

Национальная академия наук Украины

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина

На правах рукописи

Гладкая Зоя Николаевна

УДК 517.957

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ТИПА
СТУПЕНЬКИ

01.01.03 – математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

Егорова Ирина Евгеньевна,

доктор физико-математических наук,

старший научный сотрудник

Харьков – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	4
ВВЕДЕНИЕ	5
РАЗДЕЛ 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ	11
РАЗДЕЛ 2. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВ- НЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ ДАННЫМИ ТИПА СТУПЕНЬКИ	27
2.1. Прямая задача рассеяния	28
2.2. Обратная задача рассеяния.	45
2.3. Дополнительные свойства данных рассеяния.	58
2.4. Выводы.	64
РАЗДЕЛ 3. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИ- ЗА С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ТИПА СТУПЕНЬКИ	66
3.1. Пара Лакса и эволюция данных рассеяния.	67
3.2. Обоснование метода обратной задачи рассеяния	71
3.3. Выводы.	86
РАЗДЕЛ 4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ В СЛУ- ЧАЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ	87
4.1. Постановка задачи Римана-Гильберта	87
4.2. Асимптотика в области $4c^2t < x$	94
4.3. Сведение к модельной задаче в области $-6c^2t < x < 4c^2t$.	99
4.4. Решение модельной задачи Римана-Гильберта	108
4.5. Сравнение с формулой Итса-Матвеева.	114

4.6. Сравнение с формулой Гуревича-Питаевского.	122
4.7. Асимптотики в области $x < -6c^2t$	124
4.8. Выводы.	129
ВЫВОДЫ	131
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	133

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ГЛМ	(уравнение) Гельфанда–Левитана–Марченко
КдФ	(уравнение) Кортевега–де Фриза
МОЗР	метод обратной задачи рассеяния
РГ	(задача) Римана–Гильберта
\mathbb{C}	комплексная плоскость
\mathbb{C}^{\pm}	верхняя (нижняя) комплексные полуплоскости
\mathbb{R}	вещественная ось
\mathbb{R}_{\pm}	положительная (отрицательная) полуось
\mathbb{Z}_{\pm}	множество положительных (отрицательных) целых чисел

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Метод обратной задачи рассеяния является одним из самых эффективных методов в теории интегрируемых систем. Его открытие принадлежит К. Гарднеру, Дж. Грину, М. Краскалу и Р. Миуре (1967), которые нашли связь между уравнением Кортевега–де Фриза и одномерным оператором Шрёдингера. После этого, без преувеличения, сотни исследователей, как математиков, так и физиков, занимались усовершенствованием этого метода и его применением к различным нелинейным уравнениям, играющим важную роль в физике. С другой стороны, эти исследования вызвали новую волну интереса к разнообразным обратным задачам, в том числе к задаче, которая лежала в основе МОЗР, а именно задаче рассеяния для одномерного оператора Шрёдингера на всей оси с убывающим потенциалом. Эта задача считалась хорошо изученной после работ Л.Д. Фаддеева (1964), но впоследствии она подверглась значительной ревизии в работах В.А. Марченко (1977) и, независимо, П. Дейфта и Е. Трубовица (1979). В частности, их исследования показали, что в характеристических свойствах данных рассеяния существенная роль принадлежит аналитическим свойствам этих данных на краю непрерывного спектра.

Естественным обобщением метода обратной задачи было его применение к интегрируемым нелинейным уравнениям с так называемыми начальными данными типа ступеньки, то есть асимптотически близкими к разным постоянным на разных полуосях. Модели этого типа привлекли внимание физиков неожиданными асимптотическими свойствами решений и привели к возникновению понятия асимптотических солитонов, которые активно исследовались в работах Е.Я. Хрушлова и В.П. Котлярова (1976-1989). Следует отметить, что несмотря на большое сходство в спектральных свойствах операторов Шрёдингера с убывающим потенциалом и с потенциалом типа ступеньки, асимптотики решений соответствующих

задач Коши для уравнения КдФ существенно различаются. В том числе на пространственно-временной плоскости в случае начальных данных типа ступеньки, соответствующей ударной волне, возникает так называемая зона дисперсионного сжатия, где решение оказывается асимптотически близким к эллиптической функции Якоби. На физическом уровне строгости такая асимптотика была описана А.В. Гуревичем и Л.П. Питаевским (1973) с помощью метода Уизема. За исключением солитонной зоны и зоны асимптотических солитонов, математически обоснованных асимптотик для решений уравнения Кортевега-де Фриза до сих пор не получено. Это можно сделать нелинейным методом наискорейшего спуска для осциляционной задачи Римана-Гильберта, который является одним из вариантов МОЗР. Это строгий и наиболее широко применимый метод исследования асимптотик нелинейных уравнений при большом времени. Его применение в случае начальных данных типа ступеньки требует, прежде всего, хорошо развитой теории рассеяния для соответствующего линейного оператора пары Лакса. Не смотря на достаточно большое количество работ, посвященных операторам с коэффициентами типа ступеньки, прямая и обратная задачи рассеяния для оператора Шрёдингера, её решение в классе, так же как и полное решение задачи Коши для уравнения КдФ с начальными данными этого класса являются не до конца исследованными, в отличие от убывающего случая, где соответствующие результаты В.А. Марченко имеют законченный характер. Существенные результаты ограничиваются пионерской работой В.С. Буслаева, В.Н. Фомина (1962), где рассмотрена прямая задача рассеяния, и работами Е. Коэн и Т. Каппелера (1984), где задачу исследовано для второго конечного момента. Данную диссертационную работу Гладкой З.М. посвящено именно решению прямой и обратной задач рассеяния для оператора Шрёдингера в классе потенциалов типа ступеньки, которые имеют заданный момент возмущения, начиная с первого, и заданную гладкость; эти результаты применены для решения

ассоциированной задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза, а также для получения асимптотики решения методом задачи Римана-Гильберта. Поэтому результаты, полученные в диссертации являются актуальными и интересными как для специалистов в спектральной теории операторов, так в теории нелинейных интегрируемых уравнений.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Исследования, которые составили основу данной работы, проводились в отделе статистических методов математической физики Математического отделения Физико-технического института низких температур имени Б.И. Веркина НАН Украины согласно научно-исследовательской теме "Спектральный анализ новых классов операторов и его применение в теории интегрируемых систем и физике конденсированного состояния № госрегистрации 0110U007898, 2010-2015 г.

Часть работы была выполнена в рамках гранта "Мережа математичних досліджень 2013-2015" и в рамках проекта Ukrainian branch of the French-Russian Poncelet laboratory" — "Probability problems on groups and spectral theory".

Цель и задачи исследования. *Цель* диссертации состоит в полном решении прямой и обратной задач рассеяния для оператора Шрёдингера с потенциалом типа ступеньки, имеющим заданную гладкость и конечное число моментов возмущения; решение задачи Коши для уравнения КдФ с начальными данными этого класса и изучение асимптотики поведения при большом времени решения такой задачи Коши.

Объектом исследования являются одномерные операторы Шрёдингера на всей оси с потенциалами типа ступеньки и ассоциированные с ними задачи Коши для уравнения Кортевега - де Фриза.

Предметом исследования являются прямые и обратные задачи рассеяния для оператора Шрёдингера на всей оси, задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки а также асимп-

тотическое поведение этих решений при больших временах.

Задачи исследования:

- развитие теории рассеяния для оператора Шрёдингера с потенциалом типа ступеньки, имеющим заданное число моментов и заданную гладкость возмущения, т.е. принадлежащего заданному классу;
- решение задачи Коши для уравнения КдФ с начальными данными типа ступеньки указанного класса, в том числе с начальными данными с возмущением типа Шварца;
- описание асимптотического поведения решений уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки в основных регионах пространственно-временной плоскости в случае ударной волны.

Методы исследования. При решении задачи Коши использовался метод обратной задачи рассеяния. Для исследования асимптотик использовался нелинейный метод наискорейшего спуска для осцилляционной задачи Римана–Гильберта в векторной форме, который является вариантом метода обратной задачи рассеяния.

Научная новизна полученных результатов. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и состоят в следующем:

- решена задача рассеяния для оператора Шрёдингера на всей оси с потенциалом типа ступеньки в классе возмущений, которые имеют заданную гладкость и число моментов возмущения, начиная с первого;
- проинтегрировано уравнение Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки, которые имеют заданную гладкость (≥ 6) и заданное число конечных моментов (≥ 3) возмущения.
- в основных регионах полуплоскости пространство–время получены и обоснованы асимптотики решения уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки, соответствующими удар-

ной волне, в том числе проведено сравнение с формулами Гуревича–Питаевского.

Практическое значение полученных результатов. Работа имеет теоретический характер, полученные результаты и развитые методы могут быть использованы в направлениях исследования поведения решения уравнения КдФ в различных асимптотических режимах. Результаты, полученные в диссертации, могут быть полезны в исследованиях в области математической физики, которые проводятся в Физико-техническом институте низких температур имени Б.И. Веркина НАН Украины (г. Харьков), в Институте математики НАН Украины (г. Киев), в Математическом институте имени Стеклова (г. Москва), на механико-математическом факультете ХНУ имени В.Н. Каразина, в Венском Университете.

Личный вклад соискателя. Постановки задач принадлежат научному руководителю. Основные результаты диссертации получены автором лично и самостоятельно. В работах, полученных в соавторстве авторство распределено следующим образом: в [60] Г. Тешлу принадлежит теорема 6.2, В.П. Котлярову — результаты в приложении; в [61] Г. Тешл является автором теоремы 4.1, Т.Л. Лянге — леммы 4.2; в [63] Г.Тешл является автором лемм 3.1 и 3.2.

Апробация. Результаты диссертации были изложены на семинарах по математической физике Физико-технического института имени Б.И. Веркина НАН Украины, а также на международных конференциях: "Конференция молодых ученых — Физика Низких Температур" (Харьков, 2012), "Четвертая международная конференция молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я.Б. Лопатинского" (Донецк, 2012), "Міжнародна конференція молодих математиків" (Київ, 2015), Analysis and Mathematical Physics, (Харьков, 2015) "Международная конференция по динамическим системам — Shilnikov Workshop" (Нижний Новгород, Россия, 2015).

Публикации. Результаты диссертации нашли отражение в 10 научных публикациях, в том числе в 5 статьях [9,10,60,61,63] в специализированных изданиях, и в 5 тезисах выступлений на конференциях [11–15].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, выводов и списка использованных источников, который содержит 91 наименование и занимает 10 страниц. Общий объем диссертации составляет 143 страниц. Основные результаты, вынесенные на защиту, изложены в разделах 2–4.

Выражаю благодарность Егоровой Ирине Евгеньевне за постановку задач и многочисленные обсуждения. Также благодарю моих соавторов: Геральда Тешла и Владимира Петровича Котлярова.

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ

Под обратными задачами спектрального анализа понимают задачи восстановления линейного оператора по тем или иным спектральным характеристикам. Такими характеристиками могут быть спектры (при разных граничных условиях), спектральные функции, данные рассеяния и проч. В 40-х годах появился новый аппарат исследования обратных задач — операторы преобразования, с помощью которой В.А. Марченко была исчерпывающе решена обратная задача рассеяния для оператора Шрёдингера $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ с убывающим потенциалом, имеющим первый суммируемый момент ([27]). В этой работе было впервые выведено основное уравнение обратной задачи, известное как уравнение Гельфанда – Левитана – Марченко (ГЛМ). Оно позволяет восстановить потенциал $q(x)$, а, значит, и сам оператор по данным рассеяния, а также установить характеристические свойства данных рассеяния для потенциалов указанного класса.

История изучения обратной задачи рассеяния для оператора Шрёдингера с убывающим потенциалом на всей оси берет свое начало с работы Кея и Мозеса [73] (1956), где были выведены соответствующие уравнения ГЛМ. Полное решение прямой и обратной задачи было предложено Л. Фаддеевым [32] (1963). Приведем ключевые моменты работы [32]. Потенциал $q(x)$ предполагается суммируемым с первым моментом:

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)|q(x)|dx < \infty. \quad (1.1)$$

При таком условии уравнение $-y'' + q(x)y = \lambda y$ имеет два решения $\phi_{\pm}(\lambda, x)$, которые называются решениями Йоста и имеют асимптотическое поведение $\phi_{\pm}(k, x) \sim e^{\pm ikx}$ при $x \rightarrow \pm\infty$, где $\lambda = k^2$. Они представляются в виде

$$\phi_{\pm}(k, x) = e^{\pm ikx} \pm \int_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x, y)e^{\pm ik y} dy,$$

где $K_{\pm}(x, y)$ — ядра операторов преобразования. Эти ядра вещественны и убывают со скоростью, зависящей от скорости убывания потенциала:

$$|K_{\pm}(x, t)| \leq C \left| \int_{\frac{x+t}{2}}^{\pm\infty} |q(s)| ds \right|.$$

Потенциал может быть получен по формуле $2\frac{d}{dx}K_{\pm}(x, x) = \mp q(x)$. Спектр оператора Шрёдингера с таким потенциалом состоит из абсолютно непрерывной части, которая занимает правую полуось, и из конечного числа отрицательных собственных значений $\sigma_d = \{-\kappa_1^2, \dots, -\kappa_N^2\}$. Отвечающими им собственными функциями являются решения Йоста, которые в этих точках отличаются на мультипликативную постоянную. Введем правые и левые нормировочные константы

$$(\gamma_j^{\pm})^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \phi_{\pm}^2(\kappa_j, x) dx.$$

Решения Йоста и комплексно сопряженные к ним функции образуют две пары линейно независимых решений при вещественных $k \neq 0$ и связаны между собой соотношениями рассеяния $T(k)\phi_{\pm}(k, x) = R_{\mp}(k)\phi_{\mp}(k, x) + \overline{\phi_{\mp}(k, x)}$, где $T(k)$ — это коэффициент прохождения, а $R_+(k)$, $R_-(k)$ — правый и левый коэффициенты отражения, являющиеся элементами матрицы рассеяния

$$S(k) = \begin{pmatrix} T(k) & R_+(k) \\ R_-(k) & T(k) \end{pmatrix}$$

со следующими свойствами:

А. $S(k)$ унитарна и удовлетворяет симметрии $S(-k) = \overline{S(k)}$ при $k \in \mathbb{R}$. Кроме того, $S(k) = \mathbb{I} + O(k^{-1})$ при $k \rightarrow \infty$.

В. Функция $T(k)$ аналитически продолжима в \mathbb{C}^+ и имеет простые полюсы в точках $i\kappa_l$, причем $\text{Res}_{i\kappa_l} T(k) = \gamma_l^- \gamma_l^+$.

С. Если $T(0) = 0$, то $R_{\pm}(0) = -1$, а если $T(0) \neq 0$, то $-1 < R_{\pm}(0) \leq 1$.

Набор данных рассеяния $\mathcal{S} = \{S(k), k \in \mathbb{R}; -\kappa_j, \gamma_l^{\pm}, j = 1, \dots, N\}$ связан с операторами преобразования уравнением ГЛМ (основным уравнением обратной задачи)

$$K_{\pm}(x, t) + F_{\pm}(x + t) \pm \int_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x, s)F_{\pm}(s + t) ds = 0, \quad (1.2)$$

$$\text{где } F_{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R_{\pm}(k)e^{\pm ikx} dk + \sum_{\lambda_l \in \sigma_d} \gamma_l^{\pm} e^{\mp \kappa_l x}, \quad (1.3)$$

причем выполнено условие

$$\mathbf{D.} \quad \pm \int_a^{\pm\infty} (1 + |x|) \left| \frac{d}{dx} \int_{\mathbb{R}} R_{\pm}(k)e^{\pm ikx} dk \right| dx < \infty, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Алгоритм решения обратной задачи состоит в следующем: пусть данные рассеяния S удовлетворяют свойствам $\mathbf{A} - \mathbf{D}$, по ним построим функции (1.3) и решим линейные интегральные уравнения (1.2). При условии \mathbf{D} их единственные решения удовлетворяют свойству

$$\pm \int_a^{\pm\infty} (1 + |x|) \left| \frac{d}{dx} K_{\pm}(x, x) \right| dx < \infty.$$

Восстановим два потенциала $q_{\pm}(x) = \mp 2 \frac{d}{dx} K_{\pm}(x, x)$. Поведение каждого из них хорошо контролируется на одной из полуосей, но при этом ничего не известно о его поведении на другой. Это препятствие преодолевается, если доказать, что $q_+(x) = q_-(x)$ (теорема единственности).

В 1979 году П. Дейфт и Е. Трубовиц [51] построили пример таких данных рассеяния, которые удовлетворяют условиям $\mathbf{A} - \mathbf{D}$ и при этом восстанавливаются два неравных потенциала: $q_+(x) \neq q_-(x)$. Оказалось, что в число необходимых и достаточных свойств нужно включить дополнительные условия на поведение данных рассеяния на краю непрерывного спектра, т.е. в точке $k = 0$. В [51] было предложено такое условие для потенциалов со вторым суммируемым моментом: либо **(i)** $0 < \text{const.} \leq |T(k)|$, либо **(ii)** $T(k) = \alpha k + o(k)$, $\alpha \neq 0$ при $k \rightarrow 0$, $\text{Im } k \geq 0$, и $1 + R_{\pm}(k) = \alpha_{\pm} k + o(k)$ при $k \rightarrow 0$ и $k \in \mathbb{R}$. В [51] прямая и обратная задачи рассеяния были решены в классе убывающих потенциалов, имеющих второй суммируемый момент, но при этом предложенное доказательство теоремы единственности не допускает обобщения на первый суммируемый момент, в том числе,

и условие (ii). В 1977 году В.А. Марченко ([28]) предложил универсальное условие

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k(R_{\pm}(k) + 1)}{T(k)} = 0, \quad (1.4)$$

которое справедливо для всех моментов, начиная с первого. В этой работе он привел исчерпывающее решение прямой и обратной задач рассеяния на всей оси в классе (1.1), включая новое доказательство теоремы единственности и характеристизационную теорему для независимых (то есть правых или левых) данных рассеяния. Условие (1.4) принято называть условием Марченко. Характеризационная теорема Марченко ([28]) (для правых данных рассеяния) имеет вид:

Теорема Марченко. Для того, чтобы набор величин $\mathcal{S} = \{R_+(k), i\kappa_j, \gamma_j^+\}$ ($k \in \mathbb{R}$, $\kappa_j > 0$, $\gamma_j^+ > 0$, $j = 1, \dots, N$) являлся данными рассеяния некоторого оператора Шрёдингера с вещественным потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим (1.1), необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия: 1. При вещественных $k \neq 0$ функция $R_+(k) = \overline{R_+(-k)}$ является непрерывной,

$$|R_+(k)| \leq 1 - Ck^2(1 + k^2)^{-1} \text{ и } R_+(k) = O(k^{-1}) \text{ при } k \rightarrow \pm\infty;$$

2. Функция $\tilde{R}_+(x) = \int_{\mathbb{R}} R_+(k)e^{ikx} dk$ абсолютно непрерывна, а ее производная $\tilde{R}'_+(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ удовлетворяет неравенству $\int_{\mathbb{R}_+} x|\tilde{R}'_+(x)| < \infty$;

3. Функция $zT^{-1}(z)$, где

$$T(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln(1 - |R_+(k)|^2)}{k - z} dk \right\} \prod_{j=1}^N \frac{z + i\kappa_j}{z - i\kappa_j},$$

непрерывна в $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$, и выполняется условие Марченко (1.4);

4. Функция $\tilde{R}_-(x) = - \int_{\mathbb{R}} R_+(-k)T(k)T^{-1}(-k)e^{-ikx} dk$ является абсолютно непрерывной а ее производная $\tilde{R}'_-(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ удовлетворяет неравенству $\int_{\mathbb{R}_-} |x\tilde{R}'_-(x)| dx < \infty$.

Отметим, что условия 2 и 4 этой теоремы достаточно сложно проверить для заданной функции $R_+(k)$. Но дальнейшие попытки сделать

характеризацию более явной (см. [19], [42], [25]) не привели к существенному прогрессу, так что подход В. А. Марченко в решении прямой и обратной задачи в классе (1.1) и результат теоремы Марченко остаются наиболее полными и, по сути, единственными результатами по характеристике независимых данных рассеяния. В настоящей диссертации подход В. А. Марченко используется при решении прямой и обратной задач рассеяния для операторов Шрёдингера с потенциалом типа ступеньки, то есть с потенциалом, стремящимся к разным константам на правой и левой полуосях: $q(x) \rightarrow c_{\pm}$, $x \rightarrow \pm\infty$, где $c_{\pm} \in \mathbb{R}$. Задача рассеяния для оператора Шрёдингера с таким потенциалом была впервые рассмотрена в 1962 году В.С. Буслаевым и В.Н. Фоминым [8] в предположении первого суммируемого момента возмущений $\int_{\mathbb{R}_{\pm}} (1 + |s|)|q(s) - c_{\pm}|ds < \infty$. Условия на данные рассеяния на краю непрерывного спектра и теорема единственности там не обсуждались. Полное решение прямой и обратной задачи для потенциалов типа ступеньки со вторым суммируемым моментом возмущения дано Э. Коэн и Т. Каппелером в [48]. Задача решена методом Дейффа-Трубовица, и не допускает обобщения на первый момент.

Следует заметить, что задача рассеяния для операторов с потенциалами типа ступеньки имеет много сходного с задачей для убывающего потенциала, но есть и существенные различия, связанные с наличием однократного спектра. В [2] было анонсировано условие, являющееся аналогом условия Марченко, применимое при первом моменте возмущения. Самым существенным пунктом этого условия было следующее поведение вронскиана решений Йоста: $W^{-1}(\lambda) = O((\lambda - \underline{c})^{-1/2})$, где $\underline{c} = \min\{c_-, c_+\}$. Это условие позволяет доказать теорему единственности в решении обратной задачи, но при этом возникают значительные аналитические трудности, избежать которых можно, если получить аналог теоремы Т. Актосана и М. Клауса [42], справедливой в убывающем случае: при наличии резонанса $W(\lambda) = const.\sqrt{\lambda}(1 + o(1))$. Для ступеньки аналог этой теоремы получен

в настоящей диссертации.

Из дальнейших обобщений подхода В. А. Марченко в решении прямых и обратных задач рассеяния в заданных классах возмущений потенциалов операторов Шрёдингера, отметим решение задачи рассеяния на периодическом фоне Н.Е. Фирсовой [33–35]. Случай асимптотически конечнозонных потенциалов типа ступеньки, имеющих второй суммируемый момент изучен А. Буте де Монвель, И. Егоровой и Г. Тешлом (2008) [43] (см. также [84]), а случай бесконечнозонных почти периодических фонов типа ступеньки — К. Грюнерт [67, 68].

Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) ведет свое начало со знаменитой работы Гарднера Грина Крускала и Миуры [65], которые показали, что уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$q_t(x, t) - 6q(x, t)q_x(x, t) + q_{xxx}(x, t) = 0 \quad (1.5)$$

можно решать с помощью обратного спектрального анализа ассоциированного оператора Шрёдингера $L(t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x, t)$. Дальнейшее развитие этого метода началось с работ, в которых был вскрыт алгебраический механизм, лежащий в основе МОЗР ([81]) и построена теория уравнения КдФ как гамильтоновой системы [66], [22]. В настоящее время литература по МОЗР насчитывает сотни статей, обзорные работы в этом направлении. Остановимся вкратце на описании схемы МОЗР при решении задачи Коши для уравнения КдФ с убывающими начальными данными $q_0(x)$, имеющими несколько суммируемых моментов и производных.

В 1968 году П. Лакс ввел понятие пары линейных операторов, ассоциированных с уравнением КдФ— пары Лакса $\{L, P\}$, в терминах которых это нелинейное уравнение эквивалентно уравнению $\frac{\partial L}{\partial t} = [P, L]$, где в правой части стоит коммутатор операторов. Здесь $L(t)$ — это оператор Шрёдингера с потенциалом $q(x, t)$, а $P(t) = -4\partial_x^3 + 6q(x, t)\partial_x + 3q_x(x, t)$. Для

оператора $L(0)$ с потенциалом $q_0(x)$, соответствующим начальным данным задачи, можно решить прямую задачу рассеяния и получить набор данных рассеяния $S(0)$, описанный в теореме Марченко. Если предположить, что существует убывающее решение задачи Коши (1.5) плюс q_0 , то используя представление Лакса можно найти зависимость от времени данных рассеяния. Эволюция по времени выглядит так: $\kappa_j(t) = \kappa_j(0)$, $R_+(k, t) = R_+(k, 0)e^{8ik^3t}$, $\gamma_j^+(t) = \gamma_j^+(0)e^{8i\kappa_j^3t}$. Определим новый набор данных рассеяния $S(t)$ по этим формулам, и по этому набору построим функцию

$$F_+(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R_+(k) e^{ikx + 8ik^3t} dk + \sum \gamma_l^+ e^{-\kappa_l x + 8\kappa_l^3 t}, \quad (1.6)$$

решим при каждом фиксированном x уравнение ГЛМ

$$F_+(x + y, t) + K_+(x, y, t) + \int_x^\infty F_+(y + \xi, t) K_+(x, \xi, t) d\xi = 0 \quad (1.7)$$

и используем формулу для восстановления потенциала. $q(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K_+(x, x, t)$. Представление Лакса позволяет установить, что $q(x, t)$ действительно является решением уравнения КдФ. Большинство исследо-



Рис. 1.1: Схематическое изображение этапов МОЗР

ваний, связанных с асимптотическим поведением решений задачи (3.1), $q_0(x)$ этой схемой и ограничивается. Но есть существенный вопрос в применении МОЗР: почему данные рассеяния $S(t)$ удовлетворяют достаточ-

ным условиям для решения обратной задачи в каком-либо классе убывания решения с возможностью контроля поведения решения уравнения (1.7) на противоположной оси? Это упирается в проверку условий теоремы Марченко. В убывающем случае это можно сделать, интегрируя по частям интеграл в (1.6) и получая, таким образом, степени $|x|$ в знаменателе. Интегрирование можно производить бесконечное число раз, если предположить, что начальный профиль принадлежит классу Шварца. Внеинтегральные члены при этом обращаются в ноль, так как коэффициент отражения стремится к нулю быстрее любой степени. При этом асимптотики можно дифференцировать, что позволяет решить уравнение КдФ в классе Шварца ([37]).

Вообще говоря, при решении задачи Коши с убывающими начальными данными стандартные методы теории уравнений в частных производных зачастую являются более эффективными, и позволяют получить решение в более широких классах, чем МОЗР. В случае начальных данных типа ступеньки эти методы в полной мере не применимы, и вообще эта задача Коши существенно менее исследована, чем убывающий случай. По существу, имеются следующие результаты. Эволюция данных рассеяния методом МОЗР была впервые получена в работе Е. Я. Хрулова ([36]). Существование решения $q(x, t)$ задачи Коши с начальными данными типа ступеньки, быстро убывающими на правом конце обсуждалось в работах Э. Коэн и Т. Каппелера ([47], [49], [72]), при этом показано, что решение убывает с первым моментом на правом конце, но никак не контролируется на левом. В работе А. Рыбкина [87] предполагается, что начальные данные экспоненциально быстро убывают на правом конце, а на левом допускается почти произвольное поведение, без заданной асимптотики, допускающее даже не слишком быстрый рост. Доказано, что решение существует, и быстро убывает на правом конце, поведение решения слева никак не контролируется. Единственным известным на настоящий момент результатом,

описывающим поведение решения но обоих концах, является следующий:

Теорема ([59]) Пусть $p_{\pm}(x, t)$ это конечнозонное решение уравнения КдФ, соответствующее вещественным конечнозонным начальным данным $p_{\pm}(x) = p_{\pm}(x, 0)$. Пусть $m_0 \geq 8$ и $n_0 \geq m_0 + 5$ это фиксированные числа. Пусть $q(x)$ это вещественнозначная функция класса $\mathcal{L}_{m_0}^{n_0}(p_+(x), p_-(x))$. Тогда существует единственное классическое решение $q(x, t)$ задачи Коши для уравнения КдФ с асимптотически конечнозонными начальными данными $q(x)$ такое, что

$$\pm \int_0^{\pm\infty} \left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} (q(x, t) - p_{\pm}(x, t)) \right| (1 + |x|^{\lfloor \frac{m_0}{2} \rfloor - 2}) dx < \infty, \quad n \leq n_0 - m_0 - 2,$$

и

$$\pm \int_0^{\pm\infty} \left| \frac{\partial}{\partial t} (q(x, t) - p_{\pm}(x, t)) \right| (1 + |x|^{\lfloor \frac{m_0}{2} \rfloor - 2}) dx < \infty,$$

при всех $t \in \mathbb{R}$.

Из этой теоремы следует в том числе существование решения в классе Шварца, имея в виду под асимптотически конечнозонной функцией класса Шварца такую бесконечно гладкую функцию f , что $x^m(f^{(n)}(x) - p_{\pm}^{(n)}(x)) \in L^1(\mathbb{R}_{\pm})$ при всех $m, n \geq 0$. Как видно из этой теоремы, начальные данные должны иметь как минимум восемь моментов и тринадцать производных. Вместе с тем, особый интерес представляет задача о возможном уменьшении числа требуемых конечных моментов на начальные данные. Это связано прежде всего с нынешним развитием нелинейного метода наискорейшего спуска для задач Римана-Гильберта (РГ), возникающих в исследовании асимптотического поведения решений уравнения КдФ при большом времени. Если 20-25 лет назад при создании этого метода предполагалось, что начальные данные экспоненциально быстро стремятся к своим асимптотам ([53]), то сейчас в убывающем случае аналогичные исследования проведены в предположении конечного шестого момента, а в солитонной области - даже четвертого. Поэтому вопрос о минимизации числа конечных моментов для начальных данных типа ступеньки является весьма актуальным.

Изучение асимптотического поведения при больших временах решений нелинейных эволюционных уравнений как с убывающими начальными данными ([71], [89], [38], [21], [7]), так и с начальными данными типа ступеньки ([17], [18], [21]) привлекает большое внимание исследователей с середины 70-х годов. Значительный прогресс в развитии теории уиземовских деформаций [31], связанных с решениями таких задач (см. также [3]– [6], [85] и цитированную там литературу), позволил выделить отдельные зоны полуплоскости пространство-время с качественно различными асимптотиками. В частности, для уравнения КдФ с начальными данными, отвечающими так называемой волне сжатия, т. е. начальным условиям вида $q(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty; q(x) \rightarrow -c^2, x \rightarrow -\infty$, асимптотическое поведение решения $q(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ является качественно различным в трех основных регионах ([17], [83], [39]):

- В области $x < -6c^2t$ решение асимптотически близко к $-c^2$.
- В области $-6c^2t < x < 4c^2t$ решение может быть асимптотически описано эллиптической волной.
- В области $4c^2t < x$ решение асимптотически представляется в виде суммы солитонов.

Использование метода Уизема позволило Гуревичу и Питаевскому вывести формулу главного члена асимптотики волны сжатия в случае начальных данных, представляющих собой чистую ступеньку $q(x) = 0$ при $x > 0$; $q(x) = -c^2$ при $x \leq 0$. Решение выражается в терминах эллиптических функций Якоби:

$$q(x, t) \sim q_{\text{GP}}(x, t) = -2c^2 \text{dn}^2(2tc(3y - c^2(1 + \mathbf{m}^2(y))), \mathbf{m}(y)) + c^2(1 - \mathbf{m}^2(y)), \quad (1.8)$$

где $y = \frac{x}{6t}$, а $\mathbf{m}(y)$ определяется неявно из уравнения

$$\frac{(1 + \mathbf{m}^2(y))c^2}{3} - \frac{2c^2\mathbf{m}^2(y)(1 - \mathbf{m}^2(y))K(\mathbf{m}(y))}{3[E(\mathbf{m}(y)) - (1 - \mathbf{m}^2(y))K(\mathbf{m}(y))]} = y. \quad (1.9)$$

Здесь $\operatorname{dn}(s, m)$ — эллиптическая функция Якоби а $K(m)$, $E(m)$ — полные эллиптические интегралы. Функция $q_{\text{GP}}(x, t)$ — это стационарная бегущая волна уравнения КдФ, если параметр y равен константе. Кроме того, в [17] было численно обнаружено, что на переднем фронте волны в отсутствие дискретного спектра возникают солитоноподобные образования (напомним, что оператор Шрёдингера с функцией Хевисайда в качестве потенциала дискретного спектра не имеет). Это противоречило общей идее того, что солитоны ассоциированы с дискретным спектром. Данный феномен был объяснен в 1975 году Е.Я. Хрусловым [36] с помощью модификации классического МОЗР на случай начальных профилей типа ступеньки. Такой подход не только дал возможность получить точный вид асимптотических солитонов, но также обосновал тот факт, что эти солитоны порождаются малой окрестностью левого конца непрерывного спектра. В предположении отсутствия дискретного спектра, а также в предположении разрешимости соответствующей задачи Коши в [36] получен следующий строгий результат: асимптотически при $t \rightarrow +\infty$ и $x > 4c^2t - (2c)^{-1} \ln t^{M+1}$, где M -любое натуральное число

$$q(x, t) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor} \frac{-2c^2}{\cosh^2\{cx - 4c^3t + \frac{1}{2} \ln t^{2n-1/2} + \phi_k\}} + O(t^{-1/2+\varepsilon}),$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, а фазы ϕ_k определены данными рассеяния начального профиля. При этом была получена точная формула для фаз. Дальнейшее развитие этого метода позволило получить асимптотические солитоны для многих других нелинейных уравнений ([91], [74], [75]). По существу, результаты, относящиеся к асимптотическим солитонам, и описывающие достаточно узкий сектор пространственно-временной полуплоскости в переходной области, соответствующей переднему фронту волны, являлись до недавнего времени единственными строгими результатами, связанными с асимптотиками решений типа ступеньки.

В случае волны разрежения, которая соответствует начальным данным

вида $q(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$; $q(x) \rightarrow c^2, x \rightarrow -\infty$, таких асимптотических солитонов не существует. Для волны разрежения также наблюдаются три основных области ([21], [82], [40]): обычная солитонная при $x > 0$, область позади заднего фронта, где решение близко к соответствующей фоновой константе $q(x, t) \sim c^2$ при $x < -6c^2t$, а вот в средней области решение имеет качественно отличный характер от волны сжатия характер: $q(x, t) \sim -\frac{x}{6t}$.

Строгое обоснование асимптотик решений нелинейных эволюционных уравнений даже с убывающими начальными данными, было открытым вопросом вплоть до начала 1990х годов. В 1993 г. Дейфт и Жоу [53] сформулировали (и применили к анализу решений модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза) так называемый нелинейный метод наискорейшего спуска, в существенном подытоживший результаты предшествующих исследований Манакова С.В. [26], Итса А.Р. [24] и ряда других исследователей, см. [54], где приведен детальный обзор этих работ. Тогда как классический метод наискорейшего спуска дает асимптотическое разложение при $t \rightarrow \infty$ скалярного интеграла вида

$$I(t) = \int_C f(z) e^{t\Phi(z)} dz \quad (1.10)$$

где C — контур на комплексной плоскости, нелинейный метод наискорейшего спуска дает разложение решений матричных и векторных задач Римана–Гильберта (РГ). Так же, как решения большого класса задач, включающих линейные дифференциальные уравнения, могут быть представлены в виде интегралов вида (1.10) решения многих нелинейных задач могут быть представлены в виде решений задач РГ, зависящих от большого параметра — времени. По сути, задача РГ является вариантом реализации обратной задачи в рамках МОЗР для интегрирования нелинейных уравнений, имеющих пару Лакса, т.е., являющихся условием совместности двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих дополнительно от спектрального параметра [30].

Для уравнения КдФ с убывающими начальными данными постановка такой задачи выглядит следующим образом: пусть $m(k) = m(k, x, t)$ это вектор с компонентами

$$m(k, x, t) = \begin{cases} (T(k, t)\phi_-(k, x, t)e^{ikx} & \phi_+(k, x, t)e^{-ikx}), & \text{Im}(k) > 0, \\ (\phi_+(-k, x, t)e^{ikx} & T(-k)\phi_-(-k, x, t)e^{-ikx}), & \text{Im}(k) < 0, \end{cases}$$

где $T(k, t)$ - коэффициент прохождения для оператора $L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x, t)$ с начальными данными $q(x, 0) \rightarrow 0, x \rightarrow \pm\infty$, а $\phi_{\pm}(k, x, t)$ - соответствующие решения Йоста. Функция $m(k, x, t)$ при $k \rightarrow \infty, \text{Im}(k) > 0$ имеет поведение

$$m(k, x, t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} + - \int_x^{\infty} q(y, t) dy \frac{1}{2ik} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Таким образом поведение вектор-функции $m(k)$ по k связано с поведением потенциала $q(x, t)$ по x и t . Предположим для простоты, что дискретный спектр у оператора $L(t)$ отсутствует. Тогда, пользуясь свойствами данных рассеяния, описанными в теореме Марченко, можно показать, что эта функция является единственным решением следующей задачи РГ ([69]): Найти функцию $m(k)$, голоморфную в \mathbb{C}^+ и удовлетворяющую

1. условию скачка:

$$m_+(k) = m_-(k)v(k), v(k) = \begin{pmatrix} 1 - |R(k)|^2 & -\overline{R(k)}e^{-t\Phi(k)} \\ R(k)e^{t\Phi(k)} & 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R},$$

2. условию симметрии: $m(-k) = m(k) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$

3. условию нормировки: $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} m(i\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Здесь фазовая функция имеет вид $\Phi(k) = \Phi(k, \xi) = 8ik^3 + 24ik\xi$, где $\xi = \frac{x}{12t}$ предполагается слабо меняющимся параметром при одновременном стремлении x и t к бесконечности. Заметим, что эта фазовая функция такова, что (1) $\text{Re } \Phi(k) = 0$ при $k \in \mathbb{R}$; (2) при $\xi > 0, \text{Re } \Phi(k) \cdot \text{Im } k < 0$ при

k возле \mathbb{R} ; (3) при $\xi < 0$: (a) $\operatorname{Re} \Phi(k) \cdot \operatorname{Im} k < 0$ при k вне \mathbb{R} , но возле лучей $(-\infty, -\sqrt{-\xi})$ и $(\sqrt{-\xi}, \infty)$; (b) $\operatorname{Re} \Phi(k) \cdot \operatorname{Im} k > 0$ при k вне \mathbb{R} , но возле отрезка $(-\sqrt{-\xi}, \sqrt{-\xi})$; Кроме того, матрица скачка допускает факторизации, в которых (треугольные) множители зависят от t либо только через $e^{t\Phi(k)}$, либо только через $e^{-t\Phi(k)}$:

$$v(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{R(k)}e^{-t\Phi(k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ R(k)e^{t\Phi(k)} & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{R(k)e^{t\Phi(k)}}{1-|R(k)|^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-|R(k)|^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-|R(k)|^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\overline{R(k)}e^{-t\Phi(k)}}{1-|R(k)|^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

причем второй тип факторизации, очевидно, возможен только если $|R(k)| \neq 1$.

Нелинейный метод наискорейшего спуска основан на той же идее, что и классический аналог. Деформируя контуры, и, соответственно, меняя вектор m внутри открывающихся линз так, чтобы матрица скачка содержала только $e^{t\Phi(k)}$, когда k принадлежит области $\{\operatorname{Re} \Phi(k) < 0\}$ и только $e^{-t\Phi(k)}$ в области $\{\operatorname{Re} \Phi(k) > 0\}$, мы приходим к задаче, где матрица скачка близка к единичной, за исключением малого числа "критических точек" в которых $\{\operatorname{Re} \Phi(k) = 0\}$. Вблизи каждой критической точки задача РГ в свою очередь преобразуется при $t \rightarrow \infty$ в такую задачу РГ, которая имеет точное решение. Следовательно, как и в классическом методе, асимптотическое разложение решения может быть получено как сумма вкладов со всех критических точек. При этом важным обстоятельством является то, что можно контролировать погрешность (если она есть) при каждом шаге деформации, и, тем самым, строго обосновывать полученные асимптотики. Отметим, что необходимыми элементами деформаций являются треугольные факторизации матрицы скачка, позволяющие, путем аналитического продолжения, "разнести" матричные элементы, исходно неубывающие (в частности, осциллирующие) со временем, в такие области комплексной

плоскости, где они становятся (экспоненциально) убывающими; эта процедура часто называется механизмом линз. Для уравнения КдФ эта задача полностью решена в основных секторах ([69]), а также в переходном секторе, соответствующем малым значениям параметра ξ и называемом зоной бесстолкновительной ударной волны ([52]).

В случае задач с начальными данными типа ступеньки на однократном спектре $R(k) = 1$ и при некоторых значениях ξ , где требуется факторизация второго типа из условия скачка, она неосуществима. Кроме того, в задачах типа ступеньки возникают ситуации, когда некоторые элементы матрицы скачка исходной задачи РГ экспоненциально растут (со временем) на некоторых частях исходного контура. Здесь используется так называемый механизм g -функции, ставший следующим важным шагом в развитии нелинейного метода наискорейшего спуска, и нашедший сперва широкое применение в исследовании асимптотических свойств полиномов, ортогональных относительно переменного веса и теории случайных матриц ([55], [70]). Этот метод состоит в замене фазовой функции в экспонентах, входящих в элементы матрицы скачка исходной задачи РГ, на некоторую аналитическую функцию, выбираемую из тех соображений, чтобы после применения подходящей треугольной факторизации, на некоторых частях контура оставались бы матрицы скачка специального вида, не зависящие от спектрального параметра, а на остальных частях контура полученные матрицы скачка были бы близки к единичным при большом времени. Это позволило бы явно решить соответствующие предельные (модельные) задачи РГ. Применительно к задачам с начальными данными типа ступеньки, механизм g -функции впервые был применен для дискретной модели — нелинейной цепочки Тода [50], в ситуации начальных данных типа волны разреза, а также при изучении асимптотик уравнения КдФ в переходной зоне бесстолкновительной ударной волны ([52]). В [45] этот механизм был использован в ситуации типа ударной волны для фокусирующего нели-

нейного уравнения Шрёдингера. В [77] исследована асимптотика решения модифицированного уравнения КдФ с начальными данными, представляющими собой чистую ступеньку, соответствующую ударной волне. Задача РГ ставилась в матричной форме, и здесь впервые появилась g -функция, представляющая собой абелев интеграл на римановой поверхности, ассоциированной с зонами Уизема. Идеи этой работы, а также работы [69] использованы в четвертой главе диссертации при получении асимптотик решения уравнения КдФ типа ударной волны.

РАЗДЕЛ 2

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ ДАННЫМИ ТИПА СТУПЕНЬКИ

В этом разделе изучается задача рассеяния для оператора Шрёдингера

$$(Lf)(x) := -\frac{d^2}{dx^2}f(x) + q(x)f(x) = \lambda f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

с потенциалом типа ступеньки $q(x)$, таким, что

$$q(x) \rightarrow c_{\pm}, \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty,$$

где $c_+, c_- \in \mathbb{R}$ — это различные константы. Предполагается, что $q \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, и что потенциал стремится к своим фоновым асимптотам c_+ и c_- с m конечными моментами:

$$\int_0^{+\infty} (1 + |x|^m)(|q(x) - c_+| + |q(-x) - c_-|)dx < \infty, \quad (2.2)$$

где $m \geq 1$ — фиксированное целое число. Введем определения.

