Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б.І.Вєркіна

СИНЕЛЬЩИКОВ Сергій Дмитрович

УДК 519.46
517.986.4

ДІЇ НЕКОМУТАТИВНИХ ГРУП І КВАНТОВИХ АЛГЕБР НА ТОЧКОВИХ ПРОСТОРАХ ТА ЇХ q-АНАЛОГАХ

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, доцент, старший науковий співробітник
Даниленко Олександр Іванович,
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України (м. Харків),
провідний науковий співробітник відділу теорії функцій;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Дюкарев Юрій Михайлович,
Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна,
професор кафедри вищої математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Островський Василь Львович,
Інститут математики НАН України (м. Київ),
провідний науковий співробітник відділу функціонального аналізу.

Захист відбудеться «26» жовтня 2016 р. о 16:00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки 47, м. Харків, 61103

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки 47, м. Харків, 61103

Автореферат розісланий «22» вересня 2016 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради В. О. Горькавий

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Об'єкти і пов'язані з ними задачі, розглянуті у роботі, займають важливі місця у сучасних ергодичній теорії і теорії квантових груп.

Коцикли динамічних систем є потужним засобом побудови нетривіальних групових дій та їх класифікації і можуть бути використані, як це власне і зроблено в дисертації, для вивчення тонких властивостей ергодичних дій груп. Одне з центральних місць серед об'єктів дослідження, яке коцикли займають в ергодичній теорії, пов'язане з тією обставиною, що будь-яка аменабельна ергодична групова дія є образом певного коциклу ергодичного автоморфізму. Цей результат, що був раніше відомий для вільних групових дій, природним образом потребує поширення на групові дії з нетривіальними стабілізаторами.

Задачі з регуляризації групових дій, розглянуті у роботі, мали стати внеском до вирішення проблем усунення «несуттєвих» елементів некоректності поведінки динамічних систем. Можливість такого усунення є ключем до вирішення багатьох задач ергодичної теорії.

Результати щодо полів стабілізаторів є змістовним кроком у вивченні невільних групових дій, для яких відомо набагато менше, ніж для вільних дій груп. Зокрема, проблеми спряженості і ізоморфізму стабілізаторів для ергодичних дій – це перше питання, яке природним чином виникає у цьому контексті.

Методи, розвинені для побудови ентропійної теорії дій скінченно-генерованих нільпотентних груп, є актуальними з точки зору можливості їх узагальнення на більш широкий клас тотально впорядкованих груп.

Коіндуковані дії груп, введені до розгляду з метою побудови небернуллііївських дій з цілком позитивною ентропією, можуть стати засобом для вирішення інших задач ентропійної теорії, зокрема для побудови дій із зазначеними вище властивостями для груп без елементів нескінченного порядку.

На базі вивчення обмежених квантових симетричних областей вирішено низку стандартних та нових задач щодо конкретних квантових алгебр і побудови нових q-аналогів. Зокрема, вивчено властивості диференціальних числень на квантових передоднорідних векторних просторах, побудовано квантові аналоги функтора Бернштейна, комплексного гіперболічного простору і асоційованих конусів, інтеграла Пуассона і рівнянь Хуа.

Квантові універсальні огортуючі алгебри з ідемпотентами, побудовані в роботі, можуть стати в нагоді при вивченні суперсиметрії.

Одержана класифікація симетрій квантової площини і її розширення Лорана може стати першим кроком до з'ясування повної групи симетрій різноманітних квантових об'єктів.

Таким чином, перелік задач, вирішених у дисертаційній роботі, входить до класу сучасних і актуальних проблем ергодичної теорії та теорії квантових груп.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відділі математичної фізики математичного відділення Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України. Результати дисертації є складовою частиною таких держбюджетних науково-дослідних робіт:

"Алгебраїчні та геометричні методи в теорії операторів та теорії динамічних систем" (номер державної реєстрації 0196U002943),

"Алгебраїчні та аналітичні методи в теорії операторів та теорії динамічних систем" (номер державної реєстрації 0100U004485),

"Аналітичні методи в теорії операторних алгебр, динамічних систем та теорії розсіювання" (номер державної реєстрації 0103U000313),

"Динамічні системи і спектральна теорія диференціальних та різницевих операторів" (номер державної реєстрації 0106U002558)

"Теорія відображень та груп: класифікація, спектральний та асимптотичний аналіз" (номер державної реєстрації 0110U007896).

Мета і задачі дослідження. *Метою* роботи є виявлення тонких властивостей ергодичних динамічних систем у термінах їх коциклів, полів стабілізаторів та ентропійних інваріантів, а також побудова квантових аналогів алгебр функцій і диференціальних числень на обмежених симетричних областях, поряд з різноманітними асоційованими структурами.

Задачами дослідження є класифікація коциклів та віднайдення застосувань одержаних результатів; регуляризація дій груп та групоїдів на відношеннях еквівалентності; віднайдення достатніх умов спряженості та ізоморфізму стабілізаторів ергодичних групових дій; виявлення співвідношень між змістовними ентропійними властивостями групових дій; з'ясування властивостей квантових алгебр і диференціальних числень, пов'язаних із квантовими обмеженими симетричними областями; побудова квантових алгебр з ідемпотентами та іншими дільниками нуля; опис симетрій квантової площини та її розширення Лорана.

Об'єктами дослідження є ергодичні динамічні системи і квантові аналоги обмежених симетричних областей.

Предметами дослідження є коцикли динамічних систем разом із похідними груповими діями, поля стабілізаторів і фактори Фелла, алгебри Пінскера, інваріантні розбиття і K-системи, процедура коіндукції, а також коваріантні $*$-алгебри поліномів, узагальнені модулі Верма, коваріантні алгебри та коалгебри, квантові диференціальні числення, алгебри фінітних функцій, інваріантні інтеграли, квантові аналоги оператора Пуассона та рівнянь Хуа, ідемпотенти квантових алгебр і розклади Пірса, R-матриця, квантова площина і її симетрії.

Методи дослідження. Теорія операторів, функціональний аналіз, теорія міри, теорія груп, теорія категорій, теорія груп і алгебр Лі, теорія зображень.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі одержано нові результати з теорії коциклів динамічних систем, регуляризації дій груп та групоїдів, спряженості та ізоморфізму стабілізаторів групових дій, ентропійної теорії дій аменабельних груп, квантових аналогів обмежених симетричних областей, зображень квантових алгебр, квантових алгебр з ідемпотентами, симетрій квантової площини. Зокрема, вперше одержано наступні нові
результати, що виносяться на захист:

– одержано остаточні результати з класифікації транзитних та рекурентних коциклів аменабельних динамічних систем;

– застосовано результати зі слабої еквівалентності коциклів до вивчення фундаментальних груп динамічних систем та властивостей дійснозначних коциклів з необмеженими лакунами;

– з'ясовано можливість регуляризації дій груп та групоїдів на вимірних відношеннях еквівалентності;

– для відомих результатів зі слабої еквівалентності коциклів з щільними образами та зовнішньої спряженості підгруп нормалізатора повної групи у вимірній ергодичній теорії встановлено нові аналоги для груп псевдогомеоморфізмів досконалого польського простору;

– з'ясовано достатні умови спряженості та ізоморфізму стабілізаторів групових дій, а також побудовано змістовні контрприклади;

– побудовано ентропійну теорію для дій скінченно генерованих нільпотентних груп, включно з описом алгебр Пінскера та K-систем в термінах розбиттів зі специфічними властивостями інваріантності;

– встановлено існування небернулліївських дій з цілком позитивною ентропією шляхом вивчення коіндукованих дій;

– побудовано квантовий аналог функтора Бернштейна;

– встановлено дуальність комплекса де Рама для квантових передоднорідних векторних просторів комутативного параболічного типу і узагальненої БГГ-резольвенти;

– побудовано теорію функцій на q-аналозі комплексного гіперболічного простору;

– побудовано квантовий аналог інтегрального оператора Пуассона та рівнянь Хуа;

– побудовано змістовні квантові алгебри з ідемпотентами та іншими дільниками нуля;

– подано повний перелік симетрій квантової площини, а також симетрій загального положення для розширення Лорана квантової площини.

Практичне значення одержаних результатів. Результати роботи мають теоретичний характер. У ній проведено фундаментальні дослідження, які поглиблюють наші знання про коцикли динамічних систем, їх стабілізатори, ентропійні властивості, а також про структуру квантових обмежених симетричних областей та зображення відповідних квантових алгебр. Вони можуть бути використані в ергодичній теорії, теорії квантових груп, математичній фізиці, функціональному аналізі та інших розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертації одержано автором особисто і самостійно. З результатів праць, які виконані у співавторстві, на захист виносяться лише положення, що одержані автором дисертації.

Зокрема, особисто дисертантом запропоновано та реалізовано підхід до доведення теореми єдиності коциклів, заснований на зведенні автоморфізма неперервного групоїда на його дискретну редукцію [11, 9, 12]. У роботі [7] автором запропоновано і реалізовано основний підхід до задачі обчислення фундаментальної групи динамічної системи, заснований на застосуванні теореми єдиності для коциклів. Такий же підхід (з використанням теореми єдиності для коциклів) впроваджено з ініціативи дисертанта у роботі [16] для дослідження дій Маккі коциклів з необмеженими лакунами. У роботі [10] автором запропонована і реалізована основна ідея регуляризації, заснована на перевизначенні відношення еквівалентності шляхом фіксації множин міри нуль у групі що діє та просторі з мірою, з подальшим застосуванням теореми Фубіні. У роботі [8] реалізовано ідею автора про перенесення результатів з класифікації коциклів з вимірної ергодичної теорії на контекст груп псевдо-гомеоморфізмів досконалого польського простору. У роботі [13] авторові, окрім вирішального внеску в доведення основних теорем, належать центральні контрприклади, що демонструють існування ергодичних групових дій з неізоморфними стабілізаторами. У роботах [14, 3] дисертанту належить ідея та її реалізація щодо застосування коіндукованих дій для доведення основного результату про існування небернулліївських дій з цілком позитивною ентропією.

У роботах [18, 19, 1, 2] дисертанту належить головний внесок у доведення основних результатів.

У роботі [4] С. Дуплію належить формулювання задач та перелік основних структур, що було проаналізовано, а також аналіз одержаних результатів та ідеї деяких доведень стосовно біалгебр з антиподом, регулярним за фон Нейманом. Авторові належать ідеї та реалізація доведень усіх інших результатів.

У роботі [6] С. Дуплію належить участь у формулюванні задачі і аналізі одержаних результатів. Ним також запроваджено систему інваріантів та позначень, у термінах яких подано класифікацію, що є змістом роботи. Авторові належать ідеї та реалізація доведень основних результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень, наведені в дисертації, доповідалися та обговорювалися на таких міжнародних конференціях та семінарах:

– XII Школа з теорії операторів у функціональних просторах, Тамбов, Росія, 1987

– Conference on Ergodic Theory, Warsaw, Poland, 1995

– Conference on Descriptive Set Theory and Dynamical Systems, Marseille, France, 1996

– Конференція з математичної фізики, Київ, 1997

– Conference on Dynamical Systems, Marseille, France, 1998

– Conference on Ergodic Theory and Dynamical Systems, Torun, Poland, 2000

– Non-commutative Geometry and Representation Theory in Mathematical Physics, Karlstad, Germany, 2004

– 5th Mathematical Physics Meeting: Summer School in Modern Mathematical Physics, Belgrade, 2008

– II International Conf. Analysis and Mathematical Physics, Харків, 2014

– III International Conf. Analysis and Mathematical Physics, Харків, 2015

– семінар з ергодичної теорії в університеті м. Торунь, Польща (керівник Б. Камінський)

– семінар з математичної фізики в університеті Париж-7, Франція (керівник Jean-Jacques Sansuc)

– семінар з ергодичної теорії в University of New South Wales, Australia (керівник Sutherland C. E.)

