , яка спрямована уздовж осі капіляра. В цьому випадку \mathbf{v}_n залежить тільки від r . Розв'язок рівняння (4.8) з урахуванням (4.7) має вигляд

$$\mathbf{v}_n = \frac{\rho_s \Delta T}{4\eta_n L} (R^2 - r^2) \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.13)$$

де $\hat{\mathbf{z}}$ – орт осі z , L – довжина капіляра. Після підстановки (4.13) в (4.9) знаходимо поляризацію гелію в циліндрі як функцію координат

$$\mathbf{P}(r) = \frac{\alpha \rho_n}{Mc} \frac{\rho_s \Delta T R^2}{4\eta_n L} \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{R^2} \right) [\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}]. \quad (4.14)$$

Направимо вісь y вздовж магнітного поля \mathbf{H} і будемо припускати, що $L \gg R$ і $L \gg z_0$, де z_0 – z -координата точки спостереження. Підставляючи в (2.51) вираз для \mathbf{P} з (4.14), отримаємо після інтегрування по z

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = -\frac{\alpha\rho_n}{Mc} \frac{\rho s \Delta T R^2}{2\eta_n L} H \int_0^R \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{(r_0 \cos\theta_0 - r \cos\theta)}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta_0 - \theta)}, \quad (4.15)$$

де $\mathbf{r}_0 = (r_0, \theta_0)$. Інтеграл по θ може бути приведений до виду

$$\frac{\cos\theta_0}{2} \frac{\partial}{\partial r_0} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(r_0^2 - 2r_0 r \cos\theta + r^2) d\theta = 2\pi \cos\theta_0 \frac{\partial}{\partial r_0} \ln \frac{r_0}{r} = \frac{2\pi \cos\theta_0}{r_0}. \quad (4.16)$$

Вираз (4.16) не залежить від r . В результаті легко переконатися, що інтеграл по r в (4.15) звертається в нуль. Таким чином, ми прийшли до бентежного результату, що в розглянутому випадку циліндричного кругового капіляра електричний потенціал поза циліндром $\varphi(\mathbf{r}_0) \equiv 0$. Цей результат є наслідком високої симетрії циліндричного кругового капіляра. Врахування нелінійних по $n\alpha$ членів в розкладі виразу для ϵ в (4.3) не змінює симетрію задачі, тому тотожне перетворення на нуль електричного потенціалу поза циліндричного капіляра збережеться і при врахуванні нелінійної залежності діелектричної проникності ϵ від густини n . Для систем, що не мають такої високої симетрії щодо поворотів навколо осі капіляра, потенціал $\varphi(\mathbf{r}_0)$ буде відмінний від нуля. Зокрема, він буде відмінний від нуля для капіляра еліптичного перерізу.

Розглянемо капіляр еліптичного перерізу з півосями a і b . І нехай між кінцями капіляра створено малу різницю температур ΔT . У випадку $a \gg b$ ми приходимо до сильно анізотропної системі. Несподіваним чином виявляється, що при цьому в залежності від напрямку магнітного поля результати можуть змінитися на декілька порядків величини.

Направимо вісь x вздовж півосі a , вісь y – вздовж півосі b , вісь z – вздовж осі капіляра. При довільному співвідношенні між a і b швидкість нормальної компоненти, яка отримана за допомогою рішення (4.8), дорівнює [103]

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{r}) = \frac{\rho s \Delta T}{2\eta_n L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.17)$$

Вважаючи, що магнітне поле \mathbf{H} спрямовано вздовж осі y , знаходимо з (4.9) і (4.17) поляризацію рідини

$$\mathbf{P}(x, y) = -P_0 \frac{a^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \hat{\mathbf{x}}, \quad (4.18)$$

де використано позначення

$$P_0 = \frac{\alpha \rho_n H}{Mc} \frac{\rho s \Delta T}{2\eta_n L} b^2. \quad (4.19)$$

Електричний потенціал поза рідини може бути отриманий підстановкою цього виразу для поляризації в (2.51). Будемо, як і раніше, вважати, що $L \gg a, b$ і $L \gg z_0$. Тоді, вимірюючи усі довжини (включаючи $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0, z_0)$) в одиницях a і вводячи позначення $\gamma = b/a$, отримаємо з (2.51) після інтегрування по z

$$\varphi(x_0, y_0) = -\frac{2aP_0}{1 + \gamma^2} \int_{-1}^1 dx \int_{-\gamma\sqrt{1-x^2}}^{\gamma\sqrt{1-x^2}} dy \frac{(1/2 - x^2 - \gamma^{-2}y^2)(x_0 - x)}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}. \quad (4.20)$$

Простий аналіз цього виразу показує, що електричний потенціал має такі властивості:

$$\begin{aligned} \varphi(-x_0, y_0) &= -\varphi(x_0, y_0) \\ \varphi(x_0, -y_0) &= \varphi(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (4.21)$$

З першої рівності в (4.21) випливає, що при $x_0 = 0$ і довільному y_0 потенціал φ звертається в нуль. Згадуючи, що магнітне поле спрямовано вздовж осі y , робимо звідси висновок, що на осі, яка паралельна магнітному полю і яка проходить через центр еліпса, потенціал $\varphi \equiv 0$.

Інтегрування в (4.20) не вдається виконати при довільних x_0 і y_0 . Аналітичний вираз можна отримати при $y_0 = 0$. Однак навіть у цьому випадку відповідь виявляється дуже громіздкою. Тому ми наведемо відповіді лише для деяких окремих випадків. Представляють інтерес три випадки. У першому

випадку $\gamma \sim 1$, так що переріз капіляра близький до окружності. У другому випадку $\gamma \ll 1$ і система моделює щілину. При цьому магнітне поле прикладене поперек щілини. І нарешті, в третьому випадку $\gamma \gg 1$; система знову моделює щілину, але магнітне поле прикладене вздовж щілини.

У першому випадку при $x_0 = 1$ (в розмірних величинах $x_0 = a$, тобто на поверхні капіляра) потенціал дорівнює

$$\varphi = \frac{2\pi b P_0}{3} \frac{1 - \gamma}{(1 + \gamma^2)(1 + \gamma)^2}. \quad (4.22)$$

Цей вираз є справедливим при довільних γ . При $x_0 \gg 1$, тобто далеко від капіляра

$$\varphi = \frac{\pi b P_0 (1 - \gamma^2)}{12(1 + \gamma^2)x_0^3}. \quad (4.23)$$

При $\gamma = 1$, тобто при $a = b = R$, коли еліпс перетворюється в окружність, вирази (4.22) і (4.23) звертаються в нуль відповідно до отриманого раніше результату. Цей результат виконується при довільних x_0, y_0 .

У другому випадку ($\gamma \ll 1$) при довільних x_0

$$\varphi(x_0, 0) = \frac{2\pi b P_0}{3} \left\{ \sqrt{x_0^2 - 1} + x_0 \left[4x_0 (x_0 - \sqrt{x_0^2 - 1}) - 3 \right] \right\}. \quad (4.24)$$

Легко бачити, що при $x_0 = 1$ цей потенціал переходить в (4.22). Відзначимо також, що поблизу поверхні капіляра напруженість електричного поля розходиться по закону $E_x(x_0, 0) \sim 1/\sqrt{x_0 - 1}$.

У третьому випадку при $x_0 \ll \gamma$ потенціал дорівнює

$$\varphi(x_0, 0) = -\frac{2\pi b P_0}{3\gamma^3} \left\{ 1 - 3\frac{x_0}{\gamma} \right\}. \quad (4.25)$$

При $x_0 \gg \gamma$ вираз для потенціалу дається формулою (4.23). Відзначимо, що в цьому випадку в знаменнику виразів (4.23) і (4.25) стоїть дуже велика величина

(γ^3 в (4.25) і x_0^3 в (4.23)). В результаті потенціал на декілька порядків менше, ніж при $\gamma \sim 1$ і $\gamma \ll 1$. Тому ми не будемо далі розглядати цей випадок.

При довільних x_0 і y_0 чисельне інтегрування дозволяє знайти потенціал φ при русі від точок з координатами $(x_0, y_0 = 0)$ до точок з координатами $(x_0 = 0, y_0)$. Можна було б очікувати монотонного убуття потенціалу $\varphi(x_0, y_0)$. Виявляється, що це не так. Нижче наведені графіки залежностей потенціалу φ на поверхні капіляра від полярного кута $\theta_0 = \arctan(y_0 / x_0)$ для $\gamma \sim 1$ і $\gamma \ll 1$ (див. рис. 4.1)

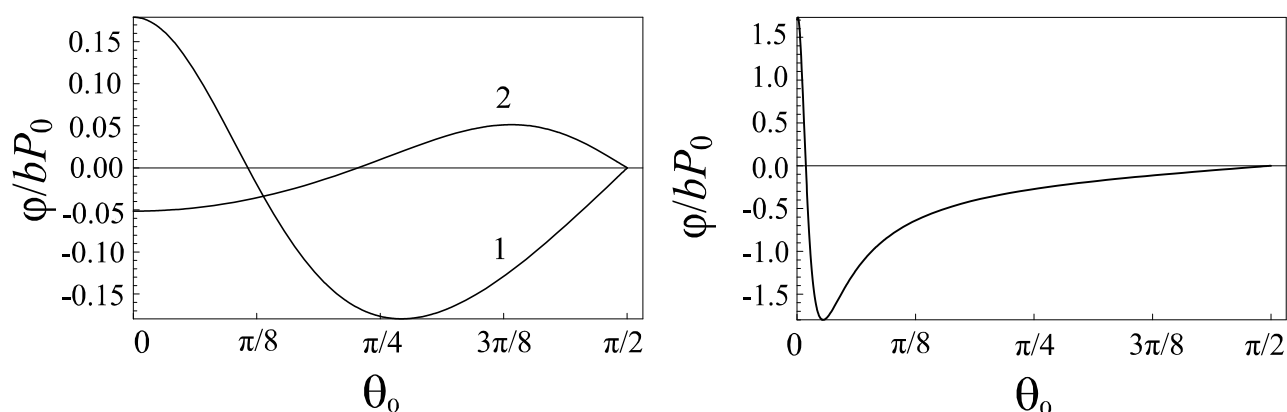


Рис. 4.1 Кутові залежності потенціалу φ на поверхні капіляра при $\gamma \sim 1$ (лівий рисунок) та при $\gamma = 0.05$ (правий рисунок). На лівому рисунку крива 1 відповідає магнітному полю, спрямованому вздовж малої півосі еліпса, крива 2 – уздовж великої півосі еліпса. На правому рисунку магнітне поле спрямоване поперек великої півосі еліпса.