Определение 2.1. Пусть $m \geq 0$ и $n \geq 0$ — целые числа и $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — n раз дифференцируемая функция. Будем говорить, что $f \in \mathcal{L}_m^n(\mathbb{R}_{\pm})$, если $f^{(j)}(x)(1 + |x|^m) \in L^1(\mathbb{R}_{\pm})$ при $j = 0, 1, \dots, n$.

Заметим, что $f \in \mathcal{L}_m^0(\mathbb{R}_{\pm})$ означает, что $\int_{\mathbb{R}_{\pm}} |f(x)|(1 + |x|^m)dx < \infty$. Согласно этому определению также $\mathcal{L}_0^0(\mathbb{R}_{\pm}) = L^1(\mathbb{R}_{\pm}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{L}_0^j(\mathbb{R}_{\pm}) = \{f : f^{(i)} \in \mathcal{L}_0^0(\mathbb{R}_{\pm}), 0 \leq i \leq j\}$.

Определение 2.2. Пусть c_{\pm} это заданные вещественные величины, и пусть $m \geq 1$, $n \geq 0$ — это заданные целые числа. Будем говорить, что $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$, если $q_{\pm}(\cdot) := q(\cdot) - c_{\pm} \in \mathcal{L}_m^n(\mathbb{R}_{\pm})$.

Заметим, что $q \in \mathcal{L}_m^0(c_+, c_-)$ если выполнено условие (2.2). Если $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ при $n \geq 1$, тогда дополнительно

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^m)|q^{(i)}(x)|dx < \infty, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Цель данного раздела — это полное решение прямой и обратной задач рассеяния для потенциалов из класса $\mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ при любых $m \geq 1$ и $n \geq 0$. В частности, мы предлагаем необходимые и достаточные условия на множество данных рассеяния, ассоциированных с такими потенциалами. Повсюду в этом разделе мы используем следующие обозначения: Обозначим

$$\underline{c} = \min\{c_-, c_+\}, \quad \bar{c} = \max\{c_-, c_+\}, \quad (2.4)$$

$\mathcal{D} := \mathbb{C} \setminus \Sigma$, где $\Sigma = \Sigma^u \cup \Sigma^l$ с $\Sigma^u = \{\lambda^u = \lambda + i0, \lambda \in [\underline{c}, \infty)\}$ и $\Sigma^l = \{\lambda^l = \lambda - i0, \lambda \in [\underline{c}, \infty)\}$. Граница области \mathcal{D} состоит из двух сторон разрезов вдоль интервала $[\underline{c}, \infty)$, с различающимися точками λ^u и λ^l на этой границе. В уравнении (2.1) спектральный параметр λ принадлежит множеству $\text{clos}(\mathcal{D})$, где $\text{clos}(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \cup \Sigma^u \cup \Sigma^l$. Наряду с λ будем использовать еще два спектральных параметра $k_{\pm} := \sqrt{\lambda - c_{\pm}}$, которые конформно отображают области $\mathbb{C} \setminus [c_{\pm}, \infty)$ в \mathbb{C}^+ . Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между параметрами k_{\pm} и λ .

2.1. Прямая задача рассеяния

Свойства решений Йоста. В этом подразделе мы напомним некоторые известные свойства решений Йоста для уравнения (2.1) с потенциалом $q \in \mathcal{L}_1^0(c_+, c_-)$, а также докажем дополнительные свойства этих решений для потенциала из класса $\mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ с $m \geq 2$ и $n \geq 1$.

Все оценки, приведенные ниже, являются односторонними и, следовательно, определяются поведением потенциала на одной из полуосей. Пусть $q_{\pm}(\cdot) = q(\cdot) - c_{\pm} \in \mathcal{L}_m^n(\mathbb{R}_{\pm})$ при $m \geq 1$ и $n \geq 0$. Введем следующие неотрицательные и не возрастающие при $x \rightarrow \pm\infty$ функции:

$$\sigma_{\pm,i}(x) := \pm \int_x^{\pm\infty} |q_{\pm}^{(i)}(\xi)| d\xi, \quad \hat{\sigma}_{\pm,i}(x) := \pm \int_x^{\pm\infty} \sigma_{\pm,i}(\xi) d\xi, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Очевидно, что

$$\sigma_{\pm,i}(\cdot) \in \mathcal{L}_{m-1}^1(\mathbb{R}_{\pm}), \quad m \geq 1, \quad \hat{\sigma}_{\pm,i}(\cdot) \in \mathcal{L}_{m-2}^2(\mathbb{R}_{\pm}), \quad m \geq 2, \quad (2.6)$$

$$\hat{\sigma}_{\pm,i}(x) \downarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty, \text{ когда } q_{\pm} \in \mathcal{L}_1^n(\mathbb{R}_{\pm}), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Лемма 2.1. ([28, леммы 3.1.1–3.1.3]). Пусть $q_{\pm}(\cdot) = q(\cdot) - c_{\pm} \in \mathcal{L}_1^0(\mathbb{R}_{\pm})$. Тогда для всех $\lambda \in \text{clos}(\mathcal{D})$ уравнение (2.1) имеет решение $\phi_{\pm}(\lambda, x)$, которое может быть представлено в виде

$$\phi_{\pm}(\lambda, x) = e^{\pm ik_{\pm}x} \pm \int_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x, y) e^{\pm ik_{\pm}y} dy, \quad (2.8)$$

где ядро $K_{\pm}(x, y)$ вещественнозначно и удовлетворяет оценке

$$|K_{\pm}(x, y)| \leq \frac{1}{2} \sigma_{\pm,0} \left(\frac{x+y}{2} \right) \exp \left\{ \hat{\sigma}_{\pm,0}(x) - \hat{\sigma}_{\pm,0} \left(\frac{x+y}{2} \right) \right\}. \quad (2.9)$$

Кроме того,

$$K_{\pm}(x, x) = \pm \frac{1}{2} \int_x^{\pm\infty} q_{\pm}(\xi) d\xi.$$

Функция $K_{\pm}(x, y)$ имеет частные производные первого порядка, которые удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial K_{\pm}(x_1, x_2)}{\partial x_j} \pm \frac{1}{4} q_{\pm} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sigma_{\pm,0}(x) \sigma_{\pm,0} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \exp \left\{ \hat{\sigma}_{\pm,0}(x_1) - \hat{\sigma}_{\pm,0} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Решение $\phi_{\pm}(\lambda, x)$ – аналитическая функция от k_{\pm} в \mathbb{C}^+ , непрерывная вплоть до \mathbb{R} . Для всех $\lambda \in \text{clos}(\mathcal{D})$ справедлива следующая оценка:

$$|\phi_{\pm}(\lambda, x) - e^{\pm ik_{\pm}x}| \leq \left(\hat{\sigma}_{\pm,0}(x) - \hat{\sigma}_{\pm,0} \left(x \pm \frac{1}{|k_{\pm}|} \right) \right) e^{-\text{Im}(k_{\pm})x + \hat{\sigma}_{\pm,0}(x)}. \quad (2.11)$$

При $k_{\pm} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ функции $\phi_{\pm}(\lambda, x)$ и $\overline{\phi_{\pm}(\lambda, x)}$ линейно независимы и

$$W(\phi_{\pm}(\lambda, \cdot), \overline{\phi_{\pm}(\lambda, \cdot)}) = \mp 2ik_{\pm},$$

где $W(f, g) = fg' - gf'$ – обыкновенный детерминант Вронского.

Формулы (2.9) и (2.10) вместе с формулами (2.8) и (2.6) влекут

Следствие 2.1. Пусть $q_{\pm} \in \mathcal{L}_m^0(\mathbb{R}_{\pm})$, $m \geq 1$. Тогда

$$K_{\pm}(x, \cdot), \quad \frac{\partial K_{\pm}(x, \cdot)}{\partial x} \in \mathcal{L}_{m-1}^0(\mathbb{R}_{\pm}), \quad m \geq 1, \quad (2.12)$$

и функция $\phi_{\pm}(\lambda, x)$ имеет $m - 1$ производных по $k_{\pm} \in \mathbb{R}$.

Ключевым моментом в доказательстве оценок (2.9) и (2.10) является тщательное исследование следующего интегрального уравнения (формула (3.1.12) из [28])

$$K_{\pm}(x, y) = \pm \frac{1}{2} \int_{\frac{x+y}{2}}^{\pm\infty} q_{\pm}(\xi) d\xi + \int_{\frac{x+y}{2}}^{\pm\infty} d\alpha \int_0^{\frac{y-x}{2}} q_{\pm}(\alpha - \beta) K_{\pm}(\alpha - \beta, \alpha + \beta) d\beta. \quad (2.13)$$

Для изучения дальнейших свойств решения Йоста представим (2.8) в виде, предложенном в [51]:

$$\phi_{\pm}(\lambda, x) = e^{ik_{\pm}x} \left(1 \pm \int_0^{\pm\infty} B_{\pm}(x, y) e^{\pm 2ik_{\pm}y} dy \right), \quad (2.14)$$

где

$$B_{\pm}(x, y) = 2K_{\pm}(x, x + 2y), \quad B_{\pm}(x, 0) = \pm \int_x^{\pm\infty} q_{\pm}(\xi) d\xi. \quad (2.15)$$

При этом уравнение (2.13) преобразуется в следующее интегральное уравнение относительно $\pm y \geq 0$:

$$B_{\pm}(x, y) = \pm \int_{x+y}^{\pm\infty} q_{\pm}(s) ds + \int_{x+y}^{\pm\infty} d\alpha \int_0^y d\beta q_{\pm}(\alpha - \beta) B_{\pm}(\alpha - \beta, \beta). \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) служит основой для доказательства следующей леммы:

Лемма 2.2. Пусть $n \geq 1$ и $m \geq 1$ – фиксированные натуральные числа и пусть $q_{\pm} \in \mathcal{L}_m^n(\mathbb{R}_{\pm})$. Тогда функции $B_{\pm}(x, y)$ имеют $n+1$ частных производных, и при $l \leq s \leq n+1$ справедливы следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^s}{\partial x^l \partial y^{s-l}} B_{\pm}(x, y) \pm q_{\pm}^{(s-1)}(x+y) \right| \leq C_{\pm}(x) \nu_{\pm, s}(x) \nu_{\pm, s}(x+y), \quad (2.17)$$

где

$$\nu_{\pm, l}(x) = \sum_{i=0}^{l-2} \left(\sigma_{\pm, i}(x) + |q_{\pm}^{(i)}(x)| \right), \quad l \geq 2, \quad \nu_{\pm, 1}(x) := \sigma_{\pm, 0}(x), \quad (2.18)$$

а $C_{\pm}(x) = C_{\pm}(x, n) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ – это положительные функции, не возрастающие при $x \rightarrow \pm\infty$.

Доказательство. Дифференцируя уравнение (2.16) по каждой переменной, получим

$$\frac{\partial B_{\pm}(x, y)}{\partial x} = \mp q_{\pm}(x + y) - \int_x^{x+y} q_{\pm}(s) B_{\pm}(s, x + y - s) ds; \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial B_{\pm}(x, y)}{\partial y} = \mp q_{\pm}(x + y) - \int_x^{x+y} q_{\pm}(s) B_{\pm}(s, x + y - s) ds + \int_x^{\pm\infty} q_{\pm}(\alpha) B_{\pm}(\alpha, y) d\alpha. \quad (2.20)$$

Из этих формул и формулы (2.15) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{\pm}(x, 0)}{\partial x} &= \mp q_{\pm}(x); \quad \frac{\partial B_{\pm}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mp q_{\pm}(x) \pm \frac{1}{2} \left(\int_x^{\pm\infty} q_{\pm}(\alpha) d\alpha \right)^2, \\ \frac{\partial B_{\pm}(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial B_{\pm}(x, y)}{\partial x} + \int_x^{\pm\infty} q_{\pm}(\alpha) B_{\pm}(\alpha, y) d\alpha. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Можно заметить, что частные производные B_{\pm} , которые содержат по меньшей мере одно дифференцирование по x , имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p}{\partial x^k \partial y^{p-k}} B_{\pm}(x, y) &= \mp q_{\pm}^{(p-1)}(x + y) + D_{\pm, p, k}(x, y) + \\ &+ \int_{x+y}^x q_{\pm}(\xi) \frac{\partial^{p-1}}{\partial y^{p-1}} B_{\pm}(\xi, x + y - \xi) d\xi, \quad p > k \geq 1, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $D_{\pm, p, k}(x, y)$ – это сумма всех производных от всех внеинтегральных членов, которые появились после $p - 1$ дифференцирования нижних и верхних пределов интегрирования в правой части (2.19). Подынтегральная функция в (2.22) на нижнем пределе интегрирования принимает значение

$$q_{\pm}(\xi) \frac{\partial^{p-1}}{\partial y^{p-1}} B_{\pm}(\xi, x + y - \xi) \Big|_{\xi=x+y} = q_{\pm}(x + y) B_{\pm, p-1}(x + y),$$

где

$$B_{\pm, r}(\xi) = \frac{\partial^r}{\partial t^r} B_{\pm}(\xi, t) \Big|_{t=0}. \quad (2.23)$$

Таким образом, дальнейшее дифференцирование такого члена не зависит от того, дифференцируем ли мы по x или y . То же самое подынтегральное выражение на верхнем пределе имеет значение $q_{\pm}(x) \frac{\partial^{r-1}}{\partial y^{r-1}} B_{\pm}(x, y)$, и оно может возникнуть только после дифференцирования по x . Принимая это

все во внимание, можно заключить, что слагаемое $D_{\pm,p,k}(x, y)$ в формуле (2.22) может быть представлено как

$$D_{\pm,p,k}(x, y) = (1 - \delta(k, 1)) \frac{\partial^{p-k}}{\partial y^{p-k}} \sum_{s=2}^k \frac{\partial^{k-s}}{\partial x^{k-s}} \left(q_{\pm}(x) \frac{\partial^{s-2}}{\partial y^{s-2}} B_{\pm}(x, y) \right) - D_{\pm,p}(x+y),$$

где $\delta(r, s)$ — символ Кронекера (т.е. первое слагаемое исчезает при $k = 1$), а

$$D_{\pm,p}(\xi) := \sum_{s=0}^{p-2} \frac{d^{p-s}}{d\xi^{p-s}} (q_{\pm}(\xi) B_{\pm,s}(\xi)), \quad (2.24)$$

см. (2.23). Если продифференцировать (2.20) по y , то при $p \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p}{\partial y^p} B(x, y) &= \mp q_{\pm}^{(p-1)}(x+y) + D_{\pm,p}(x+y) + \\ &+ \int_{x+y}^x q_{\pm}(\xi) \frac{\partial^{p-1}}{\partial y^{p-1}} B_{\pm}(\xi, x+y-\xi) d\xi + \int_x^{\pm\infty} q_{\pm}(\xi) \frac{\partial^{p-1}}{\partial y^{p-1}} B_{\pm}(\xi, y) d\xi, \end{aligned}$$

где функция $D_{\pm,p}(\xi)$ определена в (2.24). Дальнейшее доказательство проводится по индукции, с использованием (2.15), а также оценок (2.9), (2.10), в которых экспоненциальные множители заменены на более грубые оценки вида $C_{\pm}(x)$. \square

Аналитические свойства данных рассеяния.

Спектр оператора Шрёдингера L с потенциалом типа ступеньки (2.2) состоит из абсолютно непрерывной и дискретной частей. Используя (2.4), введем множества

$$\Sigma^{(2)} := [\bar{c}, +\infty), \quad \Sigma^{(1)} := [\underline{c}, \bar{c}], \quad \Sigma = \Sigma^{(2)} \cup \Sigma^{(1)}.$$

Множество Σ является (абсолютно) непрерывным спектром оператора L , $\Sigma^{(1)}$ — это однократный спектр, а $\Sigma^{(2)}$ — это спектр кратности два. Точки на верхней и нижней сторонах разрезов вдоль множества Σ различаются. Заметим, что множество Σ — это прообраз вещественной оси \mathbb{R} при конформном отображении $k_{\pm}(\lambda) : \text{clos}(\mathcal{D}) \rightarrow \overline{\mathbb{C}^+}$ при $c_{\pm} < c_{\mp}$. При $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ с $m \geq 1$ и $n \geq 0$ оператор L имеет конечный дискретный спектр (см. [41]), который мы обозначим через $\Sigma_d = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, где $\lambda_1 < \dots < \lambda_N < \underline{c}$.

Приведем краткое описание некоторых хорошо известных аналитических свойств данных рассеяния данной задачи ([8], [48]). Большинство из этих свойств вытекает из аналитических свойств вронскиана двух решений Йоста $W(\lambda) := \mathbf{W}(\phi_-(\lambda, \cdot), \phi_+(\lambda, \cdot))$. Представления (2.8) означают, что решения Йоста вместе со своими производными экспоненциально убывают при $x \rightarrow \pm\infty$ и $\text{Im}(k_{\pm}) > 0$. Очевидно, что дискретный спектр Σ_d совпадает с множеством точек, в которых ϕ_+ и ϕ_- пропорциональны и, соответственно, их вронскиан обращается в ноль. Решения Йоста в этих точках называются правыми и левыми собственными функциями. Они вещественны, и соответствующие нормировочные константы мы обозначим через

$$\gamma_j^{\pm} := \left(\int_{\mathbb{R}} \phi_{\pm}^2(\lambda_j, x) dx \right)^{-1}.$$

Лемма 2.3. Пусть $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ при $m \geq 1$, $n \geq 0$. Тогда функция $W(\lambda)$ удовлетворяет следующим свойствам:

- (i) она голоморфна в области \mathcal{D} и непрерывна вплоть до границы Σ этой области. Более того, $W(\lambda + i0) = \overline{W(\lambda - i0)} \neq 0$ при $\lambda \in (\underline{c}, +\infty)$;
- (ii) она имеет простые нули в области \mathcal{D} только в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, причем в этих точках

$$\left(\frac{dW}{d\lambda}(\lambda_j) \right)^{-2} = \gamma_j^+ \gamma_j^-. \quad (2.25)$$

Пункты (i)–(ii) доказаны в работе [43] при $q \in \mathcal{L}_2^0(c_+, c_-)$, доказательство остается в силе и для $q \in \mathcal{L}_1^0(c_+, c_-)$. Как видно из этой леммы, единственным вещественным значением помимо точек дискретного спектра, где вронскиан может обращаться в ноль, является точка \underline{c} . Если $W(\underline{c}) = 0$, то мы будем говорить, что в этой точке имеет место резонанс.

Чтобы изучить дальнейшие спектральные свойства L , рассмотрим соотношения рассеяния:

$$T_{\mp}(\lambda)\phi_{\pm}(\lambda, x) = \overline{\phi_{\mp}(\lambda, x)} + R_{\mp}(\lambda)\phi_{\mp}(\lambda, x), \quad k_{\pm}(\lambda) \in \mathbb{R}, \quad (2.26)$$

где коэффициенты прохождения и отражения определены, как обычно, через вронскианы

$$T_{\pm}(\lambda) := \frac{W(\overline{\phi_{\pm}(\lambda)}, \phi_{\pm}(\lambda))}{W(\phi_{\mp}(\lambda), \phi_{\pm}(\lambda))}, \quad R_{\pm}(\lambda) := -\frac{W(\phi_{\mp}(\lambda), \overline{\phi_{\pm}(\lambda)})}{W(\phi_{\mp}(\lambda), \phi_{\pm}(\lambda))}, \quad k_{\pm} \in \mathbb{R}. \quad (2.27)$$

Их свойства перечислены в следующей лемме:

Лемма 2.4. Пусть $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$, где $m \geq 1$, $n \geq 0$. Тогда элементы матрицы рассеяния обладают следующими свойствами:

- I. (a)** $T_{\pm}(\lambda + i0) = \overline{T_{\pm}(\lambda - i0)}$ и $R_{\pm}(\lambda + i0) = \overline{R_{\pm}(\lambda - i0)}$ при $k_{\pm}(\lambda) \in \mathbb{R}$.
- (b)** $\frac{T_{\pm}(\lambda)}{\overline{T_{\pm}(\lambda)}} = R_{\pm}(\lambda)$ при $\lambda \in \Sigma^{(1)}$, когда $c_{\pm} = \underline{c}$.
- (c)** $1 - |R_{\pm}(\lambda)|^2 = \frac{k_{\mp}}{k_{\pm}} |T_{\pm}(\lambda)|^2$ при $\lambda \in \Sigma^{(2)}$.
- (d)** $\overline{R_{\pm}(\lambda)} T_{\pm}(\lambda) + R_{\mp}(\lambda) \overline{T_{\pm}(\lambda)} = 0$ при $\lambda \in \Sigma^{(2)}$.
- (e)** $T_{\pm}(\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1/2})$ и $R_{\pm}(\lambda) = O(\lambda^{-1/2})$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

II. (a) Функции $T_{\pm}(\lambda)$ продолжаются аналитически в область \mathcal{D} , и

$$2ik_+(\lambda)T_+^{-1}(\lambda) = 2ik_-(\lambda)T_-^{-1}(\lambda) =: W(\lambda), \quad (2.28)$$

где функция $W(\lambda)$ удовлетворяет свойствам (i)–(ii) леммы 2.3.

(b) Если $W(\underline{c}) = 0$, то $W(\lambda) = i\gamma\sqrt{\lambda - \underline{c}}(1 + o(1))$, где $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

III. $R_{\pm}(\lambda)$ непрерывна при $k_{\pm}(\lambda) \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Свойства **I. (a)–(e)**, **II. (a)** доказаны в [43] при $m = 2$, доказательство остается в силе при $m = 1$. Свойство **III**, очевидно, выполняется при $k_{\pm} \neq 0$ в силу (2.27), непрерывности решений Йоста и того факта, что знаменатели в (2.27) не обращаются в ноль в данной области. Так как $W(\bar{c}) \neq 0$ согласно лемме 2.3, то остается убедиться, что функция R_{\pm} непрерывна при $k_{\pm} \rightarrow 0$ в случае $\underline{c} = c_{\pm}$. Так как $\overline{\phi_{\pm}(c_{\pm}, x)} = \phi_{\pm}(c_{\pm}, x)$, то из (2.27) немедленно вытекает свойство

$$R_{\pm}(c_{\pm}) = -1 \quad \text{при} \quad W(c_{\pm}) \neq 0. \quad (2.29)$$

Доказательство свойства **II. (b)** приведено в параграфе 2.1.. \square

Так как свойство **II. (b)** пока не доказано, то оно пока не будет использовано. Однако нам потребуется некая дополнительная (более слабая) оценка для вронскиана в резонансном случае.

Лемма 2.5. Если $W(\underline{c}) = 0$, то в окрестности точки \underline{c} , вронскиан удовлетворяет оценкам

$$W^{-1}(\lambda) = \begin{cases} O((\lambda - \underline{c})^{-1/2}) & \text{при } \lambda \in \Sigma, \\ O((\lambda - \underline{c})^{-1/2-\delta}) & \text{при } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma, \end{cases} \quad (2.30)$$

где $\delta > 0$ – сколь угодно малое число.

Доказательство. Доказательство приводится для случая $c_- = \underline{c}$, $c_+ = \bar{c}$. В этом случае точке $k_- = 0$ соответствует точка $\lambda = \underline{c}$. Для оценки вронскиана мы используем формулу (2.28) для $T_-(\lambda)$. Докажем сперва, что функция T_- ограничена на множестве $V_\varepsilon : \{\lambda(k_-) : -\varepsilon < k_- < \varepsilon\}$, для некоторого $\varepsilon > 0$. Действительно, в силу непрерывности $\phi_+(\lambda, x)$ по обоим переменным, можно выбрать точку x_0 такую, что $\phi_+(\underline{c}, x_0) \neq 0$. Соответственно, $|\phi_+(\lambda, x_0)| > \frac{1}{2}|\phi_+(\underline{c}, x_0)| > 0$ в V_ε для достаточно малого ε . В силу (2.26) имеем:

$$|T_-(\lambda)| = \frac{|R_-(\lambda)\phi_-(\lambda, x_0) + \overline{\phi_-(\lambda, x_0)}|}{|\phi_+(\lambda, x_0)|} \leq C, \quad \lambda \in V_\varepsilon.$$

Таким образом, для вещественных λ вблизи от \underline{c} имеет место оценка $W^{-1}(\lambda) = O((\lambda - \underline{c})^{-1/2})$. Для не вещественных λ воспользуемся тем, что диагональ

$$G(\lambda, x, x) = \frac{\phi_+(\lambda, x)\phi_-(\lambda, x)}{W(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathcal{D} \setminus \Sigma_d,$$

ядра оператора резольвенты $(L - \lambda I)^{-1}$ является неванлинновской функцией (см. [90], лемма 9.22). Следовательно, по формуле обращения Стилтеса ([90], теорема 3.22) она может быть представлена в виде

$$G(\lambda, x_0, x_0) = \int_{\underline{c}}^{\underline{c} + \varepsilon^2} \frac{\operatorname{Im} G(\xi + i0, x_0, x_0)}{\xi - \lambda} d\xi + G_1(\lambda),$$

где функция $G_1(\lambda)$ ограничена в окрестности \underline{c} . Но $G(\xi + i0, x_0, x_0) = O((\xi - \underline{c})^{-1/2})$, и, согласно [29, Chap. 22], мы получим (2.30). \square

Определим теперь величины $\kappa_j^\pm := \sqrt{c_\pm - \lambda_j}$ так, чтобы точка $i\kappa_j^\pm$ являлась образом собственного значения λ_j при отображении k_\pm . Тогда имеет место

Замечание 2.1. Для функции $T_\pm(\lambda)$, рассматриваемой как функция от параметра k_\pm , имеет место формула

$$\text{Res}_{i\kappa_j^\pm} T_\pm(\lambda) = i(\mu_j)^{\pm 1} \gamma_j^\pm, \quad \text{где } \phi_+(\lambda_j, x) = \mu_j \phi_-(\lambda_j, x). \quad (2.31)$$

Уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко

В этом подразделе мы выводим уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко. В дополнение к **I. (е)** нам потребуется более тонкая характеристика коэффициентов отражения на бесконечности.

Лемма 2.6. Пусть $q \in \mathcal{L}_1^0(c_+, c_-)$. Тогда коэффициент отражения $R_\pm(\lambda)$, как функция от $k_\pm \in \mathbb{R}$, принадлежит $L^1(\mathbb{R}) = L^1_{\{k_\pm\}}(\mathbb{R})$.

Доказательство. Будем обозначать через $f_{s,\pm} := f_{s,\pm}(k_\pm)$, $s = 1, 2, \dots$ такие функции, чьи преобразования Фурье принадлежат пространству $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ (относительно k_\pm). Заметим, что функции $f_{s,\pm}$ непрерывны. Более того, функция $f_{s,\pm}$ непрерывна также по переменной k_\mp , $k_\mp = k_\mp(\lambda)$ если $\lambda \in \Sigma^{(2)}$, и $f_{s,\pm} \in L^2_{\{k_\mp\}}(\mathbb{R} \setminus (-a, a))$, где множество $\mathbb{R} \setminus (-a, a)$ — это образ спектра $\Sigma^{(2)}$ при отображении $k_\mp(\lambda)$.

Обозначим штрихом производную по x . Тогда из соотношений (2.8)–(2.10) и (2.5) следует, что

$$\begin{aligned} \overline{\phi_\pm(\lambda, 0)} &= 1 + f_{1,\pm}, & \overline{\phi'_\pm(\lambda, 0)} &= \mp i k_\pm \overline{\phi_\pm(\lambda, 0)} + f_{2,\pm}, \\ \phi_\pm(\lambda, 0) &= 1 + f_{3,\pm}, & \phi'_\pm(\lambda, 0) &= \pm i k_\pm \phi_\pm(\lambda, 0) + f_{4,\pm}. \end{aligned}$$

Так как

$$k_\pm - k_\mp = \frac{c_\mp - c_\pm}{2k_\pm} (1 + o(1)) \quad \text{при } |k_\pm| \rightarrow \infty, \quad (2.32)$$

то $W(\phi_{\mp}(\lambda), \overline{\phi_{\pm}(\lambda)}) = f_{5,\pm}$ при больших k_{\pm} . По той же причине

$$W(\lambda) = 2i\sqrt{\lambda}(1 + o(1)) \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Напомним, что в силу свойства **I. (b), (c)**, коэффициент отражения — ограниченная функция при $k_{\pm} \in \mathbb{R}$. Более того, при $|k_{\pm}| \gg 1$ она допускает представление $R_{\pm}(\lambda) = f_{6,\pm}k_{\pm}^{-1}$. Лемма доказана. \square

Лемма 2.7. Пусть $q \in \mathcal{L}_1^0(c_+, c_-)$. Тогда ядра операторов преобразования $K_{\pm}(x, y)$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$K_{\pm}(x, y) + F_{\pm}(x + y) \pm \int_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x, s)F_{\pm}(s + y)ds = 0, \quad \pm y > \pm x, \quad (2.33)$$

где

$$F_{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R_{\pm}(\lambda)e^{\pm ik_{\pm}x} dk_{\pm} + \sum_{j=1}^N \gamma_j^{\pm} e^{\mp \kappa_j^{\pm} x} \quad (2.34)$$

$$+ \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} |T_{\mp}(\lambda)|^2 |k_{\mp}|^{-1} e^{\pm ik_{\mp}x} d\lambda, & c_{\pm} = \bar{c}, \\ 0, & c_{\pm} = \underline{c}. \end{cases}$$

Доказательство. Чтобы вывести уравнения ГЛМ, введем две функции

$$G_{\pm}(\lambda, x, y) = (T_{\pm}(\lambda)\phi_{\mp}(\lambda, x) - e^{\mp ik_{\pm}x}) e^{\pm ik_{\pm}y}, \quad \pm y > \pm x,$$

где x, y считаются параметрами. Как функции от λ , обе функции мероморфны в области \mathcal{D} , с простыми полюсами в точках λ_j . Согласно свойству **II** они непрерывны вплоть до границы $\Sigma^u \cup \Sigma^l$, кроме точки \underline{c} , где одна из этих функций ($G_{\mp}(\lambda, x, y)$ для $\underline{c} = c_{\pm}$) может иметь особенность порядка $O((\lambda - \underline{c})^{-1/2-\delta})$ в резонансном случае по лемме 2.5.

Из соотношений рассеяния имеем:

$$\begin{aligned} T_{\pm}(\lambda)\phi_{\mp}(\lambda, x) - e^{\mp ik_{\pm}x} &= R_{\pm}(\lambda)\phi_{\pm}(\lambda, x) + (\overline{\phi_{\pm}(\lambda, x)} - e^{\mp ik_{\pm}x}) \\ &= S_{\pm,1}(\lambda, x) + S_{\pm,2}(\lambda, x). \end{aligned}$$

Из (2.8) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} S_{\pm,2}(\lambda, x) e^{\pm ik_{\pm}y} dk_{\pm} = K_{\pm}(x, y).$$

Тогда, согласно лемме 2.6 и формуле (2.12), получаем

$$R_{\pm}(\lambda)K_{\pm}(x, s)e^{ik_{\pm}(y+s)} \in L^1_{\{k_{\pm}\}}(\mathbb{R}) \times L^1_{\{s\}}([x, \pm\infty)) \quad \text{при фиксированных } x, y.$$

Используя вновь (2.8), а также теорему Фубини, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} S_{\pm,1}(\lambda) e^{\pm ik_{\pm}y} dk_{\pm} &= \\ &= F_{r,\pm}(x+y) \pm \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x, s) R_{\pm}(\lambda) e^{\pm ik_{\pm}(y+s)} ds dk_{\pm} \\ &= F_{r,\pm}(x+y) \pm \int_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x, s) F_{r,\pm}(y+s) ds, \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$F_{r,\pm}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R_{\pm}(\lambda) e^{\pm ik_{\pm}x} dk_{\pm}. \quad (2.35)$$

Таким образом, при $\pm y > \pm x$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} G_{\pm}(\lambda, x, y) dk_{\pm} = K_{\pm}(x, y) + F_{r,\pm}(x+y) \pm \int_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x, s) F_{r,\pm}(y+s) ds. \quad (2.36)$$

Пусть теперь \mathcal{C}_{ρ} – это полуокружность радиуса ρ , лежащая в верхней полуплоскости с центром в начале координат, положим $\Gamma_{\rho} = \mathcal{C}_{\rho} \cup [-\rho, \rho]$. Из оценок (2.7), (2.11) (2.32), и **I. (е)** следует, что при $\pm y \geq \pm x$ к функции $G_{\pm}(\lambda, x, y)$, как функции переменной k_{\pm} , применима лемма Жордана. Более того, из формулы (2.31) следует

$$\phi_{\mp}(\lambda_j, x) \operatorname{Res}_{i\kappa_j^{\pm}} T_{\pm}(\lambda) = i\gamma_j^{\pm} \phi_{\pm}(\lambda_j, x),$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}_{i\kappa_j^{\pm}} G_{\pm}(\lambda, x, y) &= i \sum_{j=1}^N \gamma_j^{\pm} \phi_{\pm}(\lambda_j, x) e^{\mp \kappa_j^{\pm} y} \\ &= i \left(F_{d,\pm}(x+y) \pm \int_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x, s) F_{d,\pm}(s+y) ds \right), \end{aligned} \quad (2.37)$$

где мы обозначили $F_{d,\pm}(x) := \sum_{j=1}^N \gamma_j^{\pm} e^{\mp \kappa_j^{\pm} x}$. Предположим, что $c_{\pm} = \underline{c}$, то есть при $k_{\pm} \in \mathbb{R}$ покрывается весь непрерывный спектр оператора L . Тогда функция $G_{\pm}(\lambda, x, y)$, как функция от k_{\pm} , имеет мероморфное

продолжение в область \mathbb{C}^+ с полюсами в точках $i\kappa_j^\pm$. Используя теорему Коши, лемму Жордана и равенство (2.36), для $\pm x < \pm y$ получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_\rho} G_\pm(\lambda, x, y) dk_- &= i \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}_{i\kappa_j^\pm} G_\pm(\lambda, x, y) = K_\pm(x, y) \\ &+ F_{r,\pm}(x+y) \pm \int_x^{\pm\infty} K_\pm(x, s) F_{r,\pm}(y+s) ds. \end{aligned}$$

Объединяя это равенство с равенством (2.37), получаем уравнение (2.34) в случае $c_\pm = \underline{c}$. В отличие от этого случая, в случае $c_\pm = \bar{c}$ вещественные значения переменной k_\pm соответствуют только спектру кратности два. Тогда функция $G_\pm(\lambda, x, y)$, рассматриваемая как функция от k_\pm , в области \mathbb{C}^+ имеет скачок вдоль отрезка $[0, ib_\pm]$, где $b_\pm = \sqrt{c_\pm - c_\mp} > 0$. Полюса в точке b_\pm у нее нет потому, что согласно лемме 2.5, имеет место оценка $G_\pm(\lambda, x, y) = O((k_\pm - b_\pm)^\alpha)$, где $-1 < \alpha \leq -1/2$.

Для больших $\rho > 0$ положим $b_\rho = b_\pm + \rho^{-1}$. Введем объединение трех интервалов

$$C'_\rho = [-\rho^{-1}, ib_\rho - \rho^{-1}] \cup [\rho^{-1}, ib_\rho + \rho^{-1}] \cup [ib_\rho - \rho^{-1}, ib_\rho + \rho^{-1}],$$

и рассмотрим замкнутый контур $\Gamma'_\rho = C_\rho \cup C'_\rho \cup [-\rho, -\rho^{-1}] \cup [\rho^{-1}, \rho]$, ориентированный против часовой стрелки. Функция $G_\pm(\lambda, x, y)$ является мероморфной в области, ограниченной контуром Γ'_ρ (предполагается, что ρ достаточно большое, чтобы все полюса лежали внутри этой области). Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma'_\rho} G_\pm(\lambda, x, y) dk_\pm &= i \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}_{i\kappa_j^\pm} G_\pm(\lambda, x, y) = K_\pm(x, y) \quad (2.38) \\ &+ F_{r,\pm}(x+y) \pm \int_x^{\pm\infty} K_\pm(x, s) F_{r,\pm}(y+s) ds \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{ib_\pm}^0 (G_\pm(\lambda + i0, x, y) - G_\pm(\lambda - i0, x, y)) dk_\pm. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае, то есть когда $c_\pm = \bar{c}$, переменная $k_\pm = i\kappa$, $\kappa > 0$, не имеет скачка вдоль однократного спектра, и это же верно для решения

$\phi_{\pm}(\lambda, x)$. Таким образом, скачок $[G_{\pm}] := G_{\pm}(\lambda + i0, x, y) - G_{\pm}(\lambda - i0, x, y)$ возникает от функции $T_{\pm}(\lambda)\phi_{\mp}(\lambda, x)$. Из формулы (2.28) и свойства **I. (b)** вытекает, что $T_{\pm}\overline{T_{\pm}^{-1}} = -T_{\mp}\overline{T_{\mp}^{-1}} = -R_{\mp}$ на $\Sigma^{(1)}$. Для упрощения записи, опустим зависимости от λ и x . Соотношения рассеяния (2.27) тогда дают

$$T_{\pm}\phi_{\mp} - \overline{T_{\pm}\phi_{\mp}} = -\overline{T_{\pm}}(\overline{\phi_{\mp}} + R_{\mp}\phi_{\mp}) = -\overline{T_{\pm}}T_{\mp}\phi_{\pm},$$

и поэтому $[G_{\pm}] = -e^{\pm k_{\pm}y}\overline{T_{\pm}(\lambda + i0)}T_{\mp}(\lambda + i0)\phi_{\pm}(\lambda, x)$. Положим

$$\chi(\lambda) := -\overline{T_{\pm}(\lambda + i0)}T_{\mp}(\lambda + i0), \quad \lambda \in [\underline{c}, \bar{c}].$$

Используя (2.8), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{ib_{\pm}}^0 (G_{\pm}(\lambda + i0, x, y) - G_{\pm}(\lambda - i0, x, y)) dk_{\pm} \\ &= F_{\chi, \pm}(x + y) \pm \int_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x, s)F_{\chi, \pm}(s + y)ds, \end{aligned}$$

где

$$F_{\chi, \pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{ib_{\pm}}^0 \chi(\lambda)e^{\pm ik_{\pm}x} dk_{\pm} = \frac{1}{4\pi} \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} \chi(\lambda)e^{\pm ik_{\pm}x} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda - c_{\pm}}}.$$

Объединяя это с формулами (2.38), (2.37), и (2.35), и принимая во внимание, что из (2.28) следует

$$\frac{\chi(\lambda)}{\sqrt{\lambda - c_{\pm}}} = |T_{\mp}(\lambda)|^2 |k_{\mp}|^{-1} > 0, \quad \lambda \in (\underline{c}, \bar{c}),$$

мы получаем (2.34) в случае $c_{\pm} = \bar{c}$. \square

Следствие 2.2. Положим $\hat{F}_{\pm}(x) := 2F_{\pm}(2x)$. Тогда уравнение (2.33) примет вид

$$\hat{F}_{\pm}(x + y) + B_{\pm}(x, y) \pm \int_0^{\pm\infty} B_{\pm}(x, s)\hat{F}_{\pm}(x + y + s)ds = 0, \quad (2.39)$$

где $B_{\pm}(x, y)$ — это оператор преобразования из представления (2.14).

Это уравнение и лемма 2.2 позволяют установить свойства убывания функций $F_{\pm}(x)$.

Лемма 2.8. Пусть $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$, $m \geq 1$, $n \geq 0$. Тогда ядра уравнений (2.33) удовлетворяют свойству:

IV. Функция $F_{\pm}(x)$ является $n + 1$ раз дифференцируемой на \mathbb{R} , причем $F'_{\pm} \in \mathcal{L}_m^n(\mathbb{R}_{\pm})$.

Доказательство. Продифференцируем уравнение (2.39) j раз по y :

$$\hat{F}_{\pm}^{(j)}(x + y) + B_{\pm,y}^{(j)}(x, y) \pm \int_0^{\pm\infty} B_{\pm}(x, s) \hat{F}_{\pm}^{(j)}(x + y + s) ds = 0. \quad (2.40)$$

Положим здесь $y = 0$ и обозначим $H_{\pm,j}(x) = B_{\pm,y}^{(j)}(x, 0)$. Из оценок (2.17) и (2.18) следует, что $H_{\pm,j} \in \mathcal{L}_m^{n+1-j}(\mathbb{R}_{\pm})$ при $j = 1, \dots, n + 1$. Сделав замену переменных $x + s = \xi$, получим

$$\hat{F}_{\pm}^{(j)}(x) + H_{\pm,j}(x) \pm \int_x^{\pm\infty} B_{\pm}(x, \xi - x) \hat{F}_{\pm}^{(j)}(\xi) d\xi = 0. \quad (2.41)$$

Из формулы (2.15) и оценки (2.9) вытекает, что

$$|B_{\pm}(x, \xi - x)| \leq \sigma_{\pm,0}(\xi) e^{\hat{\sigma}_{\pm,0}(x) - \hat{\sigma}_{\pm,0}(\xi)},$$

и из (2.41) следует, что

$$\begin{aligned} |\hat{F}_{\pm}^{(j)}(x)| e^{-\hat{\sigma}_{\pm,0}(x)} &\leq |H_{\pm,j}(x)| e^{-\hat{\sigma}_{\pm,0}(x)} \pm \\ &\pm \int_x^{\pm\infty} \sigma_{\pm,0}(s) e^{-\hat{\sigma}_{\pm,0}(s)} |\hat{F}_{\pm}^{(j)}(s)| ds = |H_{\pm,j}(x)| e^{-\hat{\sigma}_{\pm,0}(x)} + \Phi_{\pm,j}(x), \end{aligned} \quad (2.42)$$

где $\Phi_{\pm,j}(x) := \pm \int_x^{\pm\infty} |F_{\pm}^{(j)}(s)| e^{-\hat{\sigma}_{\pm,0}(s)} \sigma_{\pm,0}(s) ds$. Умножая последнее неравенство на $\sigma_{\pm,0}(x)$ и используя (2.5), получаем

$$\mp \frac{d}{dx} (\Phi_{\pm,j}(x) e^{-\hat{\sigma}_{\pm,0}(x)}) \leq |H_{\pm,j}(x)| \sigma_{\pm,0}(x) e^{-2\hat{\sigma}_{\pm,0}(x)}.$$

Интегрируя это неравенство, имеем

$$\Phi_{\pm,j}(x) \leq \pm C e^{\hat{\sigma}_{\pm,j}(x)} \int_x^{\pm\infty} |H_{\pm,j}(s)| \sigma_{\pm,0}(s) ds.$$

Отсюда следует, что $\Phi_{\pm}(\cdot) \in \mathcal{L}_m^1(\mathbb{R}_{\pm})$, так как $H_{\pm,j} \in \mathcal{L}_m^{n+1-j}(\mathbb{R}_{\pm})$, $j \geq 1$ и $\sigma_{\pm,0} \in \mathcal{L}_m^1(\mathbb{R}_{\pm})$. Свойство **IV** вытекает теперь из (2.42). \square

Условие Марченко и условие Дейфга–Трубовица

В этом подразделе приводится доказательство свойства **II. (b)**, а также доказывается непрерывность коэффициента отражения R_{\pm} на краю спектра \underline{c} , когда $c_{\pm} = \underline{c}$ в резонансном случае (часть свойства **III**). Как упоминалось в разделе 1, эти свойства имеют решающее значение при решении

обратной задачи. Поведение коэффициентов матрицы рассеяния на краю спектра легко описываются при $m \geq 2$, как в убывающем случае, так и в случае ступеньки, так как начиная со второго момента решения Йоста дифференцируемы по локальным переменным k_{\pm} . При $m = 1$ ситуация более сложная. Для случая $q \in \mathcal{L}_1^0(0, 0)$ непрерывность коэффициентов рассеяния была доказана независимо Гусейновым [19] и Клаусом [76] (смотри также [42]). В случае $q \in \mathcal{L}_1^0(c_+, c_-)$ свойство **II. (b)** доказано в [41]. Мы предлагаем другое доказательство, использующее подход Гусейнова, который даст некоторые дополнительные формулы, представляющие независимый интерес (они могут быть использованы для улучшения оценок дисперсионного убывания решений уравнения Шрёдингера, зависящего от времени, см., например [62]).