– семінар з квантових груп в University of Copenhagen, Denmark (керівник Jakobsen H. P.)

Публікації. Результати дисертації опубліковано в 25 наукових публікаціях, в тому числі в 21 науковій статті [1] – [21] у вітчизняних та закордонних фахових наукових виданнях та 4 тезах доповідей на наукових конференціях [22] – [25].

Структура та обсяг дисертації. Робота складається зі вступу, семи розділів, висновків, переліку використаних джерел та 9 додатків. Основний об'єм дисертації становить 299 сторінок, перелік використаних джерел займає 18 сторінок та складається з 201 найменування. Повний об'єм дисертації складає 344 сторінки. Додатки займають 21 сторінку і містять, зокрема, 4 таблиці.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **першому розділі** подано огляд літератури, короткий зміст дисертації та застосованих методів.

У **другому розділі** вивчаються автоморфізми і коцикли ергодичних відношень еквівалентності, а також пов'язані з ними задачі та об'єкти ергодичної теорії.

З робіт Р. Зіммера було відомо, що будь-яка групова дія, яка припускає представлення у вигляді образу коциклу аменабельної дії, сама є аменабельною. Зокрема, усі динамічні системи, що у такий спосіб походять від коциклу індивідуального автоморфізму, є аменабельними. Зворотнє твердження було доведено раніше лише для вільних групових дій. В дисертації доведено це зворотне твердження у повному обсязі.

Теорема 2.1.1. *Припустимо, що локально компактна сепарабельна (л.к.с.) група G діє ергодично та аменабельно на просторі Лебега (S, μ). Тоді існує коцикл ергодичного автоморфізму будь-якого наперед заданого типу, чиїм образом є задана дія.*

Отже, будь яка аменабельна групова дія (не обов'язково вільна) може бути побудована із використанням стандартної конструкції. Звідси маємо аналогічний результат стосовно так званих подвійних коциклів.

Наслідок 2.1.3. *Нехай G – л.к.с. група, та маємо задану аменабельну ергодичну дію групи $G \times \mathbb{R}$. Тоді існує коцикл α ергодичного автоморфізму T зі значеннями у групі G і такий, що задана дія групи $G \times \mathbb{R}$ є образом коциклу $\alpha \times r$, де r – коцикл Радона-Нікодима автоморфізму T.*

Доведено еквівалентність аменабельності групової дії умові аменабельності генерованого відношення еквівалентності + аменабельність стабілізаторів.

Теорема 2.1.4. *Нехай л.к.с. група G діє ергодично та аменабельно на просторі (S, μ). Тоді для майже всіх $s \in S$ стабілізатор дії G_s у точці s є аменабельним.*

Теорема 2.1.5. *Нехай л.к.с. група G діє ергодично на просторі (X, μ) у такий спосіб, що відповідне відношення еквівалентності R_G на X є аменабельним, і для майже всіх $x \in X$ стабілізатор G_x у точці x також є аменабельним. Тоді дія групи G є аменабельною.*

Нехай (Ω, Q) – траєкторний групоїд ергодичної дії типу II_∞ або III зчисленної групи Γ на просторі Лебега (X, μ); $(\mathbb{T} \times \mathbb{T}, [\mu_\mathbb{T} \times \mu_\mathbb{T}])$ – транзитивний групоїд, генерований трансляцією кола $\mathbb{T}$ з мірою Хаара $\mu_\mathbb{T}$. Розглянемо прямий добуток $(\mathcal{G}, C) = (\Omega \times (\mathbb{T} \times \mathbb{T}), Q \times [\mu_\mathbb{T} \times \mu_\mathbb{T}])$. Як відомо, будь який принциповий ергодичний групоїд з неперервними орбітами має такий вигляд.

Наступна теорема, на відміну від її попередніх версій, не містить припущення про апроксимативну скінченність групоїду. Вона дає можливість довести наведену нижче теорему порівняння транзитних коциклів, також без жодного посилання на апроксимативну скінченність чи аменабельність.

Теорема 2.2.1. *Нехай A – автоморфізм групоїду $(\mathcal{G}, C)$. Тоді знайдуться автоморфізм θ групоїда (Ω, Q) та внутрішній автоморфізм τ групоїда $(\mathcal{G}, C)$ такі, що $A = (\theta \times \mathrm{id})\tau$.*

Теорема 2.2.3. *Нехай $\alpha, \beta : [\Gamma] \times X \to G$ – транзитні коцикли повної групи $[\Gamma]$ зі значеннями в л.к.с. групі G такі, що дії Маккі W_α та W_β групи G ізоморфні. Тоді існують автоморфізм $\theta \in N[\Gamma]$ і борелівське відображення $f : X \to G$ такі, що для усіх $\gamma \in [\Gamma]$ має місце $\alpha\left(\theta\gamma\theta^{-1}, \theta x\right) = f(\gamma x)^{-1}\beta(\gamma, x)f(x)$.*

Ці результати мають численні застосування. Одне з них – до вивчення фундаментальної групи ергодичних групових дій.

Нехай G – неперервна локально компактна сепарабельна унімодулярна група, що діє вільно та власне ергодично на просторі Лебега (X, μ) з інваріантною (скінченною або σ-скінченною) мірою μ. Розглянемо ергодичний принциповий групоїд типу II $(\mathcal{G}, C) = (G \times X, [\mu_G \times \mu])$, що відповідає вказаній дії, де μ_G – міра Хаара групи G. Кожному автоморфізму A групоїду $(\mathcal{G}, C)$ можна поставити у відповідність число $\operatorname{mod} A > 0$, яке називається модулем автоморфізму A. Підгрупа $F(G \times X) = \{\operatorname{mod} A : A \in \operatorname{Aut}(\mathcal{G}, C)\}$ групи $\mathbb{R}_+^*$ називається *фундаментальною групою* динамічної системи (G, X, μ).

Теорема 2.3.2. *Нехай G – зв'язна напівпроста дійсна група Лі зі скінченним центром, причому дійсний ранг G не менший двох; (X, μ) – вільний власне ергодичний G-простір зі скінченною інваріантною мірою μ. Припустимо також, що дія G на X є неприводимою, тобто кожен простий множник групи G діє ергодично. Тоді $F(G \times X) = \{1\}$.*

Наслідок 2.3.4. *Нехай Γ – решітка в простій зв'язній дійсній групі Лі G дійсного рангу не меншого двох, причому центр G скінченний. Нехай (X, μ) – вільний ергодичний Γ-простір із скінченною інваріантною мірою μ. Тоді $F(\Gamma \times X) = \{1\}$.*

Випадок нетранзитних коциклів є більш складним, ніж такий для транзитних коциклів. Зокрема, він потребує поняття подвійного потоку для коциклу динамічної системи, у термінах якого здійснюється класифікація. Кожному коциклу $\alpha : \Gamma \times S \to G$ вільної апроксимативно скінченної дії зчисленної групи Γ на просторі Лебега (S, μ) зі значеннями в у л.к.с. групі G поставимо у відповідність *подвійний коцикл* $\alpha_0 = \alpha \times r : \Gamma \times S \to G \times \mathbb{R}$, де $r(\gamma, s) = \log(d\mu \circ \gamma / d\mu)(s)$ – коцикл Радона-Нікодима динамічної системи (Γ, S, μ). Дія Маккі подвійного коциклу α_0 називається *подвійним потоком* для коциклу α.

Теорема 2.4.2. *Припустимо, що подвійні потоки для нетранзитних коциклів $\alpha, \beta : \Gamma \times S \to G$ є спряженими. Тоді існують автоморфізм $\theta \in N[\Gamma]$ і борелівське відображення $f : S \to G$ такі, що $\beta\left(\theta\gamma\theta^{-1}, \theta s\right) = f(\gamma s)\alpha(\gamma, s)f(s)^{-1}$ для всіх $\gamma \in [\Gamma]$ у м.в. точках $s \in S$.*

Співвідношення між коциклами як у Теоремах 2.2.3 та 2.4.2 називається *слабою еквівалентністю.*

Ще одне застосування теореми порівняння коциклів – це вивчення коциклів з необмеженими лакунами. Нехай Γ – зчисленна вільна ергодична група перетворень простору Лебега (X, μ). Кажуть, що дійсно-значний коцикл $\pi : \Gamma \times X \to \mathbb{R}$ має властивість *необмежених лакун* (або просто має необмежені лакуни), якщо існує підмножина $B \subset X$, $\mu(B) > 0$, така, що для будь-якого $M > 0$ можна знайти інтервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ із $b - a > M$ та властивістю $\pi(\gamma, x) \notin (a, b)$ за умови $x, \gamma x \in B$. У протилежному випадку кажуть, що коцикл π має *обмежені лакуни* (або має властивість обмежених лакун).

Твердження 2.5.2. *Властивість необмежених лакун є інваріантом слабої еквівалентності коциклів.*

Наслідок 2.5.3. *Властивість обмежених лакун є інваріантом слабої еквівалентності коциклів.*

Наступні дві Теореми демонструють зв'язок властивості (не)обмежених лакун для коциклів і типом відповідного потоку Маккі щодо інваріантного класу мір.

Теорема 2.5.5. *Нехай $\{T_t\}_{r\in\mathbb{R}}$ – довільний потік, що зберігає ймовірнісну міру на просторі Лебега (X, μ). Тоді існує рекурентний коцикл $\pi : \mathbb{Z} \times S \to \mathbb{R}$ з обмеженими лакунами ергодичної дії групи $\mathbb{Z}$ типу II_1 на просторі S, чия дія Маккі є $\{T_t\}_{r\in\mathbb{R}}$.*

Теорема 2.5.6. *Нехай $\pi : \mathbb{Z} \times S \to \mathbb{R}$ – рекурентний коцикл з необмеженими лакунами ергодичної дії групи $\mathbb{Z}$ типу II_1 на ймовірнісному просторі Лебега (S, μ). Тоді його дія Маккі є ергодичним потоком, що або має нескінченну інваріантну міру, або має тип III.*

Вивчення багатьох проблем вимірної ергодичної теорії пов'язано з розглядом сімейств перетворень, які "поводяться добре" лише майже всюди. У випадку, коли група перетворень зчисленна, проблема зводиться до "відкидання поганої множини" міри нуль на просторі з мірою. Але цей метод взагалі виявляється недієздатним у випадку неперервних груп перетворень. У дисертації цю проблему вирішено у контексті груп автоморфізмів вимірних відношень еквівалентності, а також для дій вимірних групоїдів на відношеннях еквівалентності.

Нехай (X, μ) – ймовірнісний простір Лебега, на якому задано несингулярну дію л.к.с. групи G автоморфізмами $\alpha(g)$, $g \in G$, у такий спосіб, що відображення $(g, x) \mapsto \alpha(g)x$ є борелівським. Припустимо також, що кожен автоморфізм

$\alpha(g)$ лишає інваріантним вимірне відношення еквівалентності $(R, [\nu])$ на X, тобто $\alpha(g)$ є строгим ізоморфізмом неістотних редукцій (н.р.) еквівалентності R.