Як видно з графіків, потенціал звертається в нуль не тільки на площині $x_0 = 0$. Додаткові нулі потенціалу аналітично можна знайти для капіляра слабо некруговий перерізу так, що $a - b \ll b$. Розкладаючи (4.20) за ступенями $1 - \gamma$, отримуємо для потенціалу в другому порядку

$$\varphi(r_0, \theta_0) = \frac{\pi P_0 b (1 - \gamma) (2r_0^2 \cos(3\theta_0) + 3(1 - \gamma) \cos(5\theta_0))}{24 r_0^5}. \quad (4.26)$$

Тут $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$ і $\gamma \rightarrow 1$. Прирівнюючи цей потенціал нулю, отримуємо два кута θ_0 , при яких потенціал звертається в нуль

$$\theta_{01} = \frac{\pi}{2}; \quad \theta_{02} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}(1-\gamma)}{4r_0^2}. \quad (4.27)$$

Як видно, крім отриманої з симетричних міркувань відповіді $\theta_0 = \pi/2$, на інтервалі $[0, \pi/2]$ існує ще одна поверхня, на якій потенціал тотожно звертається в нуль. На великих відстанях від капіляра, тобто при $r_0 \gg 1$ (в розмірних величинах при $r_0 \gg a$) цей кут дорівнює $\pi/6$. На поверхні капіляра це значення зміщується в бік більших або менших кутів в залежності від знака різниці $1-\gamma$ (див. рис. 4.1).

З аналізу графіків і виразів (4.22) – (4.25) випливає, що найбільш сприятливим для отримання великого потенціалу φ є випадок $\gamma \ll 1$ (магнітне поле H прикладене поперек щілини). При цьому максимальне значення потенціалу досягається в області малих кутів θ_0 . Зокрема, при $\theta_0 = 0$ потенціал дорівнює

$$\varphi = \frac{\pi b^3}{3} \frac{\alpha \rho_n H}{Mc} \frac{\rho s \Delta T}{\eta_n L}. \quad (4.28)$$

Залежність потенціалу φ від температури визначається залежністю від температури нормальної густини ρ_n , в'язкості η_n , а також питомої ентропії s . Залежністю від температури повної густини ρ и поляризованості α можна нехтувати. В області високих температур (при $T > 1.4K$) основний внесок в нормальну густину ρ_n і питому ентропію s дають ротони, густина яких пропорційна $\exp(-\Delta/T)$, де $\Delta = 8.6K$ – ротонна щілина. В'язкість в цій області температур залишається постійною. При низьких температурах нормальна густина $\rho_n \sim T^4$, а ентропія $s \sim T^3$. При температурах нижче $1.4K$ внесок ротонної в'язкості дуже малий у порівнянні з фононним. Фононна частина

коефіцієнта в'язкості зростає зі спаданням температури по експоненційному закону, а при температурі нижче $0.7K$ фононна в'язкість $\eta_n \sim T^{-5}$ [95].

У розглянутих досі системах на поверхні були відсутні гострі кути. В електростатиці, однак, відомо, що особливо велику напруженість електричних полів можна очікувати поблизу гострих країв системи. Тому становить інтерес питання про розподіл електричного поля навколо капіляра з перерізом у вигляді багатокутника. Як приклад ми виберемо капіляр з перерізом у вигляді рівностороннього трикутника зі стороною a , для якого рівняння гідродинаміки (4.8) розв'язується точно.

Звертаючись до задачі про електричні поля, що виникають зовні капіляра трикутного перерізу, будемо вважати, що вісь x збігається з «нижньою» стороною трикутника, вісь y збігається з висотою, що опущено з вершини, протилежної цій стороні, а вісь z паралельна осі капіляра. Швидкість нормальної компоненти, отримана в результаті рішення (4.8), дорівнює [103]

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{r}) = \frac{\rho s \Delta T}{2\sqrt{3}\eta_n L a} \left(\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - y \right)^2 - 3x^2 \right) y \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.29)$$

Підставляючи цей вираз для швидкості в (4.9) і далі в (2.51) отримаємо вираз для електричного потенціалу в навколишньому просторі. На відміну від капіляра кругового перерізу, в даному випадку потенціал не дорівнює нулю тотожно. Результат дається дуже громіздким аналітичним виразом. Нижче наведені рисунки розподілу електричного поля в просторі для випадків, коли зовнішнє магнітне поле спрямовано вздовж осі x (рис. 4.2, а) і вздовж осі y (рис. 4.2, б). З огляду на лінійність задачі по магнітному полю, результат при довільному розташуванні магнітного поля може бути отриманий додаванням результатів для компонент поля H_x і H_y .

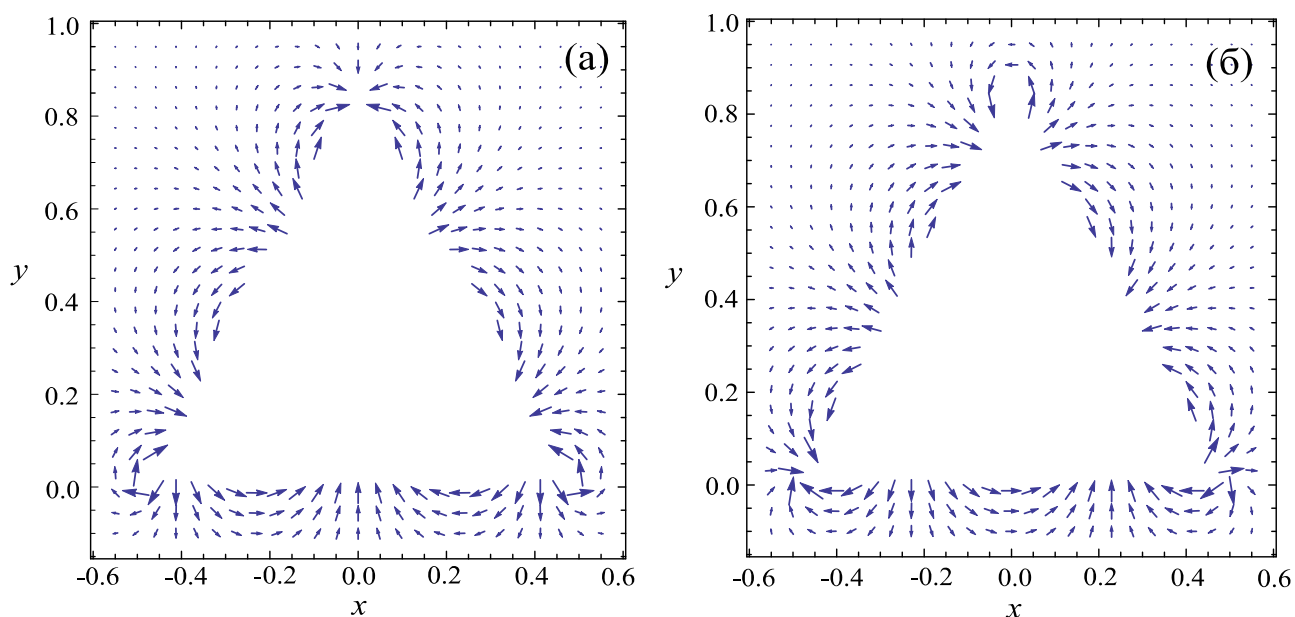


Рис. 4.2 Розподіл електричного поля поза капіляром трикутного перерізу у випадку, коли магнітне поле спрямоване уздовж осі x (а) і уздовж осі y (б). Всі довжини на рисунках вимірюються в одиницях a .

На рисунках (рис. 4.2) видно, що напруженість електричного поля, як і очікувалося, досягає максимальних значень поблизу кутів трикутника $(\pm a/2, 0)$ і $(0, a\sqrt{3}/2)$. При цьому зв'язок компонент електричного і магнітного поля може бути записано за допомогою допоміжного вектора $\mathbf{q} = (q_x, q_y, 0)$

$$E_x = \mathbf{H} \cdot \mathbf{q}, \quad E_y = (\mathbf{H} \times \mathbf{q})_z. \quad (4.30)$$

Для знаходження електричного поля поблизу кута з координатами $(a/2, 0)$ зручно виконати паралельне перенесення системи координат, яку було введено раніше, уздовж осі x на відстань $a/2$ (в результаті початок координат буде прив'язано до кута $(a/2, 0)$) і перейти до полярної системи координат. Обчисливши за допомогою (4.29) поляризацію \mathbf{P} і підставивши отриманий вираз для \mathbf{P} в (2.51), знайдемо потенціал φ , диференціюючи який, отримаємо поле \mathbf{E} . Потім, за допомогою (4.30), знайдемо компоненти вектора \mathbf{q}

$$\begin{aligned}
 q_x(r, \theta) &= \frac{\alpha \rho_n}{Mc} \frac{3 \rho s \Delta T}{160 \eta_n L} a^3 \left(\frac{28 \sqrt{3} \pi}{9} - 20 - \sqrt{3} \theta / 3 + \ln(a / r) \right) \\
 q_y(r, \theta) &= \frac{\alpha \rho_n}{Mc} \frac{\sqrt{3} \rho s \Delta T}{160 \eta_n L} a^3 \left(-20 + 10 \pi / \sqrt{3} + \sqrt{3} \theta + \ln(a / r) \right)
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Тут $\theta \in (-\pi; 2\pi / 3)$ і мається на увазі, що $r \ll a$.