Напомним, что в убывающем случае при $q \in \mathcal{L}_1^0(0, 0)$, характеристическими свойствами данных рассеяния на конце непрерывного спектра являются следующие:

- 1) Коэффициент прохождения $T(k)$, где $k^2 = \lambda$, ограничен при $k \in \mathbb{C}^+$ в окрестности точки $k = 0$ (на краю непрерывного спектра);
- 2) $\lim_{k \rightarrow 0} kT^{-1}(k)(R_{\pm}(k) + 1) = 0$.

Наши условия **I. (b)** и **II** обеспечивают условие Марченко в точке \underline{c} . (т.е. тоже на краю непрерывного спектра). Действительно, если $W(\underline{c}) \neq 0$, то свойство (i) леммы 2.3 дает $W(\underline{c}) \in \mathbb{R}$, а из **I. (b)** вытекает, что $R_{\pm}(c_{\pm}) = -1$ при $\underline{c} = c_{\pm}$. Второй коэффициент отражения R_{\mp} просто не определен в этой точке. Имеет место свойство $R_{\mp}(\bar{c}) = -1$ (ср. (2.29)), так как $W(\bar{c}) \neq 0$, но этот факт никак не используется при решении обратной задачи. Наш выбор условий **I–III** как части необходимых и достаточных условий, обусловлен следующим. Прежде всего, получение аналога условия 1) прямо, без **II. (b)**, требует дополнительных усилий. Вторая причина состоит в том, что на самом деле условия **I–III** подтверждают, что усло-

вия, предложенные в [48] для второго момента, справедливы также и для первого.

Проведем доказательство для случая для $\underline{c} = c_-$, случай $\underline{c} = c_+$ аналогичен. При $k_{\pm} \in \mathbb{R}$ положим $h_{\pm}(\lambda, x) = \phi_{\pm}(\lambda, x)e^{\mp ik_{\pm}x}$, тогда из (2.14) следует, что

$$\begin{aligned} h_{\pm}(\lambda) &= h_{\pm}(\lambda, 0) = 1 \pm \int_0^{\pm\infty} B_{\pm}(0, y)e^{\pm 2iyk_{\pm}} dy, \\ h'_{\pm}(\lambda) &= h'_{\pm}(\lambda, 0) = \pm \int_0^{\pm\infty} \frac{\partial}{\partial x} B_{\pm}(0, y)e^{\pm 2iyk_{\pm}} dy. \end{aligned}$$

При $\underline{c} = c_-$ имеем $2ik_+(\underline{c}) = -b = -2\sqrt{c_+ - c_-} < 0$, и таким образом, в окрестности точки \underline{c}

$$h_+(\lambda) = 1 + \int_0^{\infty} B_+(0, y)e^{-by}e^{i\tau(\lambda)y} dy, \quad \tau(\lambda) = 2\frac{\lambda - \underline{c}}{k_+ - ib/2},$$

где функция $\tau(\lambda)$ дифференцируема в окрестности \underline{c} и $\tau(\underline{c}) = 0$. Так как $B_+(0, y)e^{-by} \in L^1_s(\mathbb{R}_+)$ и $B_{+,x}(0, y)e^{-by} \in L^0_s(\mathbb{R}_+)$, $s = 1, 2, \dots$, то

$$\begin{aligned} -\phi_+(\underline{c}, 0)\phi'_+(\lambda, 0) + \phi_+(\lambda, 0)\phi'_+(\underline{c}, 0) &= h_+(\lambda)h'_+(\underline{c}) - h_+(\underline{c})h'_+(\lambda) \\ &+ (2ik_+ + b)h_+(\underline{c})h_+(\lambda) = C(\lambda - \underline{c})(1 + o(1)), \quad \lambda \rightarrow \underline{c}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Рассмотрим теперь функцию $\Phi(\lambda) = h_-(\lambda)h'_-(\underline{c}) - h_-(\underline{c})h'_-(\lambda)$, где $k_- \in \mathbb{R}$.

Можно показать (ср. [62]), что она имеет представление

$$\Phi(\lambda) = 2ik_- \Psi(k_-), \quad \text{где } \Psi(k_-) = \int_{\mathbb{R}_-} H(y)e^{-2iyk_-} dy, \quad (2.44)$$

$$H(x) := D(x)h_-(\underline{c}) - K(x)h'_-(\underline{c}),$$

$$K(x) = \int_{-\infty}^x B_-(0, y) dy, \quad D(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial x} B_-(0, y) dy.$$

Заметим, что интеграл в (2.44) нужно понимать как несобственный. Используя (2.39) и (2.40) можно получить (см. [19]), что функция $H(x)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$H(x) - \int_{\mathbb{R}_-} H(y)\hat{F}_-(x+y)dy = h_-(\underline{c}) \left(\int_{\mathbb{R}_-} B_-(0, y)\hat{F}_-(x+y)dy - F_-(x) \right).$$

Согласно свойству **IV** имеем $\hat{F}'_- \in \mathcal{L}_1^0(\mathbb{R}_-)$. Используя это, а также формулу (2.9), можно показать, что $H \in L_1(\mathbb{R}_-)$ и, таким образом, $\Phi(\lambda) = 2ik_- \Psi(0)(1 + o(1))$, где $\Psi(0) \in \mathbb{R}$. Более того,

$$\begin{aligned} \phi_-(\lambda, 0)\phi'_-(\underline{c}, 0) - \phi_-(\underline{c}, 0)\phi'_-(\lambda, 0) &= -2ik_- h_-(\lambda)h_-(\underline{c}) + \Phi(\lambda) \\ &= 2ik_-(h_-(\underline{c}))^2 + \Psi(0))(1 + O(1)), \quad \lambda \rightarrow \underline{c}, \end{aligned}$$

где $h_-(\underline{c}) \in \mathbb{R}$. Комбинируя это с (2.43), получаем следующий результат:

Лемма 2.9. [[41]] Пусть $\underline{c} = c_-$. Тогда в окрестности \underline{c} справедливы следующие асимптотики:

(a) Если $\phi_-(\underline{c}, 0)\phi_+(\underline{c}, 0) \neq 0$ то

$$\frac{\phi'_+(\lambda, 0)}{\phi_+(\lambda, 0)} - \frac{\phi'_+(\underline{c}, 0)}{\phi_+(\underline{c}, 0)} = O(\lambda - \underline{c}), \quad \frac{\phi'_-(\lambda, 0)}{\phi_-(\lambda, 0)} - \frac{\phi'_-(\underline{c}, 0)}{\phi_-(\underline{c}, 0)} = i\alpha \sqrt{\lambda - \underline{c}}(1 + o(1));$$

(b) Если $\phi'_-(\underline{c}, 0)\phi'_+(\underline{c}, 0) \neq 0$, то

$$\frac{\phi_+(\lambda, 0)}{\phi'_+(\lambda, 0)} - \frac{\phi_+(\underline{c}, 0)}{\phi'_+(\underline{c}, 0)} = O(\lambda - \underline{c}), \quad \frac{\phi_-(\lambda, 0)}{\phi'_-(\lambda, 0)} - \frac{\phi_-(\underline{c}, 0)}{\phi'_-(\underline{c}, 0)} = i\hat{\alpha} \sqrt{\lambda - \underline{c}}(1 + o(1)),$$

где $\alpha, \hat{\alpha} \in \mathbb{R}$.

Предположим теперь, что $W(\underline{c}) = 0$, то есть $\phi_-(\underline{c}, x) = C\phi_+(\underline{c}, x)$, где $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — это некоторая константа. Тогда имеет место по крайней мере один из двух случаев, описанных в лемме 2.9. Так как функции ϕ_+ и ϕ_- непрерывны в окрестности \underline{c} , то в случае (a) имеем $\phi_-(\lambda, 0)\phi_+(\lambda, 0) = \beta(1 + o(1))$ при $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Таким образом

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= \phi_-(\lambda, 0)\phi_+(\lambda, 0) \left(\frac{\phi'_-(\lambda, 0)}{\phi_-(\lambda, 0)} - \frac{\phi'_-(\underline{c}, 0)}{\phi_-(\underline{c}, 0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\phi'_+(\lambda, 0)}{\phi_+(\lambda, 0)} + \frac{\phi'_+(\underline{c}, 0)}{\phi_+(\underline{c}, 0)} \right) = i\alpha\beta \sqrt{\lambda - \underline{c}}(1 + o(1)), \end{aligned}$$

где $\alpha\beta \in \mathbb{R}$. На самом деле $\gamma = \alpha\beta \neq 0$ в силу (2.30). Случай (b) аналогичен. Свойство **II. (b)** доказано. Чтобы доказать непрерывность коэффициента отражения R_- в точке \underline{c} когда $\underline{c} = c_-$, достаточно применить "сопряженную" версию леммы 2.9, которая имеет место, если рассматривать асимптотики при $\lambda \rightarrow \underline{c}$, $\lambda \in \Sigma^{(1)}$, к формуле (2.27).

Подытожим результаты, перечислив те условия на данные рассеяния, которые окажутся, как будет показано в следующем параграфе, не только необходимыми, но и достаточными для решения обратной задачи рассеяния:

Теорема 2.1. [необходимые условия на данные рассеяния] Данные рассеяния, соответствующие потенциалу $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$

$$\mathcal{S}_m^n(c_+, c_-) := \left\{ R_+(\lambda), T_+(\lambda), \sqrt{\lambda - c_+} \in \mathbb{R}; R_-(\lambda), T_-(\lambda), \sqrt{\lambda - c_-} \in \mathbb{R}; \lambda_1, \dots, \lambda_N \in (-\infty, \underline{c}), \gamma_1^\pm, \dots, \gamma_N^\pm \in \mathbb{R}_+ \right\} \quad (2.45)$$

удовлетворяет свойствам *I–III* леммы 2.4. Функции $F_\pm(x, y)$, определенные в (2.34), удовлетворяют свойству *IV* леммы 2.8.

2.2. Обратная задача рассеяния.

Пусть $\mathcal{S}_m^n(c_+, c_-)$ — это набор данных, как в (2.45), который удовлетворяет свойствам теоремы 2.1. Построим функции $F_\pm(x, y)$ по формулам (2.34), они вещественны в силу условия симметрии, и удовлетворяют свойству *IV*. Рассмотрим уравнения (2.33) с такими ядрами, как интегральные уравнения по переменной y , а x — это параметр, $K_\pm(x, y)$ — неизвестные функции. Эти уравнения имеют единственные решения. Действительно, из условия *IV* следует, что $F_\pm \in \mathcal{L}_{m-1}^{n+1}(\mathbb{R}_\pm)$ (и, таким образом, $F_\pm \in L^1(\mathbb{R}_\pm) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R})$), и что F_\pm абсолютно непрерывна на \mathbb{R} при $m = 1$. Введем оператор

$$(\mathcal{F}_{\pm, x} f)(y) = \pm \int_0^{\pm\infty} F_\pm(t + y + 2x) f(t) dt.$$

Этот оператор вполне непрерывен ([28, лемма 3.3.1]). Чтобы доказать, что оператор $\mathbb{I} + \mathcal{F}_{\pm, x}$ обратим при каждом $x \in \mathbb{R}$, достаточно доказать, что соответствующее однородное уравнение $f(y) + \int_{\mathbb{R}_\pm} F_\pm(y + t + 2x) f(t) dt = 0$ имеет только тривиальное решение в пространстве $L^1(\mathbb{R}_\pm)$. Рассмотрим

сначала случай $\underline{c} = c_-$, и уравнение

$$f(y) + \int_0^\infty F_+(y+t+2x)f(t)dt = 0, \quad f \in L^1(\mathbb{R}_+). \quad (2.46)$$

Предположим, что $f(y)$ — это нетривиальное решение уравнения (2.46). Так как функция $F_+(x)$ вещественна, можно считать, что $f(y)$ тоже вещественна. Согласно свойству **IV** функция $F_+(t)$ ограничена при $t \geq x$ и, следовательно, решение $f(y)$ тоже ограничено. Таким образом, $f \in L^2(\mathbb{R}_\pm)$ и

$$\begin{aligned} 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(y)\overline{f(y)}dy + \iint_{\mathbb{R}_+^2} F_+(y+t+2x)f(t)\overline{f(y)}dydt \right) &= \sum_{j=1}^N \gamma_j^+ (\tilde{f}(\lambda_j, x))^2 \\ + \int_{c_-}^{c_+} \frac{|T_-(\lambda)|^2}{|\lambda - c_-|^{1/2}} (\tilde{f}(\lambda, x))^2 d\lambda &+ \int_{\mathbb{R}} R_+(\lambda) e^{2ikx} \hat{f}(-k) \hat{f}(k) dk + \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(k)|^2 dk, \end{aligned}$$

где $k := k_+ = \sqrt{\lambda - c_+}$,

$$\tilde{f}(\lambda, x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\sqrt{c_+ - \lambda}(y+x)} f(y) dy, \quad \text{и} \quad \hat{f}(k) = \int_x^\infty e^{iky} f(y) dy.$$

Так как $\tilde{f}(\lambda, x)$ вещественна при $\lambda < c_+$, то соответствующие слагаемые неотрицательны. Отбрасывая их и принимая во внимание, что (см. [28, лемма. 3.5.3])

$$\int_{\mathbb{R}} R_+(\lambda) e^{2ikx} \hat{f}(-k) \hat{f}(k) dk \leq \int_{\mathbb{R}} |R_+(\lambda)| |\hat{f}(k)|^2 dk,$$

мы приходим к неравенству $\int_{\mathbb{R}} (1 - |R_+(\lambda)|) |\hat{f}(k)|^2 dk \leq 0$. Согласно свойству **I. (с)** имеем $|R_+(\lambda)| < 1$ при $\lambda \neq c_+$, следовательно, $\hat{f}(k) = 0$, то есть f — тривиальное решение уравнения (2.46).

Пусть теперь f — это решение однородного уравнения $(I + \mathcal{F}_{-,x})f = 0$. Тем же способом, что и выше, мы приходим к неравенству $\int_{\mathbb{R}} (1 - |R_-(\lambda)|) |\hat{f}(k_-)|^2 dk_- \leq 0$, где $|R_-(\lambda)| < 1$ при $\lambda > c_+$. Таким образом, $\hat{f}(k)$ — это голоморфная функция при $k \in \mathbb{C}^+$, непрерывная вплоть до границы, и $\hat{f}(k) = 0$ на лучах $k^2 > c_+ - c_-$. Продолжая $\hat{f}(k)$ через эти лучи аналитически в область, симметричную к \mathbb{C}^+ , мы приходим к равенству $\hat{f}(k) = 0$ при $k \in \mathbb{R}$. Случай $\underline{c} = c_+$ рассматривается аналогично.

Эти рассуждения показывают, что условие **IV** на самом деле может быть ослаблено:

Теорема 2.2. Пусть набор $\mathcal{S}_m^n(c_+, c_-)$, удовлетворяет условиям **I–III**, и пусть функция $F_{\pm}(x)$ определена формулой (2.34). Предположим, что она удовлетворяет следующему условию:

IV^{weak}. Функция $F_{\pm}(x)$ абсолютно непрерывна и $F'_{\pm} \in L^1(\mathbb{R}_{\pm}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ существует положительная непрерывная функция $\tau_{\pm}(x, x_0)$, убывающая при $x \rightarrow \pm\infty$, причем $\tau_{\pm}(\cdot, x_0) \in L^1(\mathbb{R}_{\pm})$, такая, что $|F_{\pm}(x)| \leq \tau_{\pm}(x, x_0)$ при $\pm x \geq \pm x_0$. Тогда

(i) Для каждого x уравнение (2.33) имеет единственное решение $K_{\pm}(x, \cdot) \in L^1([x, \pm\infty))$.

(ii) Это решение имеет частные производные первого порядка

$$\frac{d}{dx}K_{\pm}(x, x) \in L^1(\mathbb{R}_{\pm}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}).$$

(iii) Функция

$$\phi_{\pm}(\lambda, x) = e^{\pm ik_{\pm}x} \pm \int_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x, y)e^{\pm ik_{\pm}y} dy \quad (2.47)$$

является решением уравнения

$$-y''(x) \mp 2y(x)\frac{d}{dx}K_{\pm}(x, x) = (k_{\pm})^2y(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(iv) Если F_{\pm} удовлетворяет условию **IV**, тогда

$$q_{\pm}(x) := \mp 2\frac{d}{dx}K_{\pm}(x, x) \in \mathcal{L}_m^n(\mathbb{R}_{\pm})$$

Доказательство. Если F_{\pm} удовлетворяет условию **IV** для любого $m \geq 1$ и $n \geq 0$, тогда по меньшей мере $F'_{\pm} \in L^0_1(\mathbb{R}_{\pm})$ и можно выбрать $\tau_{\pm}(x, x_0) = \tau_{\pm}(x) = \int_{\mathbb{R}_{\pm}} |F'(x+t)| dt$. Так как $|F_{\pm}(x)| \leq \tau_{\pm}(x)$ и $\tau_{\pm}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_{\pm})$ убывает при $x \rightarrow \pm\infty$, условие **IV^{weak}** выполнено.

Пункт (i) уже доказан при условии, более слабом, чем IV^{weak} : $F_{\pm} \in L^1(\mathbb{R}_{\pm}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R})$ и $F' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Поэтому у нас построено решение $K_{\pm}(x, y)$. Чтобы установить (ii), достаточно показать, что $B'_{\pm, x} = \frac{\partial}{\partial x} B_{\pm}(x, 0) \in L^1[x_0, \pm\infty)$ для любого фиксированного x_0 , где $B_{\pm}(x, y) = 2K_{\pm}(x, x + 2y)$.

Пусть $\pm x \geq \pm x_0$. Рассмотрим уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко в виде (2.39). В силу (i) оператор $I + \hat{\mathcal{F}}_{\pm, x}$, порожденный ядром \hat{F}_{\pm} , также обратим и допускает оценку $\|\{I + \hat{\mathcal{F}}_{\pm, x}\}^{-1}\| \leq C_{\pm}(x)$, где $C_{\pm}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ — это непрерывная функция и $C_{\pm}(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Введем обозначения

$$\tau_{\pm, 1}(x) = \int_{\mathbb{R}_{\pm}} |\hat{F}'_{\pm}(t + x)| dt, \quad \tau_{\pm, 0}(x) = \int_{\mathbb{R}_{\pm}} |\hat{F}_{\pm}(t + x)| dt.$$

Заметим, что $|\hat{F}_{\pm}(x)| \leq \tau_{\pm, 1}(x)$. С другой стороны, $|\hat{F}_{\pm}(x)| \leq 2\tau_{\pm}(2x, 2x_0)$, где $\tau_{\pm}(x, x_0)$ — это функция из условия IV^{weak} . Из (2.39) получается

$$\int_{\mathbb{R}_{\pm}} |B_{\pm}(x, y)| dy \leq \|\{I + \hat{\mathcal{F}}_{\pm, x}\}^{-1}\| \int_{\mathbb{R}_{\pm}} |\hat{F}_{\pm}(y + x)| dy \leq C_{\pm}(x) \tau_{\pm, 0}(x), \quad (2.48)$$

и поэтому

$$\begin{aligned} |B_{\pm}(x, y)| &\leq |\hat{F}(x + y)| + \int_{\mathbb{R}_{\pm}} |B_{\pm}(x, s) \hat{F}(x + y + s)| ds \\ &\leq \tau_{\pm}(2x + 2y, 2x_0) (1 + C_{\pm}(x) \tau_{\pm, 0}(x)) \leq C(x_0) \tau_{\pm}(2x + 2y, 2x_0). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Будучи решением (2.39) с абсолютно непрерывным ядром \hat{F}_{\pm} , функция $B_{\pm}(x, y)$ также абсолютно непрерывна по x для каждого y . Продифференцируем (2.39) по x . Действуя как в (2.48), получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_{\pm}} |B'_{\pm, x}(x, y)| dy &\leq \|\{I + \hat{\mathcal{F}}_{\pm, x}\}^{-1}\| \left(\int_{\mathbb{R}_{\pm}} \int_{\mathbb{R}_{\pm}} |B_{\pm}(x, t) \hat{F}'(t + y + x)| dt dy \right. \\ &\left. + \int_{\mathbb{R}_{\pm}} |\hat{F}'_{\pm}(y + x)| dy \right) \leq C_{\pm}(x) (\tau_{\pm, 0}(x) + C_{\pm}(x) \tau_{\pm, 1}(x) \tau_{\pm, 0}(x)). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Теперь положим $y = 0$ в производной (2.39) по x . Тогда, используя (2.48),

(2.50) и $\mathbf{IV}^{\text{weak}}$, имеем

$$\begin{aligned} |\hat{F}'_{\pm}(x) + B'_{\pm,x}(x, 0)| &\leq \int_{\mathbb{R}_{\pm}} |B'_{\pm,x}(x, t)\hat{F}_{\pm}(t+x)|dt + \int_{\mathbb{R}_{\pm}} |B_{\pm}(x, t)\hat{F}'_{\pm}(t+x)|dt \\ &\leq C_{\pm}(x)(1 + C_{\pm}(x)\tau_{\pm,1}(x))\tau_{\pm,0}(x)\tau_{\pm}(2x, 2x_0) + H_{\pm}(x), \end{aligned}$$

где $H_{\pm}(x) = \int_{\mathbb{R}_{\pm}} |B_{\pm}(x, t)\hat{F}'_{\pm}(x+t)|dt$. Согласно (2.49)

$$H_{\pm}(x) \leq C(x_0) \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \tau_{\pm}(2x+2t, 2x_0)|\hat{F}'_{\pm}(x+t)|dt \leq C(x_0)\tau_{\pm}(2x, 2x_0)\tau_{\pm,1}(x),$$

откуда следует

$$|B'_{\pm,x}(x, 0)| \leq |\hat{F}'(x)| + C(x_0)\tau_{\pm,1}(x)\tau_{\pm}(2x, 2x_0). \quad (2.51)$$

Итак, при условии $\mathbf{IV}^{\text{weak}}$ $q_{\pm}(x) := B_{\pm,x}(x, 0) \in L^1(\mathbb{R}^{\pm}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R})$, что доказывает (ii).

Доказательство пункта (iii) является дословным повторением соответствующей части доказательства теоремы 3.3.1 из [28], которое справедливо при условии $\mathbf{IV}^{\text{weak}}$.

Пусть теперь \hat{F}_{\pm} удовлетворяет условию \mathbf{IV} при некоторых $m \geq 1$ и $n \geq 0$. Как было сказано ранее, в этом случае можно заменить $\tau_{\pm}(x, x_0)$ на $\tau_{\pm,0}(x)$, и тогда формулы (2.51) и (2.49) будут выглядеть как

$$|B_{\pm}(x, y)| \leq C(x_0)\tau_{\pm,1}(x+y), \quad |B_{\pm,x}(x, 0)| \leq C(x_0)\tau_{\pm,1}^2(x).$$

Так как $\tau_{\pm,1}(x) \in \mathcal{L}^1_{m-1}(\mathbb{R}_{\pm})$ и $\tau_{\pm,1}^2(x) \in \mathcal{L}^0_m(\mathbb{R}_{\pm})$ для $m \geq 1$, то $q_{\pm}(x) \in \mathcal{L}^0_m(\mathbb{R}_{\pm})$. Чтобы доказать требуемое утверждение для более высоких порядков, поступим аналогично. А именно, в согласии с предыдущими обозначениями, положим

$$\tau_{\pm,i}(x) := \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \hat{F}_{\pm}^{(i)}(t+x)dt, \quad i = 0, \dots, n+1,$$

а также обозначим $D_{\pm}^{(i)}(x, y) := \frac{\partial^i}{\partial x^i} B_{\pm}(x, y)$. Обозначим через $\binom{i}{j}$ биномиальные коэффициенты. Продифференцируем уравнение (2.39) i раз по x . Тогда

$$\hat{F}_{\pm}^{(i)}(x+y) + D_{\pm}^{(i)}(x, y) = - \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \hat{F}_{\pm}^{(j)}(x+y+t)D_{\pm}^{(i-j)}(x, t)dt,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_{\pm}} |D_{\pm}^{(i)}(x, y)| dy &\leq \|\{I + \hat{F}_{\pm, x}\}^{-1}\| \left\{ \int_{\mathbb{R}_{\pm}} |\hat{F}_{\pm}^{(i)}(x + y)| dy \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \int_{\mathbb{R}_{\pm}} |\hat{F}_{\pm}^{(j)}(x + y + t) D_{\pm}^{(i-j)}(x, t)| dt dy \right\} \\ &\leq C_{\pm, i}(x) [\tau_{\pm, i-1}(x) + \sum_{j=1}^i \tau_{\pm, j}(x) \rho_{\pm, i-j}(x)], \end{aligned}$$

где $C_{\pm, i}(x) := K_i \|\{I + F_{\pm, x}\}^{-1}\| = K_i C_{\pm}(x)$ где $K_i = \max_{j \leq i} \binom{i}{j}$, а функция $\rho_{\pm, j}(x)$ определена рекуррентной формулой

$$\rho_{\pm, 0}(x) := C_{\pm}(x) \tau_{\pm, 0}(x), \quad \rho_{\pm, s} := C_{\pm, s}(x) [\tau_{\pm, s-1}(x) + \sum_{j=1}^s \tau_{\pm, j}(x) \rho_{\pm, s-j}(x)].$$

Таким образом для каждого $i = 1, \dots, n + 1$

$$\int_{\mathbb{R}_{\pm}} |D_{\pm}^{(i)}(x, y)| dy \leq \rho_{\pm, i}(x) \in \mathcal{L}_{m-1}^0(\mathbb{R}_{\pm}).$$

Соответственно,

$$|q_{\pm}^{(i)}(x)| = |D_{\pm}^{(i)}(x, 0)| \leq |F^{(i)}(x)| + \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} \tau_{\pm, j}(x) \rho_{\pm, i-j}(x) \in \mathcal{L}_m^0(\mathbb{R}_{\pm}),$$

что завершает доказательство. \square

Наша следующая цель — доказать, что две функции $q_+(x)$ и $q_-(x)$ из предыдущей теоремы на самом деле определяют один и тот же потенциал.

Теорема 2.3. Пусть набор $\mathcal{S}_m^n(c_+, c_-)$, определенный формулой (2.45), удовлетворяет условиям **I–III** и **IV^{weak}**. Тогда $q_-(x) + c_- \equiv q_+(x) + c_+ =: q(x)$. Если набор $\mathcal{S}_m^n(c_+, c_-)$ удовлетворяет условиям **I–IV**, то $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы является слегка модифицированной версией доказательства теоремы единственности из [28]. Мы приведем его для случая $\underline{c} = c_-$. Используем обозначения: $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \Sigma$,

где $\Sigma^{(2)}$ это две стороны разреза вдоль интервала $[\bar{c}, \infty) = [c_+, \infty)$, а Σ это две стороны разреза вдоль интервала $[\underline{c}, \infty) = [c_-, \infty)$.

Основные отличия между этим доказательством и доказательством для убывающего случая возникают из-за наличия однократного спектра, а также использования условия $\mathbf{IV}^{\text{weak}}$.

Напомним, что ядра уравнений ГЛМ (2.33) согласно (2.34) могут быть естественным образом разложены на следующие слагаемые: $F_+ = F_{\chi,+} + F_{d,+} + F_{r,+}$ и $F_- = F_{r,-} + F_{d,-}$. Рассмотрим следующую часть уравнений ГЛМ:

$$G_{\pm}(x, y) := F_{r,\pm}(x + y) \pm \int_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x, t) F_{r,\pm}(t + y) dt,$$

где $K_{\pm}(x, y)$ — решения уравнений ГЛМ, полученные в теореме 2.2. В силу условия $\mathbf{IV}^{\text{weak}}$ имеем $F_{r,\pm} \in L^2(\mathbb{R})$, и, следовательно, для любого фиксированного x

$$\int_{\mathbb{R}} F_{r,\pm}(x + y) e^{\mp iy k_{\pm}} dy = R_{\pm}(\lambda) e^{\pm ix k_{\pm}},$$

то есть

$$\int_{\mathbb{R}} G_{\pm}(x + y) e^{\mp ik_{\pm} y} dy = R_{\pm}(\lambda) \phi_{\pm}(\lambda, x), \quad k_{\pm} \in \mathbb{R}, \quad (2.52)$$

где ϕ_{\pm} — функции, полученные в теореме 2.2, а интеграл рассматривается в смысле главного значения. С другой стороны, используя уравнения ГЛМ и те же функции ϕ_{\pm} , имеем:

$$\begin{aligned} G_+(x, y) &= -K_+(x, y) - \sum_{j=1}^N \gamma_j^+ e^{-\kappa_j y} \phi_+(\lambda_j, x) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} \frac{|T_-(\xi)|^2}{k_-(\xi)} e^{ik_+(\xi)y} \phi_+(\xi, x) d\xi, \quad y > x, \end{aligned}$$

и

$$G_-(x, y) = -K_-(x, y) + \sum_{j=1}^N \gamma_j^- e^{\kappa_j y} \phi_-(\lambda_j, x), \quad y < x.$$

Так как для двух точек $k' \neq k''$

$$\int_x^{\pm\infty} e^{\pm i(k' - k'')y} dy = i \frac{e^{\pm i(k' - k'')x}}{k' - k''},$$

то

$$\int_{\mathbb{R}} G_+(x, y) e^{-ik_+y} dy = \int_{-\infty}^x G_+(x, y) e^{-ik_+y} dy - \int_x^{+\infty} K_+(x, y) e^{-ik_+y} dy \quad (2.53)$$

$$+ \frac{1}{4\pi i} \int_{c_-}^{\bar{c}} \frac{|T_-(\xi)|^2 \phi_+(\xi, x) e^{i(k_+(\xi) - k_+(\lambda))x}}{(k_+(\xi) - k_+(\lambda)) \sqrt{\xi - c_-}} d\xi + \sum_{j=1}^N \gamma_j^+ \phi_+(\lambda_j, x) \frac{e^{(-ik_+ - \kappa_j^+)x}}{\kappa_j^+ + ik_+},$$

и

$$\int_{\mathbb{R}} G_-(x, y) e^{ik_-y} dy = \int_x^{+\infty} G_-(x, y) e^{ik_-y} dy - \int_{-\infty}^x K_-(x, y) e^{ik_-y} dy \quad (2.54)$$

$$+ \sum_{j=1}^N \gamma_j^- \phi_-(\lambda_j, x) \frac{e^{(ik_- + \kappa_j^-)x}}{\kappa_j^- + ik_-}.$$

При $k_{\pm} \in \mathbb{R}$

$$\pm \int_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x, y) e^{\mp ik_{\pm}y} dy = \overline{\phi_{\pm}(\lambda, x)} - e^{\mp ik_{\pm}x}.$$

Используя (2.53), (2.54) и (2.52), мы получаем соотношения

$$R_{\pm}(\lambda) \phi_{\pm}(\lambda, x) + \overline{\phi_{\pm}(\lambda, x)} = T_{\pm}(\lambda) \theta_{\mp}(\lambda, x), \quad k_{\pm} \in \mathbb{R}, \quad (2.55)$$

где

$$\theta_-(\lambda, x) := \frac{1}{T_+(\lambda)} \left(e^{-ik_+x} + \int_{-\infty}^x G_+(x, y) e^{-ik_+y} dy - \int_{c_-}^{c_+} \frac{|T_-(\xi)|^2 W_+(\xi, \lambda, x)}{4\pi(\xi - \lambda) \sqrt{\xi - c_-}} d\xi + \sum_{j=1}^N \gamma_j^+ \frac{W_+(\lambda_j, \lambda, x)}{\lambda - \lambda_j} \right), \quad (2.56)$$

$$\theta_+(\lambda, x) := \frac{1}{T_-(\lambda)} \left(e^{ik_-x} + \int_x^{+\infty} G_-(x, y) e^{ik_-y} dy + \sum_{j=1}^N \gamma_j^- \frac{W_-(\lambda_j, \lambda, x)}{\lambda - \lambda_j} \right),$$

и

$$W_{\pm}(\xi, \lambda, x) := i \phi_{\pm}(\xi, x) e^{\pm i(k_{\pm}(\xi) - k_{\pm}(\lambda))x} (k_{\pm}(\xi) + k_{\pm}(\lambda)). \quad (2.57)$$

Несмотря на то, что функция $\theta_{\pm}(\lambda, x)$ определена через фоновые решения, соответствующие полуоси \mathbb{R}_{\mp} , она имеет ряд свойств, присущих $\phi_{\pm}(\lambda, x)$.

Лемма 2.10. Функция $\theta_{\pm}(\lambda, x)$ удовлетворяет следующим свойствам:

- (i) она допускает аналитическое продолжение на множество $\mathcal{D} \setminus \{c_+, c_-\}$, и непрерывна вплоть до его границы Σ ;
- (ii) она не имеет скачка вдоль интервала $(-\infty, c_{\pm}]$, и принимает комплексно сопряженные значения на сторонах разреза вдоль $[c_{\pm}, \infty)$;
- (iii) при больших $\lambda \in \text{clos}(\mathcal{D})$ она имеет асимптотическое поведение $\theta_{\pm}(\lambda, x) = e^{\pm ik_{\pm}x}(1 + o(1))$;
- (iv) при $\lambda \in \text{clos}(\mathcal{D})$ справедлива формула $W(\theta_{\pm}(\lambda, x), \phi_{\mp}(\lambda, x)) = \mp W(\lambda)$, где функция $W(\lambda)$ определена формулой (2.28).

Доказательство. Функция $T_{\mp}^{-1}(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение в \mathcal{D} согласно свойству **II. (а)**. Более того, $G_{\mp}(x, \cdot) \in L^1([x, \pm\infty))$. Так как величина $e^{\pm ik_{\mp}y}$ не растет при $\pm y \geq 0$, то соответствующий интеграл (второе слагаемое в представлении для θ_{\pm}) также допускает аналитическое продолжение. Функция θ_{\pm} не имеет особенностей в точках $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, так как $T_{\mp}^{-1}(\lambda)$ имеет простые нули в λ_j . Функция $W_{\mp}(\xi, \lambda, x)$ продолжается аналитически по λ при фиксированных ξ и x . Далее, рассмотрим в (2.56) член, содержащий интеграл типа Коши. Единственная особенность в подынтегральной функции может возникнуть в точке $\underline{c} = c_-$, так как в резонансном случае $T_-(c_-) \neq 0$. Поэтому, если $W(c_-) = 0$, то подынтегральная функция в (2.56) ведет себя как $O(\xi - c_-)^{-1/2}$. Согласно [29], интеграл тогда оценивается как $O(\xi - c_-)^{-1/2-\delta}$ для произвольного маленького положительного δ , а, кроме того, $T_{+}^{-1}(\lambda) = C\sqrt{\lambda - c_-}(1 + o(1))$. Следовательно, при $\lambda \rightarrow c_-$

$$\theta_-(\lambda, x) = \begin{cases} O((\lambda - c_-)^{-\delta}), & \text{если } W(c_-) = 0, \\ O(1), & \text{если } W(c_-) \neq 0. \end{cases} \quad (2.58)$$

Так как $W(c_+) \neq 0$ в силу **II. (а)**, то $T_{+}^{-1}(\lambda) = O(\lambda - c_+)^{-1/2}$, и, соответственно

$$\theta_-(\lambda, x) = O\left((\lambda - c_+)^{-1/2}\right), \quad \theta_+(\lambda, x) = O(1), \quad \lambda \rightarrow c_+. \quad (2.59)$$

Свойства (i) леммы 2.3, и **II. (a)** вместе с (2.56) и (2.57) показывают, что функции θ_+ и θ_- принимают комплексно сопряженные значения на сторонах разреза вдоль $[\underline{c}, \infty)$. Так как $W_{\pm}(\xi, \lambda, x) \in \mathbb{R}$ при $\lambda, \xi \leq c_{\pm}$, то $\theta_{\pm}(\lambda, x) \in \mathbb{R}$ при $\lambda \leq c_-$. В силу свойства **I. (b)** имеем $\overline{T_-^{-1}}T_- = R_-$ на обеих сторонах разреза вдоль интервала $[\underline{c}, \bar{c}]$, и из (2.55) следует, что

$$\theta_+ = \phi_- \overline{T_-^{-1}} + \overline{\phi_-} T_-^{-1} \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, θ_+ не имеет скачка вдоль интервала $[\underline{c}, \bar{c}]$. В точке $\underline{c} = c_-$ функция $\theta_+(x, \lambda)$ имеет изолированную несущественную особенность, то есть максимум полюс. Но в окрестности точки c_- $\theta_+(\lambda, x) = O(T_-^{-1}(\lambda)) = O(\lambda - c_-)^{-1/2}$. Следовательно, эта устранимая особенность, то есть

$$\theta_+(\lambda, x) = O(1), \quad \lambda \rightarrow c_-. \quad (2.60)$$

Пункты (i) и (ii) доказаны.

Главный член в асимптотическом разложении функции $\theta_{\pm}(\lambda, x)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ — это первое слагаемое в (2.56). В силу **I. (e)** и (2.32)

$$\theta_{\pm}(\lambda, x) = T_{\mp}^{-1}(\lambda)e^{\pm ik_{\mp} x} + o(1) = e^{\pm ik_{\pm} x}(1 + o(1)),$$

что доказывает (iii). Свойство (iv) получается из (2.55), (2.47), и (2.28) аналитическим продолжением. \square

Сопряжем теперь равенство (2.55), и исключим $\overline{\phi_{\pm}}$ из системы

$$\begin{cases} \overline{R_{\pm}\phi_{\pm}} + \phi_{\pm} = \overline{\theta_{\mp}T_{\pm}}, \\ R_{\pm}\phi_{\pm} + \overline{\phi_{\pm}} = \theta_{\mp}T_{\pm}, \end{cases} \quad k_{\pm} \in \mathbb{R}.$$

Получаем равенство

$$\phi_{\pm}(1 - |R_{\pm}|^2) = \overline{\theta_{\mp}T_{\pm}} - \overline{R_{\pm}}\theta_{\mp}T_{\pm}.$$

Используя **I. (c), (d)** и **II** при $\lambda \in \Sigma^{(2)}$, то есть при $k_{\pm} \in \mathbb{R}$, мы видим, что

$$T_{\mp}\phi_{\pm} = \overline{\theta_{\mp}} + R_{\mp}\theta_{\mp} \quad \lambda \in \Sigma^{(2)}.$$

Эти уравнения вместе с (2.55) дают нам систему, из которой можно исключить функции R_{\pm} . Получаем

$$T_{\pm}(\phi_{\pm}\phi_{\mp} - \theta_{\pm}\theta_{\mp}) = \phi_{\pm}\bar{\theta}_{\pm} - \bar{\phi}_{\pm}\theta_{\pm}, \quad \lambda \in \Sigma^{(2)}. \quad (2.61)$$

Введем теперь функцию

$$\Phi(\lambda) := \Phi(\lambda, x) = \frac{\phi_{+}(\lambda, x)\phi_{-}(\lambda, x) - \theta_{+}(\lambda, x)\theta_{-}(\lambda, x)}{W(\lambda)},$$

которая является аналитической в области $\mathcal{D} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_N, \underline{c}, \bar{c}\}$. Наша цель - доказать, что эта функция не имеет скачков вдоль вещественной оси, и имеет устранимые особенности в точках $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N, \underline{c}, \bar{c}\}$. Действительно, из формул (2.61) и (2.28) можно видеть, что

$$\Phi(\lambda) = \pm \frac{\phi_{\pm}(\lambda, x)\overline{\theta_{\pm}(\lambda, x)} - \overline{\phi_{\pm}(\lambda, x)}\theta_{\pm}(\lambda, x)}{2ik_{\pm}}, \quad \lambda \in \Sigma^{(2)}.$$

Заметим, что в силу свойства симметрии (см. **II. (a)**, (iii), теоремы 2.2 и (ii), леммы 2.10) знаменатель и числитель здесь — нечетные функции от k_{+} , следовательно, $\Phi(\lambda + i0) = \Phi(\lambda - i0)$ при $\lambda \geq \bar{c}$, то есть функция $\Phi(\lambda)$ не имеет скачков вдоль этого интервала. По тем же свойствам **II. (a)**, (iii), теоремы 2.2 и (ii), леммы 2.10 функция $\Phi(\lambda)$ не имеет скачка также вдоль интервала $\lambda \leq \underline{c}$. Проверим, что она не имеет скачка и вдоль интервала (\underline{c}, \bar{c}) . Лемма 2.10, (ii) показывает, что функция $\theta_{+}(\lambda, x)$ скачка здесь не имеет. Введем сокращенную запись

$$[\Phi] = \Phi(\lambda + i0) - \Phi(\lambda - i0) = \phi_{+} \left[\frac{\phi_{-}}{W} \right] - \theta_{+} \left[\frac{\theta_{-}}{W} \right], \quad \lambda \in (\underline{c}, \bar{c}),$$

и для простоты изложения опустим зависимости от некоторых параметров.