Теорема 2.6.3. *Існує борелівське відношення еквівалентності R_α на X і конульова борелівська множина $B \subset X$ такі, що R_α строго інваріантне відносно дії α групи G, і при цьому $R_\alpha|_B = R|_B$.*

Подано також узагальнення цього результату для дій вимірних групоїдів на вимірних відношеннях еквівалентності.

Наступні результати з другого розділу дисертації є кроком поза межі вимірної ергодичної теорії. Ними є сформульовані нижче теорема єдиності для ергодичних коциклів зчисленних груп псевдо-гомеоморфізмів зі значеннями у польських групах та (як наслідок) зовнішня спряженість зчисленних підгруп нормалізатора повної групи у цьому контексті.

Нехай X – досконалий польський простір, тобто повний сепарабельний метричний простір без ізольованих точок. Борелівська бієкція Θ простору X називається *псевдо-гомеоморфізмом* на X, якщо будь-яка підмножина A є множиною першої категорії (зчисленним об'єднанням ніде не щільних підмножин) тоді й тільки тоді, коли такою є $\Theta(A)$.

Нехай $\mathcal{R}$ – відношення еквівалентності на X. Кажуть, що $\mathcal{R}$ є *зчисленним відношенням еквівалентності загального положення*, якщо воно задовольняє таким умовам: $\mathcal{R}$ є борелівською підмножиною в $X \times X$; кожен клас еквівалентності $\mathcal{R}$ є зчисленним; насичення $\mathcal{R}[E]$ будь-якої множини першої категорії $E \subset X$ є також множиною першої категорії.

Нехай Γ – зчисленна група псевдо-гомеоморфізмів на X. Кажуть, що ця дія є *ергодичною*, якщо для деякого $x \in X$ траєкторія Γx щільна в X. Еквівалентним чином, будь-яка Γ-інваріантна борелівська підмножина в X є або множиною першої категорії, або доповненням такої підмножини. Ергодичність зчисленного відношення еквівалентності загального положення $\mathcal{R}$ на X визначається як ергодичність зчисленної групи перетворень, що генерує $\mathcal{R}$.

Кажуть, що псевдо-гомеоморфізм h простору X належить до повної групи $[\Gamma]$, якщо існує послідовність попарно диз'юнктних відкрито-замкнутих підмножин $\{K_j\}$ $(j = 1, 2, \dots)$ в X і послідовність $\{\gamma_j\}$ $(j = 1, 2, \dots)$ елементів групи Γ такі, що $\bigcup K_j$ щільне в X і $hx = \gamma_j x$ для кожного $x \in K_j$. Множина (група) таких псевдо-гомеоморфізмів Θ, що $\Theta[\Gamma]\Theta^{-1} = [\Gamma]$, називається нормалізатором $N[\Gamma]$ повної групи $[\Gamma]$.

Нехай $\mathcal{R}$ – зчисленне відношення еквівалентності загального положення, а G – польська група. Борелівське відображення $\phi : \mathcal{R} \to G$ називається коциклом на $\mathcal{R}$ зі значеннями у польській групі G, якщо для певної $\mathcal{R}$-інваріантної щільної G_δ-підмножини Y в X має місце $\phi(x, y)\phi(y, z) = \phi(x, z)$ для всіх $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}|_{Y \times Y}$. Множина усіх коциклів на $\mathcal{R}$ позначається через $Z^1(\mathcal{R}, G)$.

Два коцикли $\alpha, \beta \in Z^1(\mathcal{R}, G)$ називаються *когомологічними*, якщо існує $\mathcal{R}$-інваріантна щільна G_δ-підмножина Y в X і борелівська функція $f : Y \to G$ такі, що $\alpha(x, y) = f(x)\beta(x, y)f(y)^{-1}$ для всіх $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}|_{Y \times Y}$. Коцикл $\alpha \in Z^1(\mathcal{R}, G)$ називатимемо ергодичним, якщо косий добуток $\Gamma(\alpha)$ на просторі $G \times X$ є ергодичним.

Наведене нижче твердження відповідає на питання про існування ергодичних коциклів зі значеннями у заданій польській групі G.

Наслідок 2.7.9. *Для будь-якої польської групи G існує ергодичний коцикл $\phi \in Z^1(\mathcal{R}, G)$, де $\mathcal{R}$ – ергодичне зчисленне відношення еквівалентності загального положення.*

Коцикли $\phi, \psi \in Z^1(\mathcal{R}_\Gamma, G)$ називаються *слабо еквівалентними*, якщо існує $\Theta \in N[\Gamma]$ такий, що коцикли ϕ і $\psi \circ (\Theta \times \Theta)$ когомологічні.

Теорема 2.7.13. *Нехай Γ – зчисленна ергодична група гомеоморфізмів простору X, і G – польська група. Припустимо, що коцикли $\phi, \psi \in Z^1(\mathcal{R}_\Gamma, G)$ ергодичні. Тоді існують Γ-інваріантна щільна G_δ-множина $Y \subset X$, $\Theta \in N[\Gamma]$ і борелівська функція $f : Y \to G$ такі, що $\Theta|_Y$ – гомеоморфізм на Y, і*

$$\phi(\gamma y, y) = f(\gamma y)^{-1}\psi(\Theta\gamma y, \Theta y)f(y) \quad \textit{для всіх } y \in Y, \gamma \in \Gamma.$$

Як наслідок, маємо результат із зовнішньої спряженості підгруп нормалізатора повної групи. Нехай a_1, a_2 – дії зчисленної групи G гомеоморфізмами простору X такі, що $a_1(g), a_2(g) \in N[\Gamma]$ для всіх $g \in G$. Ці дії називаються зовнішньо спряженими, якщо існують Γ-інваріантна щільна G_δ-підмножина Y в X та гомеоморфізм Θ на Y такі, що $a_1(g)y = \Theta^{-1}a_2(g)\tau\Theta y$, де $\Theta \in N[\Gamma]$, $\tau = \tau(g) \in [\Gamma]$ для всіх $g \in G$, $y \in Y$.

Теорема 2.7.17. *Нехай Γ – ергодична група гомеоморфізмів простору X. Дії a_1, a_2 з $N[\Gamma]$ зовнішньо спряжені тоді й тільки тоді, коли*

$$\{g \in G : \ a_1(g) \in [\Gamma]\} = \{g \in G : \ a_2(g) \in [\Gamma]\}.$$

Третій розділ присвячений проблемам спряженості та ізоморфізму стабілізаторів ергодичних групових дій (тут ми знову повертаємось у межі вимірної ергодичної теорії). У розділі подано достатні умови, за яких має місце спряженість або ізоморфізм стабілізаторів, а також наведено змістовні контрприклади.

Використаний підхід полягає у вивченні властивостей фактора Фелла заданої дії л.к.с. групи G на просторі Лебега (X, μ). Цей фактор G-простір являє собою простір замкнутих підгруп групи G, який є компактним метричним (зокрема, стандартним борелівським) G-простором, ергодичним відносно наведеної міри. У цьому контексті відокремлення випадків, коли дія групи G на просторі Фелла має тип I (тобто простір орбіт є стандартним борелівським простором), автоматично означає вирішення проблеми спряженості (у позитивному сенсі) для таких випадків. Коли G є групою Лі, додатково залучається до вивчення простір підалгебр Лі, що відповідають стабілізаторам.

Теорема 3.1.17. *Нехай G – дійсна група Лі, а (X, μ) – ергодичний G-простір, усі стабілізатори якого компактні. Тоді всі стабілізатори є спряженими в G.*

Наведено контрприклади, які демонструють, що у цій Теоремі умови щодо групи G та стабілізаторів є суттєвими.

Стосовно проблеми ізоморфізму стабілізаторів ергодичних групових дій, доведено такий результат.

Теорема 3.2.2. *Нехай (X, μ) – ергодичний лебегівський G-простір для л.к.с. групи G зі скінченними стабілізаторами. Тоді всі стабілізатори над конульовою підмножиною в X є ізоморфними.*

Подано низку змістовних прикладів ергодичних дій груп Лі з неізоморфними стабілізаторами.

Четвертий розділ присвячено вивченню ентропійної теорії дій зчисленних аменабельних груп. Першим об'єктом дослідження є ентропійна теорія для дій скінченно-генерованих нільпотентних груп. Для дій зазначеного класу груп подано явний опис алгебр Пінскера, властивостей інваріантності для вимірних розбиттів, а також повну спектральну характеризацію К-систем.

Нехай G – скінченно-генерована нільпотентна група без кручень. Такі групи припускають так звану базу Мальцева, на якій задається лінійне впорядкування. Це впорядкування продовжується на всю групу G у такий спосіб, що G стає впорядкованою групою (тобто впорядкування інваріантне відносно групових зсувів). Внаслідок цього, для заданої дії групи G на просторі Лебега і розбиття α цього простору зі скінченною ентропією, середня ентропія $h(\alpha, G)$ через "минуле" розбиття α:

$$h(\alpha, G) = H\left(\alpha \left| \alpha_G^- \right.\right).$$

Доведено формулу Пінскера:

Теорема 4.1.19. *Якщо $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ і G – скінченно-генерована нільпотентна група, то*

$$h(\alpha \vee \beta, G) = h(\alpha, G) + H\left(\beta \left| \beta_G^- \vee \alpha_G \right.\right).$$

Це дає можливість подати опис алгебр Пінскера та К-систем у термінах розбиттів з кількома властивостями інваріантності: інваріантних, сильно інваріантних, вичерпних, досконалих. Доведено також наступне співвідношення між ентропією та спектральними властивостями для дій скінченно-генерованої нільпотентної групи G без кручень на просторі Лебега X, μ.

Теорема 4.1.23. *Якщо $h(G) > 0$, то G має зчисленний лебегівський спектр в $L^2(X, \mu) \ominus L^2(\pi(G))$.*

Ще однією задачею, вирішеною в 4 розділі, є побудова небернулліївських дій з цілком позитивною ентропією (ц.п.е.). Класичний результат Д. Орнстейна полягає в існуванні небернулліївських K-автоморфізмів будь-якої наперед заданої ентропії. Виникає природне припущення про існування певної відстані між класом бернуліївських дій та (більш широким) класом дій з ц.п.е. для зчисленних аменабельних груп. В дисертацій подано узагальнення зазначеного результату Д. Орнстейна на клас зчисленних аменабельних груп, що містять елемент(и) нескінченного порядку.

Цей результат базується на техніці, пов'язаній з коіндукованими груповими діями. Нехай G – зчисленна аменабельна група, і Γ – підгрупа в G. Нехай на просторі Лебега $(X, \mathcal{B}, \mu)$ задано (ліву) дію групи Γ.

Зафіксуємо переріз $s : \Gamma\backslash G \to G$ однорідного простору $\Gamma\backslash G$ з властивістю $s([e]) = e$. Розглянемо прямий добуток просторів $Y = \prod\limits_{\Gamma\backslash G}(X, \mathcal{B}, \mu)$ та уставткуємо Y відповідною продакт-мірою $\nu = \bigotimes\limits_{\Gamma\backslash G} \mu$. Ми записуватимемо елементи простору Y у вигляді $(y_\theta)_{\theta\in\Gamma\backslash G}$.