Для знаходження електричного поля поблизу кута з координатами $(0, a\sqrt{3} / 2)$ зручно виконати паралельне перенесення системи координат на відстань $a\sqrt{3} / 2$ вздовж осі y (в результаті початок координат буде прив'язано до кута $(0, a\sqrt{3} / 2)$). Переходячи, як і раніше, до полярної системи координат, знайдемо, що тепер компоненти вектора \mathbf{q} даються виразами

$$\begin{aligned}
 q_x(r, \theta) &= -\frac{\alpha \rho_n}{Mc} \frac{\sqrt{3} \rho s \Delta T}{160 \eta_n L} a^3 (\pi - 2\theta) \\
 q_y(r, \theta) &= -\frac{\alpha \rho_n}{Mc} \frac{\sqrt{3} \rho s \Delta T}{80 \eta_n L} a^3 \left(-20 + 19 \sqrt{3} \pi / 6 + \ln(a / r) \right)
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Тут $\theta \in (-\pi / 3; 4\pi / 3)$ і, як і раніше, $r \ll a$. Відзначимо, що, сума доданків в круглих дужках (4.31) і (4.32), що не містять логарифм, порядку одиниці, тому при $r \ll a$ логарифмічні доданки в цих виразах стають визначальними.

Як зазначалося вище, у випадку капіляра еліптичного перерізу, що моделює щілину, поблизу точок з нульовим полярним кутом також має місце розбіжність електричного поля (див. (4.24)). Однак, на відміну від випадку капіляра трикутного перерізу, ця розбіжність ступенева, а не логарифмічна, тобто більш «сильна». Іншою відмінністю капіляра трикутного перерізу є інший закон спадання потенціалу з відстанню на великих відстанях від системи. При цьому закон спадання залежить від напрямку магнітного поля по відношенню до обраної нами осі x . Потенціал спадає як четвертий ступінь відстані до капіляра, якщо магнітне поле паралельно осі x і як п'ятий ступінь – якщо магнітне поле перпендикулярно осі x .

З (4.28), (4.31) і (4.32) випливає, що потенціал і електричне поле зовні зразка пропорційні кубу характерного поперечного розміру системи d і може здатися, що збільшуючи d , можна істотно збільшити величину ефекту. Однак така зміна можлива лише в деяких межах. Причина в тому, що при фіксованій швидкості v_n з ростом d ламінарний рух рідини переходить в турбулентний і ми виходимо за межі застосовності нашого розрахунку. В експерименті перехід в турбулентний стан проявляється у появі нелінійної залежності теплового потоку W від різниці температур між кінцями капіляра.

У піонерських роботах [104-106] показано, що при досягненні тепловим потоком $W = \rho_s s T |v_n - v_s|$ деякої критичної величини W_{c1} ламінарний рух руйнується шляхом появи в надплинній рідині квантових вихорів і вихорових кілець, які потім утворюють вихоровий клубок (стан Т-1). Подальші дослідження показали, що існує другий критичний тепловий потік W_{c2} , при перевищенні якого вихорова густина істотно збільшується (стан Т-2). Перехід від стану Т-1 до стану Т-2 зв'язується з переходом в турбулентний стан нормальної компоненти (див., наприклад, [107, 108]). Результати істотно залежать від форми каналу. Два переходи мають місце в еліптичних каналах з розмірами $a \approx b$. При $a \gg b$ відбувається тільки один перехід в стан Т-2 [109]. У випадку каналу трикутного перерізу, певно, повинно спостерігатися два переходи.

Критичними кільцями в стані Т-1 є кільця з радіусом порядку характерного розміру капіляра d . Для появи таких кілець різниця $|v_n - v_s|$ повинна стати порядку $(\hbar / md) \ln(d / \xi)$, де ξ – радіус вихорового кора [110]. Перехід в турбулентний стан Т-2 повинен відбуватися при досягненні нормальною компонентою критичної швидкості $R_n \eta_n / \rho_n d$ (R_n – число Рейнольдса), подібно до того, як це відбувається у в'язкій рідині. Існування критичних швидкостей визначає максимально допустимий розмір d , при якому зберігається ламінарний

рух рідини. Тим самим накладається обмеження на величину спостережуваного електричного потенціалу (4.28), а також полів (4.30).

Наведемо обмеження на величину електричного потенціалу у випадку капіляра еліптичного перерізу, який може бути отриманий в режимі ламінарного протікання рідини. При $\gamma \sim 1$ це обмеження пов'язане з обмеженням на відносну швидкість $|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s| < (\hbar / mb) \ln(b / \xi)$. Враховуючи що $\mathbf{v}_s = -(\rho_n / \rho_s) \mathbf{v}_n$ и що $\mathbf{v}_n \sim \langle \mathbf{v}_n \rangle$, з (4.17), (4.19) і (4.22) отримаємо

$$\varphi < \frac{4\pi\hbar}{3M} \frac{\alpha H}{Mc} \frac{\rho_s \rho_n}{\rho} \ln\left(\frac{b}{\xi}\right) \equiv \varphi_{c1}. \quad (4.33)$$

При $\gamma \ll 1$ обмеження накладається на швидкість нормальної компоненти $\langle \mathbf{v}_n \rangle < R_n \eta_n / \rho_n b$. Обмеження на φ в цьому випадку має вигляд

$$\varphi < \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha H}{Mc} R_n \eta_n \equiv \varphi_{c2}. \quad (4.34)$$

Розглядаючи область температур, в якій $\rho_s \sim \rho_n \sim \rho$, знаходимо, що $\varphi_{c2} > \varphi_{c1}$. Так для $H = 10 \text{ Тл}$, $\alpha = 2 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$, $R_n = 2 \cdot 10^3$, $\eta_n = 2 \text{ мкП}$ і $\rho = 10^{-1} (\text{г} / \text{см}^3)$ маємо $\varphi_{c1} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ В}$ і $\varphi_{c2} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ В}$. Таким чином, ми приходимо до висновку, що для отримання найбільшого потенціалу φ слід використовувати не капіляр кругового перерізу ($\gamma \sim 1$), а щілину ($\gamma \ll 1$), причому, як зазначалося вище, магнітне поле H має бути спрямовано поперек щілини. Знайдемо поперечний розмір щілини b_c , який відповідає найбільшому потенціалу φ_{c2} . Для капіляра довжиною $L = 1 \text{ см}$, між кінцями якого створена різниця температур $\Delta T = 10^{-3} \text{ К}$, з виразу (4.28), в зазначеній області температур (в якій $s = 10^6 (\text{эрг} / \text{г} \cdot \text{К})$), знаходимо $b_c = 10^{-3} \text{ см}$. Критичний розмір капіляра трикутного перерізу виявляється такого ж порядку величини.

Розглянемо систему, для якої обмеження на величину характерного поперечного розміру задачі, пов'язане з переходом від ламінарного руху до турбулентного, є більш «м'яким». Такою системою, зокрема, є капіляр

еліптичного перерізу з півсями a і b , покритий зовні плівкою надплинного гелію. Швидкість нормальної компоненти в плівці дається виразом, яке відрізняється знаком від виразу (4.17), тобто

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{r}) = \frac{\rho s \Delta T}{2\eta_n L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.35)$$

В цьому випадку $x \geq a$ і $y \geq b$. Після усереднення (4.35) по площі капіляра, отримуємо за допомогою (4.9) поляризацію

$$\mathbf{P}(x, y) = -\frac{P_0 a^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - \frac{\gamma(3 + 2\gamma + 3\gamma^2) + \delta(1 + \gamma)^3 + \delta^2(1 + \gamma^2)}{4\gamma^2(1 + \gamma + \delta)} \delta \right) \hat{\mathbf{x}}. \quad (4.36)$$

Тут $\delta = h/a$, h – товщина плівки. Підстановка (4.36) в (2.51) показує, що електричний потенціал над плівкою також має симетрійні властивості (4.21), тобто потенціал, як і раніше, тотожно дорівнює нулю на площині, яка паралельна магнітному полю і проходить через вісь капіляра. Крім того, як і у випадку капіляра кругового перерізу, тобто при $\gamma = b/a = 1$, потенціал зовні системи тотожно звертається в нуль.

При довільних γ розподіл електричного потенціалу поза системою вдається знайти аналітично на півосі a . Як і вище, найбільш сприятливою ситуацією для отримання максимального ефекту, є випадок $\gamma \ll 1$ («лінза», покрита плівкою надплинного гелію, поперек якої прикладене магнітне поле). Вираз для потенціалу виявляється дуже громіздким і ми запишемо відповідь в двох граничних випадках. На поверхні системи

$$\varphi(x = a + h) = 2\pi b h^2 \frac{\alpha \rho_n H}{Mc} \frac{\rho s \Delta T}{\eta_n L}. \quad (4.37)$$

Далеко від системи

$$\varphi(x \gg a) = \frac{\pi b h^2}{16} \frac{\alpha \rho_n H}{Mc} \frac{\rho s \Delta T}{\eta_n L} \frac{a^3}{x^3}. \quad (4.38)$$

В обох випадках мається на увазі, що надплинна плівка є тонкою і її товщина h задовольняє нерівностям $h \ll b \ll a$. Підставляючи в (4.37) числові значення

величин, використаних для оцінки виразів (4.33) і (4.34), отримаємо для потенціалу на поверхні системи $\varphi \sim (b/L)N^2 10^{-12} B$, де N – число атомних шарів у плівці гелію. Граничне значення виразу досягається для насичених плівок з $N \approx 100$. Беручи $b/L \sim 10^{-2}$, отримуємо $\varphi \sim 10^{-10} B$.

4.3. Нестационарний випадок

До цих пір вважалося, що створений між кінцями капіляра перепад температур не залежить від часу. Однак ефект, що передбачається, повинен реалізуватися і у випадку, коли такий перепад створюється за допомогою зануреного в He II тіла з періодично змінною температурою, тобто в умовах поширення в He II другого звуку.