Используя свойство **I, (b)** и формулу (2.55), получаем

$$\left[\frac{\phi_{-}}{W} \right] = \frac{\phi_{-}T_{-} + \overline{\phi_{-}T_{-}}}{2ik_{-}} = \frac{(\phi_{-}R_{-} + \overline{\phi_{-}})\bar{T}_{-}}{2ik_{-}} = \frac{\theta_{+}T_{-}\bar{T}_{-}}{2ik_{-}},$$

то есть

$$\phi_{+} \left[\frac{\phi_{-}}{W} \right] = \frac{\theta_{+}\phi_{+}|T_{-}|^2}{2ik_{-}}. \quad (2.62)$$

С другой стороны, так как $ik_+ \in \mathbb{R}$ при $\lambda < \bar{c}$, то

$$\left[\frac{\theta_-}{W} \right] = \left[\frac{\theta_- T_+}{2ik_+} \right] = \frac{1}{2ik_+} [\theta_- T_+]. \quad (2.63)$$

Согласно (2.56), скачок этой функции возникает только от интеграла типа Коши. Представим этот интеграл в виде

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{c}}^{\bar{c}} \frac{\phi_+(x, \xi)(-i)(k_+(\lambda) + k_+(\xi))e^{ix(k_+(\xi) - k_+(\lambda))} |T_-(\xi)|^2}{2ik_-(\xi)} \frac{d\xi}{\xi - \lambda},$$

и применим формулу Сохоцкого–Племеля. Тогда из (2.63) следует, что

$$\theta_+ \left[\frac{\theta_-}{W} \right] = \frac{\theta_+ \phi_+ |T_-|^2}{2ik_-}.$$

Сравнивая эту формулу с (2.62), мы приходим к выводу, что функция $\Phi(\lambda)$ не имеет скачков на \mathbb{C} , но может иметь изолированные особенности в точках $E = \lambda_1, \dots, \lambda_N, c_-, c_+$ и ∞ . Так как все эти особенности являются не более, чем полюсами, то, чтобы показать, что на самом деле эти особенности устранимы, достаточно проверить, что $\Phi(\lambda) = o((\lambda - E)^{-1})$ в некотором направлении на комплексной плоскости. Прежде всего, свойства **I. (e)** и **(iii)** леммы 2.10 вместе с (2.28) и (2.47) показывают, что $\Phi(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Желаемое поведение $\Phi(\lambda) = o((\lambda - c_{\pm})^{-1})$ при $\lambda \rightarrow c_{\pm}$ получается в силу свойства **II** и оценок (2.58), (2.59), (2.60). Далее, чтобы доказать, что в точках дискретного спектра нет особенностей, нужно проверить, что

$$\phi_+(x, \lambda_j)\phi_-(x, \lambda_j) = \theta_+(x, \lambda_j)\theta_-(x, \lambda_j). \quad (2.64)$$

Переходя к пределу в обеих формулах (2.56) принимая во внимание (2.28) и (2.57), имеем

$$\theta_{\mp}(\lambda_k, x) = \frac{dW}{d\lambda}(\lambda_k) \phi_{\pm}(\lambda_k, x) \gamma_j^{\pm},$$

что вместе с (2.25) дает (2.64). Так как функция $\Phi(\lambda)$ является аналитической в \mathbb{C} и $\Phi(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$, то из теоремы Лиувилля следует, что

$$\Phi(x, \lambda) \equiv 0 \quad \text{при } \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.65)$$

Следствие 2.3. Если $W(c_{\pm}) \neq 0$, то $R_{\pm}(c_{\pm}) = -1$.

Доказательство. В случае $c = c_-$, рассмотренном выше, имеем $W(c_+) \neq 0$. Из формулы (2.65) следует, что вместо соотношения (2.59) на самом деле мы имеем $\theta_-(x, \lambda) = O(1)$ при $\lambda \rightarrow c_+$. Так как $T_+(c_+) = 0$ и $\phi(x, c_+) = \overline{\phi(x, c_+)}$, то из (2.55) можно заключить, что $R_+(c_+) = -1$. Свойство $R_-(c_-) = -1$ в нерезонансном случае следует из **I. (b)**, (2.28), и свойства $W(c_-) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, которое в свою очередь вытекает из свойства симметрии (i) леммы 2.3. \square

Из формулы (2.65) следует, что

$$\phi_+(\lambda, x)\phi_-(\lambda, x) = \theta_+(\lambda, x)\theta_-(\lambda, x), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.66)$$

Более того,

$$\phi_{\pm}(\lambda, x)\overline{\theta_{\pm}(\lambda, x)} = \overline{\phi_{\pm}(\lambda, x)}\theta_{\pm}(\lambda, x), \quad \lambda \in \Sigma^{(2)}. \quad (2.67)$$

Осталось показать, что $\phi_{\pm}(\lambda, x) = \theta_{\pm}(\lambda, x)$, или, эквивалентно, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$p(\lambda, x) := \frac{\phi_-(\lambda, x)}{\theta_-(\lambda, x)} = \frac{\theta_+(\lambda, x)}{\phi_+(\lambda, x)} \equiv 1.$$

Мы будем действовать так же, как в [28], параграф 3.5, или как в [43], раздел 5. Исключим сперва из рассмотрения дискретное множество \mathcal{O} параметров $x \in \mathbb{R}$, для которых выполнено хотя бы одно равенство: $\phi(E, x) = 0$ при $E \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_N, c_-, c_+\}$. Покажем, что для каждого $x \notin \mathcal{O}$ из равенства $\phi_+(\hat{\lambda}, x) = 0$ следует равенство $\theta_+(\hat{\lambda}, x) = 0$. Действительно, так как $\hat{\lambda} \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_N, c_-, c_+\}$, то $W(\hat{\lambda}) \neq 0$, и следовательно, в силу свойства (iv) леммы 2.10, имеем $\theta_-(\hat{\lambda}, x) \neq 0$. Но тогда из (2.66) следует равенство $\theta_+(\hat{\lambda}, x) = 0$. Следовательно, функция $p(\lambda, x)$ является голоморфной в \mathcal{D} . Согласно пункту (ii) леммы 2.10, она не имеет скачков вдоль интервала (c_-, c_+) , и, в силу (2.67) у нее нет скачков вдоль интервала $\lambda \geq c_+$. Так как $\phi_+(c_{\pm}, x) \neq 0$, то формулы (2.59) и (2.60) приводят к тому,

что функция $p(\lambda, x)$ имеет устранимые особенности в c_+ и c_- . Согласно пункту (iii) леммы 2.10, $p(\lambda) \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$, и по теореме Лиувилля $p(\lambda, x) \equiv 1$ при $x \notin \mathcal{O}$. Но множество \mathcal{O} дискретно, то есть по непрерывности $\phi_{\pm}(\lambda, x) = \theta_{\pm}(\lambda, x)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $x \in \mathbb{R}$. В свою очередь, из этого следует, что $q_-(x) +_- = q_+(x) +_+$, и доказательство теоремы 2.3 завершено. \square

2.3. Дополнительные свойства данных рассеяния.

В этом подразделе мы изучим поведение коэффициентов отражения при $\lambda \rightarrow \infty$ в зависимости от гладкости потенциала. Следует подчеркнуть, что грубой оценки **I. (e)** достаточно для решения обратной задачи рассеяния (вне зависимости от количества производных n), так как вся информация о гладкости содержится в свойстве **IV** преобразований Фурье коэффициентов отражения. Поэтому мы не включаем оценки из теоремы 2.4, доказанной ниже, в список необходимых и достаточных условий. С другой стороны, эти оценки играют важную роль в приложении в МОЗР для решения задачи Коши для уравнения КдФ с начальными данными типа ступеньки (см. раздел 3 настоящей диссертации). Лемма 2.12 и теорема 2.4 уточняют и улучшают соответствующие результаты из работы [43], и имеют независимый интерес для спектрального анализа оператора L .

Введем следующие обозначения: будем говорить, что функция $g(\lambda)$, определенная на множестве $\mathcal{A} := \Sigma \cap \{\lambda \geq a \gg \bar{c}\}$, принадлежит пространству $L^2(\infty)$, если она удовлетворяет свойству симметрии $g(\lambda + i0) = \overline{g(\lambda - i0)}$ на \mathcal{A} и

$$\int_a^{+\infty} |g(\lambda)|^2 \frac{d\lambda}{|\sqrt{\lambda}|} < \infty.$$

Заметим, что из этого определения следует, что $g(\lambda) \in L^2_{\{k_{\pm}\}}(\mathbb{R} \setminus (-a, a))$ при достаточно большом a .

Теорема 2.4. Пусть $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ при $m, n \geq 1$. Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\frac{d^s}{dk_{\pm}^s} R_{\pm}(\lambda) = g_{\pm, s}(\lambda) \lambda^{-\frac{n+1}{2}}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1, \quad \text{где } g_{\pm, s}(\lambda) \in L^2(\infty).$$

Доказательство. Отметим, что случай $n = 0$ и $m \geq 1$ рассмотрен в лемме 2.6, так как (используя обозначения этой леммы) представление $R_{\pm}(\lambda) = f_{6, \pm} k_{\pm}^{-1}$ допускает $m-1$ дифференцирование по k_{\pm} при $m > 1$, и $f_{6, \pm}^{(s)} \in L^2_{\{k_{\pm}\}}(\mathbb{R} \setminus (-a, a))$.

Используя лемму 2.2 и формулу (2.21), мы можем уточнить асимптотическое разложение для решения Йоста уравнения (2.1) с гладким потенциалом.

Лемма 2.11. Пусть $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ и $q_{\pm}(x) = q(x) - c_{\pm}$. Тогда при больших $k_{\pm} \in \mathbb{R}$ решение Йоста $\phi_{\pm}(\lambda, x)$ уравнения $L\phi_{\pm} = \lambda\phi_{\pm}$ допускает асимптотическое разложение

$$\phi_{\pm}(\lambda, x) = e^{\pm ik_{\pm} x} \left(u_{\pm, 0}(x) \pm \frac{u_{\pm, 1}(x)}{2ik_{\pm}} + \dots + \frac{u_{\pm, n}(x)}{(\pm 2ik_{\pm})^n} + \frac{U_{\pm, n}(\lambda, x)}{(\pm 2ik_{\pm})^{n+1}} \right), \quad (2.68)$$

где

$$u_0(x) = 1, \quad u_{\pm, l+1}(x) = \int_x^{\pm\infty} (u''_{\pm, l}(\xi) - q_{\pm}(\xi)u_{\pm, l}(\xi)) d\xi, \quad l = 1, \dots, n. \quad (2.69)$$

Более того, функции $U_{\pm, n}(\lambda, x)$ и $\frac{\partial}{\partial x} U_{\pm, n}(\lambda, x)$ являются $m-1$ раз дифференцируемыми по k_{\pm} и имеют следующее поведение при $\lambda \rightarrow \infty$ и $0 \leq s \leq m-1$:

$$\frac{\partial^s}{\partial k_{\pm}^s} U_{\pm, n}(\lambda, x) \in L^2(\infty), \quad \frac{\partial^s}{\partial k_{\pm}^s} \left(\frac{1}{k_{\pm}} \frac{\partial}{\partial x} U_{\pm, n}(\lambda, x) \right) \in L^2(\infty). \quad (2.70)$$

Доказательство. Из формулы (2.21) следует, что

$$\frac{\partial^s B_{\pm}(x, y)}{\partial y^s} = \frac{\partial^s B_{\pm}(x, y)}{\partial x \partial y^{s-1}} + \int_x^{\pm\infty} q_{\pm}(\alpha) \frac{\partial^{s-1} B_{\pm}(\alpha, y)}{\partial y^{s-1}} d\alpha, \quad s \geq 1. \quad (2.71)$$

Интегрируя (2.14) по частям, и принимая во внимание лемму 2.2 и формулу

(2.71) с $s = n + 1$, получаем

$$\begin{aligned} \phi_{\pm}(k_{\pm}, x)e^{\mp ik_{\pm}x} &= 1 \mp \frac{1}{2ik_{\pm}}B_{\pm}(x, 0) \pm \dots + \frac{(-1)^n}{(\pm 2ik_{\pm})^n} \frac{\partial^{n-1}B_{\pm}(x, 0)}{\partial y^{n-1}} \\ &+ \frac{(-1)^{n+1}}{(\pm 2ik_{\pm})^{n+1}} \left\{ \frac{\partial^n B_{\pm}(x, 0)}{\partial y^n} \pm \int_0^{\pm\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^n}{\partial y^n} B_{\pm}(x, y) \right. \right. \\ &\left. \left. + \int_x^{\pm\infty} q_{\pm}(\alpha) \frac{\partial^n}{\partial y^n} B_{\pm}(\alpha, y) d\alpha \right) e^{\pm 2ik_{\pm}y} dy \right\}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Положим

$$u_{\pm, l}(x) := (-1)^l \frac{\partial^{l-1} B_{\pm}(x, 0)}{\partial y^{l-1}}, \quad l \leq n + 1.$$

Тогда из (2.71) следует (2.69). Обозначим

$$u_{\pm, l+1}(x, y) = (-1)^{l+1} \frac{\partial^l B_{\pm}(x, y)}{\partial y^l}, \quad l \leq n. \quad (2.73)$$

В силу (2.2), (2.3), (2.5), (2.18), и (2.17) имеем $\nu_{\pm, l}(\cdot) \in \mathcal{L}_{m-1}^0(\mathbb{R}_{\pm})$. Из этого следует, что

$$u_{\pm, n+1}(x, \cdot), \quad \frac{\partial}{\partial x} u_{\pm, n+1}(x, \cdot) \in \mathcal{L}_{m-1}^0(\mathbb{R}_{\pm}). \quad (2.74)$$

Сравнивая формулу (2.68) с (2.72), получаем

$$\begin{aligned} U_{\pm, n}(\lambda, x) &= u_{\pm, n+1}(x) + \int_0^{\pm\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{\pm, n+1}(x, y) \right. \\ &\left. \pm \int_x^{\pm\infty} q_{\pm}(\alpha) u_{\pm, n+1}(\alpha, y) d\alpha \right) e^{\pm 2ik_{\pm}y} dy, \end{aligned} \quad (2.75)$$

где функция $u_{\pm, n+1}(x, y)$, определенная в (2.73), удовлетворяет $u_{\pm, n+1}(x, 0) = u_{\pm, n+1}(x)$. Из формулы (2.69) видно, что представление для $u_{l, \pm}(x)$ включает $q_{\pm}^{(l-2)}(x)$ и производные потенциала меньших порядков. Таким образом, функцию $u_{\pm, n+1}(x)$ можно продифференцировать только еще один раз по x . Но мы не можем дифференцировать правую часть (2.75) прямо под знаком интеграла. Чтобы этого избежать, сначала проинтегрируем по частям первое слагаемое в этом интеграле. В силу (2.73) имеем $\frac{\partial}{\partial y} u_{\pm, n}(x, y) = -u_{\pm, n+1}(x, y)$. Беря производную по x , получим

$$\int_0^{\pm\infty} \frac{\partial}{\partial x} u_{\pm, n+1}(x, y) e^{\pm 2ik_{\pm}y} dy = \frac{d}{dx} \left(u_{\pm, n}(x) \mp 2ik_{\pm} \int_0^{\pm\infty} u_{\pm, n}(x, y) e^{\pm 2ik_{\pm}y} dy \right).$$

Согласно (2.69), мы имеем $u'_{\pm,n+1}(x) + u''_{\pm,n}(x) = q_{\pm}(x)u_{\pm,n}(x)$, то есть

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} U_{\pm,n}(\lambda, x) &= 2ik_{\pm} \left(\frac{q_{\pm}(x)u_{\pm,n}(x)}{(2ik_{\pm})} \mp \int_0^{\pm\infty} \frac{\partial}{\partial x} u_{\pm,n}(x, y) e^{\pm 2ik_{\pm}y} dy \right) \\ &\mp \int_0^{\pm\infty} u_{\pm,n+1}(x, y) q_{\pm}(x) e^{\pm 2ik_{\pm}y} dy, \end{aligned}$$

что вместе с (2.74) доказывает формулу (2.70). \square

Следующий этап — получение асимптотического разложения для функций Вейля

$$m_{\pm}(\lambda, x) = \frac{\phi'_{\pm}(\lambda, x)}{\phi_{\pm}(\lambda, x)} \quad (2.76)$$

уравнения Шрёдингера. Заметим, что в силу оценки (2.11) и непрерывности функции $\hat{\sigma}(x)$ для любого $b > 0$ существует некоторое $k_0 > 0$ такое, что при всех вещественных k_{\pm} с $|k_{\pm}| > k_0$ функция $\phi_{\pm}(\lambda, x)$ не имеет нулей при $|x| < b$. Следовательно, функция $m_{\pm}(k_{\pm}, x)$ однозначно определена при всех больших вещественных k_{\pm} и x на любом компактном множестве $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$.

Лемма 2.12. Пусть $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$. Тогда при больших $\lambda \in \mathbb{R}_+$ функции Вейля (2.76) допускают асимптотическое разложение

$$m_{\pm}(k, x) = \pm i\sqrt{\lambda} + \sum_{j=1}^n \frac{m_j(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^j} + \frac{m_{\pm,n}(\lambda, x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^n}, \quad (2.77)$$

где

$$m_1(x) = q(x), \quad m_{l+1}(x) = -\frac{d}{dx} m_l(x) - \sum_{j=1}^{l-1} m_{l-j}(x) m_j(x), \quad (2.78)$$

и функции $m_{\pm,n}(\lambda, x)$ дифференцируемы $m-1$ раз по k_{\pm} , причем

$$\frac{\partial^s}{\partial k_{\pm}^s} m_n(\lambda, x) \in L^2(\infty), \quad s \leq m-1, \quad \forall x \in \mathcal{K}. \quad (2.79)$$

Замечание 2.2. Рекуррентные соотношения (2.78) хорошо известны для случая оператора Шрёдингера с гладкими потенциалами, и обычно доказываются с использованием уравнения Рикатти, которому удовлетворяют функции Вейля. Наш результат устанавливает, что представление (2.77) можно дифференцировать $m-1$ раз по k_{\pm} , и имеет место (2.79).

Доказательство. Используем доказательство леммы 1.4.2, [28], адаптируя его для случая ступеньки. Из (2.76) и (2.1) получаем $m_{\pm}(\lambda, x) = ik_{\pm} + \kappa_{\pm}(\lambda, x)$, где функция $\kappa_{\pm}(\lambda, x)$ удовлетворяет уравнениям

$$\kappa'_{\pm}(\lambda, x) \pm 2ik_{\pm}\kappa_{\pm}(\lambda, x) + \kappa_{\pm}^2(\lambda, x) - q_{\pm}(x) = 0, \quad \kappa_{\pm}(\lambda, x) = o(1), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Введем обозначения $\phi_{\pm}(\lambda, x) = e^{\pm ik_{\pm}x}Q_{\pm,n}(\lambda, x)$, где (см. лемма 2.11)

$$Q_{\pm,n}(\lambda, x) := P_{\pm,n}(\lambda, x) + \frac{U_{\pm,n}(\lambda, x)}{(\pm 2ik_{\pm})^{n+1}}, \quad (2.80)$$

$$P_{\pm,n}(\lambda, x) := 1 + \frac{u_{\pm,1}(x)}{(\pm 2ik)} + \dots + \frac{u_{\pm,n}(x)}{(\pm 2ik)^n}. \quad (2.81)$$

Тогда

$$\kappa_{\pm}(\lambda, x) = \frac{P'_{\pm,n}(\lambda, x)}{P_{\pm,n}(\lambda, x)} + \frac{U'_{\pm,n}(\lambda, x)P_{\pm,n}(\lambda, x) - U_{\pm,n}(\lambda, x)P'_{\pm,n}(\lambda, x)}{(\pm 2ik_{\pm})^{n+1}P_{\pm,n}(\lambda, x)Q_{\pm,n}(\lambda, x)}.$$

Разложим первую дробь в ряд по $(2ik_{\pm})^{-1}$, используя (2.81). Так как $P_{\pm,n}(\lambda, x) \neq 0$ при $x \in \mathcal{K}$ и достаточно больших λ , то мы получаем

$$\frac{P'_{\pm,n}(\lambda, x)}{P_{\pm,n}(\lambda, x)} = \sum_{j=1}^n \frac{\kappa_{\pm,j}(x)}{(\pm 2ik_{\pm})^j} + \frac{f_{\pm,n}(\lambda, x)}{(\pm 2ik_{\pm})^n},$$

где $\kappa_{\pm,j}(x)$ являются полиномами от $u_{\pm,l}$ при $l \leq j$, а функция $f_{\pm,n}(\lambda, x)$ бесконечное число раз дифференцируема по k_{\pm} при достаточно больших k_{\pm} и

$$\frac{\partial^l}{\partial k_{\pm}^l} f(\lambda, x) \in L^2(\infty), \quad l = 0, 1, \dots \quad (2.82)$$

Соответственно,

$$\kappa_{\pm}(\lambda, x) = \sum_{j=1}^n \frac{\kappa_{\pm,j}(x)}{(\pm 2ik_{\pm})^j} + \frac{\kappa_{\pm,n}(\lambda, x)}{(2ik_{\pm})^n}, \quad (2.83)$$

где

$$\kappa_{\pm,n}(\lambda, x) = f_{\pm,n}(k, x) + \frac{U'_{\pm,n}(\lambda, x)}{2ik_{\pm}Q_{\pm,n}(\lambda, x)} - \frac{U_{\pm,n}(\lambda, x)P'_{\pm,n}(\lambda, x)}{2ik_{\pm}P_{\pm,n}(\lambda, x)Q_{\pm,n}(\lambda, x)}.$$

Принимая во внимание (2.69), (2.74), (2.70), (2.80), (2.81), и (2.82), получаем

$$\frac{\partial^s}{\partial k_{\pm}^s} \kappa_{\pm,n}(\lambda, x) \in L^2(\infty), \quad s \leq m - 1, \quad \forall x \in \mathcal{K}.$$

Далее, из (2.69) видно, что функции $u_{\pm,l}(x)$ содержат $q^{(l-2)}(x)$ и производные меньших порядков, то есть их можно продифференцировать как минимум дважды по x при $l \leq n$. Так как функция $\phi_{\pm}(\lambda, x)$ также дважды дифференцируема по x , то это же справедливо и для $U_{\pm,n}(\lambda, x)$ и $\kappa_{\pm}(\lambda, x)$. Так как каждое слагаемое в (2.81) можно продифференцировать дважды, мы заключаем, что все $\kappa_{\pm,j}(x)$, $j \leq n$, в (2.83) дифференцируемы x , так же, как и $\kappa_{\pm,n}(\lambda, x)$.

Далее, при больших λ мы можем разложить k_{\pm} по $\sqrt{\lambda}$ и представить функцию $m_{\pm}(\lambda, x)$, используя (2.83), как $m_{\pm}(\lambda, x) = \pm i\sqrt{\lambda} + \tilde{\kappa}_{\pm}(\lambda, x)$, где

$$\tilde{\kappa}_{\pm}(\lambda, x) = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\kappa}_{\pm,j}(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^j} + \frac{m_{\pm,n}(\lambda, x)}{(2i\sqrt{\lambda})^n}.$$

Здесь $\tilde{\kappa}_{\pm,j}(x)$ — это некоторые другие коэффициенты, но они также зависят от потенциала и его производных вплоть до $n - 1$ -й, то есть дифференцируемы один раз по x вместе с $\tilde{\kappa}_{\pm,n}(\lambda, x)$. Более того, функция $m_{\pm,n}(\lambda, x)$ удовлетворяет такой же оценке, как (2.79). С другой стороны, функция $\tilde{\kappa}_{\pm}(\lambda, x)$ удовлетворяет уравнениям Рикатти

$$\tilde{\kappa}'_{\pm}(\lambda, x) \pm 2i\sqrt{\lambda}\kappa_{\pm}(\lambda, x) + \kappa_{\pm}^2(\lambda, x) - q(x) = 0,$$

и, следовательно, $\tilde{\kappa}_{+,l}(x) = \tilde{\kappa}_{-,l}(x) = m_l(x)$, где коэффициенты $m_l(x)$ определены формулой (2.78). \square

Следствие 2.4. Пусть $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ с $n \geq 1$ и $m \geq 1$. Тогда для любого $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{K}$ и достаточно большого $\lambda > \bar{c}$ функция

$$f_{\pm,n}(\lambda, x) := k_{\pm}^n \left(\overline{m_{\pm}(\lambda, x)} - m_{\mp}(\lambda, x) \right)$$

является $m - 1$ раз дифференцируемой по k_{\pm} , причем

$$\frac{\partial^s}{\partial k_{\pm}^s} f_{\pm,n}(\lambda, x) \in L^2(\infty), \quad 0 \leq s \leq m - 1.$$

Утверждение теоремы 2.4 следует теперь непосредственно из формул (2.27), (2.12), (2.76), леммы 2.12, и следствия 2.4. \square

2.4. Выводы.

Основные результаты этого раздела опубликованы в работах [61], [9]. В разделе полностью решена прямая и обратная задача рассеяния для одномерного оператора Шрёдингера на всей оси в классе потенциалов типа ступеньки, имеющих заданную гладкость и заданный момент возмущения. В рамках решения этой задачи, получены следующие результаты:

1. Получены оценки на производные всех порядков для ядер операторов преобразования;
2. Предложено универсальное (т. е. одинаковое для любой гладкости и любого момента возмущений, начиная с первого) описание характеристических аналитических свойств данных рассеяния, при этом получены новые оценки на поведение данных рассеяния на краю непрерывного спектра оператора;
3. Выведено уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко в случае первого суммируемого момента возмущений, и описаны характеристические свойства его ядра в зависимости от класса, которому принадлежит потенциал потенциала. Тем самым, полностью решена прямая задача рассеяния;
4. В рамках решения обратной задачи рассеяния доказана однозначная разрешимость правого и левого уравнений Марченко, при этом получены необходимые оценки на их решения. По этим решениям восстановлены два потенциала, один из которых убывает требуемым образом на одной из полуосей, а другой - на противоположной. Доказано, что эти две функции совпадают, и имеют гладкость требуемого класса. Кроме того, введено более общее, чем требуется для задач с первым конечным моментом, условие на ядра уравнений ГЛМ, при котором восстановленные потенциалы сходятся к своим фоновым константам в L^1 , и при этом

справедлива теорема единственности.

5. Максимально широкий класс, исследованный в разделе — это потенциалы из $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, имеющие первый суммируемый момент возмущений, обратная задача для таких потенциалов ранее не исследовалась.
6. Получены улучшенные и строго доказаны существующие оценки на скорость убывания коэффициентов отражения на бесконечности в зависимости от гладкости потенциала типа ступеньки.

РАЗДЕЛ 3

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С
НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ТИПА СТУПЕНЬКИ

В этой главе метод обратной задачи рассеяния описывается в применении к решению задачи Коши для уравнения Кортевега де Фриза

$$q_t(x, t) = -q_{xxx}(x, t) + 6qq_x(x, t) \quad (3.1)$$

с начальными данными $q(x, 0) = q(x)$ типа ступеньки класса $\mathcal{L}_{m_0}^{n_0}(c_+, c_-)$. Мы покажем, что такая задача имеет единственное решение при любом $m_0 \geq 3$ и $n_0 \geq m_0 + 3$. При этом будет доказано существование классического (имеющего 3 производных по x и одну по t) решения, которое при всех значениях времени стремится к фоновым c_{\pm} при $x \rightarrow \pm\infty$ со скоростью, зависящей от величины начального момента (но с меньшей, чем начальный момент, то есть о решении в классе речь не идет).

Для простоты изложения в этой и следующей главах мы ограничимся начальными данными типа ступеньки, соответствующими волне сжатия:

$$q(x) = q(x, 0) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{при } x \rightarrow +\infty, \\ -c^2, & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.2)$$

где $c \in \mathbb{R}$. Нам также будет удобно изменить обозначения первой главы таким образом, что все спектральные объекты, связанные с правой полуосью, т. е. локальный спектральный параметр, правые решение Йоста, ядро оператора преобразования, коэффициенты прохождения и отражения, и соответствующее ядро правого оператора преобразования не будут иметь индекса $+$, то есть $k = k_+$, $R(\lambda) = R_+(\lambda)$ и так далее, а спектральные объекты, относящиеся к левой полуоси вместо индекса $-$ будут иметь индекс 1 , т.е. $k_1 = k_-$ и т.п. Кроме того, набор спектральных данных, отвечающих начальному профилю, мы будем обозначать через $\mathcal{S}_{m_0}^{n_0}(0)$ (где ноль соответствует начальному моменту времени $t = 0$).

3.1. Пара Лакса и эволюция данных рассеяния.

Напомним сперва хорошо известные общие факты, составляющие основу МОЗР. Пусть $v(x, t)$ — это классическое, т. е. имеющее три производных по x и одну по t решение уравнения КдФ. Введем операторы Лакса для уравнения Кортевега-де Фриза:

$$L_v(t) = -\partial_x^2 + v(x, t), \quad P_v(t) = -4\partial_x^3 + 6v(x, t)\partial_x + 3v_x(x, t).$$

Как известно, уравнение КдФ эквивалентно операторному уравнению Лакса

$$\partial_t L_v(t) = [P_v(t), L_v(t)],$$

рассматриваемому в пространстве $H^5(\mathbb{R})$. Прямым следствием этого факта является следующая

Лемма 3.1. ([81]) Пусть $v(x, t)$ — это произвольная ограниченная в \mathbb{R} трижды дифференцируемая по x и один раз по t функция, и пусть $L_v(t)$ и $P_v(t)$ — это дифференциальные операции (3.3) и (3.4). Если функция $u(\lambda, x, t)$ удовлетворяет уравнению $L_v(t)u = \lambda u$, то

$$(L_v(t) - \lambda)(u_t - P_v(t)u) = -(v_t + v_{xxx} - 6vv_x)u.$$

Следующим следствием существования пары Лакса у уравнения КдФ является

Лемма 3.2. [30] Пусть $v(x, t)$ — классическое решение КдФ. Тогда

- система дифференциальных уравнений

$$L_v(t)u = \lambda u, \tag{3.3}$$

$$u_t = P_v(t)u \tag{3.4}$$

имеет единственное решение $u(\lambda, x, t)$ при любых начальных условиях $u(\lambda, 0, 0) = a_0(\lambda)$ и $u_x(\lambda, 0, 0) = b_0(\lambda)$. Если a_0 и b_0 непрерывны по λ , то решение тоже непрерывно.

- если u_1 и u_2 это два решения системы (3.3), (3.4), то их вронскиан $W(u_1, u_2)$ не зависит ни от x ни от t .

Далее, пусть $c(\lambda, x, t) + m_{\pm}(\lambda, t)s(\lambda, x, t)$ это пара решений Вейля уравнения (3.3), где $m_{\pm}(\lambda, t)$ это функции Вейля оператора $L_v(t)$. Справедлива

Лемма 3.3. ([58]) Пусть

$$\alpha_{\pm}(\lambda, t) = \exp \left(\int_0^t \left(2(v(0, s) + 2\lambda)m_{\pm}(\lambda, s) - v_x(0, s) \right) ds \right). \quad (3.5)$$

Тогда функции $u_{\pm}(\lambda, x, t) = \alpha_{\pm}(\lambda, t)(c(\lambda, x, t) + m_{\pm}(\lambda, t)s(\lambda, x, t))$, являются решением системы (3.3), (3.4).

Из этой леммы мы, в частности, заключаем, что если $v(x, t) \equiv 0$, то есть решение уравнения КдФ тождественный ноль, то функция $u(\lambda, x, t) = e^{ikx+4ik^3t}$ является решением системы (3.3), (3.4) с $v = 0$. Если же $v_1(x, t) \equiv -c^2$ (а это тоже решение КдФ), то функция $u_1(\lambda, x, t) = e^{-ik_1x-4ik_1^3t+6ic^2k_1t}$ является решением той же системы с $v = v_1 = -c^2$. При этом функциями (3.5) служат функции

$$\alpha(\lambda, t) = e^{4ik^3t}, \quad \alpha_1(\lambda, t) = e^{-4ik_1^3t+6ic^2k_1t}. \quad (3.6)$$

Предположим теперь, что существует классическое решение $q(x, t)$ задачи Коши для уравнения (3.1) с начальными данными $q(x) \in \mathcal{L}_{m_0}^{n_0}(0, -c^2)$, и что это решение имеет первый суммируемый момент возмущений, то есть $q(\cdot, t) \in \mathcal{L}_1^3(0, -c^2)$. Пусть $L_q(t)$ и $P_q(t)$ — это соответствующие операторы пары Лакса. Тогда при каждом t можно построить решения Йоста уравнения Шрёдингера $L_q(t)\phi = \lambda\phi$ с потенциалом, зависящим от параметра t :

$$\begin{aligned} \phi(\lambda, x, t) &= e^{ikx} + \int_x^{+\infty} K(x, y, t)e^{iky} dy, \\ \phi_1(\lambda, x, t) &= e^{-ik_1x} + \int_{-\infty}^x K_1(x, y, t)e^{-ik_1y} dy. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Согласно лемме 3.1 функции $\phi_t - P_q(t)\phi$ и $\phi_{1,t} - P_q(t)\phi_1$ тоже являются решениями уравнения $L_q(t)\phi = \lambda\phi$, а, значит, представляются в виде

линейных комбинаций решений Йоста и их сопряженных.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - P_q(t) \right) \phi(\lambda, x, t) &= \beta(\lambda, t)\phi(\lambda, x, t) + \gamma(\lambda, t)\overline{\phi(\lambda, x, t)}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - P_q(t) \right) \phi_1(\lambda, x, t) &= \beta_1(\lambda, t)\phi_1(\lambda, x, t) + \gamma_1(\lambda, t)\overline{\phi_1(\lambda, x, t)}. \end{aligned}$$

Учитывая асимптотическое поведение решений Йоста при $x \rightarrow \pm\infty$ мы получаем $\gamma(\lambda, t) = \gamma_1(\lambda, t) = 0$, $\beta(\lambda, t) = -4ik^3$, $\beta_1(\lambda, t) = 4ik_1^3 - 6ic^2k_1$. Используя теперь асимптотическое поведение решений Йоста на соответствующих полуосях, и свойства "фоновых" решений $u(\lambda, x, t) = \alpha(\lambda, t)e^{ikx}$ и $u_1(\lambda, x, t) = \alpha_1(\lambda, t)e^{-ik_1x}$, мы заключаем, что функции

$$\hat{\phi}(\lambda, x, t) := \alpha(\lambda, t)\phi(\lambda, x, t) \quad \text{и} \quad \hat{\phi}_1(\lambda, x, t) := \alpha_1(\lambda, t)\phi_1(\lambda, x, t)$$

являются решениями системы (3.3) (3.4) при $v = q$. Их вронскиан не зависит от x и t . Сопряженные к ним функции также решают данную систему. Этим свойством мы воспользуемся при выводе формул, описывающих эволюцию данных рассеяния, которые вводятся стандартным образом:

$$\begin{aligned} T(\lambda, t)\phi_1(\lambda, x, t) &= \overline{\phi(\lambda, x, t)} + R(\lambda, t)\phi(\lambda, x, t), \quad k \in \mathbb{R}, \\ T_1(\lambda, t)\phi(\lambda, x, t) &= \overline{\phi_1(\lambda, x, t)} + R_1(\lambda, t)\phi_1(\lambda, x, t), \quad k_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Соответственно, нормировочные константы задаются формулами

$$\gamma_j^\pm(t) := \left(\int_{\mathbb{R}} \phi_\pm^2(\lambda_j, x, t) dx \right)^{-1}.$$

Отсюда легко можно вывести динамику коэффициентов матрицы рассеяния. Так как $\alpha(\lambda, 0) = \alpha_1(\lambda, 0) = 1$, то, прежде всего, мы устанавливаем эволюцию вронскиана:

$$\begin{aligned} W(\lambda, t) &= \mathbf{W} \left(\hat{\phi}_1(\lambda, \cdot, t)\alpha_1^{-1}(\lambda, t), \hat{\phi}(\lambda, \cdot, t)\alpha^{-1}(\lambda, t) \right) \\ &= (\alpha(\lambda, t)\alpha_1(\lambda, t))^{-1} W(\lambda, 0). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} T(\lambda, t) &= 2ikW^{-1}(\lambda, t) = T(\lambda, 0)\alpha(\lambda, t)\alpha_1(\lambda, t), \\ T_1(\lambda, t) &= T_1(\lambda, 0)\alpha(\lambda, t)\alpha_1(\lambda, t), \end{aligned}$$

и, аналогично, с использованием (2.27), имеем

$$R(\lambda, t) = \alpha^2(\lambda, t)R(\lambda, 0); \quad R_1(\lambda, t) = \alpha_1^2(\lambda, t)R_1(\lambda, 0). \quad (3.10)$$

Так как $\alpha(\lambda_j, t)\alpha_1(\lambda_j, t) \neq 0$ при всех t , то формула (3.9) показывает, что дискретный спектр не зависит от времени. Далее, так как оператор $P_q(t)$ является кососимметричным, а функции $\alpha(\lambda_j, t)$ и $\alpha_1(\lambda_j, t)$ вещественны, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\lambda_j, x, t)^2 dx &= 2 \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\lambda_j, x, t) \partial_t \hat{\phi}(\lambda_j, x, t) dx = \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\lambda_j, x, t) P_q(t) \hat{\phi}(\lambda_j, x, t) dx = 0, \end{aligned}$$

и то же самое верно для $\hat{\phi}_1(\lambda_j, x, t)$. Отсюда

$$\gamma_j(t) = \gamma_j(0)\alpha^2(\lambda_j, t), \quad \gamma_{1,j}(t) = \gamma_{1,j}(0)\alpha_1^2(\lambda_j, t). \quad (3.11)$$

Кроме того, так как $\phi(\lambda, x, t) \in \mathbb{R}$ при $\lambda \in [-c^2, 0] \pm i0$, то эволюция вронскиана решений Йоста (3.7) на однократном спектре описывается формулой

$$|\mathbf{W}(\phi_1(\lambda, x, t), \phi(\lambda, x, t))|^2 = \alpha^{-2}(\lambda, t) |W(\lambda, 0)|^2.$$

Вспоминая (3.6), и полагая $R(\lambda) = R(\lambda, 0)$, $R_1(\lambda) = R_1(\lambda, 0)$, $T(\lambda) = T(\lambda, 0)$, $T_1(\lambda) = T_1(\lambda, 0)$, $\gamma_j = \gamma_j(0)$, мы приходим к известным ([36]) формулам, описывающим эволюцию данных рассеяния в задаче Коши с начальными данными типа ступеньки:

$$R(\lambda, t) = R(\lambda)e^{8ik^3t}, \quad R_1(\lambda, t) = R_1(\lambda)e^{-8ik_1^3t+12ic^2k_1t}, \quad (3.12)$$

$$T(\lambda, t) = T(\lambda)e^{4ik^3t-4ik_1^3t+6ic^2k_1t}, \quad T_1(\lambda, t) = T_1(\lambda)e^{4ik^3t-4ik_1^3t+6ic^2k_1t},$$

$$\gamma_j(t) = \gamma_j e^{8\kappa_j^3t}, \quad \gamma_{1,j}(t) = \gamma_{1,j} e^{-(8\kappa_{1,j}^3+12c^2\kappa_{1,j})t}. \quad (3.13)$$

Кроме того, на однократном спектре

$$|T_1(\lambda, t)|^2 = |T_1(\lambda)|^2 e^{8ik^3t}, \quad \text{при } \lambda \in [-c^2, 0] \pm i0. \quad (3.14)$$

Тем самым, зависимость от времени функций (2.34) будет следующей:

$$\begin{aligned}
F(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R(\lambda) e^{8ik^3t} e^{ikx} dk + \frac{1}{4\pi} \int_{-c^2}^0 |T_1(\lambda)|^2 k_1^{-1} e^{8ik^3t} e^{ikx} d\lambda + \\
&+ \sum_{j=1}^p \gamma_j e^{8\kappa_j^3 t} e^{-\kappa_j x}, \\
F_1(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R_1(\lambda) e^{-8ik_1^3 t + 12ic^2 k_1 t} e^{-ik_1 x} dk_1 + \sum_{j=1}^p \gamma_{1,j} e^{-(8\kappa_{1,j}^3 + 12c^2 \kappa_{1,j})t} e^{\kappa_{1,j} x}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

3.2. Обоснование метода обратной задачи рассеяния

Как уже обсуждалось в разделе 1, обоснованное применение метода обратной задачи рассеяния требует проверки того, что полученный по формулам (3.12)-(3.13) набор

$$\mathcal{S}(t) = \{R(\lambda, t), T(\lambda, t), k \in \mathbb{R}; R_1(\lambda, t), T_1(\lambda, t), k_1 \in \mathbb{R}; \lambda_j, \gamma_j(t), \gamma_{1,j}(t)\}$$

действительно является набором спектральных данных $\mathcal{S}_m^n(t)$ хотя бы для каких-то $m \geq 0$ и $n \geq 3$, возможно, меньших, чем начальные параметры m_0 и n_0 . Тем самым, следует проверить выполнение свойств **I–IV** теоремы 2.1. Это позволит нам гарантировать однозначную разрешимость уравнений ГЛМ:

$$\begin{aligned}
K(x, y, t) + F(x + y, t) + \int_x^{+\infty} K(x, s, t) F_{\pm}(s, y, t) ds &= 0, \quad x < y, \\
K_1(x, y, t) + F_1(x + y, t) + \int_{-\infty}^x K_1(x, s, t) F_1(s + y, t) ds &= 0, \quad x > y,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

и, в свою очередь, равенство потенциалов $q(x, t) \equiv q_1(x, t)$, определенных формулами

$$q(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x, t), \quad q_1(x, t) = 2 \frac{d}{dx} K_1(x, x, t) - c^2, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.17}$$

и нужный характер их убывания к своим асимптотам. Проверим прежде всего выполнение условий, описываемых леммой 2.4. Свойство **I. (а)** вы-

текает из легко проверяемого свойства

$$\alpha(\lambda + i0, t) = \overline{\alpha(\lambda - i0, t)}, \quad \alpha_1(\lambda + i0, t) = \overline{\alpha_1(\lambda - i0, t)}, \quad \lambda \in [-c^2, \infty), \quad (3.18)$$

$$\alpha(\lambda - i0, t) = \alpha^{-1}(\lambda + i0, t), \quad \alpha_1(\lambda - i0, t) = \alpha_1^{-1}(\lambda + i0, t), \quad \lambda \in [0, \infty).$$

Далее, так как $\alpha(\lambda + i0, t) = \alpha(\lambda - i0, t) \in \mathbb{R}$ при $\lambda \in [-c^2, 0]$, то **I. (b)** следует из (3.9), (3.10) и (3.18). При $\lambda \in [0, \infty)$ имеем $|\alpha(\lambda, t)| = |\alpha_1(\lambda, t)| = 1$, отсюда следует, что модули всех элементов матрицы рассеяния не зависят от t на двукратном спектре, что обосновывает **I. (c)**. Свойство **I. (d)** вытекает из (3.18). Наконец, при $k \rightarrow \infty$

$$\log(\alpha(\lambda, t)\alpha_1(\lambda, t)) = 4i(k^3 - k_1^3)t + 6c^2ik_1t = -4i\frac{3kc^2}{2}t + 6c^2ikt + O\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(\frac{1}{k}\right),$$

$\alpha(\lambda, t)\alpha_1(\lambda, t) = 1 + O(k^{-1})$, что доказывает асимптотическое поведение **I. (e)** для $T(\lambda, t)$ и $T_1(\lambda, t)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, равно как и для коэффициентов отражения.

Чтобы проверить свойства (i), (ii) леммы 2.3, входящие в характеристическое свойство **II (a)** леммы 2.4, заметим, что функции $\alpha(\lambda, t)$ и $\alpha_1(\lambda, t)$ являются аналитическими в $\mathbb{C} \setminus [-c^2, \infty)$, непрерывными вплоть до границы. Это доказывает (i). Для проверки свойства (ii) мы используем формулу

$$\frac{\partial W(\lambda, t)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_j} = (\alpha(\lambda_j, t)\alpha_1(\lambda_j, t))^{-1} \frac{dW(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_j},$$

справедливую в силу того, что $W(\lambda_j) = 0$. Это вместе с (3.11) дает зависимость от времени (2.25) и доказывает **II (a)**. Свойство **II (b)** следует из того, что $\alpha(-c^2, t)\alpha_1(-c^2, t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Свойство **III** очевидно.