Визначимо дію групи G на Y:

$$(gy)_\theta = \left(s(\theta)gs(\theta g)^{-1}\right) y_{\theta g}, \qquad y = (y_\theta) \in Y, \qquad y_\theta \in X, \quad \theta \in \Gamma\backslash G, \quad g \in G,$$

де під дією групи Γ на координати точок з простору Y мається на увазі її дія на X. Кажуть, що ця дія групи G **коіндукована з дії** групи Γ. Просте обчислення показує, що ця дія є коректно визначеною; зокрема, $s(\theta)gs(\theta g)^{-1} \in \Gamma$. Зрозуміло також, що ця дія зберігає міру ν.

Проведене дослідження показало, що коіндуковані дії наслідують властивість бернулліївості (небернуліївості), а також значення ентропії. Але основною є така

Теорема 4.2.16. *Нехай G – зчисленна аменабельна група і Γ – нескінченна підгрупа в G. Припустимо, що Γ має вільну дію на просторі Лебега (X, μ). Тоді коіндукована дія групи G на (Y, ν) має ц.п.е. тоді й тільки тоді, коли дія групи Γ на (X, μ) має ц.п.е. Ця дія групи G на (Y, ν) бернулліївська тоді й тільки тоді, коли дія групи Γ на (X, μ) бернулліївська.*

Звідси та з деяких додаткових міркувань одержано

Наслідок 4.2.21. *Нехай G – зчисленна аменабельна група, що містить елемент нескінченного порядку. Для заданого $t \in (0, \infty]$ існує небернулліївська дія з ц.п.е. α_t групи G така, що $h(\alpha_t) = t$.*

П'ятий розділ присвячений дослідженню квантових алгебр, пов'язаних із квантовими обмеженими симетричними областями.

Одним з результатів є побудова квантового аналога функтора Бернштейна, що є кроком на шляху до квантового аналога когомологічної індукції Неппа-Вогана.

Нехай U_q – квантова універсальна огортуюча алгебра, запроваджена В. Дрінфельдом та М. Джімбо. Алгебра Хопфа U_q визначається твірними K_i, K_i^{-1}, E_i, F_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, і добре відомими співвідношеннями, разом із формулами для комноження, коодиниці та антиподу. Кожна підмножина $\mathbb{L} \subset \{1, 2, \ldots, l\}$ визначає підалгебру Хопфа $U_q\mathfrak{l} \subset U_q$, генеровану $K_i^{\pm 1}$, $i = 1, 2, \ldots, l$; E_j, F_j, $j \in \mathbb{L}$.

Нехай $P = \mathbb{Z}^l$, $P_+ = \mathbb{Z}_+^l$, $P_{++} = \mathbb{N}^l$ та

$$P_+^{\mathbb{L}} = \{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l) \in P |\ \lambda_i \geq 0 \ \text{ для } \ i \in \mathbb{L}\}.$$

Розглянемо $U_q\mathfrak{l}$-модуль Верма $M(\mathfrak{l}, \lambda)$ зі старшою вагою $\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}$. Він містить єдиний підмодуль $K(\mathfrak{l}, \lambda)$ скінченної ковимірності. Зокрема, фактор-модуль $L(\mathfrak{l}, \lambda) = M(\mathfrak{l}, \lambda)/K(\mathfrak{l}, \lambda)$ є простим.

Модуль V над $U_q\mathfrak{l}$ називається локально скінченновимірним, якщо $\dim(U_q\mathfrak{l}\, v) < \infty$ для всіх $v \in V$. Нехай $C(\mathfrak{l}, \mathfrak{l})_q$ – повна підкатегорія вагових локально скінченновимірних $U_q\mathfrak{l}$-модулів. Кожен $U_q\mathfrak{l}$-модуль $V \in C(\mathfrak{l}, \mathfrak{l})_q$ припускає єдиний розклад у пряму суму $V = \bigoplus\limits_{\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}} V_\lambda$ його підмодулів, що є кратними модулів $L(\mathfrak{l}, \lambda)$, $\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}$.

Нехай $\operatorname{End} L(\mathfrak{l}, \lambda)$ – алгебра всіх лінійних відображень векторного простору $L(\mathfrak{l}, \lambda)$. Розглянемо $U_q\mathfrak{l}$-модуль $L^{\text{univ}} = \bigoplus\limits_{\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}} L(\mathfrak{l}, \lambda)$ і проекцію P_λ в L^{univ} на ізотипічну компоненту $L(\mathfrak{l}, \lambda)$ паралельно сумі всіх інших ізотипічних компонент. Алгебра $\operatorname{End} L^{\text{univ}}$ всіх лінійних відображень простору L^{univ} є $U_q\mathfrak{l}$-модульною алгеброю. (Тобто, якщо $\xi \in U_q\mathfrak{l}$ і $\triangle\xi = \sum\limits_i \xi_i' \otimes \xi_i''$, то $(\xi A)v = \sum\limits_i \xi_i' A S(\xi_i'')v$, $v \in L^{\text{univ}}$, $A \in \operatorname{End} L^{\text{univ}}$, де $\triangle$ і S – відповідно комноження і антипод в $U_q\mathfrak{l}$.) Природній гомоморфізм $U_q\mathfrak{l} \to \operatorname{End} L^{\text{univ}}$ є ін'єктивним, що дозволяє ототожнювати $U_q\mathfrak{l}$ з її образом в $\operatorname{End} L^{\text{univ}}$. Розглянемо наступні $U_q\mathfrak{l}$-модульні підалгебри в $\operatorname{End} L^{\text{univ}}$:

$$R(\mathfrak{l})_q \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}} \operatorname{End} L(\mathfrak{l}, \lambda), \qquad F(\mathfrak{l})_q \stackrel{\text{def}}{=} R(\mathfrak{l})_q \oplus U_q\mathfrak{l}.$$

$R(\mathfrak{l})_q$ є двостороннім ідеалом в $F(\mathfrak{l})_q$, генерованим проекціями P_λ. $R(\mathfrak{l})_q$ не має одиниці, але він має виділену апроксимативну одиницю. А саме, кожна скінченна підмножина $\Lambda \subset P_+^{\mathbb{L}}$ визначає ідемпотент $\chi_\Lambda = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ в $R(\mathfrak{l})_q$. Очевидно, $\chi_{\Lambda_1}\chi_{\Lambda_2} = \chi_{\Lambda_2}\chi_{\Lambda_1} = \chi_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2}$, і для будь-якого $r \in R(\mathfrak{l})_q$ існує скінченна підмножина $\Lambda \subset P_+^{\mathbb{L}}$ така, що $\chi_\Lambda r = r\chi_\Lambda = r$.

Кажуть, що модуль V над $R(\mathfrak{l})_q$ має апроксимативну одиницю, якщо для кожного $v \in V$ існує скінченна підмножина $\Lambda \subset P_+^{\mathbb{L}}$ така, що $\chi_\Lambda v = v$. У роботі показано, що повна підкатегорія $R(\mathfrak{l})_q$-модулів з апроксимативною одиницею канонічно ізоморфна $C(\mathfrak{l},\mathfrak{l})_q$.

Нехай $\mathbb{G}\supset\mathbb{L}$ – пара підмножин в $\{1,2,\dots,l\}$ і $U_q\mathfrak{g}\supset U_q\mathfrak{l}$ – відповідна пара підалгебр Хопфа в U_q.

Розглянемо категорію всіх $U_q\mathfrak{g}$-модулів і її повну підкатегорію $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, утворену ваговими $U_q\mathfrak{l}$-локально скінченновимірними $U_q\mathfrak{g}$-модулями V

У розділі побудовано алгебру $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, що є важливим засобом вивчення $U_q\mathfrak{g}$-модулів категорії $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$. У простому окремому випадку $\mathbb{G}=\mathbb{L}$, $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q=C(\mathfrak{l},\mathfrak{l})_q$, $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ канонічно ізоморфна $F(\mathfrak{l})_q$. Точніше кажучи, побудовано $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ разом з вкладеннями $U_q\mathfrak{g}\hookrightarrow F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, $F(\mathfrak{l})_q\hookrightarrow F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, які мають такі властивості:

(F1) Діаграма

$$\begin{tikzcd} U_q\mathfrak{l} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & U_q\mathfrak{g} \arrow[d, hook] \\ F(\mathfrak{l})_q \arrow[r, hook] & F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q \end{tikzcd}$$

є комутативною (тобто, $U_q\mathfrak{g}$ і $F(\mathfrak{l})_q$ можна ототожнювати з їх образами відносно вкладень в $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$), і підалгебри $U_q\mathfrak{g}$ і $F(\mathfrak{l})_q$ генерують $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$.

(F2) Апроксимативна одиниця $\{\chi_\Lambda\}$ алгебри $R(\mathfrak{l})_q$ є також апроксимативною одиницею двостороннього ідеалу $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ в $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, генерованого $R(\mathfrak{l})_q$.

(F3) Для будь-якого $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$-модуля V з апроксимативною одиницею і будь-яких $\xi\in F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, $v\in V$ існує границя $\xi v\stackrel{\mathrm{def}}{=}\lim\limits_{\Lambda\uparrow P_+^{\mathbb{L}}}(\xi\chi_\Lambda)v$, внаслідок чого V несе структуру $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$-модуля. Перетин ядер усіх таких зображень $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ є $\{0\}$.

(F4) Функтор з категорії $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$-модулів з апроксимативною одиницею в $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, визначений в (F3), є ізоморфізмом категорій.

Отже, (F4) дозволяє ототожнювати категорію $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ і категорію $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$-модулів з апроксимативною одиницею.

Розглянемо підалгебру Хопфа $U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^+\subset U_q\mathfrak{g}$, генеровану E_i для $i\in\mathbb{G}$, F_j для $j\in\mathbb{L}$, $K_m^{\pm1}$ для $m=1,2,\dots,l$, а також підалгебру Хопфа $U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^-\subset U_q\mathfrak{g}$, генеровану E_i для $i\in\mathbb{L}$, F_j для $j\in\mathbb{G}$, $K_m^{\pm1}$ для $m=1,2,\dots,l$.

Розглянемо дві пари підмножин $\mathbb{L}\subset\mathbb{G}\subset\{1,2,\dots,l\}$, $\mathbb{L}_1\subset\mathbb{G}_1\subset\{1,2,\dots,l\}$, де $\mathbb{L}_1\subset\mathbb{L}$, $\mathbb{G}_1\subset\mathbb{G}$. Маємо вкладення відповідних підалгебр Хопфа $U_q\mathfrak{l}_1\subset U_q\mathfrak{l}$, $U_q\mathfrak{g}_1\subset U_q\mathfrak{g}$.

Функтор $P_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1}^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}$ з категорії $C(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1)_q$ в категорію $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ визначається на об'єктах з категорії $C(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1)_q$ так:

$$P_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1}^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}(Z)=R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q\otimes_{R(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1)_q}Z.$$

Дія на морфізми визначається в очевидний спосіб.

$C(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1)_q$ має досить багато проективних об'єктів, і функтор $P^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1}$ є коваріантним і точним справа. Тому маємо коректно визначені похідні функтори: $\left(P^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1}\right)_j$, $j\in\mathbb{Z}_+$, з категорії $C(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1)_q$ в категорію $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$.