Нехай He II заповнює циліндр кругового перерізу радіуса R і другий звук поширюється вздовж осі циліндра z . Якщо знехтувати тепловим розширенням β , в хвилях першого звуку будуть коливатися тиск і густина, а в хвилях другого звуку будуть коливатися тільки температура і ентропія. При врахуванні теплового розширення в хвилі другого звуку виникають коливання густини і тиску. Ці коливання приводять до відмінного від нуля потоку маси j_z , який пов'язаний з осцилюючою частиною температури T' . У випадку $R \gg \lambda$, де λ – довжина хвилі другого звуку, залежністю j_z від радіальної координати r можна знехтувати і потік j_z пов'язаний з T' співвідношенням (див., наприклад, [95])

$$j_z = -\frac{\beta \rho c_1^2 c_2}{c_1^2 - c_2^2} T', \quad (4.39)$$

де c_1 і c_2 – швидкість першого і другого звуків відповідно. Якщо зовнішнє магнітне поле спрямовано поперек циліндра (уздовж осі y), то в гелії, згідно (4.5), виникає електрична поляризація $P_x = -\alpha H j_z / Mc$. Електричний потенціал зовні циліндра виходить після підстановки цієї поляризації в (2.51). Подрообиці обчислення інтеграла, що виникає, можна знайти в розділі 3.4. З огляду на те, що

при $T > 0.8K$ виконується умова $c_1 \gg c_2$, і вважаючи, що висота циліндра L істотно перевищує довжину хвилі другого звуку λ , знаходимо вираз для електричного потенціалу в точці з координатами $(r_0, \theta_0, 0)$

$$\varphi(r_0, \theta_0, t) = 4\pi\beta\rho c_2 \frac{\alpha HR}{Mc} I_1(kR) K_1(kr_0) T_a' \cos(\theta_0) \cos(\omega t). \quad (4.40)$$

Тут k – хвильове число, ω – частота, T_a' – амплітуда температури в хвилі другого звуку.

При отриманні (4.40) передбачалося, що $R \gg \lambda$ і ми нехтували залежністю потоку j_z від радіальної координати r . Однак якщо радіус циліндра порядку або менше довжини хвилі другого звуку, таке припущення виявляється не виправданим. В цьому випадку для коректного розв'язку задачі про поширення другого звуку слід використовувати повну систему гідродинамічних рівнянь для надплинної рідини

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \\ \frac{\partial j_i}{\partial t} + \nabla_i p = \eta_n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial x_l} \right), \\ \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p - s \nabla T = 0 \\ \frac{\partial (s\rho)}{\partial t} + s\rho \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0 \end{cases}, \quad (4.41)$$

доповнену граничними умовами

$$\mathbf{v}_n(r=R) = 0, \mathbf{v}_{sr}(r=R) = 0, \quad (4.42)$$

де \mathbf{v}_{sr} – радіальна складова надплинної компоненти. При розв'язанні цієї системи рівнянь зручно скористатися підходом, розвиненим в роботі [111]. Розв'язок для лінеаризованої системи гідродинамічних рівнянь шукається у вигляді

$$\begin{cases} \mathbf{v}_n = L_1 \nabla \phi_1 + L_2 \nabla \phi_2 + \mathbf{v}_\eta \\ \mathbf{v}_s = N_1 \nabla \phi_1 + N_2 \nabla \phi_2 \\ T' = M_1 \phi_1 + M_2 \phi_2 \end{cases}, \quad (4.43)$$

де ϕ_1 , ϕ_2 і \mathbf{v}_η – деякі функції координат і часу (часова залежність вибирається у вигляді множника $\exp(-i\omega t)$), $L_{1,2}$, $N_{1,2}$, $M_{1,2}$ – амплітуди, що підлягають визначенню. Вибір розв'язку у вигляді (4.43) виправдовується тим, що лінеаризована система гідродинамічних рівнянь для надплинної рідини в безмежному середовищі має три лінійно незалежних розв'язки. Такими є перший звук, в якому відсутні коливання температури (при $\beta = 0$), другий звук, в якому відсутні коливання густини (знову при $\beta = 0$), а також сильно загасаюча в'язка хвиля, в якій відсутні як осциляції температури, так і густини. При цьому у в'язкій хвилі долучається до руху лише нормальна компонента. В результаті підстановки (4.43) в (4.41), знаходиться зв'язок між амплітудами $L_{1,2}$, $N_{1,2}$, $M_{1,2}$ (їх вдається виразити через дві амплітуди, наприклад, через N_1 і N_2), а також система рівнянь для функцій $\phi_{1,2}$ і \mathbf{v}_η . Безпосереднє розв'язок цієї системи дає

$$\begin{cases} \phi_{1,2} = J_0(r\sqrt{k_{1,2}^2 - k^2}) \exp[i(kz - \omega t)] \\ \mathbf{v}_{\eta r} = -i \frac{A_\eta}{\sqrt{k_\eta^2 - k^2}} J_1(r\sqrt{k_\eta^2 - k^2}) \exp[i(kz - \omega t)] \\ \mathbf{v}_{\eta z} = A_\eta J_0(r\sqrt{k_\eta^2 - k^2}) \exp[i(kz - \omega t)] \end{cases}. \quad (4.44)$$

Тут $k_{1,2}$ і k_η – хвильові числа першого і другого звуків і в'язкої хвилі відповідно, J_i – функції Бесселя першого роду i -го порядку, A_η – амплітуда. Підстановка (4.44) в (4.43) і далі в (4.42) приводить до лінійної однорідної системи рівнянь відносно величин N_1 , N_2 і A_η . Дисперсійне рівняння виходить після прирівнювання нулю визначника цієї системи. У випадку виконання умов $c_1 \gg c_2$ і $\lambda \gg R \gg \lambda_\eta$, де $\lambda_\eta = 2\pi\sqrt{\eta_n / \omega\rho_n}$ – довжина в'язкої хвилі, вдається

розв'язати це рівняння. Закон дисперсії у випадку поширення хвилі другого звуку при цьому має вигляд

$$k^2 = \frac{\omega^2}{u_2^2} \left[1 + i\delta \frac{\rho_s}{\rho_n} - i\delta \frac{2\beta\rho_s}{\rho} \right], \quad (4.45)$$

де $\delta \equiv -i \left[2\rho_n J_1(k_\eta R) / \rho(k_\eta R J_0(k_\eta R) - 2J_1(k_\eta R)) \right]$. Цей вираз відрізняється від аналогічного виразу в роботі [111] наявністю третього доданка. Комбінуючи (4.43), (4.44) і (4.45) знаходимо амплітудні значення поля швидкостей

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{sr} = 0, & \mathbf{v}_{sz} = \frac{iN_2\omega}{u_2} \\ \mathbf{v}_{nr} = \frac{N_2\rho_s\omega^2}{u_2^2\rho_n k_\eta} \left[\frac{J_1(k_\eta r)}{J_2(k_\eta R)} - \frac{r}{R} \frac{J_1(k_\eta R)}{J_2(k_\eta R)} \right], \\ \mathbf{v}_{nz} = \frac{iN_2\rho_s\omega}{u_2\rho_n} \left(\frac{J_0(k_\eta r)}{J_0(k_\eta R)} - 1 \right) \left(1 - \frac{\beta\rho c_2^2}{s\rho_s} \right) \end{cases}, \quad (4.46)$$

За допомогою цих виразів обчислюємо повний потік маси $\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s$. Його z -а компонента дорівнює

$$j_z = - \left(\beta\rho c_2 + \frac{\rho_s s}{c_2} \frac{J_0(k_\eta r)}{J_0(k_\eta R)} \right) T'. \quad (4.47)$$

Підстановка цього виразу для потоку маси в (4.5) і далі в (2.51) дає вираз для електричного потенціалу в точці з координатами $(r_0, \theta_0, 0)$

$$\varphi(r_0, \theta_0, t) = \frac{4\pi\alpha HR}{Mc} K_1(kr_0) \left[\beta\rho c_2 I_1(kR) - \frac{\rho_s s \lambda_\eta}{c_2 \lambda} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] T'_a \cos(\theta_0) \cos(\omega t). \quad (4.48)$$

Перший доданок в квадратних дужках відповідає об'ємному вкладу потоку маси в ефект (порівняй з (4.40)), тоді як другий доданок є наслідком врахування граничних умов в задачі про другий звук. З урахуванням нерівності $kR \ll 1$, знаходимо, що відношення другого доданка в квадратних дужках до першого дорівнює $2\rho_s s \sqrt{\eta_n} / \beta\rho c_2^2 R \sqrt{\omega\rho_n}$. Для області високих температур (при $T > 1.4K$) це відношення менше одиниці і внеском граничної умови можна

знехтувати. В області низьких температур вказане відношення пропорційне $\beta^{-1}T^{-3/2}$. Оскільки коефіцієнт теплового розширення при $T \ll 1K$ зменшується зі зменшенням температури, можна стверджувати, що врахування граничних умов при розв'язанні задачі про другий звук істотно перенормує електричний потенціал і другий доданок в квадратних дужках стає істотно більше за перший. Також варто відзначити, що потенціал, як і потенціал в (4.40), залежить від полярного кута точки спостереження за законом косинуса і, аналогічно стаціонарному випадку (див. рис. 4.1), звертається в нуль при $\theta_0 = \pi / 2$. Іншими словами, на площині, яка паралельна магнітному полю \mathbf{H} і що проходить через вісь циліндра, потенціал тотожно дорівнює нулю.

При виконанні експериментів з другим звуком слід розрізняти електричні поля, що передбачаються в даній роботі, від різниці потенціалів між кінцями зразка у роботі [21]. Потенціали (4.40) і мають характерну кутову залежність. Крім того, в даній роботі мова йдеться про електричні поля зовні зразка, в той час, як в [21] вимірюється різниця потенціалів всередині зразка.