Основную трудность в решении данной задачи представляет проверка свойства **IV**. Нашей задачей, помимо непосредственно проверки, является получение оптимальных констант m и n , характеризующих класс решения задачи Коши. Мы предполагаем, что $|t| \leq \mathcal{T}$, где $\mathcal{T} > 0$ это произвольно большая наперед заданная величина. Так как убывание коэффициентов отражения, описанное в теореме 2.4, сохраняется в силу эволюции, то дифференцируемость ядер $F(x, t)$ $F_1(x, t)$ по x сохраняется. Вместе с

тем, эволюция может существенно поменять характер убывания этих ядер на бесконечности. Нам требуется описать поведение $F(x, t)$ при $x \rightarrow +\infty$ и $F_1(x, t)$ при $x \rightarrow -\infty$. Слагаемые, отвечающие дискретному спектру, убывают экспоненциально, и не влияют на поведение ядер в целом. Рассмотрим сперва правое ядро $F(x, t)$, и обозначим его интегральные слагаемые через $F_R(x, t)$ и $F_T(x, t)$. Перепишем $F_T(x, t)$ в виде

$$F_T(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-c^2}^0 |T_1(\lambda)|^2 k_1^{-1} e^{8ik^3 t} e^{ikx} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_c^0 P(h)\psi(h)e^{-hx} dh,$$

где $\sqrt{\lambda} = k = ih$, $\psi(h) = e^{8h^3 t}$ и

$$P(h) = \frac{ih \mathbf{W}(\phi_1(\lambda, \cdot, 0), \overline{\phi_1(\lambda, \cdot, 0)})}{\mathbf{W}(\phi_1(\lambda, \cdot, 0), \phi(\lambda, \cdot, 0)) \mathbf{W}(\phi_1(\lambda, \cdot, 0), \phi(\lambda, \cdot, 0))}, \quad (3.19)$$

Пользуясь симметрией \mathbf{I} , (\mathbf{a}) , представим также $F_R(x, t)$ в виде

$$F_R(x, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} R(k)\psi(-ik)e^{ikx} dk,$$

где $R(k) := R(\lambda(k), 0)$, $k \geq 0$. Заметим, что $P(h)$ не зависит от t и $P(h) < 0$ при $h \in (0, c)$. Так как значение времени фиксировано, то мы опускаем его в обозначениях функции $\psi(h)$. Кроме того, мы используем короткое обозначение $\psi_s^{(j)} = \frac{\partial^j}{\partial s^j} \psi(h(s), t)$, $\psi'_s = \frac{\partial}{\partial s} \psi(h(s), t)$. Очевидно, что

$$\psi_h^{(j)}(0) = (i)^j \psi_k^{(j)}(0) \in \mathbb{R}. \quad (3.20)$$

Проинтегрируем по частям функцию $F_R(x, t)$:

$$\operatorname{Re} \int_0^{\infty} R(k)\psi(-ik) e^{ikx} dk = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{ix} R(0)\psi(0) + \frac{1}{(ix)^2} (R'_k \psi + R\psi'_k)(0) + \dots \right. \\ \left. + (-1)^m \frac{1}{(ix)^m} \frac{\partial^{m-1}(R\psi)}{\partial k^{m-1}}(0) + (-1)^m \frac{1}{(ix)^m} \int_0^{\infty} \frac{\partial^m(R\psi)}{\partial k^m} e^{ikx} dk \right\}.$$

Функцию $F_T(x, t)$ представим в виде суммы двух интегралов $\int_0^{\frac{c}{2}} \dots$ и $\int_{\frac{c}{2}}^c \dots$, и проинтегрируем по частям первый из них. Заметим, что такое разбиение требуется по двум причинам. С одной стороны - у $\int_{\frac{c}{2}}^c \dots$ априорно имеется оценка $O(e^{-\frac{c}{2}x})$, которую можно дифференцировать по x , и которая достаточна для наших целей. С другой стороны - у левого решения

Йоста $\phi_1(\lambda, x)$ нет гладких производных по параметру k , либо λ в точке $k = c$, а, соответственно, не дифференцируем по k в этой точке и вронскиан, а, следовательно, и $|T_1(\lambda)|^2$. Поэтому мы используем представление

$$\int_c^0 P(h)\psi(h)e^{-hx} dh = - \left\{ \frac{1}{x}P(0)\psi(0) + \frac{1}{x^2}(P'_h(0)\psi(0) + P(0)\psi'_h(0)) + \dots + \frac{1}{x^m} \frac{\partial^{m-1}(P\psi)}{\partial h^{m-1}}(0) \right\} + O(e^{-\frac{\varepsilon}{2}x}) + \frac{1}{x^m} \int_{c/2}^0 \frac{\partial^m(P\psi)}{\partial h^m} e^{-hx} dh,$$

где в слагаемое $O(e^{-\frac{\varepsilon}{2}x})$ вошел как второй интеграл, так и внеинтегральные члены от первого, соответствующие точке $h = \frac{c}{2}$. Наша цель - доказать, что внеинтегральные члены при степенях x^{-j} соответствующие точкам $h = 0$ и $k = 0$ в этих двух формулах взаимно сокращаются, то есть имеет место равенство

$$\lim_{k \rightarrow +0} \operatorname{Re} \left\{ (i)^{j+1} \frac{\partial^j(R\psi)}{\partial k^j}(k) \right\} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\partial^j(P\psi)}{\partial h^j}(h), \quad (3.21)$$

где предел в правой части берется со стороны спектра кратности 1, а в левой - по верхнему берегу разреза по спектру кратности 2. Так как $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, то в силу (3.20)

$$\frac{\partial^j(P\psi)}{\partial h^j}(+0) = \sum_{s=0}^j C_j^s P_h^{(j-s)}(+0) (i)^s \psi_k^{(s)}(0).$$

Здесь C_j^s это биномиальные коэффициенты. Сравнивая эту формулу с формулой

$$\operatorname{Re} \left\{ (i)^{j+1} \frac{\partial^j(R\psi)}{\partial k^j}(+0) \right\} = \sum_{s=0}^j C_j^s (i)^{j+1-s} R_k^{(j-s)}(+0) (i)^s \psi_k^{(s)}(0),$$

и используя свойство $(i)^s \psi_k^{(s)}(0) \in \mathbb{R}$, мы видим, что равенство (3.21) эквивалентно равенству

$$\lim_{k \rightarrow +0} \operatorname{Re} \left\{ i^{l+1} R_k^{(l)}(k) \right\} = \lim_{h \rightarrow +0} P_h^{(l)}(h). \quad (3.22)$$

Чтобы доказать эту формулу, напомним что функции $\phi_1(x, \lambda, 0)$ и $\overline{\phi_1(x, \lambda, 0)}$ имеют m_0 производных по k_1 при $k_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то есть они

m_0 раз дифференцируемы по k в окрестности точки $k = 0$. Функция $\phi(x, \lambda, 0)$ имеет $m_0 - 1$ производных по k при $k = 0$. Тем самым, функция $P_1(k) = P(-ik)$, определенная формулой (3.19) как функция от k на правой стороне вертикального разреза вдоль отрезка $[0, ic]$, может быть доопределена по той же формуле и справа от точки $k = 0$, причем она будет иметь $m_0 - 1$ непрерывных производных в точке $k = 0$, то есть

$$\lim_{k \rightarrow +0} i^l \frac{d^{(l)} P_1(k)}{dk^l} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{d^l P}{dh^l}.$$

Рассмотрим теперь функцию P_1 справа от точки $k = 0$. Мы видим, что

$$P_1(k) = \frac{i \mathbf{W}(\phi_1, \bar{\phi}_1)(-2ik)}{2 \mathbf{W}(\phi_1, \phi) \mathbf{W}(\bar{\phi}_1, \phi)} = \frac{i \mathbf{W}(\phi_1, \bar{\phi}_1) \mathbf{W}(\phi, \bar{\phi})}{2 \mathbf{W}(\phi_1, \phi) \mathbf{W}(\bar{\phi}_1, \phi)}.$$

Подставляя в числитель этой дроби разложение

$$\phi = \frac{\mathbf{W}(\phi, \bar{\phi}_1)}{\mathbf{W}(\phi_1, \bar{\phi}_1)} \phi_1 - \frac{\mathbf{W}(\phi, \phi_1)}{\mathbf{W}(\phi_1, \phi_1)} \bar{\phi}_1,$$

получаем

$$P_1(k) = \frac{i}{2} \left(-\frac{\mathbf{W}(\phi_1, \bar{\phi})}{\mathbf{W}(\phi_1, \phi)} + \frac{\mathbf{W}(\bar{\phi}_1, \bar{\phi})}{\mathbf{W}(\bar{\phi}_1, \phi)} \right) = \frac{i}{2} \left(-\frac{V(k)}{W(k)} + \frac{\overline{W(k)}}{V(k)} \right), \quad (3.23)$$

где обозначено

$$W(k) := \mathbf{W}(\phi_1, \phi), \quad V(k) := \mathbf{W}(\phi_1, \bar{\phi}).$$

Заметим, что такое представление возможно только при $k \geq 0$, так как функция $\overline{\phi(\lambda, x)}$, где $\phi(\lambda, x) = \phi(\lambda, x, 0)$ не продолжима по k на отрезок $[0, ic]$.

Лемма 3.4. Имеют место равенства

$$V_k^{(s)}(0) = W_k^{(s)}(0)(-1)^s, \quad s = 0, 1, \dots, m_0 - 1. \quad (3.24)$$

Доказательство. Обозначим через $f_i(z)$ любые функции такие, что $f_i \in \mathcal{C}^{m_0-1}[0, \varepsilon)$. Так как

$$\phi(\lambda, x) + \overline{\phi(\lambda, x)} = 2 \cos(kx) + 2 \int_x^\infty K(x, y) \cos(ky) dy,$$

то

$$\phi(\lambda, 0) + \bar{\phi}(\lambda, 0) = f_1(k^2), \quad \frac{\partial}{\partial x}(\phi(\lambda, 0) + \bar{\phi}(\lambda, 0)) = f_2(k^2).$$

Кроме того, очевидно, что $\phi_1(\lambda, 0) = f_3(k^2)$ и $\frac{\partial}{\partial x}\phi_1(\lambda, 0) = f_4(k^2)$. С другой стороны,

$$(\phi - \bar{\phi})(\lambda, x) = 2ik \left(\frac{\sin kx}{k} + \int_x^\infty K(x, y) \frac{\sin ky}{k} \right),$$

то есть

$$\phi(\lambda, 0) - \bar{\phi}(\lambda, 0) = kf_5(k^2), \quad \frac{\partial}{\partial x}(\phi(\lambda, 0) - \bar{\phi}(\lambda, 0)) = kf_6(k^2).$$

Таким образом,

$$V(k) + W(k) = f_7(k^2), \quad V(k) - W(k) = kf_8(k^2).$$

Из этого следует,

$$W_k^{(2s)}(k) - V_k^{(2s)}(k) = kf_{2s+9}(k^2), \quad W_k^{(2s+1)}(k) + V^{(2s+1)}(k) = kf_{2s+10}(k^2),$$

что и доказывает равенство (3.24). \square

Обозначим теперь $w_s := \lim_{k \rightarrow +0} \frac{d^s W(k)}{dk^s}$ и пусть

$$W_{m_0-1}(k) = w_0 + w_1 k + \frac{w_2}{2!} k^2 + \dots + \frac{w_{m_0-1}}{(m_0-1)!} k^{m_0-1},$$

это полином Тейлора для $W(k)$. Из леммы 3.4 следует, что

$$V(k) = W_{m_0-1}(-k) + o(k^{m_0-1}).$$

Напомним теперь, что по определению $R(k) = -\frac{V(k)}{W(k)}$. Кроме того, точка $k = 0$ — это внутренняя точка непрерывного спектра, т. е. $W(0) \neq 0$.

Отсюда следует, что

$$R^{-1}(k) = R_{m_0-1}(-k) + o(k^{m_0-1}),$$

где $R_{m_0-1}(k)$ это полином Тейлора степени $m_0 - 1$ для $R(k)$. Из формулы (3.23) мы получаем

$$P_1(k) = \frac{i}{2} \left(R_{m_0-1}(k) - \overline{R_{m_0-1}(-k)} \right) + o(k^{m_0-1}),$$

откуда и следует формула (3.22). Выясним теперь, сколько раз мы можем использовать процедуру интегрирования по частям в слагаемых $F_T(x, t)$ и $F_R(x, t)$.

Очевидно, что если начальные данные принадлежат классу $\mathcal{L}_s^l(0, -c^2)$, то первый из вышеописанных интегралов в $F_T(x, t)$ можно проинтегрировать $s - 1$ раз и получить

$$F_T(x, t) = A(x, t) + O(e^{-\frac{c}{2}x}) + \frac{1}{x^{s-1}} \int_c^0 \frac{\partial^{s-1}(P\psi)}{\partial h^{s-1}} e^{-hx} dh,$$

где $A(x, t)$ — это внеинтегральные члены, относящиеся к точке $h = 0$, которые взаимно сокращаются с соответствующими внеинтегральными членами из $F_R(x, t)$. Так как у функции P существует только $s - 1$ производная по h , то на этом процедура прекращается. Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, можно сколько угодно раз дифференцировать по x .

При достаточно большом количестве производных l у начальных данных задачи, функцию $F_R(x, t)$ тоже можно проинтегрировать по частям $s - 1$ раз. В самом деле, при каждом интегрировании по частям перед членом $R(k)$ возникает новый множитель $3ik^2t$, возникающий при дифференцировании функции $\psi(-ik) = e^{ik^3t}$. Подинтегральная функция должна при этом оставаться суммируемой в $L_2(\mathbb{R}_+)$. Тем самым, должно быть выполнено условие $k^{2s-1}R(k) \in L_2(\mathbb{R}_+)$. На самом деле, следует потребовать выполнения более жесткого условия $k^{2s+2}R(k) \in L_2(\mathbb{R}_+)$, так как мы хотим получить классическое (с тремя производными) решение уравнения КдФ, а, значит, ядро $F_R(x, t)$ следует еще как минимум 4 раза продифференцировать по x . Вспоминая теперь теорему 2.4, мы заключаем, что должно быть выполнено некоторое соотношение между желаемым числом интегрирований по частям m и последующих их дифференцирований, и классом, которому принадлежат начальные данные. Результат предыдущих рассмотрений суммирует

Лемма 3.5. Предположим, что $q(\cdot, 0) \in \mathcal{L}_s^l(0, -c^2)$. Пусть $m \leq s - 1$

и пусть l таково, что $l \geq 2m + 3$. Тогда функция $F(x, t)$ при $x \rightarrow +\infty$ допускает представление вида

$$F(x, t) = \frac{D(x, t)}{x^m} + D_1(x, t),$$

$$\frac{\partial^j D(x, t)}{\partial x^j} \in L^2(+\infty), \quad j = 0, \dots, l-2m+1, \quad \frac{\partial^i D_1(x, t)}{\partial x^i} = O(e^{-\frac{\varepsilon}{2}x}), \quad i = 0, 1, \dots$$

равномерно по $t \in [-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$.

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение левого ядра (3.15). Отбросим слагаемые, соответствующие дискретному спектру, которые убывают экспоненциально. При интегрировании по частям здесь не возникает проблем с внеинтегральными членами, но зато последующее дифференцирование левого коэффициента отражения по k_1 порождает сингулярности в точках $k_1 = \pm c$, так как правое решение Йоста, а, значит, и вронскианы, входящие в (2.27), являются функциями локального параметра $\sqrt{k_1 \mp c}$, то есть при дифференцировании возникают особенности вида

$$\frac{\partial^s \mathcal{R}(k_1)}{\partial k_1^s} = O\left(k_1 \mp c\right)^{-\frac{2s-1}{2}}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad k_1 \rightarrow \pm c,$$

где обозначено $\mathcal{R}(k_1) = R_1(\lambda, t)$. Поэтому, используя функции обрезания, мы отделим части, содержащую малые окрестности "плохих" точек, которые потом оценим с помощью специальных функций. Пусть $\varepsilon < \frac{\varepsilon}{8}$ — это малое число. Введем функции

$$B_{\pm}(k_1) := B\left(\frac{k_1 \mp c}{\varepsilon}\right), \quad \text{где } B(\xi) = \begin{cases} (1 - \xi^{2m_0})^{2m_0}, & \text{при } |\xi| \leq 1, \\ 0, & \text{при } |\xi| \geq 1. \end{cases}$$

Функция $B_{\pm}(k_1)$ обращается в 0 вместе со своими $2m_0 - 1$ производными в точках $c_{\pm} - \varepsilon$ и $c_{\pm} + \varepsilon$, кроме того, $B_{\pm}^{(j)}(c_{\pm}) = 0$, $j = 1, \dots, 2m_0 - 1$.

Перепишем интеграл в (3.15) в виде

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} R_1(\lambda) e^{-8ik_1^3 t + 12ic^2 k_1 t} e^{-ik_1 x} dk_1 = \int_{\mathbb{R}} (1 - B_+(k_1) - B_-(k_1)) \mathcal{R}(k_1) e^{-ik_1 x} dk_1 \\
& + \int_{-\varepsilon-c}^{\varepsilon-c} B_-(k_1) \mathcal{R}(k_1) e^{-ik_1 x} dk_1 + \int_{-\varepsilon+c}^{\varepsilon+c} B_+(k_1) \mathcal{R}(k_1) e^{-ik_1 x} dk_1 \\
& = I_1(x, t) + I_2^-(x, t) + I_2^+(x, t). \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Функция $1 - B_+(k_1) - B_-(k_1)$ имеет нули порядка $2m_0 - 1$ в точках c и $-c$ и является бесконечно дифференцируемой, поэтому $I_1(x, t)$ может быть проинтегрирована по частям по предыдущей схеме, с теми же зависимостями между параметрами класса начальных данных и числом интегрирований по частям, как и в лемме 3.5, так как поведение производной $\frac{\partial^m}{\partial k_1^m}(\mathcal{R}(1 - B_+ - B_-))$ при $k_1 \rightarrow \infty$ такое же, как и поведение $\frac{\partial^m \mathcal{R}(k_1)}{\partial k_1^m}$. Перейдем теперь к оценкам интегралов $I_2^\pm(x, t)$. Эти оценки происходят по единой схеме, ограничимся рассмотрением $I_2^+(x, t)$. На отрезке $[-\varepsilon + c, \varepsilon + c]$ разложим функцию $\mathcal{R}(k_1)$ по формуле Тейлора относительно переменной z , где $z^2 = k_1 - c$. Пусть

$$\mathcal{R}(c + z^2) = a_0(t) + a_1(t)z + \dots + a_{m_0-1}(t)z^{m_0-1} + \beta(z, t),$$

где $\beta(z, t) = O(z^{m_0})$ при $z \rightarrow 0$, то есть эта функция может быть продифференцирована $\left[\frac{m_0}{2}\right]$ раз по переменной k_1 в точке $k_1 = c$. Учитывая то, что функция B_+ обращается вместе со своими производными в 0 на концах интервала интегрирования, мы приходим к формуле

$$I_2^+(x, t) = e^{-icx} \sum_{j=0}^{m_0-1} a_j(t) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \zeta^{j/2} B\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}\right) e^{ix\zeta} d\zeta + \frac{h_+(x, t)}{x^{\left[\frac{m_0}{2}\right]}},$$

где функция $h_+(x, t)$ может быть сколько угодно раз продифференцирована по x , причем сама функция и все ее производные принадлежат $L_2(\mathbb{R}_-)$.

Используя формулу $(1 - \xi^{2m}) = (1 - \xi^2)(1 + \xi^2 + \dots + \xi^{2m-2})$ и переходя

к переменной $\xi = \frac{\zeta}{\varepsilon}$, мы приходим к представлению

$$I_2(x, t)e^{-icx} - \frac{h(x, t)}{x^{\lceil \frac{m_0}{2} \rceil}} = \sum_{j=0}^{\lceil \frac{m_0}{2} \rceil} \tilde{a}_{2j}(\varepsilon, t) \int_{-1}^1 \xi^{2j} B(\xi) e^{-i\xi(x\varepsilon)} d\xi \\ + \sum_{j=1}^{2m_0-2+\lceil \frac{m_0}{2} \rceil} \tilde{a}_{2j-1}(\varepsilon, t) \int_{-1}^1 \xi^{\frac{2j-1}{2}} (1-\xi^2)^{2m_0} e^{-i\xi(x\varepsilon)} d\xi.$$

Очевидно, что каждое слагаемое первой суммы может быть проинтегрировано по частям как минимум $2m_0 - 1$ раз, причем все внеинтегральные члены будут равны нулю за счет свойств функции B . Все слагаемые второй суммы, кроме первого, тоже можно проинтегрировать по частям какое то число раз, пока мы не дойдем до интеграла вида (см. [16], формула 3.389)

$$J(x, 2m_0) = \int_{-1}^1 \xi^{\frac{1}{2}} (1-\xi^2)^{2m_0} e^{-i\xi(x\varepsilon)} d\xi \\ = \frac{1}{2} B(\nu, \rho) {}_1F_2\left(\nu, \frac{1}{2}, \nu + \rho, \frac{\mu^2}{4}\right) + \frac{\mu}{2} B\left(\nu + \frac{1}{2}, \rho\right) {}_1F_2\left(\nu + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \nu + \rho + \frac{1}{2}, \frac{\mu^2}{4}\right) \quad (3.26)$$

$$+ i\frac{1}{2} B(\nu, \rho) {}_1F_2\left(\nu, \frac{1}{2}, \nu + \rho, \frac{\mu^2}{4}\right) - \frac{\mu i}{2} B\left(\nu + \frac{1}{2}, \rho\right) {}_1F_2\left(\nu + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \nu + \rho + \frac{1}{2}, \frac{\mu^2}{4}\right), \quad (3.27)$$

где обозначено $\mu = i|x\varepsilon|$, $2\nu - 1 = \frac{1}{2}$, $\rho = 2m_0 + 1$. В формуле (3.26)

$$B(\nu, \rho) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\nu + \rho)}$$

это Бета интеграл Эйлера, $\Gamma(\nu)$ - Гамма функция, а ${}_1F_2(a, b, c, -z)$ - обобщенная гипергеометрическая функция, имеющая при больших $|z|$ асимптотику вида [86], формула 16.11.8:

$${}_1F_2(a, b, c, -z) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)} (H_{1,2}(z) + E_{1,2}(ze^{-\pi i}) + E_{1,2}(ze^{\pi i})), \quad (3.28)$$

где

$$H_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{c-a-1} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b-a-k)\Gamma(c-a-k)} z^{-a-k} \frac{(-1)^k}{k!},$$

$$E_{1,2}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{-\alpha-(1/2)} e^{2z^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (2z^{1/2})^{\alpha-n}, \quad \alpha = a - b - c + \frac{1}{2}, \quad (3.29)$$

и c_n — это некоторые несущественные для нас константы. В формуле (3.26) использованы $a = \nu$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \nu + \rho$, либо $a = \nu + \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \nu + \rho + \frac{1}{2}$, кроме того $\frac{\mu^2}{4} =: -z$ и $\frac{-\mu i}{2} = \sqrt{z} \in \mathbb{R}_+$. Тогда $(ze^{\pm i})^{1/2} \in i\mathbb{R}$, то есть в последних двух слагаемых справа в формуле (3.28) множители, содержащие экспоненты по модулю равны единице. С другой стороны, согласно нашим обозначениям, в формуле (3.29) либо $\alpha = -\rho = -2m_0 - 1$, либо $\alpha = -\rho - 1$, то есть в любом случае, слагаемые, содержащие $E_{1,2}$ функции, с параметрами, использованными в (3.26), допускают оценку вида $\frac{1}{(\varepsilon x)^{m_0+1/2}}(\text{const.} + o(1))$. Поэтому мы можем отбросить эти слагаемые. Объединим первое слагаемое в (3.26) с последним (3.27) (оставшиеся образуют ту же сумму с точностью до множителя i):

$$\frac{1}{2} B(\nu, \rho) {}_1F_2\left(\nu, \frac{1}{2}, \nu + \rho, -z\right) + z^{1/2} B\left(\nu + \frac{1}{2}, \rho\right) {}_1F_2\left(\nu + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \nu + \rho + \frac{1}{2}, -z\right) = A_1 + A_2,$$

$${}_1F_2\left(\nu, \frac{1}{2}, \nu + \rho, -z\right) \sim \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu + \rho)}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{\rho-1} \frac{\Gamma(\nu + k)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \nu - k)\Gamma(\rho - k)} z^{-\nu-k},$$

то есть

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\nu + \rho)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu + \rho)}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{\rho-1} \frac{\Gamma(\nu + k)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \nu - k)\Gamma(\rho - k)} z^{-\nu-k} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Аналогично,

$$A_2 = z^{1/2} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})\Gamma(\rho)}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2} + \rho)} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\nu + \frac{1}{2} + \rho)}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\rho-1} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2} + k)}{\Gamma(\frac{3}{2} - \nu - \frac{1}{2} - k)\Gamma(\rho - k)} z^{-\nu-\frac{1}{2}-k} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Суммируя эти слагаемые, и принимая во внимание, что $\nu = \frac{3}{4}$, получаем

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \sum_{k=0}^{\rho-1} \frac{(-1)^k}{k!} z^{-\nu-k} \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\rho-k)} \left(\frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu-k)} + \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2}+k)}{\Gamma(1-\nu-k)} \right) + \\ &+ O(z^{-\nu-\rho+1}) \sum_{k=0}^{\rho-1} \frac{(-1)^k}{k!} z^{-\nu-k} \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\rho-k)} \left(\frac{\pi}{\sin(\frac{3\pi}{4} + \pi k)} + \frac{\pi}{\sin(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi k)} \right) \\ &+ O(z^{-\nu-\rho+1}) = O(x^{-2m_0+1}). \end{aligned}$$

Итак, эти слагаемые имеют порядок $O(x^{-2m_0+1})$. Так как функции $E_{1,2}(ze^{\pm i\pi})$ имеют такой же порядок, то мы заключаем, что $J(x, 2m_0) = O(x^{-m_0-1/2})$. Далее, так как

$$\frac{d}{dx} J(x, 2m_0) = \frac{1}{i\varepsilon x} \left(J(x, 2m_0) - 4m_0 \int_{-1}^1 \xi^{3/2} (1-\xi^2)^{2m_0-1} e^{-i\xi(x\varepsilon)} d\xi \right),$$

где последний интеграл оценивается через $O(x^{-2}J(x, 2m_0 - 2))$ плюс члены более высокого порядка, то очевидно, что производные от $J(x, 2m_0)$ будут иметь даже более высокие порядки убывания. Тем самым, основной вклад в асимптотику левого ядра дают члены $h_{\pm}(x, t)x^{-[\frac{m_0}{2}]}$ из $I_2^{\pm}(x, t)$. Это означает, что интеграл с бесконечными пределами $I_1(x, t)$ будет интегрироваться по частям тоже $[\frac{m_0}{2}]$ раз, и на последнем шаге поведение его подинтегральной функции на бесконечности будет $k_1^{2[\frac{m_0}{2}]-n_0-1} f(k_1)e^{-ik_1x}$, где $f \in L_2(\infty)$. Каждое последующее дифференцирование по x функции $I_1(x, t)$ будет увеличивать показатель степени на единицу. Для получения классического решения нам нужно произвести не менее 4 дифференцирований. Этим определяется зависимость между начальными параметрами m_0 и n_0 : $m_0 - n_0 - 1 \leq -4$, то есть $n_0 \geq m_0 + 3$. Мы приходим к следующему результату:

Лемма 3.6. Пусть $q(x) \in \mathcal{L}_{m_0}^{n_0}(0, -c^2)$, $n_0 \geq m_0 + 3$. Тогда функция $F_1(x, t)$ при $x \rightarrow -\infty$ допускает оценку вида

$$F_1(x, t) = \frac{H_1(x, t)}{x^{[\frac{m_0}{2}]}} , \quad \text{где } \frac{\partial^j H_1(x, t)}{\partial x^j} \in L_2(-\infty), \quad j = 0, \dots, n_0 - m_0 + 1.$$

Следствием из леммы 3.5 является следующее утверждение:

Пусть $q(x) \in \mathcal{L}_{m_0}^{n_0}$, $n_0 \geq m_0 + 3$. Тогда функция $F(x, t)$ при $x \rightarrow +\infty$ допускает оценку вида

$$F(x, t) = \frac{H(x, t)}{x^{\lfloor \frac{m_0}{2} \rfloor}}, \quad \text{где} \quad \frac{\partial^j H(x, t)}{\partial x^j} \in L_2(+\infty), \quad j = 0, \dots, n_0 - m_0 + 1.$$

Так как $\frac{1}{x} \frac{\partial^j H(x, t)}{\partial x^j} \in L^1(+\infty)$ и $\frac{1}{x} \frac{\partial^j H_1(x, t)}{\partial x^j} \in L^1(-\infty)$, то функции $F_x^{(j)}(x, t)$ и $F_{1,x}^{(j)}(x, t)$ удовлетворяют условию **IV** с $m = \lfloor \frac{m_0}{2} \rfloor - 1$ и $n = n_0 - m_0$. Естественно, мы предполагаем, что $m \geq 1$, то есть $m_0 \geq 4$, чтобы быть в рамках классов, для которых мы решили в главе 2 обратную задачу. Тогда функции (3.17), полученные как решения уравнений (3.16) с ядрами $F(x, t)$ и $F_1(x, t)$, в силу теоремы 2.3 совпадают, $q(x, t) \equiv q_1(x, t) + c^2$, при этом $q(\cdot, t) \in \mathcal{L}_{\lfloor \frac{m_0}{2} \rfloor - 1}^{n_0 - m_0}(0, -c^2)$. Заметим также, что вышеописанные интегрирования по частям и "регуляризации" для функций $F(x, t)$ и $F_1(x, t)$, могут без изменений быть применены и к функциям $\frac{\partial}{\partial t} F(x, t)$ и $\frac{\partial}{\partial t} F_1(x, t)$, при этом происходит потеря гладкости по x на две единицы, то есть

$$\frac{\partial}{\partial t} q(\cdot, t) \in \mathcal{L}_{\lfloor \frac{m_0}{2} \rfloor - 1}^{n_0 - m_0 - 2}(0, -c^2).$$

Применяя теперь к полученной функции $q(x, t)$ процедуру, описанную в [28], на стр. 299-301, мы убеждаемся, что эта функция действительно является решением уравнения КдФ. Мы доказали следующую теорему:

Теорема 3.1. Пусть $q(x) \in \mathcal{L}_{m_0}^{n_0}(0, -c^2)$ при $m_0 \geq 4$ и $n_0 \geq m_0 + 3$. Тогда при всех $|t| < \mathcal{T}$ существует единственное решение $q(x, t)$ задачи Коши для уравнения КдФ с начальными данными $q(x)$ такое, что

$$q(\cdot, t) \in \mathcal{L}_{\lfloor \frac{m_0}{2} \rfloor - 1}^{n_0 - m_0}(0, -c^2).$$

Следствие 3.1. Уравнение КдФ разрешимо в классе функций типа ступеньки с возмущениями шварцевского типа, то есть принадлежащих классу $\mathcal{L}_m^n(0, -c^2)$ при всех $m, n \geq 0$.

Нам остается обсудить вопрос о том, можно ли использовать полученное в разделе 2 ослабленное условие теоремы 2.2 для расширения класса

начальных данных типа ступеньки, при которых еще возможно получение классического решения задачи Коши. Действительно, все вышеописанные проверки можно провести и при $m_0 = 3$ и $n_0 = 6$, и мы получим выполнение условий **I-III**, а также оценки

$$F_x^{(j)}(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}), \quad F_{1,x}^{(j)}(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}_-) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}), \quad j = 0, \dots, 4,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}), \quad \frac{\partial}{\partial t} F_1(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}_-) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

Для применения теоремы 2.2 нам следует найти монотонные мажоранты для функций $|F(x, t)|$ и $|F_1(x, t)|$. Для функции $F(x, t)$ выбор мажоранты очевиден. Действительно, мы уже показали наличие 4 производных у $F(x, t) \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. С другой стороны наличие 6 производных и трех моментов у начальных данных позволяет проинтегрировать по частям дважды, после чего продифференцировать полученную формулу по x , и мы получим, принимая $\psi(h) = e^{ih^3 t}$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, t) = -\frac{1}{2\pi x^2} \left(i \int_{-\infty}^{\infty} k \frac{\partial^2(R\psi)}{\partial k^2} e^{ikx} dk + 2 \int_{c/2}^0 h \frac{\partial^2(P\psi)}{\partial h^2} e^{-hx} dh \right) + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

где в член $O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ вошли в том числе и слагаемые, соответствующие дискретному спектру. При этом $k \frac{\partial^2(R\psi)}{\partial k^2} = O(k^{-2})$ при $k \rightarrow \infty$, а вторые производные R и P непрерывны при наличии третьего момента. Тем самым $x \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$, то есть F удовлетворяет обычному условию **IV** для первого момента, а значит, и ослабленному. Аналогичным образом первый момент будет иметь производная по x от интеграла $I_1(x, t)$ в представлении (3.25). Чтобы найти суммируемые монотонные мажоранты для $I_2^\pm(x, t)$, воспользуемся следующим фактом ([88], следствие на стр. 334):

Лемма 3.7. Пусть g это гладкая вещественнозначная функция на (a, b) и $|g''(k)| \geq 1$ при всех $k \in (a, b)$. Тогда при $y > 0$

$$\left| \int_a^b e^{iyg(k)} \Psi(k) dk \right| \leq \text{const.} \frac{1}{\sqrt{y}} \left[|\Psi(b)| + \int_a^b |\Psi'(k)| dk \right],$$

где const. не зависит от g и y .

Рассмотрим для определенности $I_2^+(x, t)$ из (3.25) и введем обозначения:

$$\tilde{\Psi}(k_1) := R_1(\lambda)B_+(k_1), \quad \tilde{g}(k_1) = k_1 + v(3c^2k_1 - 2k_1^3), \quad v := \frac{4t}{x}.$$

Заметим, что параметр v является малым при $|t| \leq \mathcal{T}$ и $x \rightarrow -\infty$.

Продифференцируем функцию $\hat{g}(k) = \tilde{g}(k_1)$ дважды по параметру $k = \sqrt{k_1^2 - c^2}$ и оценим ее поведение в окрестности точки $k = 0$. Имеем

$$\frac{d\hat{g}}{dk} = \frac{k}{k_1}(1 + v(3c^2k_1 - 6k_1^3)), \quad \frac{d^2\hat{g}}{dk^2} = \frac{1 + v(3c^2k_1 - 6k_1^3)}{k_1} + O(k).$$

Так как в $I_2^+(x, t)$ мы имеем $|k| < C\sqrt{\varepsilon}$ и $k_1 \geq \pm c - \varepsilon$, а параметр v сколь угодно мал, то существует такая константа $0 < \mathcal{K} < \frac{4}{c}$, что $\frac{d^2\hat{g}}{dk^2} > \mathcal{K} > 0$ в области интегрирования. Представим теперь $I_2^+(x, t)$ в виде

$$I_2^+(x, t) = \int_{-\varepsilon+c}^{\varepsilon+c} \tilde{\Psi}(k_1)e^{-ix\tilde{g}(k_1)} dk_1 = \int_{[i\kappa_\varepsilon, 0] \cup [0, \kappa_\varepsilon]} \frac{\tilde{\Psi}(k_1)}{1 + v(3c^2k_1 - 6k_1^3)} \hat{g}'(k) e^{-ix\hat{g}(k)} dk,$$

где $\kappa_\varepsilon = \sqrt{2c\varepsilon + \varepsilon^2}$. Проинтегрируем последний интеграл по частям, беря интеграл от экспоненты. Внеинтегральные члены обращаются в ноль за счет свойств обрезающей функции B_+ . Мы получим

$$I_2^+(x, t) = \frac{1}{ix} \int_{[i\kappa_\varepsilon, 0] \cup [0, \kappa_\varepsilon]} \Psi(k) e^{iyg(k)} dk,$$

где обозначено

$$\Psi(k) := \frac{d}{dk} \frac{R_1(\lambda)B_+(k_1)}{1 + v(3c^2k_1 - 6k_1^3)}, \quad y = -\mathcal{K}x, \quad g(k) = \mathcal{K}^{-1}\hat{g}(k).$$

Напомним теперь, что функция $R_1(\lambda)$ имеет две производные по параметру k в окрестности точки $k_1 = c$, причем вторая производная непрерывна при наличии третьего суммируемого момента начальных данных. Все остальные функции, входящие в $\Psi(k)$, имеют бесконечное число ограниченных производных. Переходя к переменной $\xi = -ik \int_{[i\kappa_\varepsilon, 0]} \dots$ и применяя к обоим интегралам лемму 3.7, мы получаем требуемую мажоранту $|I_2^+(x, t)| \leq \text{const} |x|^{-3/2}$. Аналогично $|I_2^-(x, t)| \leq \text{const} |x|^{-3/2}$. Тем самым мы установили, что если $q(x) \in \mathcal{L}_3^6(0, -c^2)$, то существует единственное

решение $q(x, t)$ задачи Коши такое, что $q(\cdot, t) \in \mathcal{L}_0^3(0, -c^2)$, то есть

$$\int_{\mathbb{R}_+} (|q(x, t)| + |q(-x, t) + c^2|) dx < \infty,$$

$$\frac{\partial q(\cdot, t)}{dt}, \frac{\partial^j q(\cdot, t)}{dx^j} \in L^1(\mathbb{R}), \quad j = 1, 2, 3.$$

Объединяя этот факт с теоремой 3.1, мы устанавливаем основную теорему данного раздела.

Теорема 3.2. Пусть $q(x) \in \mathcal{L}_{m_0}^{n_0}(0, -c^2)$ при $m_0 \geq 3$ и $n_0 \geq m_0 + 3$. Тогда при всех $|t| < \mathcal{T}$ существует единственное решение $q(x, t)$ задачи Коши для уравнения КдФ с начальными данными $q(x)$ такое, что

$$q(\cdot, t) \in \mathcal{L}_{\lfloor \frac{m_0}{2} \rfloor - 1}^{n_0 - m_0}(0, -c^2).$$

3.3. Выводы.

В данном разделе путем обобщения классического метода обратной задачи рассеяния строго решена задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки, принадлежащими классу $\mathcal{L}_{m_0}^{n_0}(0, -c^2)$ при $m_0 \geq 3$, $n_0 \geq m_0 + 3$. Результат опубликован в работе [10]. Основные результаты данного раздела можно сформулировать следующим образом:

1. Описана эволюция данных рассеяния и выведены зависящие от времени уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко.
2. Путем детального анализа поведения по x при $x \rightarrow \pm\infty$ ядер уравнения ГЛМ, зависящих от времени, максимально точно описана гладкость и скорость убывания возмущений решения уравнения КдФ в зависимости от соответствующих характеристик начальных условий. При этом обобщены предыдущие результаты [58, 59, 72].
3. Получено более простое, чем в [58] решение задачи Коши для уравнения КдФ в классе шварцевских возмущений.

РАЗДЕЛ 4

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

В этой главе изучается асимптотическое поведение при $t \rightarrow +\infty$ решения задачи Коши (3.1)–(3.2) с начальным условием $q(x) \in \mathcal{L}_4^7(0, -c^2)$ при дополнительном условии экспоненциального убывания к фоновым константам

$$\int_0^{+\infty} e^{C_0 x} (|q(x)| + |q(-x) + c^2|) dx < \infty, \quad C_0 > c > 0. \quad (4.1)$$

Предполагается, что ассоциированный оператор Шрёдингера $L(0)$ не имеет резонанса на конце непрерывного спектра.

Как уже говорилось во введении, такое соотношение фоновых констант (левая константа меньше правой) соответствует ударной волне. Нижеследующий рисунок численно моделирует типичное поведение решения при большом значении времени:

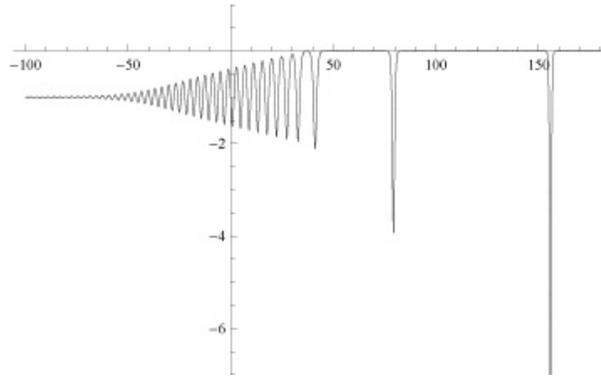


Рис. 4.2: Численно найденное решение $q(x, t)$ уравнения КдФ при $t = 10$, с начальными данными $q(x, 0) = \frac{1}{2}(\operatorname{erf}(x) - 1) - 5\operatorname{sech}(x - 1)$.

4.1. Постановка задачи Римана-Гильберта

Пусть $q(x, t)$ — это решение задачи (3.1)–(3.2), (4.1) и пусть $T(k, t)$ — это правый коэффициент прохождения, а $\phi(k, x, t)$ $\phi_1(k, x, t)$ — правое и

левое решения Йоста, нормированные, как и в предыдущих главах, условиями

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ikx} \phi(k, x, t) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ik_1 x} \phi_1(k, x, t) = 1.$$

В данной главе все функции — это функции спектральной переменной k , и для удобства мы так и будем их обозначать (т.е. $\phi(k, x, t) = \phi(\lambda(k), x, t)$ и т. п.) Более того, переменные x и t трактуются в этой главе как фиксированные параметры. Мы также будем использовать в записи матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для постановки векторной задачи РГ в области $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup [-ic, ic])$ рассмотрим вектор-функцию $m(k) = m(k, x, t)$, определенную формулами

$$m(k, x, t) = \begin{cases} \left(T(k, t) \phi_1(k, x, t) e^{ikx}, \phi(k, x, t) e^{-ikx} \right), & k \in \mathbb{C}_c^U, \\ \left(\phi(-k, x, t) e^{ikx}, T(-k, t) \phi_1(-k, x, t) e^{-ikx} \right), & k \in \mathbb{C}_c^L, \end{cases} \quad (4.2)$$

где обозначено

$$\mathbb{C}_c^U := \{k : \text{Im } k > 0\} \setminus (0, ic], \quad \mathbb{C}_c^L := \{k : \text{Im } k < 0\} \setminus (0, -ic].$$

Индекс U соответствует верхней полуплоскости, L — нижней.