Розглянемо два окремі випадки: $\mathfrak{l}_1=\mathfrak{l}$ і $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}$. Розпочнемо з першого. Нехай $\mathrm{ind}^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}$ – функтор з категорії $C(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l})_q$ в категорію $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, визначений на об'єктах так:

$$\mathrm{ind}^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}(Z)=U_q\mathfrak{g}\otimes_{U_q\mathfrak{g}_1}Z.$$

Дія на морфізми визначається в очевидний спосіб. Як і в класичному випадку $q=1$, можна побудувати ізоморфізм функторів $P^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}$ і $\mathrm{ind}^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}$.

В другому окремому випадку $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}$ функтор, про який там йдеться, називається *функтором Бернштейна* і позначається через $\Pi^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}_1}$:

$$\Pi\equiv\Pi^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}_1}(Z)=R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q\otimes_{R(\mathfrak{g},\mathfrak{l}_1)_q}Z,\qquad Z\in C(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1)_q.$$

У класичному випадку $q=1$ похідні функтори Π_j дуже важливі у побудові модулів Хариш-Чандри, що припускають унітаризацію, за допомогою когомологічної індукції. У роботі подано опис квантового аналогу цього методу.

Наступним об'єктом, який розглядається в розділі 5, є диференціальні числення над квадратичними алгебрами, що виникають при вивченні квантових обмежених симетричних областей. Розглянемо просту комплексну алгебру Лі $\mathfrak{g}$ з твірними Шевалле $\{H_i,E_i,F_i\}_{i=1,2,\dots,l}$. Нехай $\{\alpha_j\}_{j=1,2,\dots,l}$ – відповідна система простих коренів і $\mathbf{a}=(a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,l}$ – матриця Картана: $a_{ij}=\alpha_j(H_i)$. Максимальний корень алгебри $\mathfrak{g}$ є лінійною комбінацією її простих коренів $\sum\limits_{j=1}^{l}n_j\alpha_j$, $n_j\in\mathbb{Z}_+$. Зафіксуємо простий корень α_{l_0}, присутній у цій сумі з коефіцієнтом 1: $n_{l_0}=1$.

Нехай H_0 – лінійна комбінація твірних $H_1,H_2,\dots,H_l$, визначена так:

$$\alpha_j(H_0)=\begin{cases}2, & j=l_0\\ 0, & j\neq l_0.\end{cases}$$

Запровадимо позначення $\mathfrak{p}^-$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}^+$ для власних підпросторів операторів ad_{H_0}, що пов'язані з власними числами $-2,0,2$, відповідно. Отже, маємо розклад $\mathfrak{g}=\mathfrak{p}^-\oplus\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}^+$, у якому $\mathfrak{p}^\pm$ є комутативними алгебрами Лі. Вони називаються *передоднорідними векторними просторами комутативного параболічного типу.*

Ми зацікавлені у квантовому аналозі алгебри диференціальних форм із поліноміальними коефіцієнтами на векторному просторі $\mathfrak{p}^-$.

Розглянемо квантову універсальну огортуючу алгебру Дрінфельда-Джімбо $U_q\mathfrak{g}$, що визначається своїми твірними $\{K_i^{\pm1}, E_i, F_i\}_{i=1,2,\ldots,l}$ та добре відомими співвідношеннями. Вона є алгеброю Хопфа. Розглянемо також підалгебри Хопфа $U_q\mathfrak{b}^+$, $U_q\mathfrak{b}^-$, генеровані твірними $\{K_i^{\pm1}, E_i\}_{i=1,2,\ldots,l}$ і $\{K_i^{\pm1}, F_i\}_{i=1,2,\ldots,l}$, відповідно.

Ми потребуємо $U_q\mathfrak{g}$-модульну алгебру $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$, яка є квантовим аналогом алгебри поліномів на $\mathfrak{p}^-$. Нехай $U_q\mathfrak{q}^+$ – підалгебра Хопфа, генерована твірними $\{K_i^{\pm1}, E_i, F_i\}_{i\neq l_0} \cup \{K_{l_0}^{\pm1}, E_{l_0}\}$, і $\mathcal{P}_+ = \mathbb{Z}_+^{l_0-1} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+^{l-l_0} \hookrightarrow P$, $\lambda \in \mathcal{P}_+$. Розглянемо простий скінченновимірний $U_q\mathfrak{q}^+$-модуль $L(\mathfrak{q}^+, \lambda)$ зі старшою вагою λ, разом із індукованим $U_q\mathfrak{g}$-модулем $N(\mathfrak{q}^+, \lambda) = U_q\mathfrak{g} \otimes_{U_q\mathfrak{q}^+} L(\mathfrak{q}^+, \lambda)$, який називається *узагальненим модулем Верма.* Нехай $U_q\mathfrak{g}^{\mathrm{cop}}$ – алгебра Хопфа, що відрізняється від $U_q\mathfrak{g}$ заміною її комноження на протилежне. Морфізм

$$\triangle_0 : N(\mathfrak{q}^+, 0) \to N(\mathfrak{q}^+, 0) \otimes N(\mathfrak{q}^+, 0), \qquad \triangle_0 : v(\mathfrak{q}^+, 0) \mapsto v(\mathfrak{q}^+, 0) \otimes v(\mathfrak{q}^+, 0)$$

у тензорній категорії $U_q\mathfrak{g}^{\mathrm{cop}}$-модулів устатковує узагальнений модуль Верма $N(\mathfrak{q}^+, 0)$ структурою $U_q\mathfrak{g}^{\mathrm{cop}}$-модульної коалгебри. Дуальний градуйований векторний простір $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$ є $U_q\mathfrak{g}$-модульною алгеброю, яка становить q-аналог алгебри поліномів на $\mathfrak{p}^-$.

Для будь-якої ваги $\lambda \in \mathcal{P}_+$ узагальнений модуль Верма $N(\mathfrak{q}^+, \lambda)$ є $U_q\mathfrak{g}^{\mathrm{cop}}$-модульним $N(\mathfrak{q}^+, 0)$-бікомодулем:

$$\begin{aligned} N(\mathfrak{q}^+, \lambda) &\to N(\mathfrak{q}^+, 0) \otimes N(\mathfrak{q}^+, \lambda), \qquad & v(\mathfrak{q}^+, \lambda) &\mapsto v(\mathfrak{q}^+, 0) \otimes v(\mathfrak{q}^+, \lambda), \\ N(\mathfrak{q}^+, \lambda) &\to N(\mathfrak{q}^+, \lambda) \otimes N(\mathfrak{q}^+, 0), \qquad & v(\mathfrak{q}^+, \lambda) &\mapsto v(\mathfrak{q}^+, \lambda) \otimes v(\mathfrak{q}^+, 0). \end{aligned}$$

Тому дуальний градуйований векторний простір є $U_q\mathfrak{g}$-модульним $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-бімодулем. Зокрема, $\Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q \stackrel{\mathrm{def}}{=} N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0})^*$ є $U_q\mathfrak{g}$-модульним $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-модулем. Він є q-аналогом простору 1-форм з поліноміальними коефіцієнтами.

Ми називаємо диференціалом лінійний оператор, спряжений до такого морфізму узагальнених модулів Верма:

$$N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0}) \to N(\mathfrak{q}^+, 0), \qquad v(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0}) \mapsto F_{l_0} v(\mathfrak{q}^+, 0).$$

Диференціал $d : \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q \to \Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q$ є морфізмом $U_q\mathfrak{g}$-модулів, і при цьому $\Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q$ є лінійною оболонкою векторів $\{f_1 \cdot df_2 \cdot f_3 |\ f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q\}$.

Отже, маємо *диференціальне числення першого порядку* $\big(\Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q, d\big)$. Йому відповідає *універсальне диференціальне числення* $(\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q, d)$.

Перший з основних результатів у цьому контексті полягає в тому, що вимірності однорідних компонент вагових $U_q\mathfrak{g}$-модулів $\Lambda^j(\mathfrak{p}^-)_q$ є такими ж, як і у класичному випадку $q = 1$ (див. Леми 5.2.29, 5.2.30 та Твердження 5.2.31).

Відомо, що резольвента Бернштейна - Гельфанда - Гельфанда (БГГ-резольвента) тривіального $U_q\mathfrak{g}$-модуля $\mathbb{C}$ в категорії $\mathcal{O}$, повній підкатегорії скінченно-генерованих вагових $U_q\mathfrak{b}^+$-скінченних модулів, має такий же вигляд, як і в класичному випадку $q = 1$:

$$\ldots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C} \longrightarrow 0, \qquad C_j = \bigoplus_{\{w\in W\,|\,l(w)=j\}} M(w\cdot 0).$$

Тут $\epsilon : M(0) \to \mathbb{C}$, $\epsilon : v(0) \mapsto 1$ – очевидний сюр'єктивний морфізм $U_q\mathfrak{g}$-модулів, а побудова диференціалів d_j використовує часткове впорядкування на групі Вейля W, *порядок Брюа*.

У роботі побудовано резольвенту тривіального модуля $\mathbb{C}$ в категорії $\mathcal{O}_{\mathbb{S}}$, повній підкатегорії, утвореній $U_q\mathfrak{k}$-скінченними $U_q\mathfrak{g}$-модулями категорії $\mathcal{O}$. Нехай $\mathbb{S} = \{1, 2, \ldots, l\}\backslash\{l_0\}$ і $W_{\mathbb{S}} \subset W$ – підгрупа групи Вейля алгебри Лі $\mathfrak{g}$, генерована простими віддзеркаленнями s_i, $i \in \mathbb{S}$. Далі, визначимо

$$W^{\mathbb{S}} = \{w \in W|\, l(vw) \geq l(w) \text{ для всіх } v \in W_{\mathbb{S}}\}.$$

Відомо, що будь-який елемент $w \in W$ припускає єдиний розклад вигляду $w = w_{\mathbb{S}} \cdot w^{\mathbb{S}}$, де $w_{\mathbb{S}} \in W_{\mathbb{S}}$, $w^{\mathbb{S}} \in W^{\mathbb{S}}$, і $l(w) = l(w_{\mathbb{S}}) + l(w^{\mathbb{S}})$. Зокрема, такий розклад має місце для найдовшого елементу w_0 групи Вейля W:

$$w_0 = w_{0,\mathbb{S}} \cdot w_0^{\mathbb{S}}, \qquad l(w_0) = l(w_{0,\mathbb{S}}) + l(w_0^{\mathbb{S}}).$$

Узагальнена резольвента БГГ має вигляд

$$0 \longrightarrow C^{\mathbb{S}}_{l\left(w_0^{\mathbb{S}}\right)} \xrightarrow{d_{l(w_0^{\mathbb{S}})}} \ldots \xrightarrow{d_2} C_1^{\mathbb{S}} \xrightarrow{d_1} C_0^{\mathbb{S}} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

де $\epsilon : N(\mathfrak{q}^+, 0) \to \mathbb{C}$, $\epsilon : v(\mathfrak{q}^+, 0) \mapsto 1$ – очевидний ендоморфізм,

$$C_j^{\mathbb{S}} = \bigoplus_{\{w\in W^{\mathbb{S}}\,|\,l(w)=j\}} N(\mathfrak{q}^+, w\cdot 0),$$

і афінна дія групи Вейля W визначається формулою $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$, де ρ – напівсума додатних коренів.