Перш ніж привести числові оцінки, зауважимо, що вирази для потенціалу φ при поширенні другого звуку, як і в статичному випадку, отримані в припущенні ламінарного режиму. На жаль, нам не відомі аналітичні критерії переходу від ламінарного режиму до турбулентного у випадку поширення другого звуку. В експериментах діаметр циліндричного зразка зазвичай лежить в інтервалі $R = 0.1 - 1\text{см}$ (див., наприклад, [27, 109]). При цьому амплітудне значення температури, яке відповідає ламінарній області, не перевищує декількох мілікельвін. Для $T = 1.5K$, $H = 10Tл$, $\omega = 2.5 \cdot 10^3 Гц$, $T_a' = 10^{-3}K$ і $R = 0.5\text{см}$ потенціал на поверхні циліндра в точці з координатами $r_0 = R$, $\theta_0 = 0$ дорівнює $\varphi = 4 \cdot 10^{-8}В$. При $T = 0.8K$, $H = 10Tл$, $\omega = 2.5 \cdot 10^3 Гц$, $T_a' = 10^{-3}K$ (відповідь в цій області температур не залежить від R) маємо $\varphi = 1,5 \cdot 10^{-8}В$.

Передбачуваний ефект реалізується і у випадку поширення третього звуку по гелієвій плівці товщиною h , що покриває, наприклад, циліндричний капіляр.

При цьому нормальна компонента загальмована, і внесок в повний потік маси вносить лише надплинна компонента, осцилююча паралельно підкладці. Вважаючи, що довжина хвилі третього звуку істотно менше довжини циліндра, після безпосереднього інтегрування (2.51) отримуємо розподіл потенціалу на площині поперечного перерізу циліндра, який ділить циліндр навпіл

$$\varphi(r_0, \theta_0, t) = \frac{4\pi\alpha\rho_s H v_{sa} h}{Mc} k_3 R \cos(\theta_0) \cos(\omega_3 t) \begin{cases} K_0(k_3 R) I_1(k_3 r_0), r_0 < R \\ -I_0(k_3 R) K_1(k_3 r_0), r_0 > R \end{cases} \quad (4.49)$$

Тут k_3 – хвильове число в хвилі третього звуку, ω_3 – частота третього звуку, v_{sa} – амплітудне значення швидкості надплинної компоненти. Перша відповідь в (4.49) при $r_0 < R$ відповідає випадку, коли плівка покриває внутрішню сторону циліндра і потенціал шукається всередині циліндра, тоді як другий відповідь при $r_0 > R$ відповідає випадку, коли плівка покриває зовнішню сторону циліндра і спостереження потенціалу проводиться зовні циліндра. Максимальне значення величини електричного потенціалу досягається для $r_0 < R$ за умови $k_3 R \gg 1$ ($k_3 R K_0(k_3 R) I_1(k_3 R) = 0.5$), а для $r_0 > R$ при $k_3 R \ll 1$ ($k_3 R K_0(k_3 R) I_1(k_3 R) = 1$).

Припускаючи, що третій звук збуджується перепадом температур між кінцями плівки, можна визначити зв'язок потенціалу φ з температурою, який задається зв'язком з температурою швидкості надплинної компоненти v_{sa} в (4.49). Остання сильно залежить від значення рівноважної температури. Так, в високотемпературній області на процес поширення третього звуку сильно впливає процес випаровування плівки, тоді як в низькотемпературній області їм можна знехтувати (див. розділ 3.3, а також [3, 90]). В результаті

$$v_{sa} = \frac{c_3 T' C}{T s}, \quad T \ll 1K, \quad (4.50)$$

$$v_{sa} = \frac{u_3 T' L_{ev} h^3}{T \alpha_v}, \quad T \sim 1K. \quad (4.51)$$

Тут c_3 – швидкість третього звуку, C – питома теплоємність гелію, L_{ev} – прихована теплота пароутворення, α_v – параметр, що характеризує інтенсивність дії сил Ван-дер-Ваальса, що діють на плівку з боку підкладки (циліндра).

Переходячи до оцінки величини електричного потенціалу (4.49), отримаємо, що для $H = 10Tл$, $r_0 = R$, $\theta_0 = 0$ максимальне значення φ порядку $\varphi = 10^{-12} N v_{sa} (c \cdot B / cm)$, де N – число атомних шарів у плівці гелію. Для насиченою плівки, тобто при $N \sim 100$, і при $v_{sa} \sim 1m / c$ знаходимо $\varphi \sim 10^{-10} B$.

У розділі 3 було показано, що за відсутності магнітного поля при поширенні в плівці, що покриває циліндр, третього звуку в навколишньому просторі виникає електричне поле E_0 , потенціал якого φ_0 дається виразами (3.56). Порівняння потенціалу φ_0 за відсутності магнітного поля (3.56) з потенціалом (4.49) при наявності поля показує, що відношення потенціалів порядку $\varphi / \varphi_0 \sim h^4 \alpha H u_3 / e a_B^5 c \sim 10^{-5} N^{5/2}$.

Насамкінець відзначимо, що в даному розділі було розглянуто режим ламінарної течії рідини. При збільшенні теплового потоку буде відбуватися перехід від ламінарної до турбулентної течії. Розглянутий електричний ефект повинен мати місце і в турбулентному режимі, оскільки в цьому режимі локальні потоки маси можуть бути відмінними від нуля. При цьому можлива зміна функціональної залежності електричного поля, що виникає, як від координати, так і від геометричних розмірів зразка. Спостереження поведінки електричного поля при зміні величини теплового потоку може слугувати експериментальним тестом з виявлення переходу рідини з ламінарного в турбулентний стан.

Висновки

1. Передбачено механізм термополяризації в надплинних діелектричних системах (в He II). Показано, що ефект реалізується в надплинних системах завдяки їх властивості протинотокової теплопровідності (надтеплопровідності).

Встановлено, що величина поля істотно залежить від форми зразка і напрямку магнітного поля відносно зразка. У круговому капілярі ефект відсутній, а у випадку еліптичного капіляра з півсями a і b величина електричного поля при $a \gg b$ змінюється більше, ніж на три порядки в залежності від того, спрямовано магнітне поле уздовж великої чи малої півосі.

2. Отримано розподіл електричного поля в просторі для випадків гелію, що заповнює капіляр кругового, еліптичного і трикутного перерізів, а також для плівки гелію, що покриває капіляр еліптичного перерізу. Знайдено максимально можливі значення величини електричного поля в ламінарному режимі течії рідини.

3. Ефект досліджено у випадку нестационарного градієнта температур, зокрема, при поширенні другого і третього звуків. Для третього звуку наведено порівняння величини термомагнітного ефекту з величиною термоелектричного ефекту за відсутності магнітного поля.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено важливу задачу в області теоретичної фізики, а саме: теоретично описано процеси поляризації та механізми термополяризації надплинних бозе-систем.

Основними результатами дисертаційної роботи є наступні:

1. Розвинена мікроскопічна теорія надплинного стану в моделі розрідженого бозе-газу лужного металу. Отримано фундаментальний вираз для поляризаційного заряду через комплексний параметр порядку, що залежить від координати ядра та валентного електрона.

2. Показано, що при наявності нормальних і надплинних потоків, що обтікають квантований вихор, він набуває дипольного моменту, який складається із суми двох доданків. Один доданок пропорційний відносній швидкості руху потоку $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, де \mathbf{v}_n і \mathbf{v}_s – швидкості нормальної і надплинної компонент, а другий – пропорційний векторному добутку $\mathbf{k} \times \mathbf{w}$, де \mathbf{k} – циркуляція вихору.

3. Вирішено питання про поляризацію наноплівки надплинного гелію при її взаємодії з підкладкою. Отримано вираз для повного електричного поля, що виникає за рахунок взаємно наведених мультипольних моментів атома, що знаходиться поблизу твердого тіла, і підкладки. Знайдена добавка до поляризації плівки за рахунок неоднорідного розподілу густини рідини поблизу підкладки.

4. Побудовано теорію поширення третього звуку в надплинних наноплівках з урахуванням поляризації плівок підкладкою. Передбачено, що коливання температури при поширенні по плівці третього звуку приводять до появи у навколишньому просторі змінного електричного поля. Встановлено, що величина поля істотно залежить від товщини плівки, виду підкладки та способу її покриття. Встановлено, що урахування термічно активованих вихорів впливає на надплинну густину і швидкість третього звуку та практично не впливає на величину виникаючих електричних полів.

5. Передбачено термополяризаційний ефект у надплинних системах за наявності магнітного поля. Показано, що стаціонарні і нестаціонарні потоки тепла у надплинних системах, розміщених у магнітному полі, будуть приводити до появи у навколишньому просторі електричних полів, доступних виміру сучасними експериментальними методами.

Висловлюю щирю вдячність моєму науковому керівнику Шевченку Сергію Івановичу за вибір актуального та захоплюючого напрямку досліджень, постійну увагу на всіх етапах підготовки дисертації, та за підтримку.

Висловлюю також щирю подяку завідувачому відділу теоретичної фізики ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України Криве Іллі Валентиновичу та співробітникам відділу за доброзичливість, творчу атмосферу та підтримку при виконанні дисертації.