Лемма 4.1. Функция $m(k) = m(k, x, t)$, определенная формулой (4.2), имеет следующее асимптотическое поведение

$$m(k, x, t) = (1, 1) - \frac{1}{2ik} \left(\int_x^{+\infty} q(y, t) dy \right) (-1, 1) + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (4.3)$$

Доказательство. Согласно (2.28) правый коэффициент прохождения $T(k, t)$ определяется формулой $T(k, t) = 2ikW^{-1}(k, t)$, где $W(k, t)$ — это вронскиан решений Йоста $\phi(k, x, t)$ и $\phi_1(k, x, t)$. Посчитаем асимптотику T при $k \rightarrow \infty$ вплоть до слагаемого $o\left(\frac{1}{k}\right)$. Так как вронскиан не зависит от x , то мы вычислим его при $x = 0$. При условии, что $q(x, t) \in \mathcal{L}_1^0(0, -c^2)$

интегралы в (3.7) можно интегрировать по частям по x . Получаем

$$\begin{aligned}\phi(k, 0, t) &= 1 + ik^{-1}K(0, 0, t) + o(k^{-1}); \\ \phi'_x(k, 0, t) &= ik - K(0, 0, t) + o(1). \\ \phi_1(k, 0, t) &= 1 + ik_1^{-1}K_1(0, 0, t) + o(k^{-1}); \\ \phi'_{1,x}(k, 0, t) &= -ik_1 + K_1(0, 0, t) + o(1),\end{aligned}$$

Так как $\frac{k_1}{k} = 1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, то

$$\begin{aligned}W(k, t) &= ik - \frac{k}{k_1}K_1(0, 0, t) - K(0, 0, t) + ik_1 - \frac{k_1}{k}K(0, 0, t) \\ &\quad - K_1(0, 0, t) + o(1) = 2ik - 2(K + K_1)(0, 0, t) + o(1).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$T(k, t) = 1 + \frac{K(0, 0, t) + K_1(0, 0, t)}{ik} + o\left(\frac{1}{k}\right). \quad (4.4)$$

Далее, так как $k_1 = k + \frac{c^2}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, то

$$\begin{aligned}\phi_1(k, x, t)e^{ikx} &= e^{i(k-k_1)x} \left(1 - \frac{K_1(x, x, t)}{ik_1} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right) \\ &= e^{-\frac{2c^2}{2k}(1+o(1))x} \left(1 - \frac{K_1(x, x, t)}{ik}\right) + o\left(\frac{1}{k}\right) \\ &= \left(1 + \frac{c^2x}{2ik}\right) \left(1 - \frac{K_1(x, x, t)}{ik}\right) + o\left(\frac{1}{k}\right) = 1 + \frac{\frac{c^2}{2}x - K_1(x, x, t)}{ik} + o\left(\frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

Из формул (3.17) следует, что

$$\frac{d}{dx}(K_1(x, x, t) + K(x, x, t)) = \frac{c^2}{2},$$

и, следовательно,

$$K_1(x, x, t) + K(x, x, t) = \frac{c^2x}{2} + K_1(0, 0, t) + K(0, 0, t). \quad (4.5)$$

Объединяя формулы (4.4)–(4.5), получаем

$$T(k, t)\phi_1(k, x, t)e^{ikx} = 1 + \frac{K(x, x, t)}{ik} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

С другой стороны,

$$\phi(k, x, t)e^{-ikx} = 1 - \frac{K(x, x, t)}{ik} + o\left(\frac{1}{k}\right),$$

что и завершает доказательство. □

Далее, введем в рассмотрение функцию

$$\chi(k) := - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \overline{T(k + \varepsilon, 0)} T_1(k + \varepsilon, 0), \quad \text{при } k \in [0, ic], \quad (4.6)$$

и продолжим эту функцию на интервал $[-ic, 0]$ нечетным образом:

$$\chi(-k) = -\chi(k), \quad k \in [-ic, 0]. \quad (4.7)$$

Тогда из уравнения (2.28) следует, что

$$\frac{\chi(k)}{k} > 0 \quad \text{при } k \in [-ic, ic]. \quad (4.8)$$

Нас интересует, какой скачок имеет вектор функция $m(k, x, t)$ на контуре $\Sigma \cup \Sigma_c$, где контур $\Sigma = \mathbb{R}$ ориентирован слева направо, а контур $\Sigma_c = [ic, -ic]$ — сверху вниз. Условимся, что для ориентированного контура $\hat{\Sigma}$, значение $m_+(k)$ (соответственно, $m_-(k)$) означает некасательный предел функции $m(\kappa)$ при $\kappa \rightarrow k$ с положительной (соответственно, отрицательной) стороны Σ . Здесь положительная (соответственно, отрицательная) сторона — это та, которая лежит слева (соответственно, справа) при обходе контура по направлению его ориентации. Чтобы не путать предельные значения функций с разных сторон контура с другими значениями индексов $+$ и $-$, в дальнейшем мы будем обозначать верхнюю (соответственно, нижнюю) полуплоскость через \mathbb{C}^U (соответственно, \mathbb{C}^L). Любое понятие, связанное с верхней или нижней полуплоскостью, будет также обозначено индексом U или L . Например, $\Sigma_c^U = [ic, 0]$. Более того, индексами l и r мы будем обозначать, когда необходимо, значения функций с левой или правой стороны разреза $[-ic, ic]$. В частности, по определению (см (4.6)) функции χ можно записать $\chi = -[\overline{T}T_1]_r$. Индекс r означает правую сторону разреза вдоль интервала, l означает левую. Заметим также, что правый коэффициент отражения $R(k) = R(k, 0)$, $k \in \mathbb{R}$, функция

$\chi(k)$, $k \in [-ic, ic]$ и дискретный спектр вместе с правыми нормировочными константами $\gamma_j = \gamma_j(0)$ (κ_j, γ_j), $1 \leq j \leq N$, полностью определяют правое ядро уравнения Марченко, а, значит, и весь потенциал $q(x)$ согласно результатам раздела 3. Поэтому мы считаем их минимальными данными рассеяния оператора $L(0)$.

Теорема 4.1. Пусть $\{R(k), k \in \mathbb{R}; \chi(k), k \in [-ic, ic]; (\kappa_j, \gamma_j), 1 \leq j \leq N\}$ — минимальные данные рассеяния, соответствующие начальному профилю (4.1). Тогда функция $m(k) = m(k, x, t)$, определенная в (4.2), является единственным решением следующей векторной задачи Римана-Гильберта: Найти в \mathbb{C} векторзначную функцию $m(k)$, мероморфную вне контура $\Sigma \cup \Sigma_c$, с простыми полюсами в точках $\pm i\kappa_j$, которая удовлетворяет следующие условия:

1. условие скачка $m_+(k) = m_-(k)v(k)$, где

$$v(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 - |R(k)|^2 & -\overline{R(k)}e^{-t\Phi(k)} \\ R(k)e^{t\Phi(k)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \chi(k)e^{t\Phi(k)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_c^U, \\ \begin{pmatrix} 1 & \chi(k)e^{-t\Phi(k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_c^L, \end{cases} \quad (4.9)$$

2. полюсные условия:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{i\kappa_j} m(k) &= \lim_{k \rightarrow i\kappa_j} m(k) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)} & 0 \end{pmatrix}, \\ \operatorname{Res}_{-i\kappa_j} m(k) &= \lim_{k \rightarrow -i\kappa_j} m(k) \begin{pmatrix} 0 & -i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

3. условие симметрии :

$$m(-k) = m(k)\sigma_1, \quad (4.11)$$

4. условие нормировки:

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} m(i\kappa) = (1, \quad 1). \quad (4.12)$$

Здесь функция $\Phi(k) = \Phi(k, x, t)$, называемая фазовой функцией, определяется как $\Phi(k) = 8ik^3 + 2ik\frac{x}{t}$.

Доказательство. Сначала проверим, что условие скачка для вектора $m(k, x, t)$, определенного в (4.2), имеет вид (4.9). Так как доказательство будет в основном алгебраическое, опустим зависимость от x, t а также от k , где это возможно.

Рассмотрим $k \in \Sigma = \mathbb{R}$. Пусть $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ – неизвестная матрица скачка. Так как $T(-k) = \overline{T(k)}$, $\phi_1(-k) = \overline{\phi_1(k)}$ при $k \in \Sigma$, то элементы m удовлетворяют соотношениям

$$T\phi_1 e^{ikx} = \overline{\phi} e^{ikx} \alpha + \overline{T\phi_1} e^{-ikx} \gamma, \quad \phi e^{-ikx} = \overline{\phi} e^{ikx} \beta + \overline{T\phi_1} e^{-ikx} \delta.$$

Помножим первое уравнение на e^{-ikx} , а второе на e^{ikx} , а затем комплексно сопряжем оба. Обозначим

$$\gamma' = \gamma e^{-2ikx} \quad \text{и} \quad \beta' = \beta e^{2ikx}. \quad (4.13)$$

Тогда $\overline{\alpha}\phi = \overline{T\phi_1} - T\overline{\gamma'}\phi_1$, $T\overline{\delta}\phi_1 = \overline{\phi} - \overline{\beta'}\phi$. Теперь разделим первое уравнение на \overline{T} и сравним оба с (3.8). Отсюда видно, что $\delta = 1$, $-\overline{\beta'} = R(k, t)$, $\overline{\alpha} = T_1(r, t)\overline{T(k, t)}$, и $-\overline{\gamma'}T(k, t)(\overline{T(k, t)})^{-1} = R_1(k, t)$. Используя (4.13), свойство **I**, **(d)** леммы 2.4 и формулы эволюции (3.12), получаем требуемую матрицу $v(k)$ при $k \in \Sigma$.

Пусть теперь $k \in \Sigma_c^U \subset \mathbb{C}^+$, то есть изучается скачок вектор функции, определенной верхней строкой формулы (4.2). Так как функция $\phi(k)$ является вещественнозначной и не имеет скачков на этом множестве, уравнения для элементов матрицы скачка выглядят следующим образом (предполагается, что $k \in [0, ic]_+$):

$$T\phi_1 e^{ikx} = \overline{T\phi_1} e^{ikx} \alpha + \phi e^{-ikx} \gamma, \quad \phi e^{-ikx} \gamma = \overline{T\phi_1} e^{ikx} \beta + \phi e^{-ikx}.$$

Из последнего равенства $\beta = 0$, $\delta = 1$. Обозначим $\gamma e^{-2ikx} =: \gamma'$, и разделим первое из уравнений на $-\bar{T}$. Так как в силу (2.28) и свойства **I**, **(b)** леммы 2.4 на однократном спектре имеет место формула $T\bar{T}^{-1} = R_1$, то в результате мы получим соотношение

$$R_1\phi_1 + \bar{\phi}_1\alpha = \frac{-\gamma'}{\bar{T}}\phi.$$

Сравнивая это уравнение с первым соотношением рассеяния (3.8), имеем $\alpha = 1$ и $\gamma = -T_1(k, t)\overline{T(k, t)}e^{2ikx}$. Так как $-T_1\bar{T} = -\frac{k}{k_1}|T_1|^2$ при $k \in \Sigma_c$, то формулы (3.14) и (4.6) влекут требуемую формулу для $v(k)$ при $k \in \Sigma_c^U$. Для получения матрицы скачка на множестве Σ_c^L достаточно использовать очевидное условие симметрии и формулу (4.7). Полюсное условие получается в силу (3.13) тем же способом, что и в [69]. Условие нормировки вытекает из (4.3). Единственность решения доказывается тем же способом, как и в [69] (см. также [40]). \square

Все последующие этапы, связанные с приведением исходной задачи РГ к модельной, являются обратимыми, поэтому единственность решения сохраняется. Заметим также, что матрица скачка имеет единичный детерминант и обладает симметрией $v(-k) = \sigma_1 v(k)^{-1} \sigma_1$, при $k \in \hat{\Sigma}$.

Прежде всего преобразуем полюсное условие в условие скачка, и превратим исходную мероморфную задачу РГ в голоморфную, следуя приему, примененному в [69] (см. также [50]). Для этой цели выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы кружки $|k - i\kappa_j| < \varepsilon$ лежали внутри области \mathbb{C}_c^U и не пересекались между собой и с вещественной осью. Обозначим эти кружки через \mathbb{D}_j^U , а их границы через \mathbb{T}_j^U . Симметричные к ним объекты из \mathbb{C}_c^L обозначим через \mathbb{D}_j^L , \mathbb{T}_j^L . Переопределим вектор $m(k)$ в окрестности точек $i\kappa_j$

(соответственно, $-i\kappa_j$) следующим образом:

$$m(k) = \begin{cases} m(k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)}}{k-i\kappa_j} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{D}_j^U, \\ m(k) \begin{pmatrix} 1 & \frac{i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)}}{k+i\kappa_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{D}_j^L, \\ m(k), & k \in \mathbb{C} \setminus \cup_{j=1}^N (\mathbb{D}_j^U \cup \mathbb{D}_j^L). \end{cases} \quad (4.14)$$

Заметим, что в области \mathbb{C}_c^L вектор $m(k)$ переопределен с сохранением условия симметрии (4.11). Используя формулу $\text{Res}_{i\kappa} m(k) = \lim_{k \rightarrow i\kappa} (k - i\kappa)m(k)$, имеем следующий известный результат ([69]):

Лемма 4.2. Пусть $m(k)$ определена формулой (4.14). Тогда функция $m(k)$ голоморфна в области $\mathbb{C} \setminus (\Sigma \cup \Sigma_c \cup \cup_{j=1}^N (\mathbb{T}_j^U \cup \mathbb{T}_j^L))$. Кроме того, она удовлетворяет условиям (4.9), (4.11), (4.12),

$$\begin{aligned} m_+(k) &= m_-(k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)}}{k-i\kappa_j} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{T}_j^U, \\ m_+(k) &= m_-(k) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)}}{k+i\kappa_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{T}_j^L, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где контур \mathbb{T}_j^U ориентирована против часовой стрелки, а \mathbb{T}_j^L — по часовой.

4.2. Асимптотика в области $4c^2t < x$.

В этом параграфе мы исследуем так называемую солитонную область. Для приведения исходной задачи РГ к модельному виду здесь используются приемы, полностью аналогичные тем, которые используются в убывающем случае. В том числе, удобно использовать следующий общий результат:

Лемма 4.3. [69] Пусть m — решение задачи РГ $m_+(k) = m_-(k)v(k)$, $k \in \Sigma$. Предположим, что $\tilde{\Sigma} \subseteq \Sigma$. Пусть D — матрица вида

$$D(k) = \begin{pmatrix} d(k)^{-1} & 0 \\ 0 & d(k) \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

где $d : \mathbb{C} \setminus \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ — кусочно аналитическая функция. Положим $\tilde{m}(k) = m(k)D(k)$, тогда матрица скачка для вектора $\tilde{m}(k)$ имеет вид

$$\tilde{v}(k) = D_-(k)^{-1}v(k)D_+(k).$$

Если функция d обладает свойствами $d(k) \neq 0$ и $d(-k) = d(k)^{-1}$ при $k \in \mathbb{C} \setminus \tilde{\Sigma}$; и если $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} d(i\kappa) = 1$, тогда преобразование $\tilde{m}(k) = m(k)D(k)$ удовлетворяет условиям симметрии и нормализации (4.11) и (4.12), соответственно.

В частности, мы получаем

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12}d^2 \\ v_{21}d^{-2} & v_{22} \end{pmatrix}, \quad k \in \hat{\Sigma} \setminus \tilde{\Sigma},$$

и,соответственно,

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} \frac{d_-}{d_+}v_{11} & v_{12}d_+d_- \\ v_{21}d_+^{-1}d_-^{-1} & \frac{d_+}{d_-}v_{22} \end{pmatrix}, \quad k \in \tilde{\Sigma}.$$

Положим $\kappa_0 := \sqrt{\frac{x}{4t}} > 0$.

Точка $i\kappa_0$ — это точка пересечения кривой $\operatorname{Re}(\Phi(k)) = 0$ с мнимой полуосью. Тогда если (1) $\kappa_j > \kappa_0$, то $\operatorname{Re}(\Phi(i\kappa_j)) > 0$, и если (2) $\kappa_j < \kappa_0$, то $\operatorname{Re}(\Phi(i\kappa_j)) < 0$. Таким образом, в первом случае внедиагональные элементы наших матриц скачка на кружках экспоненциально возрастают, а нам нужно преобразовать их в экспоненциально убывающие. Для этой цели положим

$$\Lambda(k) := \prod_{\kappa_j > \kappa_0} \frac{k + i\kappa_j}{k - i\kappa_j},$$

и введем матрицу

$$D(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k-i\kappa_j}{i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)}} \\ \frac{i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)}}{k-i\kappa_j} & 0 \end{pmatrix} D_0(k), & k \in \mathbb{D}_j^U, j = 1, \dots, N, \\ \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)}}{k+i\kappa_j} \\ \frac{k+i\kappa_j}{i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)}} & 1 \end{pmatrix} D_0(k), & k \in \mathbb{D}_j^L, j = 1, \dots, N, \\ D_0(k) := \begin{pmatrix} \Lambda(k)^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda(k) \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{C} \setminus \cup_{j=1}^N (\mathbb{D}_j^U \cup \mathbb{D}_j^L), \end{cases} \quad (4.17)$$

Положим теперь

$$\tilde{m}(k) = m(k)D(k). \quad (4.18)$$

Тогда (см. подробности в лемме 4.2 [69]) скачок, соответствующий $\kappa_0 < \kappa_j$, имеет вид

$$\tilde{v}(k) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{(k-i\kappa_j)\Lambda^2(k)}{i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{T}_j^U, \quad \tilde{v}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{k+i\kappa_j}{i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)}\Lambda^2(k)} & 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{T}_j^L, \quad (4.19)$$

а скачки, соответствующие $\kappa_0 > \kappa_j$ (если таковые есть) имеют вид

$$\tilde{v}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)}\Lambda(k)^{-2}}{k-i\kappa_j} & 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{T}_j^U, \quad \tilde{v}(k) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)}\Lambda(k)^2}{k+i\kappa_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{T}_j^L.$$

В частности, все скачки, соответствующие полюсам, кроме, может быть, одного, если оказалось, что $\kappa_j = \kappa_0$, экспоненциально близки к единичным при $t \rightarrow \infty$. В случае $\kappa_j = \kappa_0$ ны сохраним полюсное условие, которое теперь выглядит как

$$\begin{aligned} \text{Res}_{i\kappa_j} \tilde{m}(k) &= \lim_{k \rightarrow i\kappa_j} \tilde{m}(k) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)}\Lambda(i\kappa_j)^{-2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{Res}_{-i\kappa_j} \tilde{m}(k) &= \lim_{k \rightarrow -i\kappa_j} \tilde{m}(k) \begin{pmatrix} 0 & -i\gamma_j e^{t\Phi(i\kappa_j)}\Lambda(i\kappa_j)^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Более того, скачок вдоль контура $\Sigma \cup \Sigma_c$ имеет теперь вид

$$\tilde{v}(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 - |R(k)|^2 & -\Lambda^2(k)\overline{R(k)}e^{-t\Phi(k)} \\ \Lambda^{-2}(k)R(k)e^{t\Phi(k)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Lambda^{-2}(k)\chi(k)e^{t\Phi(k)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_c^U, \\ \begin{pmatrix} 1 & \Lambda^2(k)\chi(k)e^{-t\Phi(k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_c^L. \end{cases} \quad (4.20)$$

Новая задача Римана-Гильберта

$$\tilde{m}_+(k) = \tilde{m}_-(k)\tilde{v}(k) \quad (4.21)$$

для вектора \tilde{m} сохраняет асимптотику (4.12), так же как и условие симметрии (4.11). В частности, все скачки, соответствующие полюсам теперь экспоненциально близки к единичной матрице при $t \rightarrow \infty$. Чтобы преобразовать оставшиеся скачки вдоль контуров $\Sigma \cup \Sigma_c$ в такой же вид, выберем два контура Σ^U и Σ^L , симметричные относительно отображения $k \mapsto -k$, которые охватывают контур Σ_c и не включают точки дискретного спектра, кроме того, $\Sigma^U \cup \Sigma^L \subset \{k : |\operatorname{Im} k| < C_0\}$, где C_0 — это постоянная из условия (4.1). Это условие и оценка (2.9) гарантируют нам, что функция $\overline{\phi(k, x, t)}$, а вместе с ней и коэффициент отражения $R(k)$, продолжают аналитически в область Ω^U между Σ^U и $\mathbb{R} \cup \Sigma_c^U$ (см. Рис 4.3). Продолжим функцию $R(k)$ в область $\{k : -C_0 < \operatorname{Im} k < 0\} \setminus (-ic, 0]$ по формуле

$$R(k) = \overline{R(-k)}. \quad (4.22)$$

Тогда функция \overline{R} является аналитической в области Ω^L (см. Рис 4.3).

Факторизуем теперь матрицу скачка вдоль контура Σ следующим образом:

$$\hat{v} = b_L^{-1}b_U = \begin{pmatrix} 1 & -\Lambda^2(k)\overline{R(k)}e^{-t\Phi(k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Lambda^{-2}(k)R(k)e^{t\Phi(k)} & 1 \end{pmatrix}$$

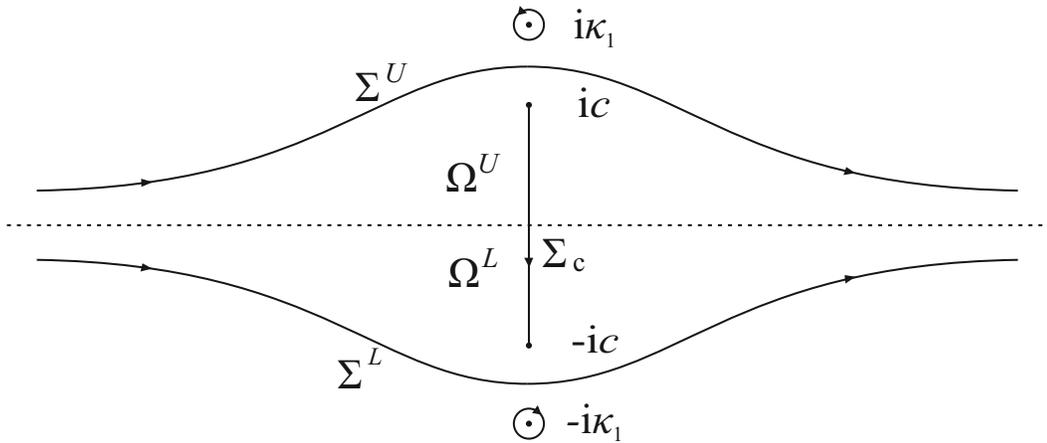


Рис. 4.3: Деформация контура в солитонной области.

И ПОЛОЖИМ

$$\hat{m}(k) = \begin{cases} \hat{m}(k)b_U^{-1}(k), & k \in \Omega^U, \\ \tilde{m}(k)b_L^{-1}(k), & k \in \Omega^L, \\ \tilde{m}(k), & k \in \mathbb{C} \setminus (\Omega^U \cup \Omega^L). \end{cases}$$

Тогда скачок вдоль контура Σ исчезает, но появляются скачки на контурах $\Sigma^U \cup \Sigma^L$, задаваемые формулой

$$\hat{v}(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Lambda^{-2}(k)R(k)e^{t\Phi(k)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma^U, \\ \begin{pmatrix} 1 & -\Lambda^2(k)\overline{R(k)}e^{-t\Phi(k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma^L. \end{cases}$$

Скачки вдоль окружностей $\mathbb{T}_j^U \cup \mathbb{T}_j^L$ остаются неизменными, а скачки вдоль Σ_c теперь выглядят как

$$\hat{v}(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (R_- - R_+ + \chi)\Lambda^{-2}e^{t\Phi} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_c^U, \\ \begin{pmatrix} 1 & (\overline{R}_- - \overline{R}_+ + \chi)\Lambda^2e^{-t\Phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_c^L. \end{cases}$$

Следующая лемма показывает, что этот скачок на самом деле также исчезает.

Лемма 4.4. Имеют место следующие тождества:

$$\begin{aligned} R_-(k) - R_+(k) + \chi(k) &= 0, & k \in \Sigma_c^U, \\ \bar{R}_-(k) - \bar{R}_+(k) + \chi(k) &= 0, & k \in \Sigma_c^L. \end{aligned}$$

Доказательство. С помощью тождества Пюккера (см. [90]) с использованием (4.22) и (4.7). \square

Таким образом, матрица скачка \hat{v} экспоненциально близка к единичной при $t \rightarrow \infty$, и можно использовать теорему А.6 из [79] чтобы получить (повторяя дословно доказательство теоремы 4.4 в [69]) следующий результат:

Теорема 4.2. Пусть начальный профиль задачи (3.1)-(3.2) удовлетворяет условиям (4.1) и (2.3) с $m = 4$ и $n = 7$, и пусть $q(x, t)$ — это решение данной задачи. Пусть $\delta > 0$ достаточно мало, чтобы интервалы $[4\kappa_j^2 - \delta, 4\kappa_j^2 + \delta]$, $1 \leq j \leq N$, не пересекались и лежали внутри интервала $(4c^2, \infty)$. Тогда асимптотики в солитонной области, $x/t - 4c^2 \geq \epsilon$ для некоторого малого $\epsilon > 0$, следующие:

Если $|\frac{x}{t} - 4\kappa_j^2| < \delta$ для некоторого j , то

$$q(x, t) = \frac{-4\kappa_j \gamma_j(x, t)}{(1 + (2\kappa_j)^{-1} \gamma_j(x, t))^2} + O(t^{-1}), \quad (4.23)$$

где

$$\gamma_j(x, t) = \gamma_j e^{-2\kappa_j x + 8\kappa_j^3 t} \prod_{i=j+1}^N \left(\frac{\kappa_i - \kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} \right)^2. \quad (4.24)$$

Если $|\frac{x}{t} - 4\kappa_j^2| \geq \delta$ для всех j , то $q(x, t) = O(t^{-1})$.

4.3. Сведение к модельной задаче в области $-6c^2t < x < 4c^2t$

Перейдем к изучению асимптотики решения в эллиптической области $-6c^2t < x < 4c^2t$. Так как в этой области $\kappa_j > c > \kappa_0$ при всех j , то

первое преобразование исходного вектора - такое же, как и в предыдущей области. А именно, мы переходим к вектору $\tilde{m}(k)$ по формуле (4.18), где матрица $D(k)$ задана формулой (4.17), а в качестве функции $\Lambda(k)$ используется функция

$$\Lambda(k) := \prod_{j=1}^N \frac{k + i\kappa_j}{k - i\kappa_j}, \quad (4.25)$$

Положим $\xi = \frac{x}{12t}$, тогда $\Phi(k) = \Phi(k, \xi) = 8ik^3 + 24ik\xi$. Следующим шагом мы вводим g -функцию, следуя подходу, развитому в [44], [77] и [78]. В области $\mathbb{C} \setminus \Sigma_c$ введем функцию

$$g(k) := g(k, x, t) = 12 \int_{ic}^k (k^2 + \mu^2) \sqrt{\frac{k^2 + a^2}{k^2 + c^2}} dk \quad (4.26)$$

где параметры $a = a(\xi)$, $0 < a < c$ и $\mu = \mu(\xi)$, $0 < \mu < a < c$,

$$\mu^2 = \xi + \frac{c^2 - a^2}{2}, \quad (4.27)$$

выбраны так, чтоб выполнялись условия

$$\int_0^{ia} (k^2 + \mu^2) \left[\sqrt{\frac{k^2 + a^2}{k^2 + c^2}} \right]_r dk = 0 \quad (4.28)$$

и

$$g(k) - 4k^3 - 12k\xi \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.29)$$

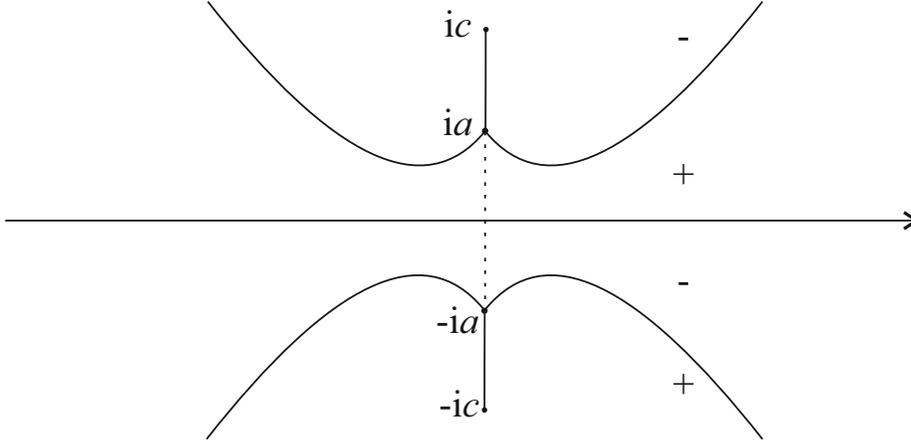
Как указано в [77] (доказательство - в лемме 4.6 ниже), эти условия могут быть выполнены для всех значений параметра ξ в области $-\frac{c^2}{2} < \xi < \frac{c^2}{3}$.

Введем контур $\Sigma_a = [ia, -ia]$ с ориентацией сверху-вниз.

Лемма 4.5. ([77]) Функция $g(k)$ удовлетворяет свойствам:

- (a) Она нечетна в области $\mathbb{C} \setminus \Sigma_c$, $g(k) = -g(-k)$;
- (b) $g_-(k) + g_+(k) = 0$ при $k \in \Sigma_c \setminus \Sigma_a$;
- (c) $g_-(k) - g_+(k) = B$ при $k \in \Sigma_a$, где $B := B(\xi) = 2g_+(ia) > 0$;
- (d) она имеет следующее асимптотическое поведение при $k \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{2}\Phi(k, \xi) - ig(k, \xi) = \frac{12\xi(c^2 - a(\xi)^2) + 3c^4 + 9a(\xi)^4 - 6a(\xi)^2c^2}{2ki} + O\left(\frac{1}{k^3}\right). \quad (4.30)$$

Рис. 4.4: Знак функции $\text{Im}(g)$

Доказательство. Свойства **(а)** - **(с)** вытекают непосредственно из (4.26)-(4.28). Последнее свойство получается из разложения (4.26) с учетом (4.27)–(4.29) и свойства **(а)**. \square

Области знакопостоянства функции $\text{Im} g(k)$ проиллюстрированы на Рис 4.4. Введем теперь функцию

$$d(k, t) = \exp(t\Phi(k)/2 - itg(k)). \quad (4.31)$$

Согласно (4.30) имеем

$$d(k, t) = 1 + t \frac{12\xi(c^2 - a(\xi)^2) + 3c^4 + 9a(\xi)^4 - 6a(\xi)^2c^2}{2ki} + O\left(\frac{1}{k^3}\right). \quad (4.32)$$

Так как обе функции $\Phi(k)$ и $g(k)$ являются нечетными аналитическими функциями от k в $\mathbb{C} \setminus \Sigma_c$, то функция $d(\cdot, t)$ также является аналитической в $\mathbb{C} \setminus \Sigma_c$ и удовлетворяет свойству $d(-k, t) = d^{-1}(k, t)$. Кроме того, $d(k, t) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Пусть $\tilde{m}(k)$ решение задачи (4.21), (4.19), (4.20), (4.25). Положим $\hat{m}(k) = \tilde{m}(k)D(k, t)$, где диагональная матрица $D(k, t)$ определена в (4.16) а $d(k, t)$ определена формулой (4.31). Применяя лемму 4.3, приходим к следующей задаче РГ, эквивалентной исходной:

$$\hat{m}_+(k) = \hat{m}_-(k)\hat{v}(k), \quad \hat{m}(k) \rightarrow (1, 1), \quad k \rightarrow \infty, \quad \hat{m}(-k) = \hat{m}(k)\sigma_1, \quad (4.33)$$

где

$$\hat{v}(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & h_j^U(k, \xi, t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{T}_j^U, \quad j = 1, \dots, N, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_j^L(k, \xi, t) & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{T}_j^L, \quad j = 1, \dots, N, \\ \begin{pmatrix} 1 - |R(k)|^2 & -\Lambda^2(k) \overline{R(k)} e^{-2itg(k)} \\ \Lambda^{-2}(k) R(k) e^{2itg(k)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma, \\ \begin{pmatrix} e^{it(g_+ - g_-)} & 0 \\ \Lambda^{-2}(k) \chi(k) e^{it(g_+ + g_-)} & e^{-it(g_+ - g_-)} \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_c^U, \\ \begin{pmatrix} e^{it(g_+ - g_-)} & \Lambda^2(k) \chi(k) e^{-it(g_+ + g_-)} \\ 0 & e^{-it(g_+ - g_-)} \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_c^L, \end{cases} \quad (4.34)$$

а элементы

$$h_j^U(k, \xi, t) = i\gamma_j^{-1}(k - i\kappa_j) \Lambda^2(k) e^{t(\Phi(k) - \Phi(i\kappa_j) - 2ig(k))},$$

$$h_j^L(k, \xi, t) = i\gamma_j^{-1}(k + i\kappa_j) \Lambda^{-2}(k) e^{-t(\Phi(k) - \Phi(-i\kappa_j) - 2ig(k))},$$

матриц скачка на окружностях убывают экспоненциально по t при достаточно малых радиусах окружностей δ .

Введем две области: Ω^U и Ω^L , ограниченные вещественной осью и контурами Σ^U и Σ^L соответственно, где контуры Σ^U и Σ^L симметричны относительно отображения $k \mapsto -k$ и ориентированы слева направо (см. Рис 4.5). Более того, Ω^U и Ω^L должны оставаться в области, где $\text{Im}(g) > 0$ и $\text{Im}(g) < 0$, соответственно.

Следуя стандартной процедуре (смотри, например, [53], [69], [77]) факторизуем матрицу $\hat{v}(k)$ на вещественной оси:

$$\hat{v} = b_L^{-1} b_U = \begin{pmatrix} 1 & -\Lambda^2(k) \overline{R(k)} e^{-2itg(k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Lambda^{-2}(k) R(k) e^{2itg(k)} & 1 \end{pmatrix}.$$

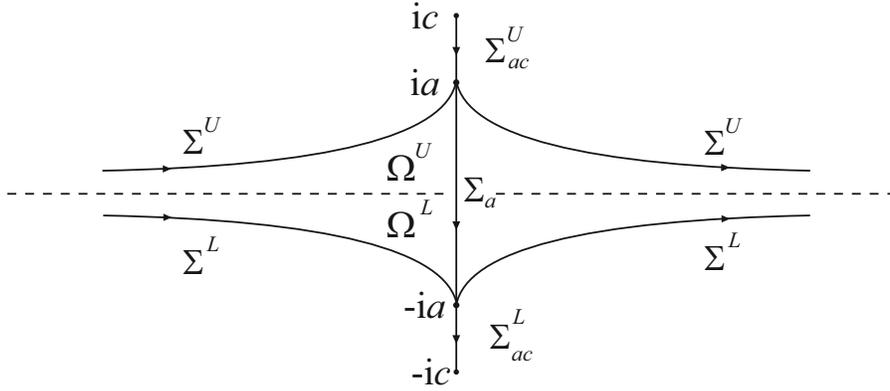


Рис. 4.5: Первый шаг деформации

Положим

$$m^{(1)} = \begin{cases} \hat{m}b_U^{-1}, & k \in \Omega^U, \\ \hat{m}b_L^{-1}, & k \in \Omega^L, \\ \hat{m}, & k \in \mathbb{C} \setminus \{\Omega^U \cup \Omega^L\}. \end{cases} \quad (4.35)$$

Следует заметить, что эта деформация удовлетворяет нашему условию симметрии (4.11). Очевидно, матрицы b_L и b_U имеют скачки на Σ_a . Новые матрицы скачка $v^{(1)}(k)$, которые соответствуют $m^{(1)}(k)$ на этом контуре — это

$$v^{(1)}(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{it(g_+ - g_-)} & 0 \\ (R_- - R_+ + \chi)\Lambda^{-2}e^{t(g_+ + g_-)} & e^{-it(g_+ - g_-)} \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_a^U, \\ \begin{pmatrix} e^{it(g_+ - g_-)} & (\bar{R}_- - \bar{R}_+ + \chi)\Lambda^2e^{t(g_+ + g_-)} \\ 0 & e^{-it(g_+ - g_-)} \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_a^L, \end{cases} \quad (4.36)$$

Лемма 4.4 гарантирует, что внедиагональные элементы этих матриц обращаются в ноль. Положим теперь $\Sigma_{ac} = \Sigma_c \setminus \Sigma_a$, то есть

$$\Sigma_{ac} = \Sigma_{ac}^U \cup \Sigma_{ac}^L = [ic, ia] \cup [-ia, -ic].$$

Вектор $m^{(1)}$, определенный формулой (4.35), не имеет скачка вдоль вещественной оси. Принимая во внимание свойство (c) леммы 4.5, получаем

новую задачу Римана–Гильберта:

$$m_+^{(1)}(k) = m_-^{(1)}(k)v^{(1)}(k), \quad m^{(1)}(k) \rightarrow (1, 1), \quad k \rightarrow \infty; \quad m^{(1)}(-k) = m^{(1)}(k)\sigma_1,$$

где

$$v^{(1)}(k) = \begin{cases} \hat{v}(k), & k \in \mathbb{T}_j^U \cup \mathbb{T}_j^L, & j = 1, \dots, N, \\ \begin{pmatrix} e^{it(g_+ - g_-)} & 0 \\ \Lambda^{-2}(k)\chi(k) & e^{-it(g_+ - g_-)} \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_{ac}^U, \\ \begin{pmatrix} e^{it(g_+ - g_-)} & \Lambda^2(k)\chi(k) \\ 0 & e^{-it(g_+ - g_-)} \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_{ac}^L, \\ \begin{pmatrix} e^{-itB} & 0 \\ 0 & e^{itB} \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_a, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Lambda^{-2}(k)R(k)e^{2itg(k)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma^U, \\ \begin{pmatrix} 1 & -\Lambda^2(k)\overline{R(k)}e^{-2itg(k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma^L. \end{cases} \quad (4.37)$$

Заметим, что $\text{Im } g(k) > 0$ (соотв., $\text{Im } g(k) < 0$) на контуре $\Sigma^U \setminus \{ia\}$ (соотв., $\Sigma^L \setminus \{-ia\}$), и матрица $v^{(1)}$ на этих контурах экспоненциально по t близка к единичной, за исключением малых окрестностей точек $\pm ia$.

Наш следующий шаг трансформации задачи РГ связан с факторизацией матриц скачка на множестве Σ_{ac} . Для этого рассмотрим сперва вспомогательную скалярную задачу Римана–Гильберта (см. [77]): Найти функцию $F(k) = F(k, \xi)$, аналитическую в области $\mathbb{C} \setminus \Sigma_c$, и константу $\hat{h}(\xi)$ такие, чтобы выполнялись следующие свойства:

- (a) $F_+(k)F_-(k) = \Lambda^{-2}(k)|\chi(k)|$ при $k \in \Sigma_{ac}^U = [ic, ia]$,
- (b) $F_+(k)F_-(k) = \Lambda^{-2}(k)|\chi(k)|^{-1}$ при $k \in \Sigma_{ac}^L = [-ia, -ic]$,
- (c) $F_+(k) = F_-(k)\hat{h}$ при $k \in \Sigma_a = [ia, -ia]$,
- (d) $F(k) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, и $F(-k) = F^{-1}(k)$ при $k \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_c$.

Заметим, что последнее свойство дает возможность использовать функцию F в качестве элемента диагональной матрицы (4.16), так как оно обеспечивает выполнение условий симметрии и нормировки.

Построим функцию F , используя формулы Племеля. В области $\mathbb{C} \setminus \Sigma_{ac}$, введем функцию

$$w(k) = \sqrt{(k^2 + c^2)(k^2 + a^2)}, \quad w(0) > 0, \quad (4.38)$$

и при $k \in \Sigma_c$ положим $p(k) := [w(k)]_r$. Тогда

$$p(-k) = -p(k) \text{ при } k \in \Sigma_{ac}, \quad p(k) = p(-k), \quad \text{при } k \in \Sigma_a. \quad (4.39)$$

Положим также

$$f(k) := \frac{\log(\Lambda^{-2}(k)|\chi(k)|)}{p(k)}, \quad k \in \Sigma_c. \quad (4.40)$$

Прологарифмировав условия скачка, и поделив их на $p(k)$, принимая во внимание (4.7), (4.39) и $\Lambda(-k) = \Lambda^{-1}(k)$ получаем

$$F(k) = \exp \left\{ \frac{w(k)}{2\pi i} \left(\int_{ic}^{ia} \frac{f(s)}{s-k} ds + \int_{-ia}^{-ic} \frac{f(s)}{s-k} ds - \log \hat{h} \int_{-ia}^{ia} \frac{ds}{p(s)(s-k)} \right) \right\}. \quad (4.41)$$

Из свойств (4.7) и (4.39) следует $F(-k) = F^{-1}(k)$. Отсюда, разлагая (4.41) по степеням k на бесконечности, имеем

$$F(k) = 1 + \frac{y(\xi)}{ik} + O\left(\frac{1}{k^3}\right), \quad (4.42)$$

$$y(\xi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ -2 \int_{ic}^{ia} \frac{s^2 \log(\Lambda^{-2}(s)|\chi(s)|)}{w_+(s)} ds + i\Delta \int_{ia}^{-ia} \frac{s^2 ds}{w(s)} \right\} \in \mathbb{R}, \quad (4.43)$$

где (вспомним, что $\Lambda(k) \in \mathbb{R}$ когда $k \in \Sigma_c$)

$$\Delta(\xi) = 2i \frac{\int_{ia}^{ic} \frac{\log(\Lambda^{-2}(s)|\chi(s)|)}{w(s)_+} ds}{\int_{-ia}^{ia} \frac{ds}{w(s)}} \in \mathbb{R}, \quad \text{и } \hat{h}(\xi) = e^{i\Delta(\xi)}. \quad (4.44)$$

Теперь мы готовы сделать следующее преобразование. Заметим сначала, что $\chi/i = |\chi|$ на Σ_{ac}^U $\chi/i = -|\chi|$ на Σ_{ac}^L по свойству (4.8). Используя также условие **(b)** леммы 4.5 можно проверить, что на контуре Σ_{ac}^U матрица

скачка $v^{(1)}(k)$ факторизуется следующим образом:

$$v^{(1)}(k) = D_{2,-} \begin{pmatrix} 1 & \frac{F_-^2 e^{-2itg_-}}{\chi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{F_+^2 e^{-2itg_+}}{\chi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_{2,+}^{-1},$$

а на контуре Σ_{ac}^L

$$v^{(1)}(k) = D_{2,-} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{e^{2itg_-}}{\chi F_-^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{e^{2itg_+}}{\chi F_+^2} & 1 \end{pmatrix} D_{2,+}^{-1}.$$

где

$$D_2(k) = \begin{pmatrix} \tilde{F}^{-1}(k) & 0 \\ 0 & \tilde{F}(k) \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

В силу (4.6) имеем

$$v^{(1)}(k) = \begin{cases} iD_{2,-} G_-^U(k) \sigma_1 G_+^U(k)^{-1} D_{2,+}^{-1}, & k \in \Sigma_{ac}^U, \\ -iD_{2,-} G_-^L(k) \sigma_1 G_+^L(k)^{-1} D_{2,+}^{-1}, & k \in \Sigma_{ac}^L, \end{cases}$$

где

$$G^U(k) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\tilde{F}^2 \Lambda^2 e^{-2itg}}{V} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G^L(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{e^{2itg}}{V \tilde{F}^2 \Lambda^2} & 1 \end{pmatrix},$$

а функция $V(k) := \overline{T(k)} T_1(k) = \frac{-4k_1 k}{|\overline{W(k)}|^2}$ определена при $0 \geq k < C_0$, и продолжена в симметричную нижнюю полосу по формуле $V(k) = V(-k)$.

Введем теперь симметричные области Ω_1^U и Ω_1^L . Контур их границ ориентированы как показано на рисунке 4.6.