Універсальному огортуючому диференціальному численню $(\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q, d)$ відповідає комплекс де Рама

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \Lambda^0(\mathfrak{p}^-)_q \xrightarrow{d_1} \Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q \xrightarrow{d_2} \ldots \xrightarrow{d_{\dim\mathfrak{p}^-}} \Lambda^{\dim\mathfrak{p}^-}(\mathfrak{p}^-)_q \longrightarrow 0.$$

Основний результат полягає в тому, що комплекс, дуальний до останнього комплексу, є ізоморфним узагальненій резольвенті БГГ (Твердження 5.2.44).

Наступними об'єктами дослідження у розділі 5 є простори функцій на квантових аналогах гіперболічних просторів. Нехай $0 < q < 1$ $\mathrm{Pol}\left(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$ позначає

$*$-алгебру з одиницею і твірними $t_1, t_2, \ldots, t_N$ та співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&t_i t_j = q t_j t_i, \qquad i<j\\
&t_i t_j^* = q t_j^* t_i, \qquad i \neq j\\
&t_i t_i^* = t_i^* t_i + (q^{-2}-1)\sum_{k=i+1}^{N} t_k t_k^*, \qquad i>n\\
&t_i t_i^* = t_i^* t_i + (q^{-2}-1)\sum_{k=i+1}^{n} t_k t_k^* - (q^{-2}-1)\sum_{k=n+1}^{N} t_k t_k^*, \qquad i \leq n.
\end{aligned}$$

Ця алгебра вкладається в її локалізацію $\mathrm{Pol}\left(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_{q,c}$ відносно мультиплікативної системи, пов'язаної з центральним елементом $c = -\sum_{j=1}^{n} t_j t_j^* + \sum_{j=n+1}^{N} t_j t_j^*$. Остання $*$-алгебра припускає таке біградуювання: $\deg t_j = (1,0)$, $\deg t_j^* = (0,1)$, $j = 1, 2 \ldots, N$. $*$-алгебра

$$\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q = \left\{ f \in \mathrm{Pol}\left(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_{q,c} \middle| \ \deg f = (0,0) \right\}$$

називається *алгеброю регулярних функцій на квантовому гіперболічному просторі*. Вона несе структуру $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модульної алгебри. Ця структура виникає внаслідок вкладення в добре відому $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модульну $*$-алгебру $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{X}\right)_q$ регулярних функцій на квантовій групі SL_N. Образ цього вкладення позначається $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$. $*$-алгебра $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ *вкладається* в $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$, і її образ є в точності підалгебра, генерована $t_{1j} t_{1k}^*$, $j, k = 1, 2, \ldots, N$.

Ми використовуємо позначення t_j замість t_{1j} для твірних $*$-алгебри $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$. Нехай I_φ, $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, – $*$-автоморфізм $*$-алгебри $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$, визначений на твірних $\{t_j\}_{j=1,\ldots,N}$ так: $I_\varphi : t_j \mapsto e^{i\varphi} t_j$.

У роботі побудовано точне $*$-зображення T алгебри $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ у передгільбертовому просторі $\mathcal{H}$, який є лінійною оболонкою своєї ортонормованої бази $\{e(i_1, i_2, \ldots, i_{N-1}) | \, i_1, \ldots, i_n \in -\mathbb{Z}_+;\ i_{n+1}, \ldots, i_{N-1} \in \mathbb{N}\}$.

$*$-зображення T є обмеженням на $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ $*$-зображення більш широкої алгебри $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)$, заданого так:

$$T(t_j) e(i_1, \ldots, i_{N-1}) = q^{\sum_{k=1}^{j-1} i_k} \left(q^{2(i_j - 1)} - 1\right)^{1/2} e(i_1, \ldots, i_j - 1, \ldots, i_{N-1}),$$

$$T(t_j^*) e(i_1, \ldots, i_{N-1}) = q^{\sum_{k=1}^{j-1} i_k} \left(q^{2 i_j} - 1\right)^{1/2} e(i_1, \ldots, i_j + 1, \ldots, i_{N-1}),$$

для $j \le n$,

$$T(t_j)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) = q^{\sum\limits_{k=1}^{j-1} i_k}\left(1-q^{2(i_j-1)}\right)^{1/2} e(i_1,\ldots,i_j-1,\ldots,i_{N-1}),$$
$$T(t_j^*)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) = q^{\sum\limits_{k=1}^{j-1} i_k}\left(1-q^{2i_j}\right)^{1/2} e(i_1,\ldots,i_j+1,\ldots,i_{N-1}),$$

для $n < j < N$, і зрештою,

$$T(t_N)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) = q^{\sum\limits_{k=1}^{N-1} i_k} e(i_1,\ldots,i_{N-1}),$$
$$T(t_N^*)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) = q^{\sum\limits_{k=1}^{N-1} i_k} e(i_1,\ldots,i_{N-1}).$$

Визначимо елементи $\{x_j\}_{j=1,\ldots,N}$:

$$x_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \sum\limits_{k=j}^{N} t_k t_k^*, & j > n, \\ -\sum\limits_{k=j}^{n} t_k t_k^* + \sum\limits_{k=n+1}^{N} t_k t_k^*, & j \le n. \end{cases}$$

Тоді $x_1 = 1$, $x_i x_j = x_j x_i$,

$$t_j x_k = \begin{cases} q^2 x_k t_j, & j < k, \\ x_k t_j, & j \ge k, \end{cases} \qquad t_j^* x_k = \begin{cases} q^{-2} x_k t_j^*, & j < k, \\ x_k t_j^*, & j \ge k. \end{cases}$$

Твердження 5.3.1. *T є точним зображенням* $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$.

Розглянемо $*$-алгебру $\mathrm{Fun}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right) \supset \mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)$, одержану з $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)$ додаванням елементу f_0 до переліку твірних і поданих нижче співвідношень до переліку співвідношень.

$$\begin{aligned} & t_j^* f_0 = f_0 t_j = 0, \qquad j \le n, \\ & x_{n+1} f_0 = f_0 x_{n+1} = f_0, \\ & f_0^2 = f_0^* = f_0, \\ & t_j f_0 = f_0 t_j; \qquad t_j^* f_0 = f_0 t_j^*, \qquad j \ge n+1. \end{aligned}$$

Співвідношення $I_\varphi f_0 = f_0$ дозволяє продовжити $*$-автоморфізм I_φ алгебри $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)$ до $*$-автоморфізму алгебри $\mathrm{Fun}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)$. Нехай

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{H}_{n,m}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ f \in \mathrm{Fun}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right) \middle|\ I_\varphi f = f \right\}.$$

Існує продовження $*$-зображення T до $*$-зображення $*$-алгебри $\mathrm{Fun}(\mathcal{H}_{n,m})$.

Двосторонній ідеал $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ в алгебрі $\mathrm{Fun}(\mathcal{H}_{n,m})$, генерований f_0, називається *алгеброю фінітних функцій на квантовому гіперболічному просторі.*

ТЕОРЕМА 5.3.2. *Зображення T алгебри $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ є точним.*

$\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ несе структуру $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модульної алгебри і інваріантний інтеграл. Нехай $\nu_q : \mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q \to \mathbb{C}$ – лінійний функціонал:

$$\nu_q(f) = \mathrm{Tr}(T(f) \cdot Q) = \int\limits_{\mathcal{H}_{n,m}} f d\nu_q,$$

де $Q : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – лінійний оператор, заданий так:

$$Qe(i_1, \ldots, i_{N-1}) = \mathrm{const} \cdot q^{2\sum\limits_{j=1}^{N-1}(N-j)i_j} e(i_1, \ldots, i_{N-1}), \qquad \mathrm{const} > 0.$$

ТЕОРЕМА 5.3.3. *Функціонал ν_q є коректно визначеним, позитивним і $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-інваріантним.*

Крім того, в роботі побудовано алгебри функцій на квантовому однородному просторі $\Xi_{n,m}$, q-аналозі ізотропного конуса, разом із асоційованими структурами (точним зображенням, фінітними функціями, позитивним інваріантним інтегралом), а також основні неунітарна та унітарна серії зображень $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$, пов'язані з простором $\Xi_{n,m}$.

Ще одним об'єктом дослідження у розділі 5 є квантовий аналог інтеграла Пуассона і рівнянь Хуа.

У класичному випадку $q = 1$ для одиничної матричної кулі $\mathbb{D}$ і межі Шилова $S(\mathbb{D})$ розглядається функція на $\mathbb{D} \times S(\mathbb{D})$, що називається ядром Пуассона. Це ядро, разом з $S(U_n \times U_n)$-інваріантним інтегралом на групі U_n, дозволяють визначити інтегральний оператор Пуассона, який сплітає дії групи $SU_{n,n}$ у просторах неперервних функцій на області $\mathbb{D}$ і на межі Шилова $S(\mathbb{D})$. Тим не менше, не будь-яка неперервна функція на $\mathbb{D}$ може бути одержана шляхом застосування інтегрального оператора Пуассона до неперервної функції на межі Шилова $S(\mathbb{D})$. Результати Хуа, Джонсона та Кораньї подають систему диференціальних рівнянь, що складають повну характеризацію таких функцій. У дисертації одержано квантовий аналог цього добре відомого результату.

Ідея визначення ядра Пуассона полягає у поданні переліку певних істотних властивостей відповідного інтегрального оператора. У квантовому випадку інтегральний оператор Пуассона має бути морфізмом $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$-модуля $\mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$ в $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$-модуль $\mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$, що переводить 1 в 1.

Кожна $u \in \mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$ має вигляд $u = \sum\limits_{j,k=0}^{\infty} u_{j,k}$, $u_{j,k} \in \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_{q,j}\mathbb{C}[\overline{\mathrm{Mat}}_n]_{q,-k}$, і при цьому множина $\left\{z_b^{\beta}(z_a^{\alpha})^*\right\}_{a,b,\alpha,\beta=1,2,\ldots,n}$ є базою векторного простору

$\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_{q,1}\mathbb{C}[\overline{\mathrm{Mat}}_n]_{q,-1}$. Це дозволяє запровадити змішані часткові похідні в нулі, лінійні функціонали $\left.\dfrac{\partial^2}{\partial z_b^\beta \partial (z_a^\alpha)^*}\right|_{\mathbf{z}=0}$ такі, що

$$u_{1,1} = \sum_{a,b,\alpha,\beta=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z_b^\beta \partial (z_a^\alpha)^*}\right|_{\mathbf{z}=0} \right) z_b^\beta\, (z_a^\alpha)^*, \qquad u \in \mathcal{D}(\mathbb{D})_q'.$$

Квантовий аналог рівнянь Хуа має такий вигляд.

Теорема 5.4.1. *Якщо $u \in \mathcal{D}(\mathbb{D})_q'$ належить до образу інтегрального оператора Пуассона на квантовій кулі в $n \times n$-матрицях, тоді*

$$\sum_{c=1}^{n} q^{2c} \left.\frac{\partial^2 (\xi u)}{\partial z_c^\beta \partial (z_c^\alpha)^*}\right|_{\mathbf{z}=0} = 0$$

для всіх $\xi \in U_q\mathfrak{sl}_{2n}$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$.