СПИСОК ВИКОРИСТОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Shevchenko S.I. On the Dipole Moment of Quantized Vortices in the Presence of Flows / S.I. Shevchenko, A.M. Konstantinov // *J. Low Temp. Phys.* – 2016. – V. 185, No 5/6. – P. 384–391.
2. Шевченко С.И. О возможности нового электрического эффекта в сверхтонких сверхтекучих пленках / С.И. Шевченко, А.М. Константинов // *Письма в ЖЭТФ.* – 2016. – Т. 104, № 7. – С. 518-522.
3. Shevchenko S.I. Non-stationary Thermal Electromotive Force Generated by Third Sound / S.I. Shevchenko, A.M. Konstantinov // *J. Low Temp. Phys.* – 2019. – V. 194, No 1/2. – P. 1-13.
4. Шевченко С.И. Сверхтеплопроводность и электрическая активность сверхтекучих систем / С.И. Шевченко, А.М. Константинов // *Письма в ЖЭТФ.* – 2019. – Т. 109, № 12. – С. 829-833.
5. Шевченко С.И. Противотоковая теплопроводность и электрическая активность сверхтекучих систем в магнитном поле / С.И. Шевченко, А.М. Константинов // *ФНТ.* – 2020. – Т. 46, № 1. – С. 57-69.
6. Шевченко С.И. О дипольном моменте квантованных вихрей, порождаемом потоками / С.И. Шевченко, А.М. Константинов // XXXVII совещания по физике низких температур (НТ-37), 29 июня – 3 июля, 2015: тезисы докладов. – Россия, Казань, 2015. – С. 236.
7. Шевченко С.И. Об особенностях поляризации неоднородных систем при наличии и отсутствии межатомного взаимодействия / С.И. Шевченко, А.М. Константинов // XII Міжнародна наукова конференція «Фізичні явища в твердих тілах», 1 – 4 грудня, 2015: тези доповідей. – Україна, Харків, 2015. – С. 19.
8. Shevchenko S.I. On the dipole moment of quantized vortices in the presence of flows / S.I. Shevchenko, A.M. Konstantinov // VII International Conference for Young Scientist “Low Temperature Physics”, June 6 – 10, 2016: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2016. – P. 108.

9. Shevchenko S.I. On the possibility of a new electric effect in ultra-thin superfluid films / S.I. Shevchenko, A.M. Konstantinov // VII Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics”, December 13 – 15, 2016: book of abstr. – Ukraine, Kyiv, 2016. – P. 23.
10. Shevchenko S.I. On the possibility of a new electric effect in 2D superfluid systems / S.I. Shevchenko, A.M. Konstantinov // VIII International Conference for Professionals & Young Scientist “Low Temperature Physics”, May 29 – June 2, 2017: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2017. – P. 119.
11. Shevchenko S.I. Possibility of generation of a giant electromotive force by third sound / S.I. Shevchenko, A.M. Konstantinov // 8th International Conference “Physics of Liquid Matter: Modern Problems”, May 18 – 22, 2018: book of abstr. – Ukraine, Kyiv, 2018. – P. 71.
12. Shevchenko S.I. Non-stationary thermal electromotive force generated by third sound / S.I. Shevchenko, A.M. Konstantinov // IX International Conference for Professionals and Young Scientist “Low Temperature Physics”, June 4 – 8, 2018: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2018. – P. 110.
13. Shevchenko S.I. The third sound as an electric field generator / S.I. Shevchenko, A.M. Konstantinov // IX Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics”, December 4 – 5, 2018: book of abstr. – Ukraine, Kyiv, 2018. – P. 20.
14. Шевченко С.И. О нестационарной термоэлектродвижущей силе, порождаемой третьим звуком / С.И. Шевченко, А.М. Константинов // XXXVIII совещания по физике низких температур (НТ-38), 17 – 22 сентября, 2018: тезисы докладов. – Россия, г. Москва – г. Ростов-на-Дону – пос. Шепси, 2018. – С. 153.
15. Konstantinov A.M. The third sound as a generator of non-stationary thermal emf / A.M. Konstantinov, S.I. Shevchenko // Школа-конференція молодих вчених «Сучасне матеріалознавство: фізика, хімія, технології», 27 – 31 травня, 2019: тези доповідей. – Україна, Ужгород, 2019. – С. 176.
16. Konstantinov A.M. On the one thermomagnetic effect in superfluid systems / A.M. Konstantinov, S.I. Shevchenko // X International Conference for Professionals and

Young Scientist “Low Temperature Physics”, June 3 – 7, 2019: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2019. – P. 92.

17. Konstantinov A.M. Superheatconductivity and electrical activity of superfluid systems / A.M. Konstantinov, S.I. Shevchenko // Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics”, September 24 – 26, 2019: book of abstr. – Ukraine, Kyiv, 2019. – P. 62.

18. Shevchenko S.I. Thermal counterflow and electrical activity of superfluid systems in a magnetic field / A.M. Konstantinov, S.I. Shevchenko // X Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics”, December 23 – 24, 2019: book of abstr. – Ukraine, Kyiv, 2019. – P. 2.

19. Shevchenko S.I. The third sound as a generator of non-stationary thermal emf / S.I. Shevchenko, A.M. Konstantinov // International Symposium on Quantum Fluids and Solids 2019 (QFS2019), August 7 – 13, 2019: book of abstr. – Canada, Alberta, 2019. – P1.33, P. 68.

20. Shevchenko S.I. Superheat conductivity and electrical activity of superfluid systems / S.I. Shevchenko, A.M. Konstantinov // International Symposium on Quantum Fluids and Solids 2019 (QFS2019), August 7 – 13, 2019: book of abstr. – Canada, Alberta, 2019. – P1.34, P. 68.

21. Рыбалко А.С. Наблюдение электрической индукции, обусловленной волной второго звука в He II / А.С. Рыбалко // ФНТ. – 2004. – Т. 30, № 12. – С. 1321-1325.

22. Рыбалко А.С. Наблюдение механоэлектрического эффекта в He II / А.С. Рыбалко, С.П. Рубец // ФНТ. – 2005. – Т. 31, № 7. – 820-825.

23. Chagovets T.V. A study of the electric response of He II at the excitation of second sound waves / T.V. Chagovets // Low Temp. Phys. – 2016. – V. 42, No 3. – P. 176-180.

24. Chagovets T.V. Electric response in superfluid helium / T.V. Chagovets // Physics B. – 2016. – V. 488, No 1. – P. 62-66.

25. Рыбалко А.С. Электрический отклик в волне второго звука: аппаратурный аспект / А.С. Рыбалко, Т.В. Чаговец, А.М. Королев // ФНТ. – 2017. – Т. 43, № 6. – С. 927-938.
26. Electric response induced by second sound in superfluid helium / H. Yayama, Y. Nishimura, H. Ushiyama [et al.] // Low Temp. Phys. – 2018. – V. 44, No 10. – P. 1386-1393.
27. Нацик В.Д. Нестационарный термоэлектрический эффект в He II и влияние на него перехода от ламинарного к турбулентному режиму тепловых колебаний / В.Д. Нацик, А.С. Рыбалко // ФНТ. – 2020. – Т. 46, № 1. – С. 33-48.
28. Chagovets T.V. Detection of Electric Response at Excitation of First Sound in He II / T.V. Chagovets // J. Low Temp. Phys. – 2017. – V. 187, No 5/6. – P. 383-389.
29. Ходусов В.Д. Возбуждение волн второго звука периодическим электрическим полем в He II / В.Д. Ходусов // Вісник ХНУ. Сер. фізична «Ядра, частини, поля» –2004. – Т. 642, № 3. – С. 79-83.
30. Косевич А.М. Динамическая электрострикция бозе-конденсата и системы нейтральных атомов / А.М. Косевич // ФНТ. – 2005. – Т. 31, № 10. – С. 1100-1103.
31. Косевич А.М. Об описании электрических эффектов в двухжидкостной модели сверхтекучести / А.М. Косевич // ФНТ. – 2005. – Т. 31, № 1. – С. 50-54.
32. Нацик В.Д. Электрическая активность вихрей в сверхтекучем ^4He / В.Д. Нацик // ФНТ. – 2005. – Т. 31, № 10. – С. 1201-1203.
33. Литвиненко Д.М. Термоэлектромеханические волны в сверхтекучем гелии / Д.М. Литвиненко, В.Д. Ходусов // Вісник ХНУ. Сер. фізична «Ядра, частини, поля». – 2006. – Т. 729, № 1. – С. 31-38.
34. Melnikovsky L.A. Polarization of Dielectrics by Acceleration / L.A. Melnikovsky // J. Low Temp. Phys. – 2007. – V. 148, No 5/6. – P. 559-564.
35. Нацик В.Д. Действие электрического поля на квантованные вихри в HeII / В.Д. Нацик // ФНТ. – 2007. – Т. 33, № 12. – С. 1319–1330.

36. Пашицкий Э.А. О причине электрической активности сверхтекучего гелия при возбуждении в нем волн второго звука и колебаний скорости нормальной компоненты / Э.А. Пашицкий, С.М. Рябченко // ФНТ. – 2007. – Т. 33, № 1. – С. 12-21.
37. Grigorishin R.V. Entropy of the Ground State and the Electric Activity of Superfluid Helium on the Excitation of Second-Sound Waves / R.V. Grigorishin, V.I. Lev // Ukr. J. Phys. – 2008. – V. 53, No 7. – P.645-650.
38. Локтев В.М. О возможной природе электрической активности He II / В.М. Локтев, М.Д. Томченко // ФНТ. – 2008. – V. 34, № 4/5. – С. 337-349.
39. Нацик В.Д. Магнитная поляризация квантовых вихрей в He II / В.Д. Нацик // ФНТ. – 2008. – Т. 34, № 7. – С. 625-630.
40. Гутлянский Е.Д. О возможной поверхностной природе электрической активности He II / Е.Д. Гутлянский // ФНТ. – 2009. – Т. 35, № 10. – С. 956-961.
41. Шевченко С.И. Об электрической активности сверхтекучих систем / С.И. Шевченко, А.С. Рукин // Письма в ЖЭТФ. – 2009. – Т. 90, № 1. – С. 46-50.
42. Томченко М.Д. К теории электрической активности He-II в опыте со вторым звуком / М.Д. Томченко // Доп. НАН України. – 2011. – № 1. – С. 64-69.
43. Tomchenko M.D. Some Mechanisms of “Spontaneous” Polarization of Superfluid He-4 / M.D. Tomchenko // J. Low Temp. Phys. – 2010. – V. 158, No 5/6. – P. 854–866.
44. Пашицкий Э.А. К вопросу об электрической активности сверхтекучего гелия при возбуждении волн первого и второго звуков / Э.А. Пашицкий, А.А. Гурин // ЖЭТФ. – 2010. – Т. 138, № 6. – С. 1103-1118.
45. Ходусов В.Д. Уравнения двухжидкостной гидродинамики сверхтекучего гелия с учетом электрического поля / В.Д. Ходусов, А.С. Наумовец // Вісник ХНУ. Сер. фізична «Ядра, частини, поля». – 2010. – Т. 899, № 2. – С. 44-49.
46. Шевченко С.И. Об электрической поляризации неоднородных сверхтекучих систем / С.И. Шевченко, А.С. Рукин // ФНТ. – 2010. – Т. 36, № 7. – С. 748–758.