Введем новую вектор функцию

$$m^{(2)}(k) = m^{(1)}(k) G(k), \quad G(k) = \begin{cases} D_2(k) G^U(k), & k \in \Omega_1^U, \\ D_2(k) G^L(k), & k \in \Omega_1^L, \\ D_2(k), & k \in \mathbb{C} \setminus (\Omega_1^U \cup \Omega_1^L). \end{cases} \quad (4.46)$$

Эта функция является решением следующей задачи РГ:

$$m_+^{(2)}(k) = m_-^{(2)}(k) v^{(2)}(k), \quad m^{(2)}(k) \rightarrow (1, 1), \quad k \rightarrow \infty, \quad m^{(2)}(-k) = m^{(2)}(k) \sigma_1, \quad (4.47)$$

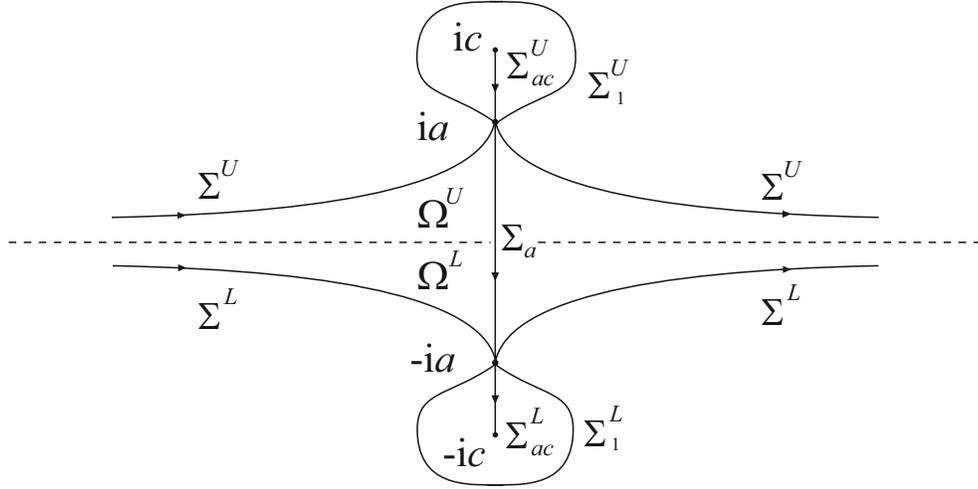


Рис. 4.6: Второй шаг деформации

где

$$v^{(2)}(k) = \begin{cases} i\sigma_1, & k \in \Sigma_{ac}^U, \\ -i\sigma_1, & k \in \Sigma_{ac}^L, \\ \begin{pmatrix} e^{-it\hat{B}} & 0 \\ 0 & e^{it\hat{B}} \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_a, \\ G^U(k)^{-1}, & k \in \Sigma_1^U, \\ G^L(k)^{-1}, & k \in \Sigma_1^L, \\ D_2^{-1}(k)v^{(1)}(k)D_2(k), & k \in \cup_{j=1}^N(\mathbb{T}_j^U \cup \mathbb{T}_j^L) \cup \Sigma^U \cup \Sigma^L \end{cases} \quad (4.48)$$

Здесь $\hat{B} = B + \frac{\Delta}{t}$ (напомним, что $\tilde{F}_+ \tilde{F}_-^{-1} = e^{i\Delta}$ на контуре Σ_a , где величина Δ определена формулой (4.44)).

Следует также отметить, что так как мы изучаем нерезонансный случай, т. е. $W(ic, 0) \neq 0$, то из свойств функции \tilde{F} легко видеть, что

$$\lim_{k \rightarrow ic} G_{12}^U \neq 0 \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow -ic} G_{21}^L \neq 0,$$

то есть $m^{(2)}(k) = (c_1, c_2)(k \mp ic)^{-1/4}(1 + o(1))$, при $k \rightarrow \pm ic$, где $c_1 c_2 \neq 0$.

Заметим теперь, что на контуре

$$\hat{\Sigma} := \cup_{j=1}^N(\mathbb{T}_j^U \cup \mathbb{T}_j^L) \cup \Sigma_1^U \cup \Sigma_1^L \cup \Sigma^U \cup \Sigma^L,$$

матрица скачка экспоненциально близка к единичной матрице, за исключением малых окрестностей точек $\pm ia$ при $t \rightarrow \infty$. Изучение вклада этих малых окрестностей составляет так называемую задачу параметрикса. Известно, что она оказывает влияние только на второй член асимптотики решения нелинейного уравнения. Задача параметрикса уже изучена для волны разрежения ([40]). Для ударной волны эта задача представляет значительные трудности, и прежде не изучалась ни для одного нелинейного уравнения. В настоящей работе мы ограничиваемся получением главного члена асимптотики решения, и задачу параметрикса не изучаем. Тем самым, мы предполагаем, что при больших k исходный вектор m имеет вид (мы учли все преобразования этого вектора вблизи бесконечно удаленной точки)

$$m(k) = m^{(3)}(k) D_2^{-1}(k) e^{-t(\Phi(k)/2 - ig(k)\sigma_3)} \Lambda^{\sigma_3}(k),$$

где $m^{(3)}(k)$ это решение модельной задачи Римана-Гильберта, которая соответствует скачку $v^{(2)}$ на контуре Σ_c , а скачками на контуре $\hat{\Sigma}$ мы пренебрегаем.

4.4. Решение модельной задачи Римана-Гильберта

Рассмотрим двулистную риманову поверхность X , порожденную функцией $w(k)$, определенной в (4.38), где выбрана стандартная ветвь корня $\sqrt{\cdot}$ с разрезом вдоль отрицательной оси. Листы поверхности X склеены по разрезам $[ic, ia]$ и $[-ia, -ic]$. Точки на этой поверхности обозначаются через $p = (k, \pm)$. Канонический базис циклов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ выбирается следующим образом: \mathbf{a} -цикл обходит точки $-ia, ia$ начиная с верхнего листа слева от разреза $[ic, ia]$ и продолжается на верхнем листе до левой части $[-ia, -ic]$, и возвращается после смены листа. Цикл \mathbf{b} обходит точки ia, ic против часовой стрелки на верхнем листе. Рассмотрим нормирован-

ный голоморфный дифференциал на этой поверхности:

$$d\omega = 2\pi i \frac{dk}{w(k)} \left(\int_{\mathbf{a}} \frac{dk}{w(k)} \right)^{-1}, \quad (4.49)$$

тогда $\int_{\mathbf{a}} d\omega = 2\pi i$, и $\tau = \tau(\xi) = \int_{\mathbf{b}} d\omega < 0$. Пусть

$$\theta(z) = \theta(z | \tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \tau m^2 + mz \right\}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.50)$$

это тэта функция, соответствующая периоду τ . Это четная функция, $\theta(-z) = \theta(z)$, удовлетворяющая свойству

$$\theta(z + 2\pi i j + \tau(\xi)\ell) = \theta(z) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \tau(\xi)\ell^2 - \ell z \right\}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Далее, пусть $A(p) = \int_{ic}^p d\omega$ — отображение Абеля на X . Заметим, что на верхнем листе, где $p = (k, +)$, оно обладает следующими свойствами:

- $A_+(p) = -A_-(p) \pmod{2\pi i}$ при $p \in \Sigma_{ac}$;
- $A_+(p) - A_-(p) = -\tau$ при $p \in \Sigma_a$;
- $A(-p) = -A(p) + \pi i \pmod{2\pi i}$ при $k \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_c$, $p = (k, +)$;
- $A(ia) = -\frac{\tau}{2} \pmod{\tau}$, $A(-ia) = -\frac{\tau}{2} - \pi i \pmod{\tau, \pmod{2\pi i}}$;
- $A((\infty, +)) = \frac{\pi i}{2}$.

Обозначим через $K = \frac{\tau}{2} + \pi i$ риманову константу поверхности X . Отождествляя верхний лист X с комплексной плоскостью, введем две функции

$$\alpha^b(k) = \theta \left(A(k) + \frac{\tau}{2} - K - \frac{itb}{2} \right) \theta \left(A(k) + \frac{\tau}{2} + \pi i - K - \frac{itb}{2} \right),$$

$$\beta^b(k) = \theta \left(-A(k) + \frac{\tau}{2} - K - \frac{itb}{2} \right) \theta \left(-A(k) + \frac{\tau}{2} + \pi i - K - \frac{itb}{2} \right),$$

где величина $b \in \mathbb{R}$ будет определена позднее, а $A(k) = A((k, +))$ при $k \in \mathbb{C}$.

Очевидно, что обе функции α^0 и β^0 имеют нули первого порядка в локальной переменной римановой поверхности X в точках $\pm ia$. Более того,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^b(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta^b(k) = \theta \left(\frac{\pi i}{2} + \frac{itb}{2} \right) \theta \left(-\frac{\pi i}{2} + \frac{itb}{2} \right). \quad (4.51)$$

Используя первые три свойства отображения Абеля, имеем

$$\alpha_+^b(k) = \beta_-^b(k) \text{ и } \beta_+^b(k) = \alpha_-^b(k) \text{ при } k \in \Sigma_{ac} = \Sigma_{ac}^U \cup \Sigma_{ac}^L. \quad (4.52)$$

$$\frac{\alpha_+^b(k)}{\alpha_+^0(k)} = e^{-ibt} \frac{\alpha_-^b(k)}{\alpha_-^0(k)} \text{ и } \frac{\beta_+^b(k)}{\beta_+^0(k)} = e^{ibt} \frac{\beta_-^b(k)}{\beta_-^0(k)} \text{ при } k \in \Sigma_a, \quad (4.53)$$

$$\alpha^b(-k) = \beta^b(k) \text{ при } k \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_c. \quad (4.54)$$

Введем функцию

$$\gamma(k) = \sqrt[4]{\frac{k^2 + a^2}{k^2 + c^2}}, \quad (4.55)$$

однозначно определенную на множестве $\mathbb{C} \setminus \Sigma_{ac}$ условием $\arg \gamma(0) = 0$.

Эта функция удовлетворяет условию скачка

$$\begin{aligned} \gamma_+(k) &= i\gamma_-(k), & k \in \Sigma_{ac}^U \\ \gamma_+(k) &= -i\gamma_-(k), & k \in \Sigma_{ac}^L. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Сопоставляя формулы (4.51)–(4.56) мы приходим к выводу, что

$$m^{(3)}(k) = \left(\gamma(k) \frac{\alpha^{\hat{B}}(k) \alpha^0(\infty)}{\alpha^0(k) \alpha^{\hat{B}}(\infty)}, \gamma(k) \frac{\beta^{\hat{B}}(k) \beta^0(\infty)}{\beta^0(k) \beta^{\hat{B}}(\infty)} \right) \quad (4.57)$$

является решением задачи $m_+^{(3)}(k) = m_-^{(3)}(k)v^{(3)}(k)$, где (см. (4.48))

$$v^{(3)}(k) = v^{(2)}(k), \quad k \in \Sigma_c, \quad (4.58)$$

$$m^{(3)}(k) \rightarrow (1, 1), \quad k \rightarrow \infty; \quad m^{(3)}(-k) = m^{(3)}(k)\sigma_1, \quad k \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_c.$$

Условие симметрии выполнено с учетом (4.54), условие нормировки очевидно. Кроме того, обе компоненты векторнозначной функции $m^{(3)}(k)$ ограничены всюду, кроме малых окрестностей точек $\pm ia$, $\pm ic$, где они имеют особенности вида $(k - \zeta)^{-1/4}$, где $\zeta \in \{ic, ia, -ic, -ia\}$.

В итоге получаем, что

$$\begin{aligned} m_1^{(3)}(k) &= \sqrt[4]{\frac{k^2 + a^2}{k^2 + c^2}} \frac{\theta\left(A(k) - i\pi - \frac{it\hat{B}}{2}\right) \theta\left(A(k) - \frac{it\hat{B}}{2}\right) \theta^2\left(\frac{\pi i}{2}\right)}{\theta(A(k) - i\pi) \theta(A(k)) \theta\left(\frac{\pi i}{2} - \frac{it\hat{B}}{2}\right) \theta\left(\frac{\pi i}{2} + \frac{it\hat{B}}{2}\right)}, \\ m_2^{(3)}(k) &= \sqrt[4]{\frac{k^2 + a^2}{k^2 + c^2}} \frac{\theta\left(-A(k) - i\pi - \frac{it\hat{B}}{2}\right) \theta\left(-A(k) - \frac{it\hat{B}}{2}\right) \theta^2\left(\frac{\pi i}{2}\right)}{\theta(-A(k) - i\pi) \theta(-A(k)) \theta\left(\frac{\pi i}{2} - \frac{it\hat{B}}{2}\right) \theta\left(\frac{\pi i}{2} + \frac{it\hat{B}}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Нас интересуют члены порядка $\frac{1}{k}$ в разложении этого вектора при $k \rightarrow +i\infty$. Пусть $\tilde{\Gamma}$ — нормировочная константа из абелева интеграла, то есть

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}(\xi) = -\pi \left(\int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{(c^2 - s^2)(a^2 - s^2)}} \right)^{-1} < 0.$$

Так как $w(k) = k^2(1 + o(1))$ при $k \rightarrow +i\infty$, то

$$A(k) - A(+\infty) = A(k) - \frac{\pi i}{2} = -\frac{\tilde{\Gamma}}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

и

$$\frac{\theta\left(\frac{\pi i}{2}\right)}{\theta(A(k))} = 1 + \frac{\tilde{\Gamma}}{k} \frac{d}{du} \log \theta(u) \Big|_{u=\frac{\pi i}{2}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Раскладывая подобным же образом другие тэта-функции, и принимая во внимание, что $\gamma(k) = 1 + O(k^{-2})$ при больших k , получаем

$$m_1^{(3)}(k) = 1 + \frac{\left(\hat{E}\left(\frac{\pi i}{2}\right) - \hat{E}\left(\frac{\pi i}{2} - \frac{it\hat{B}}{2}\right)\right)}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$m_2^{(3)}(k) = 1 - \frac{\left(\hat{E}\left(\frac{\pi i}{2}\right) - \hat{E}\left(\frac{\pi i}{2} - \frac{it\hat{B}}{2}\right)\right)}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

где

$$\hat{E}(u) = \hat{E}(u, \xi) = \tilde{\Gamma} \frac{d}{du} \log (\theta(u)\theta(u - i\pi)).$$

Чтобы проверить, что эти коэффициенты этих асимптотик вещественны на мнимой оси, напомним, что $\theta(u) = \theta_3\left(\frac{u}{2\pi i}\right)$, где (см. [1])

$$\theta_3(v) = \theta_3(v | \tau_1) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp\{(m^2 \tau_1 + 2mv)\pi i\}, \quad \tau_1 = \tau_1(\xi) = \frac{\tau(\xi)}{2\pi i} \in i\mathbb{R}_+.$$

Так как

$$\tau_1(\xi) = - \int_{-c^2}^{-a^2(\xi)} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda + c^2)(\lambda + a^2(\xi))}} \left(\int_{-a^2(\xi)}^0 \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda + c^2)(\lambda + a^2(\xi))}} \right)^{-1}, \quad (4.59)$$

то

$$\frac{d}{du} \theta(u) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dv} \theta_3(v) \Big|_{v=\frac{u}{2\pi i}}$$

и

$$m^{(3)}(k) = (1, 1) + \frac{E\left(\frac{1}{4}\right) - E\left(\frac{1}{4} - \frac{tB+\Delta}{4\pi}\right)}{ik} (1, -1) + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

где

$$E(v) = E(v, \xi) = \frac{\tilde{\Gamma}}{2\pi} \frac{d}{dv} \log \left(\theta_3(v) \theta_3\left(v - \frac{1}{2}\right) \right) \quad (4.60)$$

является вещественнозначной при $v \in \mathbb{R}$.

Так как вне малых окрестностей точек $\pm ic, \pm ia$ решение модельной задачи $m^{(3)}(k)$ аппроксимирует решение $m^{(2)}(k)$ задачи (4.47)–(4.48), то остается пройти в обратном порядке наши шаги трансформаций в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$m(k) \begin{pmatrix} \Lambda^{-1}(k) & 0 \\ 0 & \Lambda(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{-1}(k, t) & 0 \\ 0 & d(k, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{-1}(k) & 0 \\ 0 & F(k) \end{pmatrix} = m^{(2)}(k),$$

где асимптотическое поведение $d(k, t)$ и $F(k)$ описано в (4.32) и (4.42)–(4.44). Следовательно, при $\frac{x}{12t} = \xi$, мы имеем

$$m(k, x, t) = (1, 1) + \left(\frac{tz(\xi) - E\left(\frac{1}{4} - \frac{tB+\Delta}{4\pi}\right) + Y(\xi)}{ik} \right) (1, -1) + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad (4.61)$$

где

$$Y(\xi) = E\left(\frac{1}{4}\right) + y(\xi) - 2 \sum_{j=1}^N \kappa_j.$$

Формула (4.61) вместе с (4.3) позволяет получить асимптотическое поведение функции $\int_x^\infty q(s, t) ds$. Чтобы получить асимптотику самого решения $q(x, t)$, продифференцируем (4.61) по x , учитывая, что для любой гладкой функции $p(\xi)$ выполнено $\frac{d}{dx} p(\xi) = O\left(\frac{1}{t}\right)$. Таким образом,

$$q(x, t) = -\frac{1}{24\pi} E' \left(\frac{1}{4} - \frac{tB(\xi) + \Delta(\xi)}{4\pi} \right) B'(\xi) + \frac{1}{6} z'(\xi) + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad (4.62)$$

где

$$E'(v) = -\Gamma(\xi) \frac{d^2}{dv^2} \log \left(\theta_3\left(v \mid \tau_1(\xi)\right) \theta_3\left(\left(v - \frac{1}{2}\right) \mid \tau_1(\xi)\right) \right)$$

и

$$\Gamma(\xi) = -\frac{1}{2} \left(\int_{-a(\xi)}^{a(\xi)} ((c^2 - s^2)(a^2(\xi) - s^2))^{-1/2} ds \right)^{-1}. \quad (4.63)$$

Формулу (4.62) можно упростить используя следующую формулу сложения тэта-функций ([20] формула (1.4.3))

$$\theta_3(z + w \mid \frac{\tau}{2})\theta_3(z - w \mid \frac{\tau}{2}) = \theta_3(2z \mid \tau)\theta_3(2w \mid \tau) + \theta_2(2z \mid \tau)\theta_2(2w \mid \tau),$$

где

$$\theta_2(z \mid \tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp\left\{\pi i \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i \left(m + \frac{1}{2}\right) z\right\}.$$

Так как $\theta_2(\frac{1}{2} \mid \tau) = 0$, то

$$\theta_3(u \mid \frac{\tau}{2})\theta_3(u - \frac{1}{2} \mid \frac{\tau}{2}) = \theta_3(2u - \frac{1}{2} \mid \tau)\theta_3(\frac{1}{2} \mid \tau).$$

Из последней формулы следует, что

$$\log \left(\theta_3(v \mid \tau_1(\xi)) \theta_3\left(v - \frac{1}{2} \mid \tau_1(\xi)\right) \right) = \log \theta_3(2v - \frac{1}{2} \mid 2\tau_1(\xi)) + f(\xi).$$

Подставляя сюда $v = \frac{1}{4} - \frac{tB(\xi) + \Delta(\xi)}{4\pi}$ и используя (4.62), получаем следующий результат:

Теорема 4.3. Пусть начальный профиль задачи (3.1)-(3.2) удовлетворяет условиям (4.1) и (2.3) с $m = 4$ и $n = 7$, и пусть $q(x, t)$ — это решение данной задачи. Тогда в области $-6c^2 + \varepsilon < \frac{x}{t} < 4c^2 - \varepsilon_1$ имеет место следующая асимптотическая формула:

$$q(x, t) = \frac{\Gamma(\xi)}{6\pi} \frac{d^2}{dv^2} \log \theta_3 \left(\frac{tB(\xi) + \Delta(\xi)}{2\pi} + v \right) \Big|_{v=0} \frac{d}{d\xi} B(\xi) - \frac{1}{6} \frac{d}{d\xi} z(\xi) + o(1). \quad (4.64)$$

Здесь $\theta_3(v) = \theta_3(v \mid \tau(\xi))$, где $\tau(\xi) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{b}} d\omega$, где $d\omega$ — нормированный голоморфный дифференциал (4.49). Функция $\Gamma(\xi) > 0$, определена

формулой (4.63) и

$$B(\xi) = 24 \int_{a(\xi)}^c \left(\xi + \frac{c^2 - a^2(\xi)}{2} - s^2 \right) \sqrt{\frac{s^2 - a^2(\xi)}{c^2 - s^2}} ds, \quad (4.65)$$

$$z(\xi) = \frac{12\xi(c^2 - a(\xi)^2) + 3c^4 + 9a(\xi)^4 - 6a(\xi)^2c^2}{2}, \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\xi) = & 2 \int_{a(\xi)}^c \frac{\log \left(|\bar{T}(is)T_1(is)| \left(\prod_{j=1}^N \frac{s - \kappa_j}{s + \kappa_j} \right)^2 \right)}{\sqrt{(c^2 - s^2)(s^2 - a(\xi)^2)}} ds \\ & \times \left(\int_{-a(\xi)}^{a(\xi)} \frac{ds}{\sqrt{(c^2 - s^2)(a^2(\xi) - s^2)}} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.67)$$

являются вещественнозначными. Во всех формулах для Γ , B , z и Δ взяты положительные значения корня.

4.5. Сравнение с формулой Итса-Матвеева.

Цель этого параграфа - сравнить полученную в теореме 4.3 асимптотику с полученными на физическом уровне строгости для начальных данных, представляющих собой чистую ступеньку, формулами Гуревича-Питаевского (1.8), (1.9), а также со стандартным однозонным решением уравнения КдФ (см., например, [80], [28], [23]). Напомним сначала хорошо известную формулу Итса-Матвеева для конечнозонного решения. Чтобы упростить предстоящее сравнение этой формулы с (4.64), предположим, что спектр этого однозонного решения — это множество $\sigma = [-c^2, -a^2(\xi)] \cup [0, \infty)$. Напомним, что функция $a(\xi)$ определена неявно через соотношение

$$\int_{a(\xi)}^0 \left(\xi + \frac{c^2 - a^2(\xi)}{2} - s^2 \right) \sqrt{\frac{s^2 - a^2(\xi)}{c^2 - s^2}} ds = 0. \quad (4.68)$$

Пусть $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\xi)$ — это эллиптическая риманова поверхность, порожденная функцией

$$\mathcal{R}(\lambda) := \mathcal{R}(\lambda, \xi) = \sqrt{\lambda(\lambda + c^2)(\lambda + a^2(\xi))},$$

где разрезы проведены вдоль спектра σ , а функция $\mathcal{R}(\lambda)$ принимает положительные значения на верхнем берегу разреза вдоль интервала $[0, \infty)$. Точку на \mathbb{M} будем обозначать через $p = (\lambda, \pm)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, а ее проекцию на $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — через $\pi(p) = \lambda$. Точка инволюции обозначается как $p^* = (\lambda, \mp)$ для $p = (\lambda, \pm)$. Множества

$$\Pi_U = \{(\lambda, +) \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma\} \subset \mathbb{M}, \quad \Pi_L = \{p^* \mid p \in \Pi_U\},$$

называются верхним и нижним листами соответственно. Введем канонический базис \mathfrak{a} и \mathfrak{b} циклов на \mathbb{M} . Цикл \mathfrak{b} обходит интервал $[-c^2, -a^2]$ по верхнему листу по часовой стрелке, а цикл \mathfrak{a} дополняет \mathfrak{b} , проходя вдоль лакуны от $-a^2$ до 0 в положительном направлении по нижнему листу, и обратно от 0 до $-a^2$ по верхнему. Далее, пусть $d\omega$ — это голоморфный дифференциал на \mathbb{M} , нормированный условием $\int_{\mathfrak{a}} d\omega = 2\pi i$. Очевидно, что

$$d\omega = \tilde{\Gamma} \frac{d\lambda}{\mathcal{R}(\lambda)}, \quad \tilde{\Gamma} = 2\pi i \left(\int_{\mathfrak{a}} \frac{d\lambda}{\mathcal{R}(\lambda)} \right)^{-1} > 0, \quad (4.69)$$

и

$$\tilde{\tau} = \int_{\mathfrak{b}} d\omega < 0. \quad (4.70)$$

Определим теперь тэта-функцию $\theta(z) = \theta(z \mid \tilde{\tau})$ по формуле (4.50). Напомним, что эта функция четная и принимает вещественные значения при $z \in i\mathbb{R} \cup \mathbb{R}$.

Далее, согласно [80], введем на поверхности \mathbb{M} два мероморфных дифференциала второго рода $d\Omega_1$ и $d\Omega_3$ с нулевыми \mathfrak{a} -периодами и единственным полюсом на бесконечности:

$$d\Omega_1 = dk + O(1)dk^{-1}, \quad d\Omega_3 = dk^3 + O(1)dk^{-1}, \quad k = i\sqrt{\lambda} \rightarrow \infty.$$

Можно показать, что

$$d\Omega_1 = \frac{i}{2} \frac{\lambda - h}{\mathcal{R}(\lambda)} d\lambda, \quad d\Omega_3 = -\frac{3i}{2} \frac{(\lambda - \nu_1)(\lambda - \nu_2)}{\mathcal{R}(\lambda)} d\lambda, \quad (4.71)$$

где

$$h = \int_{\mathfrak{a}} \frac{\lambda d\lambda}{\mathcal{R}(\lambda)} \left(\int_{\mathfrak{a}} \frac{d\lambda}{\mathcal{R}(\lambda)} \right)^{-1} \in (-a^2, 0), \quad (4.72)$$

а точки $\nu_j \in \mathbb{R}$ выбраны таким образом, чтобы $\int_a d\Omega_3 = 0$ и

$$2\nu_1 + 2\nu_2 + c^2 + a^2 = 0. \quad (4.73)$$

Последнее равенство гарантирует отсутствие члена порядка $\lambda^{-1/2}d\lambda$ в асимптотическом разложении для $d\Omega_3$. Заметим, что по меньшей мере одна из точек ν_i лежит в лакуне $(-a^2, 0)$. Обозначим

$$iV = \int_b d\Omega_1, \text{ и } iW = \int_b d\Omega_3. \quad (4.74)$$

Величины V и W называются волновым числом и частотой. Очевидно, что $V, W \in \mathbb{R}$.

Теперь введем отображение Абеля $A(p) = \int_\infty^p d\omega$. Пусть p_0 — это некая точка на \mathbb{M} с проекцией в лакуну, $\pi(p_0) \in [-a^2, 0]$. Как показано в [20], для любой такой точки p_0 значение $A(p_0) + \mathcal{K}$ является чисто мнимым, где $\mathcal{K} = \frac{\tau}{2} + \pi i$ — это константа Римана. Формула Итса-Матвеева для однозонного решения со спектром на множестве σ , и точка дивизора p_0 выглядят следующим образом (cf. [80], [28]):

$$q_{IM}(x, t) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \log \theta (iVx - 4iWt + A(p_0) - \mathcal{K}) - a^2 - c^2 - 2h, \quad (4.75)$$

где h определено в (4.72).

Изучим теперь более детально формулу (4.64). Обозначим $-a^2(\xi) = \gamma(\xi) := \gamma$,

$$\mu = -\xi - \frac{c^2 + \gamma}{2}, \quad (4.76)$$

и положим $\lambda = -s^2$ в (4.28). Мы получим формулу

$$\int_\gamma^0 G(\lambda) d\lambda = 0, \quad G(\lambda, \xi) := \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \gamma)}{\mathcal{R}(\lambda)}, \quad (4.77)$$

или, в эквивалентном виде,

$$F(\gamma, \xi) := \int_\gamma^0 \left(\lambda + \xi + \frac{\gamma + c^2}{2} \right) \sqrt{\frac{\lambda - \gamma}{\lambda(\lambda + c^2)}} d\lambda = 0. \quad (4.78)$$

Уравнение (4.78) неявно определяет функцию $\gamma(\xi)$, и, соответственно, функцию $\mu(\xi)$ через (4.76).

Лемма 4.6. При $\xi \in (-c^2/2, c^2/3)$ функция $\gamma(\xi)$ монотонно убывает от 0 до $-c^2$, причем $\mu(\xi) \in (\gamma(\xi), 0)$. Кроме того,

$$\frac{d}{d\xi}\gamma(\xi) = 4\frac{h(\xi) - \gamma(\xi)}{3\gamma(\xi) + 2\xi + c^2}, \quad (4.79)$$

где функция $h(\xi)$ определена формулой (4.72) с $\mathcal{R}(\lambda) = \sqrt{\lambda(\lambda - \gamma(\xi))(\lambda + c^2)}$.

Доказательство. Существование и единственность функции $\gamma(\xi)$ доказано в [77]. Дифференцирование формулы (4.78) по ξ приводит к формуле $\frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{\partial F}{\partial \xi} \left(\frac{\partial F}{\partial \gamma}\right)^{-1}$, откуда вытекает, что

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = \frac{4\mathcal{S}}{3\gamma + 2\xi + c^2}, \quad \mathcal{S} = \int_{\gamma}^0 \frac{\lambda - \gamma}{\mathcal{R}(\lambda)} d\lambda \left(\int_{\gamma}^0 \frac{d\lambda}{\mathcal{R}(\lambda)} \right)^{-1}.$$

Из этого следует формула (4.79). Так как $\mathcal{S} > 0$ при $\gamma < 0$, то для того, чтобы доказать убывание $\gamma(\xi)$, достаточно показать, что функция

$$f(\xi) = 3\gamma(\xi) + 2\xi + c^2$$

отрицательна при $\xi \in (-c^2/2, c^2/3)$, и что $\gamma(\xi)$ также отрицательна на этом интервале. Заметим, что $F(-c^2, c^2/3) = 0$, следовательно $\gamma(c^2/3) = -c^2$. Так как $f(c^2/3) = -4c^2/3 < 0$, то $\gamma'(c^2/3) < 0$. Следовательно, когда ξ убывает, начиная от точки $c^2/3$, то $\gamma(\xi)$ растет, начиная от точки $-c^2$. Функция f является непрерывной функцией от ξ , и монотонность γ может быть нарушена, только если f меняет знак. Пусть ξ_0 — это точка, где $f(\xi_0) = 0$. Тогда ξ_0 удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} 3\gamma(\xi_0) + 2\xi_0 + c^2 = 0 \\ 2\mu(\xi_0) - 2\xi_0 - c^2 - \gamma(\xi_0) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\mu(\xi_0) = \gamma(\xi_0)$. Но при $\gamma < 0$ формула (4.77) верна тогда и только тогда, когда $\mu \in (\gamma, 0)$. Это означает, что $\mu(\xi_0) = \gamma(\xi_0) = 0$, то есть $\xi_0 = -c^2/2$. \square

Беря во внимание (4.71), (4.72) и (4.73), и принимая $\gamma(\xi) = -a^2(\xi)$, введем обозначения

$$\dot{\Omega}_1(\lambda, \xi) = \frac{i \lambda - h(\xi)}{2 \mathcal{R}(\lambda, \xi)}, \quad \dot{\Omega}_3(\lambda, \xi) := -\frac{3i (\lambda - \nu_1(\xi))(\lambda - \nu_2(\xi))}{2 \mathcal{R}(\lambda, \xi)}.$$

Также напомним, что точки $\nu_j = \nu_j(\xi)$ выбраны так, чтобы

$$(a) \quad \dot{\Omega}_3(\lambda) = -\frac{3i}{2} \sqrt{\lambda} + O(\lambda^{-3/2}); \quad (b) \quad \int_a \dot{\Omega}_3(\lambda) d\lambda = 0,$$

причем условие (a) эквивалентно (4.73).

Лемма 4.7. Пусть $\gamma(\xi)$ и $\mu(\xi)$ удовлетворяют лемме (4.6). Тогда для любого $\xi \in \left(-\frac{c^2}{2}, \frac{c^2}{3}\right)$ верно представление

$$G(\lambda, \xi) := \frac{(\lambda - \mu(\xi))(\lambda - \gamma(\xi))}{\mathcal{R}(\lambda, \xi)} = \frac{2i}{3} \dot{\Omega}_3(\lambda, \xi) - 2i\xi \dot{\Omega}_1(\lambda, \xi). \quad (4.80)$$

Более того, имеет место следующая формула:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} G(\lambda, \xi) = -2i \dot{\Omega}_1(\lambda, \xi). \quad (4.81)$$

Доказательство. Согласно формуле (4.77) дифференциал $G d\lambda$ имеет нулевой \mathfrak{a} -период. Кроме того, используя формулы (4.73), (4.76) можно проверить, что $G d\lambda - \frac{2i}{3} d\Omega_3 + 2i\xi d\Omega_1$ не имеет полюсов в бесконечно удаленной точке и следовательно должна равняться нулю. Это доказывает (4.80).

Чтобы проверить (4.81), выразим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} G(\lambda, \xi) - \frac{\lambda - h(\xi)}{\mathcal{R}(\lambda, \xi)} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{(\lambda - \mu)\sqrt{\lambda - \gamma}}{\sqrt{\lambda(\lambda + c^2)}} \right) - \frac{\lambda - h}{\mathcal{R}(\lambda)} \\ &= \frac{(-2\mu' - \gamma')\lambda + 2\mu'\gamma + \mu\gamma' - 2\lambda + 2h}{2\mathcal{R}(\lambda)}. \end{aligned}$$

Из формулы (4.76) следует, что

$$2\mu' + \gamma' + 2 = 0. \quad (4.82)$$

Следовательно, чтобы проверить (4.81) нужно доказать равенство

$$2\mu'\gamma + \mu\gamma' + 2h = 0.$$

В силу (4.79), (4.82), и (4.76) получаем

$$\begin{aligned} 2\mu'\gamma + \mu\gamma' + 2h &= (-\gamma' - 2)\gamma - \gamma' \left(\xi + \frac{c^2 + \gamma}{2} \right) + 2h \\ &= -\frac{1}{2}\gamma'(3\gamma + c^2 + 2\xi) - 2\gamma + 2h = 0, \end{aligned}$$

что доказывает (4.81). \square

Лемма 4.8. Пусть $B(\xi)$, $\Gamma(\xi)$ и $z(\xi)$ определены формулами (4.65), (4.63) и (4.66) соответственно. Пусть $V(\xi)$ и $W(\xi)$ — это волновое число и частота, определенные в (4.74), а $h(\xi)$ задано формулой (4.72). Тогда имеют место тождества:

$$tB(\xi) = -4W(\xi)t + V(\xi)x, \quad (4.83)$$

$$(a) \frac{d}{d\xi}B(\xi) = 12V(\xi), \quad (b) 4\pi\Gamma(\xi) = -V(\xi), \quad (4.84)$$

$$\frac{1}{6} \frac{d}{d\xi}z(\xi) = c^2 + a^2(\xi) + 2h(\xi). \quad (4.85)$$

Доказательство. Чтобы получить (4.83), сделаем замену переменных $\lambda = -s^2$ в (4.65), и примем во внимание формулы (4.80), (4.76), формулу $\xi = \frac{x}{12t}$, и определение \mathfrak{b} -периода римановой поверхности $\mathbb{M}(\xi)$. Тогда

$$\begin{aligned} tB(\xi) &= -12t \int_{-a^2}^{-c^2} (\lambda - \mu) \sqrt{\frac{-a^2 - \lambda}{-\lambda(\lambda + c^2)}} d\lambda = 12t \int_{-c^2}^{\gamma} G(\lambda, \xi) d\lambda \\ &= 4it \int_{\mathfrak{b}} d\Omega_3 - ix \int_{\mathfrak{b}} d\Omega_1 = -4tW(\xi) + xV(\xi). \end{aligned}$$

Отсюда следует (4.83). Формула (4.84), (a) следует из (4.80) и (4.81):

$$\frac{d}{d\xi}B(\xi) = 12 \frac{d}{d\xi} \int_{-c^2}^{\gamma} G(\lambda, \xi) d\lambda = 12\gamma'(\xi)G(\gamma(\xi), \xi) - 12i \int_{\mathfrak{b}} d\Omega_1 = 12V(\xi).$$

Далее, по определению \mathfrak{a} -периода, формула (4.63) преобразуется в

$$\Gamma(\xi) = \left(2 \int_0^{-a^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{-\lambda(\lambda + c^2)(\lambda + a^2)}} \right)^{-1} = \frac{i}{\int_{\mathfrak{a}} \frac{d\lambda}{\mathcal{R}(\lambda)}} = \frac{\tilde{\Gamma}}{2\pi}, \quad (4.86)$$

где $\tilde{\Gamma}$ — нормирующая константа из (4.69). С другой стороны, формулы (4.69), (4.71) и теорема о вычетах ([64]) дают

$$\int_{\mathfrak{a}} d\omega \int_{\mathfrak{b}} d\Omega_1 = 2\pi i \int_{\mathfrak{b}} d\Omega_1 = 2\pi i \operatorname{Res}_{\infty} \left(\dot{\Omega}_1(p) \int_{\infty}^p d\omega \right), \quad p = (\lambda, +).$$

В локальном параметре $z = \lambda^{-1/2}$ при $z \rightarrow 0$, мы имеем следующее разложение:

$$d\Omega_1 = \left(\frac{i}{2\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \right) d\lambda = \frac{-i}{z^2}(1 + o(1))dz,$$

и

$$\int_{\infty}^{\lambda} d\omega = -\frac{2\tilde{\Gamma}}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) = -2\tilde{\Gamma}z(1 + o(1)).$$

Таким образом, в силу (4.86)

$$\text{Res}_{\infty} \left(\dot{\Omega}_1(p) \int_{\infty}^p d\omega \right) = -2i\tilde{\Gamma} = -4\pi i\Gamma.$$

Вместе с формулой (4.74) это доказывает тождество (4.84), (b). Чтобы доказать оставшуюся формулу (4.85), выразим $z(\xi)$ через $\gamma(\xi)$ и применим (4.79). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} z(\xi) &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} (12\xi(c^2 + \gamma(\xi)) + 3c^4 + 9\gamma(\xi)^2 + 6\gamma(\xi)c^2) \\ &= 6(c^2 + \gamma(\xi)) + (6\xi + 9\gamma(\xi) + 3c^2) \gamma'(\xi) \\ &= 6(c^2 + \gamma(\xi)) + 12(h(\xi) - \gamma(\xi)) = 6(c^2 + a^2(\xi)) + 12h(\xi). \end{aligned}$$

□

Теперь мы готовы сравнить формулу (4.64) с (4.75). Сравнивая периоды τ , определенный в (4.59) и $\tilde{\tau}$, определенный в (4.69)-(4.70) мы видим, что $2\pi i\tau = \tilde{\tau}$, и, следовательно, $\theta(z | \tilde{\tau}) = \theta_3\left(\frac{z}{2\pi i} | \tau\right)$. Положим

$$\mathcal{B}(\xi) = \frac{\Gamma(\xi)}{6\pi} \left(\frac{d}{d\xi} B(\xi) \right), \quad \mathcal{C}(\xi) = \frac{1}{6} \frac{d}{d\xi} z(\xi). \quad (4.87)$$

Для сокращения записи, обозначим главный член асимптотики в формуле (4.64) через $q_{RH}(x, t)$ (индекс означает, что асимптотика получена через задачу Римана-Гильберта). Функция $q_{RH}(x, t)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} q_{RH}(x, t) &= \mathcal{B}(\xi) \frac{d^2}{dv^2} \log \theta_3 \left(\frac{itB(\xi) + i\Delta(\xi) + 2i\pi v}{2\pi i} \right) \Big|_{v=0} + \mathcal{C}(\xi), \\ &= -4\pi^2 \mathcal{B}(\xi) \frac{d^2}{dv^2} \log \theta(itB(\xi) + i\Delta(\xi) + v) \Big|_{v=0} + \mathcal{C}(\xi). \end{aligned} \quad (4.88)$$

С другой стороны, согласно (4.85) мы имеем

$$\begin{aligned} q_{IM}(x, t) - \mathcal{C}(\xi) & \\ &= -2(iV(\xi))^2 \frac{d^2}{dv^2} \log \theta (iV(\xi)x - 4iW(\xi)t - A(p_0, \xi) - \mathcal{K}(\xi) + v) |_{v=0}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Подставляя (4.83) и (4.84) в (4.87), а затем в (4.88), мы получаем $\mathcal{B}(\xi) = -V^2(\xi)$ и $itB(\xi) = iV(\xi)x - 4iW(\xi)t$. Таким образом, $q_{RH}(x, t) = q_{IM}(x, t)$ тогда и только тогда, когда существует точка p_0 , $\pi(p_0) \in [-a^2, 0]$, такая, что выполнено равенство

$$A(p_0, \xi) - \mathcal{K}(\xi) = i\Delta(\xi) \pmod{2\pi i},$$

где $\Delta(\xi)$ определено в (4.67). Так как

$$A(-c^2) = \pi i \pmod{2\pi i}, \quad A(-a^2) - A(-c^2) = \frac{\tau}{2}, \quad \mathcal{K} = \frac{\tau}{2} - \pi i,$$

и $\Delta(\xi)$ принимает вещественные значения, то точка $p_0(\xi)$ может быть найдена только как решение проблемы обращения Якоби (см. [64]):

$$\int_{-a^2(\xi)}^{p_0(\xi)} d\omega = i\Delta(\xi). \quad (4.90)$$

Итак, мы получили, что при любом фиксированном $\xi \in (-c^2/2, c^2/3)$ при $\frac{x}{12t} = \xi$ функция $q_{RH}(x, t)$ является стандартным однозонным решением уравнения КдФ, ассоциированным со спектром $[-c^2, -a^2(\xi)] \cup [0, \infty)$ и начальной точкой дивизора $p_0(\xi)$. Тем самым, теорема 4.3 эквивалентна следующей теореме:

Теорема 4.4. В области $-6c^2 + \varepsilon < \frac{x}{t} < 4c^2 - \varepsilon_1$ при $t \rightarrow \infty$ имеет место следующая асимптотическая формула

$$\begin{aligned} q(x, t) &= -2 \frac{d^2}{dx^2} \log \theta (iV(\xi)x - 4iW(\xi)t + A(p_0, \xi) - \mathcal{K}(\xi)) \\ &\quad - a(\xi)^2 - c^2 - 2h(\xi) + o(1). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Заметим, что так как $\theta(z + 2\pi i) = \theta(z)$, то $q_{RH}(x, t)$ является периодической функцией по x и t с периодами $\frac{2\pi}{V(\xi)}$ и $\frac{\pi}{2W(\xi)}$ соответственно.

4.6. Сравнение с формулой Гуревича-Питаевского.

Далее найдем связь между двумя функциями: $m(\xi)$ и $a(\xi)$, которые заданы неявно в (1.9) и (4.68).