Ядро Пуассона побудовано як елемент бімодуля узагальнених ядер $\mathcal{D}(\mathbb{D} \times S(\mathbb{D}))_q'$, чиїми елементами є формальні ряди

$$\sum_{i,j} f_{ij} \otimes \varphi_{ij}, \qquad f_{ij} \in \mathbb{C}[\overline{\mathrm{Mat}}_n]_{q,-j}^{\mathrm{op}}\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_{q,i}^{\mathrm{op}}, \quad \varphi_{ij} \in \mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q.$$

Це бімодуль над алгеброю $\mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q^{\mathrm{op}} \otimes \mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$. Відповідний інтегральний оператор є морфізмом $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$-модуля $\mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$ в $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$-модуль $\mathcal{D}(\mathbb{D})_q'$, який переводить 1 в 1.

Шостий розділ присвячений побудові та дослідженню властивостей квантових алгебр, що містять $U_q(sl_2)$, а також ідемпотенти і твірні картанівського типу, регулярні за фон Нейманом.

Побудовано алгебри $U_{K,L,norm}^{(alg)}$ і $U_{K,L,twist}^{(alg)}$ з одиницею, що генеровані твірними K, $\overline{K}$, L, $\overline{L}$, E, F, з визначальними співвідношеннями

$U_{K,L,norm}^{(alg)}$	$U_{K,L,twist}^{(alg)}$
$K\overline{K}K = K, \quad \overline{K}K\overline{K} = \overline{K},$	$K\overline{K}K = K, \quad \overline{K}K\overline{K} = \overline{K},$
$K\overline{K} = \overline{K}K,$	$K\overline{K} = \overline{K}K,$
$L\overline{L}L = L, \quad \overline{L}L\overline{L} = \overline{L},$	$L\overline{L}L = L, \quad \overline{L}L\overline{L} = \overline{L},$
$L\overline{L} = \overline{L}L,$	$L\overline{L} = \overline{L}L,$
$K\overline{K} + L\overline{L} = \mathbf{1},$	$K\overline{K} + L\overline{L} = \mathbf{1},$
$KE = q^2EK, \quad LE = q^2EL,$	$KE = q^2EL, \quad LE = q^2EK,$
$\overline{K}E = q^{-2}E\overline{K}, \quad \overline{L}E = q^{-2}E\overline{L},$	$\overline{K}E = q^{-2}E\overline{L}, \quad \overline{L}E = q^{-2}E\overline{K},$
$KF = q^{-2}FK, \quad LF = q^{-2}FL,$	$KF = q^{-2}FL, \quad LF = q^{-2}FK,$
$\overline{K}F = q^2F\overline{K}, \quad \overline{L}F = q^2F\overline{L},$	$\overline{K}F = q^2F\overline{L}, \quad \overline{L}F = q^2F\overline{K},$
$EF - FE = \dfrac{(K+L) - (\overline{K}+\overline{L})}{q - q^{-1}}$	$EF - FE = \dfrac{(K+L) - (\overline{K}+\overline{L})}{q - q^{-1}}$

Кожна з цих алгебр містить ідемпотенти $P = K\overline{K} = \overline{K}K$ та $Q = L\overline{L} = \overline{L}L$.

Твердження 6.3.5. *$U^{(alg)}_{K,L,norm}$ є прямою сумою двох підалгебр, кожна з яких ізоморфна $U_q(sl_2)$.*

У випадку $U^{(alg)}_{K,L,twist}$ розклад Пірса

$$U^{(alg)}_{K,L,twist} = PU^{(alg)}_{K,L,twist}P + PU^{(alg)}_{K,L,twist}Q + QU^{(alg)}_{K,L,twist}P + QU^{(alg)}_{K,L,twist}Q,$$

є нетривіальним, оскільки всі члени ненульові. Відповідні ПБВ-бази подано у Твердженнях 6.3.5 та 6.3.6.

Структура біалгебри на зазначених вище алгебрах задана так:

$U^{(coalg)}_{K,L,norm}$	$U^{(coalg)}_{K,L,twist}$
$\Delta(K) = K \otimes K$	$\Delta(K) = K \otimes K + L \otimes L$
$\Delta(\overline{K}) = \overline{K} \otimes \overline{K}$	$\Delta(\overline{K}) = \overline{K} \otimes \overline{K} + \overline{L} \otimes \overline{L}$
$\Delta(L) = L \otimes L + L \otimes K + K \otimes L$	$\Delta(L) = L \otimes K + K \otimes L$
$\Delta(\overline{L}) = \overline{L} \otimes \overline{L} + \overline{L} \otimes \overline{K} + \overline{K} \otimes \overline{L}$	$\Delta(\overline{L}) = \overline{L} \otimes \overline{K} + \overline{K} \otimes \overline{L}$
$\Delta(E) = \mathbf{1} \otimes E + E \otimes (K + L)$	$\Delta(E) = \mathbf{1} \otimes E + E \otimes (K + L)$
$\Delta(F) = F \otimes \mathbf{1} + \left(\overline{K} + \overline{L}\right) \otimes F$	$\Delta(F) = F \otimes \mathbf{1} + (\overline{K} + \overline{L}) \otimes F$
$\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0$	$\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0$
$\varepsilon(K) = 1, \quad \varepsilon(\overline{K}) = 1$	$\varepsilon(K) = 1, \quad \varepsilon(\overline{K}) = 1$
$\varepsilon(L) = \varepsilon(\overline{L}) = 0$	$\varepsilon(L) = \varepsilon(\overline{L}) = 0$

Згортка на біалгебрі визначається так:

$$(\mathsf{A} \star \mathsf{B}) \equiv \mu(\mathsf{A} \otimes \mathsf{B})\Delta,$$

де A, B – лінійні ендоморфізми відповідних векторних просторів, μ – добуток в алгебрі. Виявляється, що біалгебра $U^{(bialg)}_{K,L,norm}$ не має антиподу S, що задовольняє стандартній аксіомі алгебри Хопфа

$$\mathsf{S} \star \mathsf{id} = \mathsf{id} \star \mathsf{S} = \eta \circ \varepsilon.$$

Натомість розглянемо антиморфізм T алгебри $U^{(bialg)}_{K,L,norm}$:

$$\mathsf{T}(K) = \overline{K}, \qquad \mathsf{T}\left(\overline{K}\right) = K, \qquad \mathsf{T}(L) = \overline{L}, \qquad \mathsf{T}\left(\overline{L}\right) = L,$$
$$\mathsf{T}(E) = -E\left(\overline{K} + \overline{L}\right), \qquad \mathsf{T}(F) = -(K + L)F.$$

Твердження 6.4.2. *Антиморфізм T алгебри $U^{(bialg)}_{K,L,norm}$ є регулярним за фон Нейманом:*

$$\mathsf{id} \star \mathsf{T} \star \mathsf{id} = \mathsf{id}, \qquad \mathsf{T} \star \mathsf{id} \star \mathsf{T} = \mathsf{T}.$$

Стосовно ж біалгебри $U^{(bialg)}_{K,L,twist}$, антиморфізм S, визначений тими ж формулами, що й антиморфізм T вище, задає коректно визначений антипод. Отже маємо

Теорема 6.4.6. *1)* $U_{K,L}^{(Hopf)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (U_{K,L,twist}^{(bialg)}, \mathsf{S})$ *є алгеброю Хопфа;*
2) $U_{K,L}^{(vN-Hopf)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (U_{K,L,norm}^{(bialg)}, \mathsf{T})$ *є алгеброю фон Неймана-Хопфа.*

Подано опис структури R-матриці для зазначених вище алгебр.

Сьомий розділ присвячений вивченню структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині та її розширення Лорана.

Нехай H – алгебра Хопфа з комноженням Δ, коодиницею ε і антиподом S. Нехай також A – алгебра з одиницею $\mathbf{1}$. Ми користуємося позначеннями Свідлера $\Delta(h) = \sum\limits_i h_i' \otimes h_i''$. Під *структурою H-модульної алгебри на A* мається на увазі гомоморфізм $\pi : H \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}} A$ такий, що
(i) $\pi(h)(ab) = \sum\limits_i \pi(h_i')(a) \cdot \pi(h_i'')(b)$ для всіх $h \in H$, $a, b \in A$;
(ii) $\pi(h)(\mathbf{1}) = \varepsilon(h)\mathbf{1}$ для всіх $h \in H$.
Структури π_1, π_2 називають ізоморфними, якщо існує автоморфізм Ψ алгебри A такий, що $\Psi\pi_1(h)\Psi^{-1} = \pi_2(h)$ для всіх $h \in H$.

Наше припущення щодо $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ полягає в тому, що воно не є коренем з одиниці ($q^n \neq 1$ для всіх ненульових цілих n). Розглянемо *квантову площину*, яка є алгеброю з одиницею $\mathbb{C}_q[x, y]$ з двома твірними x, y і єдиним співвідношенням

$$yx = qxy.$$

Структури $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині нумеруються так званими символічними матрицями (див. пункт 7.1.2). Повний перелік таких структур подано таблицею нижче, в якій a_0, b_0, c_0, d_0, τ є параметрами.

Отже, існує незчисленне сімейство неізоморфних структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині.

Обчислено також композиційні ряди відповідних зображень $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ (див. пункт 7.1.3).

Додамо до переліку твірних квантової площини ще два елементи x^{-1}, y^{-1}, та до переліку співвідношень таке:

$$xx^{-1} = x^{-1}x = yy^{-1} = y^{-1}y = \mathbf{1}.$$

Розширена алгебра з одиницею $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, яка виникає у такий спосіб, називається *розширенням Лорана квантової площини.*

Кожній матриці з цілими елементами $\sigma = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ та парі ненульових комплексних чисел $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2$ поставимо у відповідність автоморфізм $\varphi_{\sigma,\alpha,\beta}$ $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, визначений на твірних x та y у такий спосіб:

$$\varphi_{\sigma,\alpha,\beta}(x) = \alpha x^k y^m; \qquad \varphi_{\sigma,\alpha,\beta}(y) = \beta x^l y^n.$$

Символічні матриці	$\mathbf{U_q(\mathfrak{sl}_2)}$ – симетрії	дії $\mathfrak{sl}_2$, що є класичними границями
$\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{\mathbf{0}};\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{\mathbf{1}}\right]$	$k(x)=\pm x,\ k(y)=\pm y,$ $e(x)=e(y)=0,$ $f(x)=f(y)=0,$	$h(x)=0,\quad h(y)=0,$ $e(x)=e(y)=0,$ $f(x)=f(y)=0,$
$\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \star\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{\mathbf{0}};\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{\mathbf{1}}\right]$	$k(x)=qx,$ $k(y)=q^{-2}y,$ $e(x)=0,\quad e(y)=b_0,$ $f(x)=b_0^{-1}xy,$ $f(y)=-qb_0^{-1}y^2$	$h(x)=x,$ $h(y)=-2y,$ $e(x)=0,\quad e(y)=b_0,$ $f(x)=b_0^{-1}xy,$ $f(y)=-b_0^{-1}y^2$
$\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \star & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{\mathbf{0}};\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{\mathbf{1}}\right]$	$k(x)=q^2x,$ $k(y)=q^{-1}y,$ $e(x)=-qc_0^{-1}x^2,$ $e(y)=c_0^{-1}xy,$ $f(x)=c_0,\quad f(y)=0,$	$h(x)=2x,$ $h(y)=-y,$ $e(x)=-c_0^{-1}x^2,$ $e(y)=c_0^{-1}xy,$ $f(x)=c_0,\quad f(y)=0.$
$\left[\begin{pmatrix}\star & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{\mathbf{0}};\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{\mathbf{1}}\right]$	$k(x)=q^{-2}x,$ $k(y)=q^{-1}y,$ $e(x)=a_0,\quad e(y)=0,$ $f(x)=-qa_0^{-1}x^2+ty^4,$ $f(y)=-qa_0^{-1}xy+sy^3.$	$h(x)=-2x,$ $h(y)=-y,$ $e(x)=a_0,\quad e(y)=0,$ $f(x)=-a_0^{-1}x^2+ty^4,$ $f(y)=-a_0^{-1}xy+sy^3.$
$\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \star\end{pmatrix}_{\mathbf{0}};\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{\mathbf{1}}\right]$	$k(x)=qx,\ k(y)=q^2y,$ $e(x)=-qd_0^{-1}xy+sx^3,$ $e(y)=-qd_0^{-1}y^2+tx^4,$ $f(x)=0,\quad f(y)=d_0,$	$h(x)=x,\quad h(y)=2y,$ $e(x)=-d_0^{-1}xy+sx^3,$ $e(y)=-d_0^{-1}y^2+tx^4,$ $f(x)=0,\quad f(y)=d_0,$
$\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{\mathbf{0}};\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \star\\ \star & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{\mathbf{1}}\right]$	$k(x)=qx,$ $k(y)=q^{-1}y,$ $e(x)=0,\quad e(y)=\tau x,$ $f(x)=\tau^{-1}y,\ f(y)=0,$	$h(x)=x,$ $h(y)=-y,$ $e(x)=0,\quad e(y)=\tau x,$ $f(x)=\tau^{-1}y,\ f(y)=0.$