47. Шевченко С.И. Об электрических явлениях в электронейтральных сверхтекучих системах / С.И. Шевченко, А.С. Рукин // ФНТ. – 2010. – Т. 36, № 2. – С. 186-195.
48. Loktev V.M. On the mutual polarization of two He4 atoms / V.M. Loktev, M.D. Tomchenko // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. – 2011. – V. 44, No 3. – P. 035006-1-035006-5.
49. Mineev V.P. Polarization Effects in Superfluid 4He / V.P. Mineev // J. Low Temp. Phys. – 2011. – V. 162, No 5/6. – P. 686-692.
50. Tomchenko M.D. Theory of the electric activity of He II induced by waves of first and second sound / M.D. Tomchenko // Phys. Rev. B. – 2011. – V. 83, No 9. – P. 094512-1-094512-5.
51. Полуэктов Ю.М. Поляризационные свойства атомарного газа в когерентном состоянии / Ю.М. Полуэктов // ФНТ. – 2011. – Т. 37, № 12. – С. 1239-1257.
52. Шевченко С.И. Об электрических полях, порождаемых квантованными вихрями / С.И. Шевченко, А.С. Рукин // ФНТ. – 2011. – Т. 37, № 9/10. – С. 1107–1112.
53. Шевченко С.И. О двух подходах к описанию разреженных сверхтекучих бозе-систем / С.И. Шевченко, А.С. Рукин // ФНТ. – 2012. – Т. 38, № 10. – С. 1147-1157.
54. Полуэктов Ю.М. О возможности двух фазовых переходов в жидком гелии / Ю.М. Полуэктов, А.С. Рыбалко // ФНТ. – 2013. – Т. 39, № 9. – С. 992–1000.
55. Ledenyov V.O. Electrical effects in superfluid helium. Thermoelectric effect in Einstein's capacitor / V.O. Ledenyov, D.O. Ledenyov, O.P. Ledenyov // Probl. At. Sci. Technol. – 2014. – V. 89, No 1. – P. 170-179.
56. Полуэктов Ю.М. Поглощение энергии электромагнитного поля сверхтекучей системой атомов с дипольным моментом / Ю.М. Полуэктов // ФНТ. – 2014. – Т. 40, № 5. – С. 503-512.

57. Полуэктов Ю.М. Гидродинамика нормальной и сверхтекучей полярных жидкостей. Распространение звука / Ю.М. Полуэктов // ФНТ. – 2014. – Т. 40, № 9. – С. 1021-1027.
58. Адаменко И.Н. Электрическая поляризация He II квантованными вихрями / И.Н. Адаменко, Е.К. Немченко // ФНТ. – 2015. – Т. 41, № 7. – С. 635-643.
59. Адаменко И.Н. Поляризация пленок He II при движении сверхтекучей компоненты относительно квантованных вихрей / И.Н. Адаменко, Е.К. Немченко // ФНТ. – 2016. – Т. 42, № 4. – С. 335-342.
60. Adamenko I.N. The Electrical Activity of He II with Relative Motion of Normal and Superfluid Components / I.N. Adamenko, E.K. Nemchenko // J. Low Temp. Phys. – 2017. – V. 188, No 3/4. – P. 112-118.
61. Адаменко И.Н. Электрическая поляризация He II, обусловленная вторым и первым звуками / И.Н. Адаменко, Е.К. Немченко // ФНТ. – 2017. – Т. 43, № 9. – С. 1295-1302.
62. Tolman R.C. The Electromotive Force Produced by the Acceleration of Metals / R.C. Tolman, T.D. Stewart // Phys. Rev. – 1916. – V. 8, No 2. – P. 97-117.
63. Prost J. On the microscopic interpretation of exoelectricity / J. Prost, J.P. Marcerou // J. Physique. – 1977. – V. 38, No 3. – P. 315-324.
64. Buckingham A.D. Propriétés Optiques et Acoustiques des Fluids Comprimés et Actions Intermoléculaires / A.D. Buckingham – Paris: Centre National de la Recherche Scientifique. – 1959. – 574 p.
65. Салистра Г.И. Межатомный дипольный момент / Г.И. Салистра // Укр. физ. журн. – 1976. – Т. 21, № 3. – С. 445-451.
66. Brown W.B. Interatomic dispersion dipole / W.B. Brown, D.M. Whisnant // Mol. Phys. – 1973. – V. 25, No 6. – P. 1385-1403.
67. Whisnant D.M. Dispersion dipole between rare-gas atoms / D.M. Whisnant, W.B. Brown // Mol. Phys. – 1973. – V. 26, No 5. – P. 1105-1119.
68. Бараш Ю.С. Силы Ван-дер-Ваальса / Ю.С. Бараш – Москва: Наука. – 1988. – 344 с.

69. Лифшиц Е.М. Статистическая физика, часть 2 / Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2002. – 496 с.
70. Antoniewicz P.R. Surface-Induced Dipole Moments of Adsorbed Atoms / P.R. Antoniewicz // *Phys. Rev. Lett.* – 1974. – V. 32, No 25. – P. 1424-1425.
71. Linder B. Dipoles induced by physical adsorption / B. Linder, R.A. Kromhout // *Phys. Rev. B.* – 1976. – V. 13, No 4. – P. 1532-1535.
72. Salitra G.I. Long-range correlations and anisotropy in simple liquids and gases near the surfaces of solids / G.I. Salitra // *ЖЭТФ.* – 1984. – V. 60, No 5. – P. 984-990.
73. Дзялошинский И.Е. Об учете запаздывания во взаимодействии нейтральных атомов / И.Е. Дзялошинский // *ЖЭТФ* – 1956. – Т. 30, № 6. – С. 1152-1154.
74. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases / F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii [et al.] // *Rev. Mod. Phys.* – 1999. – V. 71, No 3. – P. 463-512.
75. Leggett A.J. Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts / A.J. Leggett // *Rev. Mod. Phys.* – 2001. – V. 73, No 2. – P. 307-356.
76. Келдыш Л.В. Проблемы теоретической физики / Л.В. Келдыш – Москва: Наука. – 1972. – 495 с.
77. Hall Н.Е. The Rotation of Liquid Helium II. II. The Theory of Mutual Friction in Uniformly Rotating Helium II / Н.Е. Hall, W.F. Vinen // *Proc. R. Sci. Lond. Ser. A.* – 1956. – V. 238, No 1213. – P. 215-234.
78. Sonin E.B. Magnus force in superfluids and superconductors / E.B. Sonin // *Phys. Rev. B.* – 1997. – V. 55, No 1. – P. 485-501.
79. Лифшиц Е.М. О поглощении второго звука во вращающемся гелии II / Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский // *ЖЭТФ.* – 1957. – Т. 33, № 2. – С. 535-536.
80. Питаевский Л.П. Вычисление фононной части силы взаимного трения в сверхтекучем гелии / Л.П. Питаевский // *ЖЭТФ.* – 1958. – Т. 35, № 5. – С. 1271-1273.
81. Иорданский С.В. О силе взаимного трения во вращающемся бозе-газе / С.В. Иорданский // *ЖЭТФ.* – 1965. – Т. 49, № 1. – С. 225-236.

82. Zaremba E. Polarization induced surface dipole moments / E. Zaremba // *Phys. Lett.* – 1976. – V. 57A, No 2. – P. 156-158.
83. Antoniewicz P.R. The Depolarization Interaction of Adsorbed Non-Polar Molecules / P.R. Antoniewicz // *Phys. Stat. Sol. B.* – 1978. – V. 86, No 2. – P. 645-652.
84. Бараш Ю.С. Некоторые вопросы теории сил Ван-дер-Ваальса / Ю.С. Бараш, В.Л. Гинзбург // *УФН.* – 1984. – Т. 143, № 3. – С. 345-389.
85. Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский – Москва ФИЗМАТЛИТ. – 2002. – 720 с.
86. Bardeen J. The Image and Van der Waals Forces at a Metallic Surface / J. Bardeen // *Phys. Rev.* – 1940. – V. 58, No 8. – P. 727-736.
87. Хуанг К. Статистическая механика / К. Хуанг – Москва Мир. – 1966. – 521 с.
88. Паттерман С. Гидродинамика сверхтекучей жидкости / С. Паттерман – Москва: Мир. – 1978. – 520 с.
89. Atkins K.R. Third and Fourth Sound in Liquid Helium II / K.R. Atkins // *Phys. Rev.* – 1959. – V. 113, No 4. – P. 962-965.
90. Bergman D.J. Hydrodynamics and Third Sound in Thin He II Films / D.J. Bergman // *Phys. Rev.* – 1969. – V. 188, No 1. – P. 370-384.
91. Third Sound in Adsorbed Superfluid Films / I. Rudnick, R.S. Kagiwida, J.C. Fraser [et al.] // *Rhys. Rev. Lett.* – 1968. – V. 20, No 9. – P. 430-432.
92. Bergman D.J. Third Sound in Superfluid Helium Films of Arbitrary Thickness / D.J. Bergman // *Phys. Rev. A.* – 1971. – V. 3, No 6. – P. 2058-2066.
93. Anderson P.W. Interpretation of the Johnston-King Experiment on Evaporation of Liquid He / P.W. Anderson // *Phys. Lett.* – 1969. – V. 29A, No 9. – P. 563-564.
94. Hyman D.S. Evaporation from Superfluid Helium / D.S. Hyman, M.O. Scully // *Phys. Rev.* – 1969. – V. 186, No 1. – P. 231-238.
95. Халатников И.М. Теория сверхтекучести / И.М. Халатников – Москва: Наука. – 1971. – 320 с.