Лемма 4.9. Верно следующее тождество:

$$m^2(\xi) = \frac{a^2(\xi)}{c^2}.$$

Доказательство. Представим (4.68) в виде

$$\begin{aligned} 0 &= \left(-\frac{c^2 + a^2(\xi)}{2} + \xi \right) \int_0^{a(\xi)} \sqrt{\frac{a^2(\xi) - s^2}{c^2 - s^2}} ds \\ &+ \int_0^{a(\xi)} \sqrt{(a^2(\xi) - s^2)(c^2 - s^2)} ds = \left(\xi - \frac{c^2 + a^2(\xi)}{2} \right) I_1(\xi) + I_2(\xi). \end{aligned} \quad (4.92)$$

Обозначим $m := m(\xi) = \frac{a(\xi)}{c}$. Тогда (см. [56], формулы 781.61 и 781.22)

$$I_1 = c(E(m) - (1 - m^2)K(m)), \quad I_2 = \frac{c^3}{3}\{(m^2 - 1)K(m) + (m^2 + 1)E(m)\},$$

где $K(m)$ и $E(m)$ — это стандартные полные эллиптические интегралы параметра $0 < m < 1$. Подставляя их в (4.92), получаем

$$\begin{aligned} \xi &= c^2 \left\{ \frac{m^2 + 1}{2} - \frac{1}{3} \frac{(m^2 - 1)K(m) + (m^2 + 1)E(m)}{E(m) - (1 - m^2)K(m)} \right\} \\ &= \frac{c^2}{6} \frac{E(m)(m^2 + 1) - (1 - m^2)(m^2 + 1)K(m) + 2m^2(m^2 - 1)K(m)}{E(m) - (1 - m^2)K(m)} \\ &= \frac{c^2}{6} \left((m^2 + 1) + \frac{2m^2(m^2 - 1)K(m)}{E(m) - (1 - m^2)K(m)} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, (1.9) и (4.68) определяют одну функцию: $m(\xi) = m(\xi)$. \square

Из леммы 4.9 следует, что период (4.59) соответствует (см. [1]) эллиптическому модулю m , и справедлива следующая формула:

$$\operatorname{dn}^2(s, m) = \frac{d^2}{du^2} \log \Theta(u | \tau) + \frac{E(m)}{K(m)},$$

где

$$\Theta(u | \tau) = \theta_3 \left(\frac{u}{2K(m)} + \frac{1}{2} | \tau \right) = \theta_3 \left(\frac{u}{2K(m)} + \frac{1}{2} \right),$$

а $\theta_3(s)$ та же, что и в (4.64).

В оставшейся части раздела мы зафиксируем ξ и опустим его в обозначениях. Фиксируя ξ , мы также фиксируем $m = ac^{-1}$, а потому будем использовать обозначения $K := K(m)$, $E := E(m)$. Таким образом,

$$q_{GP}(x, t) = -\frac{c^2}{2K^2} \frac{d^2}{dv^2} \log \theta_3 \left(\frac{tc(6\xi - c^2(1 + m^2))}{K} + \frac{1}{2} + v \right) + c^2(1 - m^2) - \frac{2E}{K}. \quad (4.93)$$

Для того, чтобы убедиться, что эта формула совпадает с (4.64) (возможно с точностью до сдвига в фазе), достаточно показать, что

Лемма 4.10. Имеют место следующие равенства:

$$-\frac{c^2}{2K^2} = \frac{\Gamma}{6\pi} \frac{dB}{d\xi}; \quad (4.94)$$

$$-\frac{6c\xi - c^3(1 + m^2)}{K} = \frac{B}{2\pi}; \quad (4.95)$$

$$c^2 - \frac{E}{K} = -h, \quad (4.96)$$

где B , Γ , и h определены в (4.65), (4.63), и (4.72), соответственно.

Доказательство. Из формул (4.84), (4.63), и 781.01([56]) следует, что

$$\frac{\Gamma}{6\pi} \frac{dB}{d\xi} = -8\Gamma^2 = -\frac{1}{2} \left(\int_0^a \frac{ds}{\sqrt{(c^2 - s^2)(a^2 - s^2)}} \right)^{-2} = -\frac{c^2}{2K^2}. \quad (4.97)$$

Далее, из формулы (4.72) и формулы 781.11([56]) имеем:

$$-h = \int_0^a \frac{s^2 ds}{\sqrt{(c^2 - s^2)(a^2 - s^2)}} \left(\int_0^a \frac{ds}{\sqrt{(c^2 - s^2)(a^2 - s^2)}} \right)^{-1} = \frac{c(K - E)}{\frac{1}{c}K}.$$

Отсюда следует равенство (4.96). Чтобы доказать (4.95), используем (4.83) и (4.84). А именно,

$$\frac{tB}{2\pi} = -2\Gamma x - 4Wt = -2(x - 2(c^2 + a^2)t)\Gamma.$$

Здесь мы использовали уравнение (4.4.13) из [28], из которого, в свою очередь, вытекает равенство $W = (c^2 + a^2)\Gamma$. Из формулы (4.97) получаем

$\Gamma = \frac{c}{4K}$. Следовательно,

$$\frac{B}{2\pi} = -\frac{tc}{K} (6\xi - (c^2 + a^2)),$$

что доказывает равенство (4.95). Заметим, что противоположный знак по сравнению с (4.93) у первого слагаемого в θ_3 не существенен, так как θ_3 четная функция. \square

Мы доказали, что формулы (4.64) и (1.8) определяют одну и ту же функцию, с точностью до сдвига фазы. А именно, на месте слагаемого $(2\pi)^{-1}\Delta$ в аргументе тэта-функции для $q_{\text{RH}}(x, t)$, в той же формуле для $q_{\text{GP}}(x, t)$ имеем слагаемое $\frac{1}{2}$. Напомним теперь, что коэффициенты прохождения в случае "чистой" ступеньки в качестве потенциала имеют вид

$$T(k) = \frac{2ik}{w(k)}, \quad T_1(k) = \frac{2i\sqrt{k^2 + c^2}}{w(k)}, \quad w(k) = ik + i\sqrt{k^2 + c^2}.$$

Так как в (4.67) $k = is$, $s \in [0, c]$, то $|w(k)|^2 = |-s + i\sqrt{c^2 - s^2}|^2 = c^2$, и $|T(is)T_1(is)| = 4sc^{-2}\sqrt{c^2 - s^2}$, $s \in [0, c]$. Следовательно, фазовый сдвиг для "чистой" ступеньки должен быть равен

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{ps}}{2\pi} &= \frac{\int_a^c \log(4sc^{-2}\sqrt{c^2 - s^2}) ((c^2 - s^2)(s^2 - a^2))^{-1/2} ds}{2\pi \int_0^a ((c^2 - s^2)(s^2 - a^2))^{-1/2} ds} \\ &= \frac{1}{2\pi K(m)} \int_m^1 \frac{\log(4s\sqrt{1 - s^2})}{\sqrt{(1 - s^2)(s^2 - m^2)}} ds. \end{aligned}$$

4.7. Асимптотики в области $x < -6c^2t$.

Чтобы изучить асимптотическое поведение решения $q(x, t)$ в этой области, используем постановку задачи Римана-Гильберта, связанную с левыми данными рассеяния и относительно параметра $k_1 = \sqrt{k^2 + c^2}$. Тогда непрерывный спектр оператора $L(0)$ совпадает с множеством $\text{Im}(k_1) = 0$ а дискретный спектр состоит из точек $i\kappa_{1,j} = i\sqrt{\kappa_j^2 - c^2}$ (напомним, что $\kappa_j^2 > c^2$). Будем считать данные рассеяния функциями от k_1 . Рассмотрим

векторнозначную функцию

$$m(k_1, x, t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} T_1(k_1, t)\phi(k_1, x, t)e^{-ik_1x} & \phi_1(k_1, x, t)e^{ik_1x} \\ \phi_1(-k_1, x, t)e^{-ik_1x} & T_1(-k_1, t)\phi(-k_1, x, t)e^{ik_1x} \end{pmatrix}, & k_1 \in \mathbb{C}^U, \\ \begin{pmatrix} \phi_1(-k_1, x, t)e^{-ik_1x} & T_1(-k_1, t)\phi(-k_1, x, t)e^{ik_1x} \\ \phi_1(k_1, x, t)e^{-ik_1x} & T_1(k_1, t)\phi(k_1, x, t)e^{ik_1x} \end{pmatrix}, & k_1 \in \mathbb{C}^L, \end{cases} \quad (4.98)$$

где $\mathbb{C}^U := \{k_1 : \text{Im}(k_1) > 0\}$, $\mathbb{C}^L := \{k_1 : \text{Im}(k_1) < 0\}$.

Эта функция имеет следующее асимптотическое поведение:

$$m(k_1, x, t) = (1, 1) + \frac{1}{2ik_1} \left(\int_{-\infty}^x (q(y, t) + c^2) dy \right) (1, -1) + O\left(\frac{1}{k_1^2}\right). \quad (4.99)$$

Теорема 4.5. Пусть $\{R_1(k_1), k_1 \in \mathbb{R}; (\kappa_{1,j}, \gamma_{1,j}), 1 \leq j \leq N\}$ – левые данные рассеяния оператора $L(0)$. Пусть \mathbb{T}_j^U (соотв., \mathbb{T}_j^L) – окружности с центром в $i\kappa_{1,j}$ (соотв., $-i\kappa_{1,j}$) и радиусами $0 < \varepsilon < \frac{1}{4} \min_{j=1}^N |\kappa_{1,j} - \kappa_{1,j-1}|$, $\kappa_{1,0} = 0$. Тогда вектор $m(k_1) = m(k_1, x, t)$ определенный формулой (4.98), является единственным решением следующей задачи РГ:

Найти функцию $m(k_1)$, голоморфную вне контура $\cup_{j=1}^N (\mathbb{T}_j^U \cup \mathbb{T}_j^L) \cup \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующие условия:

1. Условие скачка $m_+(k_1) = m_-(k_1)v(k_1)$, где

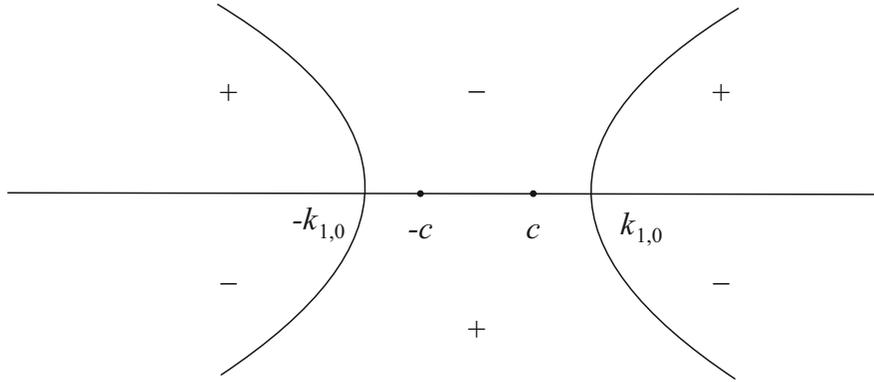
$$v(k_1) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 - |R_1(k_1)|^2 & -\overline{R_1(k_1)}e^{-t\Phi_1(k_1)} \\ R_1(k_1)e^{t\Phi_1(k_1)} & 1 \end{pmatrix}, & k_1 \in \mathbb{R} \setminus [-c, c] \\ \begin{pmatrix} 0 & -\overline{R_1(k_1)}e^{-t\Phi_1(k_1)} \\ R_1(k_1)e^{t\Phi_1(k_1)} & 1 \end{pmatrix}, & k_1 \in [-c, c] \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{i\gamma_{1,j}e^{t\Phi_1(i\kappa_{1,j})}}{k_1 - i\kappa_{1,j}} & 1 \end{pmatrix}, & k_1 \in \mathbb{T}_j^U, \\ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i\gamma_{1,j}e^{-t\Phi_1(-i\kappa_{1,j})}}{k_1 + i\kappa_{1,j}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k_1 \in \mathbb{T}_j^L, \end{cases}$$

2. условие симметрии $m(-k_1) = m(k_1)\sigma_1$,

3. условие нормировки $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} m(i\kappa) = (1 \quad 1)$.

Здесь фаза $\Phi_1(k) = \Phi_1(k_1, x, t)$ определяется равенством

$$\Phi_1(k_1) = -8ik_1^3 + 12ic^2k_1 - 24i\xi k_1, \quad \xi = \frac{x}{12t}.$$

Рис. 4.7: Знак $\text{Re}(\Phi_1(k_1))$

Доказательство. Доказательство этой теоремы сходно с доказательствами теоремы 4.1 и леммы 4.2. Оно основано на свойствах I.b) и I.c) леммы (2.4), и формулах (2.28), (3.12), (3.13). \square

Обозначим через $\pm k_{1,0} = \pm \sqrt{\frac{c^2}{2} - \xi}$ корни уравнения $\Phi'_1(k_1) = 0$. В рассматриваемой области $\xi < -\frac{c^2}{2}$ выполняется неравенство $k_{1,0} > c$. Таблица знаков $\text{Re} \Phi_1$ показана на Рис. 4.7.

Заметим, что матрица скачка на окружностях $\cup_{j=1}^N (\mathbb{T}_j^U \cup \mathbb{T}_j^L)$ экспоненциально близка к единичной при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, в отличие от предыдущих случаев, нам не требуется дальнейших преобразований на этой части контура. Так как параметр k не будет участвовать в оставшейся части этого раздела, для сокращения записи мы будем писать k вместо k_1 .

Из I.b) леммы (2.4) следует, что $1 - |R_1(k)|^2 = 0$ при $k \in [-c, c]$ и, следовательно,

$$v(k) = \begin{pmatrix} 1 - |R_1(k)|^2 & -\overline{R_1(k)} e^{-t\Phi_1(k)} \\ R_1(k) e^{t\Phi_1(k)} & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Пусть теперь $d(k)$ — это функция, аналитическая в области $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \setminus [-k_{1,0}, k_{1,0}])$, и являющаяся решением скалярной задачи РГ

$$d_+(k) = d_-(k)(1 - |R_1(k)|^2) \text{ при } k \in \mathbb{R} \setminus [-k_{1,0}, k_{1,0}] \text{ и } d(k) \rightarrow 1, k \rightarrow \infty.$$

Тогда по формуле Племелья

$$d(k) = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R} \setminus [-k_{1,0}, k_{1,0}]} \frac{\log(1 - |R_1(s)|^2)}{s - k} ds \right). \quad (4.100)$$

Так как мы предполагаем, что начальные данные исследуемой задачи Коши для уравнения КдФ достаточно гладкие, то по теореме 2.4 коэффициенты отражения достаточно хорошо убывают и $|R_1(k)| < 1$ в области интегрирования. Следовательно, интеграл под экспонентой корректно определен. Так как область интегрирования симметричная и функция $\log(1 - |R_1|^2)$ четная, то $d(-k) = d^{-1}(k)$ и матрица

$$D(k) = \begin{pmatrix} d^{-1}(k) & 0 \\ 0 & d(k) \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию симметрии леммы 4.3. Положим теперь $\tilde{m}(k) = m(k)D(k)$. Новая задача РГвыглядит следующим образом: $\tilde{m}_+(k) = \tilde{m}_-(k)\tilde{v}(k)$, где $\tilde{m}(k) \rightarrow (1, 1)$ при $k \rightarrow \infty$, $\tilde{m}(-k) = \tilde{m}(k) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и

$$\tilde{v}(k) = \begin{cases} A_-^L(k)A_+^U(k), & k \in \mathbb{R} \setminus [-k_{1,0}, k_{1,0}] \\ B^L(k)B^U(k), & k \in [-k_{1,0}, k_{1,0}] \\ D^{-1}(k)v(k)D(k), & k \in \cup_j(\mathbb{T}_j^U \cup \mathbb{T}_j^L), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} A^L(k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{R_1(k)e^{t\Phi_1(k)}}{(1-|R_1(k)|^2)d^2(k)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Omega_l^L \cup \Omega_r^L, \\ A^U(k) &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d^2(k)\overline{R_1(k)}e^{-t\Phi_1(k)}}{(1-|R_1(k)|^2)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Omega_l^U \cup \Omega_r^U, \\ B^L(k) &= \begin{pmatrix} 1 & -d^2(k)\overline{R_1(k)}e^{-t\Phi_1(k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Omega_c^L, \\ B^U(k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d^{-2(k)}R_1(k)e^{t\Phi_1(k)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Omega_c^U. \end{aligned}$$

Здесь области Ω_l^L , Ω_l^U , Ω_c^L , Ω_c^U , Ω_r^L , Ω_r^U , ограничены контурами Σ_l^L , Σ_l^U , Σ_c^L , Σ_c^U , Σ_r^L , Σ_r^U , как показано на Рис 4.8. Все контуры ориентирова-

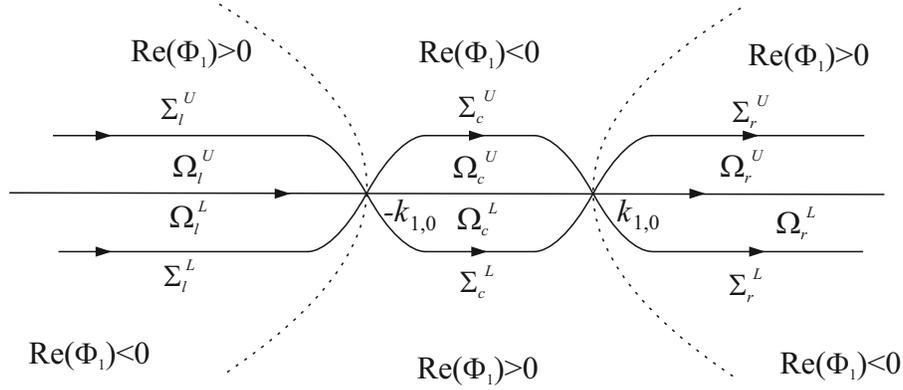


Рис. 4.8: Деформация контура в убывающей области

ны слева направо. Они симметричны относительно отображения $k \mapsto -k$ и расположены внутри полосы $|\text{Im } k| < \min\{\frac{C_0}{2}, \frac{\kappa_{1,1}}{4}\}$ ниже дискретного спектра и внутри области, где $R_1(k)$ имеет аналитическое продолжение. Также положим $\overline{R_1(k)} = R_1(-k)$ в этих областях.

Переобозначим $\tilde{m}(k)$ в соответствии с

$$\hat{m}(k) = \begin{cases} \tilde{m}(k)A^L(k), & k \in \Omega_l^L \cup \Omega_r^L, \\ \tilde{m}(k)A^U(k)^{-1}, & k \in \Omega_l^U \cup \Omega_r^U, \\ \tilde{m}(k)B^L(k), & k \in \Omega_c^L, \\ \tilde{m}(k)B^U(k)^{-1}, & k \in \Omega_c^U, \\ \tilde{m}(k), & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Теперь функция $\hat{m}(k)$ не имеет скачков при $k \in \mathbb{R}$ и все очевидным образом определенные скачки на контурах $\Sigma_l^L, \Sigma_l^U, \Sigma_c^L, \Sigma_c^U, \Sigma_r^L, \Sigma_r^U, \cup_{j=1}^N(\mathbb{T}_j^U \cup \mathbb{T}_j^L)$ экспоненциально малы по t вне малых окрестностей точек стационарной фазы $k_{1,0}$ и $-k_{1,0}$. Таким образом, модельная задача имеет тривиальное решение $\hat{m}(k) = (1, 1)$. Для больших мнимых k with $|k| > \kappa_{1,N} + 1$ имеем $\tilde{m}(k) = \hat{m}(k)$ и следовательно

$$m(k) = \tilde{m}(k)D^{-1}(k) = (d(k), d^{-1}(k))$$

для достаточно больших k . Согласно (4.100)

$$d(k_1) = 1 + \frac{1}{2ik_1} \left(-\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-k_{1,0}, k_{1,0}]} \log(1 - |R_1(s)|^2) ds \right) + O\left(\frac{1}{k_1^2}\right).$$

Сравнивая эту формулу с формулой (4.99), мы выводим требуемую асимптотику, используя теорему А.1 из [79], и дословно повторяя рассуждения из раздела 5 работы [69]. Мы получаем следующий результат:

Теорема 4.6. Пусть начальный профиль задачи (3.1)-(3.2) удовлетворяет условиям (4.1) и (2.3) с $m = 4$ и $n = 7$, и пусть $q(x, t)$ — это решение данной задачи. Тогда асимптотика в области $\frac{x}{t} + 6c^2 < -\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, выглядит следующим образом:

$$q(x, t) = -c^2 + \sqrt{\frac{4\nu(k_{1,0})k_{1,0}}{3t}} \sin(16tk_{1,0}^3 - \nu(k_{1,0}) \log(192tk_{1,0}^3) + \delta(k_{1,0})) + O(t^{-\alpha})$$

для любых $1/2 < \alpha < 1$. Здесь $k_{1,0} = \sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{x}{12t}}$ и

$$\begin{aligned} \nu(k_{1,0}) &= -\frac{1}{2\pi} \log(1 - |R_1(k_{1,0})|^2), \\ \delta(k_{1,0}) &= \frac{\pi}{4} - \arg(R_1(k_{1,0})) + \arg(\Gamma(i\nu(k_{1,0}))) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-k_{1,0}, k_{1,0}]} \log\left(\frac{1 - |R_1(\zeta)|^2}{1 - |R_1(k_{1,0})|^2}\right) \frac{1}{\zeta - k_{1,0}} d\zeta. \end{aligned}$$

4.8. Выводы.

В данном разделе исследовано асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ решения $q(x, t)$ задачи Коши для уравнения КдФ с начальными условиями $q(x)$ типа ступеньки, соответствующими так называемой ударной волне: $q(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, $q(x) \rightarrow -c^2$ при $x \rightarrow -\infty$. Результаты раздела опубликованы в работах [60, 63]. Задача исследована нелинейным методом наискорейшего спуска для осцилляционной векторной задачи Римана-Гильберта, который является вариантом метода обратной задачи рассея-

ния. Решение исследовано в режиме, когда и пространственная и временная переменные стремятся к бесконечности, но их отношение мало меняется. В этом режиме выделены три основные области в полуплоскости пространство-время, где решение имеет различное поведение. Основными результатами являются следующие:

1. Показано, что в области $4c^2t < x$ решение асимптотически представляется в виде суммы солитонов.
2. Установлено, что в области $-6c^2t < x < 4c^2t$ решение может быть представлено в виде эллиптической волны, причем при $\frac{x}{12t} = \xi \sim const$ главный член асимптотики совпадает со стандартным конечнозонным решением уравнения КдФ, ассоциированным со спектром, состоящим из двух зон $[-c^2, -a^2(\xi)] \cup [0, +\infty)$, и с дивизором Дирихле, который точно посчитан через данные рассеяния начального условия. Проведено сравнение главного члена асимптотического разложения в эллиптической зоне с формулой Гуревича-Питаевского.
3. Доказано, что в области $x < -6c^2t$ решение асимптотически близко к $-c^2$ с точностью до члена порядка $t^{-1/2}$; получена точная формула для второго члена асимптотического разложения.

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа посвящена развитию метода обратной задачи рассеяния для интегрирования уравнения Кортевега- де Фриза с начальными данными типа ступеньки и описанию асимптотического поведения его решения. Основные результаты можно подsumмировать следующим образом.

- Развита теория рассеяния для одномерного оператора Шрёдингера на всей оси с потенциалом типа ступеньки, который стремится к разным вещественным постоянным на разных полуосях. Потенциал имеет заданную гладкость $n \geq 0$ и скорость стремления к своим асимптотам, то есть заданный момент возмущений $m \geq 1$. Для потенциалов такого класса исчерпывающе решена прямая и обратная задача рассеяния, в рамках решения которой получены новые оценки на производные ядер операторов преобразования любых порядков, описаны алгебраические и аналитические свойства данных рассеяния, а также характеристические для потенциала данного класса свойства ядер уравнений Марченко. Максимально широкий класс, исследованный в диссертации — это потенциалы из $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, имеющие первый суммируемый момент возмущений. Получены улучшенные и строго доказаны существующие оценки на скорость убывания коэффициентов отражения на бесконечности в зависимости от гладкости потенциала типа ступеньки.
- Методом обратной задачи рассеяния решена задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки, принадлежащими классу $\mathcal{L}^{n_0}_{m_0}(0, -c^2)$ при $m_0 \geq 3$, $n_0 \geq m_0 + 3$. В ходе исследования этой задачи описана эволюция данных рассеяния ассоциированного оператора Шрёдингера, и выведены зависящие от времени уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко. Детальный анализ поведе-

ния ядер этих уравнений по пространственной переменной позволил точно выявить зависимость гладкости и скорости убывания возмущений решения задачи Коши от соответствующих параметров начальных данных.

- Изучено асимптотическое поведение решения задачи Коши для уравнения КдФ при $t \rightarrow \infty$ в случае начальных данных, соответствующих ударной волне. Исследование проведено нелинейным методом наискорейшего спуска, который является вариантом МОЗР. Этот метод применен для осцилляционной векторной задачи Римана-Гильберта с использованием механизма g -функции. Решение исследовано в режиме, когда и пространственная и временная переменные стремятся к бесконечности, но их отношение мало меняется. В этом режиме выделены три основные области в полуплоскости пространство-время, где решение имеет различное поведение. Доказано, что в области $-6c^2t < x < 4c^2t$ решение представимо в виде эллиптической волны, причем при $\frac{x}{12t} \sim const$ главный член асимптотики совпадает с двузонным решением уравнения КдФ, ассоциированным с дивизором Дирихле, который точно посчитан через данные рассеяния начального условия. Проведено сравнение главного члена асимптотического разложения в эллиптической зоне с формулой Гуревича-Питаевского. Показано, что в области $x < -6c^2t$ решение асимптотически близко к фоновой константе, и получена точная формула для второго члена асимптотического разложения по t . Установлено, что в области $4c^2t < x$ решение асимптотически представляется в виде суммы солитонов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций / Н. И. Ахиезер //— М.: Физматгиз.— 1970. — 303 с.
2. Базарган Дж. Прямая и обратная задачи рассеяния на всей оси для одномерного оператора Шрёдингера с потенциалом типа ступеньки/ Базарган Дж. // Доповіді НАН України—2008.— Т.4 — С. 7—11.
3. Бикбаев Р. Ф. Временная асимптотика решения нелинейного уравнения Шредингера с граничными условиями типа ступеньки / Р. Ф. Бикбаев // ТМФ — 1989. — Т. 81, № 1. — С. 3—11.
4. Бикбаев Р.Ф. Уравнение КдФ с конечнозонными граничными условиями и однопараметрические решения уравнений Уизема/ Р.Ф. Бикбаев, В. Ю. Новокшенов// В сб."Асимптотические методы решения задач математической физики". Уфа. —1989. —С. 9—23, 81—95.
5. Бикбаев Р. Ф. Асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для уравнения КдФ в классе потенциалов с конечнозонным поведением при $x \rightarrow \pm\infty$ / Р. Ф. Бикбаев, Р. А. Шарипов // ТМФ — 1989. — Т. 78, № 3. — С. 345—356.
6. Бикбаев Р.Ф. Перестройка Уизема и временная асимптотика решения нелинейного уравнения Шредингера с конечнозонным поведением при $x \rightarrow \pm\infty$ / Р.Ф. Бикбаев// Алгебра и Анализ.—1990.—Т.2, Вып.3—С. 131—143
7. Буслаев В. С. Асимптотическое поведение решений уравнения КдФ / В. С. Буслаев, В. В. Суханов// Записки науч. семинаров ЛОМИ. — 1982. — Т. 120. — С. 32—50.

8. Буслаев В. С. Обратная задача рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси / В. С. Буслаев, В. Н. Фомин // Вестник Ленинградского ун-та — 1962. — Т. 17, № 1. — С. 56–64.
9. Гладкая З.Н. О коэффициенте отражения оператора Шредингера с гладким потенциалом / Гладкая З.Н.// Доклады НАН Украины. — 2014. — № 9. — С. 7–13.
10. Гладкая З.Н. О решениях уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки / Гладкая З.Н.// Доклады НАН Украины. — 2015. — № 2 — С. 7–14.
11. Gladka Z. Long-time asymptotics for the Korteweg-de Vries equation with steplike initial data via nonlinear steepest descent / I. Egorova, Z. Gladka, V. Kotlyarov, G. Teschl // «Конференція молодих вчених – Low Temperature Physics», 4–18 травня 2012, Харків: тези доповідей. — С. 213.
12. Гладкая З.Н. Исследование асимптотического поведения при больших кременах решений уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки / И.Е. Егорова, З.Н. Гладкая, В.П. Котляров, Г. Тешл // «Fourth international conference for young mathematicians on Differential equations and applications dedicated to Ya.V. Lopatinskii», 2012, Donetsk: book of abstracts. — С. 35
13. Гладка З.М. Задачі розсіювання для операторів Шрьодінгера з потенціалами типу сходинок / З.М. Гладка // «Міжнародна конференція молодих математиків», 3–6 червня 2015, Київ: тези доповідей. — С. 140.
14. Гладкая З.Н. Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки. / З.Н. Гладкая // III International

- conference «Analysis and Mathematical Physics», 15-19 june, 2015, Kharkiv: book of abstracts. – С. 22.
15. Gladka Z. IST method in solving the Cauchy problem for KdV with steplike initial data. / Z. Gladka // International conference-school “Shilnikov workshop 2015”, 17-19 december 2015. - Сб. тезисов, Нижний Новгород, 2015. – С. 4-5.
 16. Градштейн И.С. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик.—М.: Физматгиз, 1963.—1108 с.
 17. Гуревич А.В. Распад начального разрыва в уравнении Кортевега – де Фриза / А.В. Гуревич, Л.П. Питаевский // Письма в ЖЭТФ. — 1973. — Т. 17, № 5. — С. 268—271.
 18. Гуревич А.В. Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны. /А.В. Гуревич, Л.П. Питаевский//Письма в ЖЭТФ. — 1973. — Т. 65, № 2. — С. 590-604.
 19. Гусейнов И.М. О непрерывности коэффициента отражения одномерного уравнения Шредингера/ И.М. Гусейнов// Дифф. уравнения —1983— Т.21, №11.—С. 1993—1995.
 20. Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения/ Б.А. Дубровин //Успехи математических наук. – 1981. — Т. 36. — №. 2. — С. 11-80.
 21. Захаров. В.Е. Теория солитонов. Метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л. П. Питаевский; под ред. С.П.Новикова. — М.: Наука, 1980. — 325 с.
 22. Захаров В. Е. Уравнение Кортевега-де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система. / Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. // Функциональный анализ и его приложения. – 1971. – Т. 5. – №. 4. – С. 18-27.

23. Итс А. Р. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриса/Итс А. Р., Матвеев В. Б. //Теоретическая и математическая физика. — 1975. — Т. 23. — №. 1. — С. 51-68.
24. Итс А. Р. Асимптотика решения нелинейного уравнения Шредингера и изомонодромные деформации систем линейных дифференциальных уравнений / А. Р. Итс// ДАН СССР. — 1981. — Т. 261, № 1. — С. 14—18.
25. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма—Лиувилля. /Б.М. Левитан. — М.: Наука, 1984. — 240 с.
26. Манаков С.В. Нелинейная дифракция Фраунгофера/ С.В. Манаков// Журнал эксперимент. теорет. физики — 1973. —Т. 65 —С. 1392–1398.
27. Марченко В. А. Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн / В. А. Марченко // ДАН СССР. — 1955. — Т. 104, № 5. — С. 695—698.
28. Марченко В. А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. — К.: Наукова думка, 1977. — 331 с.
29. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике / Н. И. Мухелишвили. — М.: Физматгиз, 1962. — 599 с.
30. Тахтаджян Л. А.Гамильтонов подход в теории солитонов/ Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев // М.; Наука — 1986—527 с.
31. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны/ Дж. Уизем.—М. : Мир.— 1977.—622 с.

32. Фаддеев Л. Д. О связи S-матрицы и потенциала для одномерного оператора Шредингера / Л. Д. Фаддеев // Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1964. — Т. 73. — С. 314—336.
33. Фирсова Н. Е. Обратная задача рассеяния для возмущенного оператора Хилла / Н. Е. Фирсова // Мат. заметки — 1975.— Т. 18, № 6. — С. 831—843.
34. Фирсова Н. Е. Прямая и обратная задачи рассеяния для одномерного возмущенного оператора Хилла / Н. Е. Фирсова // Мат. сборник — 1987. — Т. 58, № 2. — С. 351—388.
35. Фирсова Н. Е. О решении задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными, являющимися суммой периодической и быстроубывающей функций/ Фирсова Н. Е. // Математический сборник. — 1988. — Т. 135. — №. 2. — С. 261-268.
36. Хруслов Е.Я. Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки // Матем. сборник — 1976.— Т. 99.—№. 2.—С. 261—281.
37. Шабат А. Б. Об уравнении Кортевега-де Фриза / А. Б. Шабат // ДАН СССР. — 1973. — т. 211, № 6. — С. 1310—1313.
38. Ablowitz M. J. Asymptotic solutions of the Korteweg-de Vries equation / M. J. Ablowitz, H. Segur// Studies Appl. Math. — 1977. — Vol. 57. — P. 13—44.
39. Ablowitz M.J. Interactions and asymptotics of dispersive shock waves - Korteweg - de Vries equation/ M.J. Ablowitz, D.E. Baldwin// Phys. Lett. A —2013. — Vol. 377. — P. 555—559.
40. Andreev. K. Rarefaction Waves of the Korteweg-de Vries Equation via Nonlinear Steepest Descent [electronic resource]/ K. Andreiev, I.

- Egorova, T. L. Lange, G. Teschl// ArXiv.org, Nonlinear Sciences — 2016. — 31 p. access mode: arXiv:1602.02427
41. Aktosun T. On the Schrödinger equation with steplike potentials/T. Aktosun// J. Math. Phys. — 1999. — Vol. 40 — P. 5289–5305.
 42. Aktosun T. Small energy asymptotics for the Schrodinger equation on the line/T. Aktosun, M.Klaus// Inverse problems—2001.—Vol. 17 — P. 619–632.
 43. Boutet de Monvel A. Inverse scattering theory for one-dimensional Schrödinger operators with steplike finite-gap potential/A. Boutet de Monvel, I. Egorova, and G. Teschl, // J. Analyse Math. — 2008.— Vol. 106 — P. 271–316.
 44. Boutet-de Monvel A. Long-time asymptotics for the focusing NLS equation with time-periodic boundary condition on the half-line/A. Boutet-de Monvel, A.R. Its, V.P. Kotlyarov// Comm. Math. Phys. — 2009. — Vol. 290. — P. 479–522.
 45. R. Buckingham and S. Venakides, Long-time asymptotics of the nonlinear Schrödinger equation shock problem, *Comm. Pure Appl. Math.* 60 (2007), no. 9, — P. 1349–1414.
 46. Chadan K. Inverse problems in quantum scattering theory / K. Chadan, P. C. Sabatier. — New York: Springer-Verlag, 1989. — 499 p.
 47. Cohen A. Solutions of the Korteweg-de Vries equation with steplike initial profile /A. Cohen // Comm. Part. Diff. Eq. — 1984. — Vol. 9, № 8.— P. 751–806.
 48. Cohen A. Scattering and inverse scattering for steplike potentials in the Schrödinger equation / A. Cohen, T. Kappeler //Indiana Univ. Math. J. — 1985.— Vol. 34, № 1. — P. 127–180.

49. Cohen A. Solutions to the Korteweg–de Vries equation with initial profile in $L_1^1(\mathbb{R}) \cap L_N^1(\mathbb{R}^+)$ / A. Cohen, T. Kappeler //SIAM J. Math. Anal. — 1987. — Vol. 18, № 4. — P. 991–1025.
50. Deift P. The Toda rarefaction problem / P. Deift, S. Kamvissis, T. Kriecherbauer, X. Zhou // Comm. Pure Appl. Math. — Vol. 49, No.1.— 1996. — P. 35–83.
51. Deift P. Inverse scattering on the line / P. Deift, E. Trubowitz // Comm. Pure Appl. Math. — 1979. — Vol. 32. — P. 121–251.
52. Deift P. The collisionless shock region for the long time behavior of solutions of the KdV equation / P. Deift, S. Venakides, and X. Zhou // Comm. Pure Appl. Math.—1994.—Vol. 47.—P. 199–206.
53. Deift P. A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problems. / P. Deift, X. Zhou // Ann. of Math. —1993.— Vol. 137 — P. 295–368.
54. Deift P. Long-time asymptotics for integrable nonlinear wave equations. Important developments in soliton theory./P. Deift, A. Its, X. Zhou.// Springer Ser. Nonlinear Dynam., 1993, 181–204.
55. Deift P. Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory. /P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, and X. Zhou// Comm. Pure Appl. Math. — 1999. — Vol. 52. P. 1335–1425.
56. Dwight H.B. Tables of Integrals and Other Mathematical Data/Dwight H.B.// 4th ed. The Macmillan Company, New York, 1961. — 336 p.
57. Eckhaus W. The Inverse Scattering Transformation and Solitons: An Introduction / W. Eckhaus , A. Van Harten — Math. Studies 50, North-Holland, Amsterdam, 1984. — 231 p.

58. Egorova. I. On the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation with steplike finite-gap initial data I. Schwartz-type perturbations/ I. Egorova, K. Grunert, G. Teschl// *Nonlinearity* — 2009. — Vol. 22. — P. 1431–1457.
59. Egorova I. On the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation with steplike finite-gap initial data II. Perturbations with finite moments/I. Egorova and G. Teschl, // *J. d'Analyse Math.* — 2011. — Vol. 115 — P. 71–101.
60. Egorova I. Long-time asymptotics for the Korteweg-de Vries equation with steplike initial data /Egorova I., Gladka Z., Kotlyarov V., Teschl G. // *Nonlinearity*. — 2013. — Vol. 26. — №. 7. — P. 1839-1864.
61. Egorova I. Inverse scattering theory for Schrödinger operators with steplike potentials/ I. Egorova, Z. Gladka, T.-L. Lange, and G. Teschl // *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.* — 2015. — Vol 11. — P. 123-158.
62. Egorova I. Dispersion Estimates for One-dimensional Discrete Schrödinger and Wave Equations / Egorova I., Kopylova E., Teschl G. // *J. Spectr. Theory*. — 2015. — Vol. 5.— P. 663-696.
63. Egorova I. On the form of dispersive shock wave of the Korteweg–de Vries Equation / Egorova I., Gladka Z., Teschl G. // *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*. — 2015. — Vol. 12, No. 1, — P. 1-14.
64. Farkas H. *Riemann Surfaces*, 2nd edition / H. Farkas, I. Kra — GTM 71, Springer, New York— 1992. — 459 p.
65. Gardner C. S. Method for solving the Korteweg– de Vriez equation / C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura // *Phys. Rev. Lett.* — 1967. — Vol. 19. — P. 1095–1097.

66. Gardner C.S. Korteweg-de Vries equation and generalizations. IV. The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system. *J. Mathematical Phys.* 12 1971 1548–1551
67. Grunert K. The transformation operator for Schrödinger operators on almost periodic infinite-gap backgrounds/ K. Grunert// *J. Differential Equations*—2011. — Vol. 250 —P. 3534–3558.
68. Grunert K. Scattering theory for Schrödinger operators on steplike, almost periodic infinite-gap backgrounds/K. Grunert// *J. Differential Equations*. — 2013. — Vol. 254—P. 2556–2586.
69. Grunert K. Long-time asymptotics for the Korteweg–de Vries equation via nonlinear steepest descent/K. Grunert, G. Teschl// *Math. Phys. Anal. Geom.* — 2009. — Vol. 12 — P. 287–324.
70. Harnad J. Random matrices, random processes and integrable systems. / John Harnad// Springer, Monreal —2011. —524 p.
71. Hirota, R. Exact solutions of the Korteweg - de Vries equation for multiple collisions of solitons/R. Hirota//*Phys. Rev. Lett.*—1971.—Vol. 27.—P. 1192–1194.
72. Kappeler T. Solutions of the Korteweg de Vries equation with steplike initial data / T. Kappeler // *J. Differential Equations* — 1986. — Vol. 63, № 3. — P. 306–331.
73. Kay I. Reflectionless transmission through dielectrics and scattering potentials / I. Kay, H. E. Moses// *J. Appl. Phys.* — 1956. — Vol. 27. — P. 1503–1508.
74. Khruslov E.Ya. Soliton asymptotics of nondecreasing solutions of nonlinear completely integrable evolution equations/E.Ya. Khruslov, V.P. Kotlyarov// *Advances in Soviet Mathematics* —1994.—Vol. 19.—P. 129–181.

75. Khruslov E.Ya. Splitting of some nonlocalized solutions of the Korteweg-de Vries equation into solitons/E.Ya. Khruslov, H. Stephan///*Mat. Fiz. Anal. Geom.*—1998.—Vol. 5.—No. 1-2.—P. 49–67
76. Klaus M. Low-energy behaviour of the scattering matrix for the Schrödinger equation on the line/ M. Klaus// *Inverse Problems* — 1988. — Vol. 4. — P. 505–512.
77. Kotlyarov V. Riemann-Hilbert problem to the modified Korteweg-de Vries equation: Long-time dynamics of the steplike initial data./ Kotlyarov V., Minakov A. // *J. Math. Phys.* — 2010. — T. 51. — №. 9. — P. 3506.
78. V. Kotlyarov. Step-initial function to the MKdV equation: hyper-elliptic long-time asymptotics of the solution/V. Kotlyarov, A. Minakov, //, *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.* — 2012 —№ 8 P. 38–62.
79. Krüger H. Long-time asymptotics for the Toda lattice in the soliton region/H. Krüger, G. Teschl// *Math. Z.* — 2009.— Vol. 262. — P. 585–602.
80. Kuksin S. B. Analysis of hamiltonian PDEs./Kuksin S. B.// — Oxford University Press.— 2000. — T. 19.— 210 pp.
81. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves / P. D. Lax // *Comm. Pure and Appl. Math.* — 1968. — Vol. 21. — P. 467–490.
82. Leach J.A. The large-time development of the solution to an initial-value problem for the Korteweg–de Vries equation. I. Initial data has a discontinuous expansive step / J.A. Leach, D.J. Needham.// *Nonlinearity*— 2008— No. 21. — P. 2391–2408.
83. Leach J.A. . The large-time development of the solution to an initial-value problem for the Korteweg–de Vries equation. II. Initial data

- has a discontinuous compressive step/ J.A. Leach, D.J. Needham. //, *Mathematika*, 2014— No. 60 — P. 391–414.
84. Mikikits-Leitner A. Trace formulas for Schrödinger operators in connection with scattering theory for finite-gap backgrounds/A. Mikikits-Leitner, G. Teschl// *Oper. Theory Adv. Appl.* — 2011.— Vol. 214.—P. 107–124.
85. Novokshenov V. Yu. Time asymptotics for soliton equations in problems with step initial conditions / V. Yu. Novokshenov // *J. Math. Sci.* — 2005. — Vol. 125, № 5. — P. 717–749.
86. Olver F. W. J. *NIST handbook of mathematical functions.*/Olver Frank. W. J.// — Cambridge University Press, 2010. — P. 968.
87. Rybkin A. Spatial analyticity of solutions to integrable systems. I. The KdV case / Rybkin A. // *Comm. PDE* — 2013 — 38— P. 802–822.
88. Stein E. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.*/E. Stein// Princeton University Press, New Jersey. — 1993. — 712 pp.
89. Tanaka S. Korteweg–de Vries equation; Asymptotic behavior of solutions/ S. Tanaka// *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*—1975.—Vol.10.— P. 367–379.
90. Teschl G. *Mathematical methods in quantum mechanics; With Applications to Schrödinger Operators.* 2nd ed. — American Mathematical Soc.—2014. — 356 pp.
91. Venakides S. Long time asymptotics of the Korteweg–de Vries equation/S.Venakides// *Trans. Amer. Math. Soc.*— 1986. — Vol. 293.— P. 411–419.