96. Scholtz J.H. Third Sound and the Healing Length of He II in Films as Thin as 2.1 Atomic Layers / J.H. Scholtz, E.O. McLean, I. Rudnick // *Phys. Rev. Lett.* – 1974. – V. 32, No 4. – P. 147-151.
97. Абрикосов А.А. Основы теории металлов / А.А. Абрикосов – Москва: Наука. – 1987. – 520 с.
98. Dynamics of superfluid films / V. Ambegaokar, B.I. Halperin, D.R. Nelson [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 1980. – V. 21, No 5. – P. 1806-1826.
99. Teitel S. Third Sound and Thermal Conduction in Thin ^4He Films / S. Teitel // *J. Low Temp. Phys.* – 1982. – V. 46, No 1/2. – P. 77-96.
100. Keesom W.H. A Few Measurements on the Heat Conductivity of Liquid Helium II / W.H. Keesom, A.P. Keesom, B.F. Saris // *Physica.* – 1938. – V. 5, No 4. – P. 281-285.
101. Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – Москва ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 496 с.
102. Гуржи Р.Н. К теории теплопроводности диэлектрических образцов ограниченного размера / Р.Н. Гуржи, С.И. Шевченко // *ЖЭТФ.* – 1968. – Т. 54, № 4. – С. 1613-1616.
103. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2001. – 736 с.
104. Vinen W.F. Mutual Friction in a Heat Current in Liquid Helium II. I. Experiments on Steady Heat Currents / W.F. Vinen // *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* – 1957. – V. 240, No 1220. – P. 114-127.
105. Vinen W.F. Mutual Friction in a Heat Current in Liquid Helium II. II. Experiments on Transient Effects / W.F. Vinen // *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* – 1957. – V. 240, No 1220. – P. 128-143.
106. Vinen W.F. Mutual Friction in a Heat Current in Liquid Helium II. III. Theory of the Mutual Friction / W.F. Vinen // *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* – 1957. – V. 242, No 1231. – P. 493-515.

107. Melotte D.J. Transition to Normal Fluid Turbulence in Helium II / D.J. Melotte, C.F. Barenghi // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – V. 80, No 19. – P. 4181-4184.
108. Yui S. Counterflow quantum turbulence in a square channel under the normal fluid with a Poiseuille flow / S. Yui, M. Tsubota // *J. Phys., Conf. Ser.* – 2014. – V. 568, No 1. – P. 012028-1-012028-5.
109. Tough J.T. Superfluid Turbulence / J.T. Tough // *Progress in Low Temp. Phys.* – 1982. – V. 8, No 3. – P. 133-219.
110. Vinen W.F. Quantum Turbulence / W.F. Vinen, J.J. Niemela // *J. Low Temp. Phys.* – 2002. – V. 128, No 5/6. – P. 167-231.
111. Адаменко И.Н. Волновые процессы в плоско-параллельном капилляре, заполненном He II / И.Н. Адаменко, М.И. Каганов // *ЖЭТФ.* – 1967. – Т. 53, № 2. – С. 615-625.

**ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ
ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Shevchenko S.I. On the Dipole Moment of Quantized Vortices in the Presence of Flows / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // J. Low. Temp. Phys. – 2016. – V. 185, №5. – P. 384–391.
2. Шевченко С.И. О возможности нового электрического эффекта в сверхтонких сверхтекучих пленках / С.И. Шевченко, **A.M. Константинов** // Письма в ЖЭТФ. – 2016. – V. 104, №7. – С. 518–522.
3. Shevchenko S.I. Non-stationary Thermal Electromotive Force Generated by Third Sound / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // J. Low. Temp. Phys. – 2019. – V. 194, №1. – P. 1–13.
4. Шевченко С.И. Сверхтеплопроводность и электрическая активность сверхтекучих систем / С.И. Шевченко, **A.M. Константинов** // Письма в ЖЭТФ. – 2019. – V. 109, №12. – С. 829–833.
5. Шевченко С.И. Противотоковая теплопроводность и электрическая активность сверхтекучих систем в магнитном поле / С.И. Шевченко, **A.M. Константинов** // ФНТ – 2020. – V. 46, №1. – С. 57–69.
6. Шевченко С.И. О дипольном моменте квантованных вихрей, порождаемом потоками / С.И. Шевченко, **A.M. Константинов** // XXXVII совещания по физике низких температур (НТ-37), 29 июня – 3 июля, 2015: тезисы докл. – Россия, Казань, 2015. – С. 236–237.
7. Шевченко С.И. Об особенностях поляризации неоднородных систем при наличии и отсутствии межатомного взаимодействия / С.И. Шевченко, **A.M. Константинов** // XII Міжнародна наукова конференція «Фізичні явища в твердих тілах», 1 – 4 грудня, 2015: тези доповідей. – Україна, Харків, 2015. – С. 19.
8. Shevchenko S.I. On the dipole moment of quantized vortices in the presence of flows / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // VII International Conference for

Young Scientist “Low Temperature Physics”, June 6 – 10, 2016: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2016. – P. 108.

9. Shevchenko S.I. On the possibility of a new electric effect in ultra-thin superfluid films / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // VII Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics”, December 13 – 15, 2016: book of abstr. – Ukraine, Kyiv, 2016. – P. 23.

10. Shevchenko S.I. On the possibility of a new electric effect in 2D superfluid systems / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // VIII International Conference for Professionals & Young Scientist “Low Temperature Physics”, May 29 – June 2, 2017: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2017. – P. 119.

11. Shevchenko S.I. Possibility of generation of a giant electromotive force by third sound / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // 8th International Conference “Physics of Liquid Matter: Modern Problems”, May 18 – 22, 2018: book of abstr. – Ukraine, Kyiv, 2018. – P. 71.

12. Shevchenko S.I. Non-stationary thermal electromotive force generated by third sound / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // IX International Conference for Professionals and Young Scientist “Low Temperature Physics”, June 4 – 8, 2018: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2018. – P. 110.

13. Шевченко С.И. О нестационарной термоэлектродвижущей силе, порождаемой третьим звуком / С.И. Шевченко, **А.М. Константинов** // XXXVIII совещания по физике низких температур (НТ-38), 17 – 22 сентября, 2018: тезисы докл. – Россия, г. Москва – г. Ростов-на-Дону – пос. Шепси, 2018. – С. 153–154.

14. Shevchenko S.I. The third sound as an electric field generator / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // IX Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics”, December 4 – 5, 2018: book of abstr. – Ukraine, Kyiv, 2018. – P. 20.

15. **Konstantinov A.M.** The third sound as a generator of non-stationary thermal emf / **A.M. Konstantinov**, S.I. Shevchenko, **А.М. Константинов** // Школа-конференція молодих вчених «Сучасне матеріалознавство: фізика, хімія,

технології», 27 – 31 травня, 2019: тези доповідей. – Україна, Ужгород, 2019. – С. 176.

16. **Konstantinov A.M.** On the one thermomagnetic effect in superfluid systems / **A.M. Konstantinov**, S.I. Shevchenko // X International Conference for Professionals and Young Scientist “Low Temperature Physics”, June 3 – 7, 2019: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2019. – P. 92.

17. Shevchenko S.I. The Third Sound as a Generator of Non-stationary Thermal EMF / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // International Symposium on Quantum Fluids and Solids 2019 (QFS2019), August 7 – 13, 2019: book of abstr. – Canada, Alberta, 2019. – P. 68.

18. Shevchenko S.I. Superheat conductivity and electrical activity of superfluid systems / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // International Symposium on Quantum Fluids and Solids 2019 (QFS2019), August 7 – 13, 2019: book of abstr. – Canada, Alberta, 2019. – P. 68.

19. **Konstantinov A.M.** Superheatconductivity and electrical activity of superfluid systems / **A.M. Konstantinov**, S.I. Shevchenko // Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics”, September 24 – 26, 2019: book of abstr. – Ukraine, Kyiv, 2019. – P. 62.

20. Shevchenko S.I. Thermal counterflow and electrical activity of superfluid systems in a magnetic field / S.I. Shevchenko, **A.M. Konstantinov** // X Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics”, December 23 – 24, 2019: book of abstr. – Ukraine, Kyiv, 2019. – P. 2.

ДОДАТОК Б. ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

- XII Міжнародна конференція «Фізичні явища в твердих тілах» (Харків, Україна, 1-4 грудня, 2015).
- XXXVII Совецание по физике низких температур (Казань, Россия, 29 июня – 3 июля 2015).
- VII International Conference for Young Scientists “Low Temperature Physics” (Kharkiv, Ukraine, 6-10 June, 2016).
- VII Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics”» (Kyiv, Ukraine, December 13-15, 2016).
- VIII International Conference for Professionals & Young Scientists “Low Temperature Physics” (Kharkiv, Ukraine, May 29-June 2, 2017).
- 8th International Conference “Physics of Liquid Matter: Modern Problems” (Kyiv, Ukraine, May 18-22, 2018).
- IX International Conference for Professionals and Young Scientists “Low Temperature Physics” (Kharkiv, Ukraine, June 4-8, 2018).
- XXXVIII Совецание по физике низких температур (Москва – Ростов-на-Дону – Шепси, Россия, 17-22 сентября 2018).
- IX Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics” (Kyiv, Ukraine, 04 December – 05 December, 2018).
- Школа-конференція молодих вчених «Сучасне матеріалознавство: фізика, хімія, технології» (Ужгород, Водоград, Україна, 27-31 травня, 2019).
- X International Conference for Professionals and Young Scientists “Low Temperature Physics” (Kharkiv, Ukraine, June 3-7, 2019).
- Quantum Fluids & Solids (Edmon, Alberta, Canada, August 7-13, 2019).
- Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics” (Kyiv, Ukraine, September 24-26, 2019).
- X Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics” (Kyiv, Ukraine, 23 December – 24 December, 2019).