Добре відомий результат стверджує, що кожний автоморфізм $\mathbb{C}_q[x^{\pm1},y^{\pm1}]$ має такий вигляд, і група $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_q[x^{\pm1},y^{\pm1}])$ автоморфізмів $\mathbb{C}_q[x^{\pm1},y^{\pm1}]$ є напівпрямим добутком своїх підгруп $SL(2,\mathbb{Z})$ та $(\mathbb{C}^*)^2$. Якщо задана структура $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на $\mathbb{C}_q[x^{\pm1},y^{\pm1}]$, твірна k діє автоморфізмом алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm1},y^{\pm1}]$. Зокрема, кожна структура $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри однозначно визначає матрицю $\sigma\in SL(2,\mathbb{Z})$.

Теорема 7.2.4. *Існує двопараметричне* ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$) *сімейство структур* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*-модульної алгебри на* $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$*, що відповідає матриці* $\sigma = -I$*:*

$$\begin{aligned} &\pi(\mathsf{k})(x) = \alpha^{-1}x^{-1}; && \pi(\mathsf{k})(y) = \beta^{-1}y^{-1};\\ &\pi(\mathsf{e})(x) = 0; && \pi(\mathsf{e})(y) = 0;\\ &\pi(\mathsf{f})(x) = 0; && \pi(\mathsf{f})(y) = 0. \end{aligned}$$

Це складає повний перелік структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*-модульної алгебри з* $\sigma = -I$ *(і взагалі з* $\sigma \neq I$*). Зазначені структури усі ізоморфні, зокрема такій із* $\alpha = \beta = 1$.

В випадку $\sigma = I$, дія картанівської твірної k задається множенням твірних x, y на *вагові константи.* Тут маємо перелік структур загального положення, що охоплюють всі, крім зчисленного сімейства, припустимі пари вагових констант.

Теорема 7.2.9. *Нехай* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *такі, що* $\alpha^u\beta^v = q^2$ *для певних* $u, v \in \mathbb{Z}$ *та* $\alpha^m \neq \beta^n$ *для всіх ненульових цілих* m, n*. Тоді існує однопараметричне* ($a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$) *сімейство структур* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*-модульної алгебри на* $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$*:*

$$\begin{aligned} &\pi(\mathsf{k})(x) = \alpha x && \pi(\mathsf{k})(y) = \beta y\\ &\pi(\mathsf{e})(x) = aq^{uv+3}\frac{1-\alpha q^v}{(1-q^2)^2}x^{u+1}y^v && \pi(\mathsf{e})(y) = aq^{uv+3}\frac{q^u-\beta}{(1-q^2)^2}x^u y^{v+1}\\ &\pi(\mathsf{f})(x) = -\frac{(\alpha^{-1}-q^{-v})}{a}x^{-u+1}y^{-v} && \pi(\mathsf{f})(y) = -\frac{(\beta^{-1}q^{-u}-1)}{a}x^{-u}y^{-v+1} \end{aligned}$$

Не існує ніяких інших структур з ваговими константами α *та* β*.*

У **додатках** наведено допоміжні матеріали: приклади та контрприклади, доведення технічних лем, викладення відомих визначень та результатів, таблиці тощо.

ВИСНОВКИ

У роботі вирішено низку змістовних задач у галузі ергодичної теорії та теорії квантових груп.

Одержано остаточний результат щодо можливості представлення аменабельної дії локально компактної сепарабельної (л.к.с.) групи у вигляді дії Маккі ергодичного автоморфізму, зокрема і для дій (не обов'язково аменабельної) л.к.с. групи з нетривіальними стабілізаторами. Аналогічний результат встановлено також для так званих "подвійних дій", що є діями Маккі "подвійних коциклів". Встановлено, що аменабельність групової дії еквівалентна аменабельності відповідного відношення еквівалентності, разом із аменабельністю стабілізаторів. Доведено також більш значущу теорему єдиності для коциклів, яка встановлює взаємно-однозначну відповідність між класами слабої еквівалентності коциклів і класами спряженості їх дій Маккі. Цей результат встановлено на найбільш загальному рівні. Змістовність цього результату полягає у можливості його ефективного застосування до вирішення різноманітних задач ергодичної теорії. У межах дисертації це продемонстровано застосуваннями до вивчення фундаментальної групи динамічних систем та до дослідження дійснозначних коциклів з необмеженими лакунами з точки зору наявності скінченної інваріантної міри для їх потоків Маккі.

Концепцію існування та єдиності коциклів перенесено з вимірної ергодичної теорії до теорії груп псевдо-гомеоморфізмів досконалого польського простору. У цьому новому контексті доведено теореми існування та єдиності для ергодичних коциклів. У якості застосування доведено теорему про зовнішню спряженість зчисленних підгруп нормалізатора повної групи. Але варто відзначити, що залишаються відкритими низка проблем, пов'язаних з перенесенням до даного контексту більш загальних результатів щодо критеріїв слабої еквівалентності коциклів, зовнішньої спряженості тощо, які існують у рамках вимірної ергодичної теорії. Це може стати предметом подальших досліджень.

Наступною проблемою, яку вирішено в роботі, є проблема регуляризації дій л.к.с. груп та вимірних групоїдів автоморфізмами вимірних відношень еквівалентності. Можливість регуляризації, реалізується шляхом зміни відношення еквівалентності на множині міри нуль.

Проведено дослідження властивостей спряженості та ізоморфізму стабілізаторів невільних групових дій. В роботі йдеться про простори класів спряженості чи ізоморфізму замкнутих підгруп л.к.с. групи, адже стабілізатори групової дії спряжені над кожною траєкторією. Доведено, що ергодична дія дійсної групи Лі з компактними стабілізаторами має всі стабілізатори спряженими. Ще один результат – це ізоморфізм скінченних стабілізаторів для ергодичних дій л.к.с. групи. Подано змістовні контрприклади, в яких ергодичні дії груп Лі мають неспряжені або неізоморфні стабілізатори. Варто звернути увагу на досі відкриті питання про спряженість чи ізоморфізм стабілізаторів ергодичних групових дій за більш загальних припущень, насамперед для дій зчисленних груп з нескінченними стабілізаторами.

Робота містить результати з ентропійної теорії аменабельних груп перетворень. Класичні результати з ентропійної теорії автоморфізмів простору з мірою перенесено на скінченно-генеровані нільпотентні групи без кручень. Доведено формулу Пінскера для середньої ентропії перетину розбиттів, подано опис алгебр Пінскера для дій скінченно-генерованих нільпотентних груп. Розглянуто розбиття з різноманітними властивостями інваріантності: інваріантні, сильно інваріантні, тотально інваріантні, вичерпні, досконалі. У термінах таких розбиттів подано опис K-систем як таких, що мають цілком позитивну ентропію, а також доведено, що динамічна система з додатною ентропією має зчисленний лебегівський спектр в ортогональному додатку до L^2-простору над алгеброю Пінскера. Крім того, досліджено співвідношення властивостей бернулліевості та цілком позитивної ентропії для дій зчисленних аменабельних груп.

Добре відомо, що бернулліївські дії мають цілком позитивну ентропію (ц.п.е.), і при цьому існують небернуліївські перетворення з цілком позитивною ентропією. Виявлено, що важливим засобом побудови групових дій із зазначеними вище властивостями є так звані коіндуковані дії. Процедура коіндукування дозволяє будувати дію групи за дією її підгрупи (зі скінченною інваріантною мірою), і при цьому, як встановлено у роботі, зберігаються властивості бернуллієвості та ц.п.е. З огляду на названий вище класичний результат щодо групи $\mathbb{Z}$, у роботі доведено, що зчисленна аменабельна група, яка містить елемент нескінченного порядку, має небернулліївську дію з ц.п.е. Залишається невирішеним питання про існування небернулліївських дій з ц.п.е. для зчисленних груп, всі елементи яких мають скінченні порядки. Ймовірно, для цього також можливе застосування коіндукції.

Вирішено деякі проблеми з теорії зображень квантових алгебр. Розглянуто алгебри Гекке у квантовому випадку. Це дозволило побудувати квантовий аналог функтора Бернштейна, що є кроком на шляху до когомологічної індукції у контексті квантових груп.

Вивчено властивості диференціальних числень на поліноміальних алгебрах над квантовими передоднорідними векторними просторами комутативного параболічного типу. В цьому контексті встановлено дуальність комплекса де Рама голоморфних форм з поліноміальними коефіцієнтами і узагальненого комплексу Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда для тривіального $U_q\mathfrak{g}$-модуля.

Викладено основи теорії функцій на квантових аналогах комплексних гіперболічних просторів і відповідних ізотропних конусів. Запроваджуються алгебри фінітних функцій. Для них побудовано точні зображення та інтеграли; для цих останніх доведено інваріантність щодо дії квантової універсальної огортуючої алгебри $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$. Побудовано квантовий аналог основної унітарної серії $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модулів, пов'язаних з квантовим аналогом конуса. Для цих модулів встановлено необхідні умови еквівалентності.

Ще один результат пов'язаний з одержанням квантових аналогів для інтеграла Пуассона і рівнянь Хуа. Виведено рівняння Хуа у квантовому випадку. Доведено, що ці рівняння є необхідною умовою приналежності функції до образу квантового оператора Пуассона. Досі невідомо, чи є ця умова також і достатньою, що може стати предметом подальшого дослідження.

Побудовано нові біалгебри на основі $U_q(sl_2)$, що містять ідемпотенти і інші дільники нуля. У деяких окремих випадках наведено явні формули для Rматриць. Визначено майже-R-матриці, що задовольняють умові регулярності фон Неймана. У подібний спосіб можна розглянути аналоги $U_q(sl_n)$, устатковані відповідними більш розгалуженими сімействами ідемпотентів. Варто також дослідити суперсиметричні версії поданих структур. Цей підхід має сприяти подальшим дослідженням біалгебр, які розпадаються у прямі суми, що є новим шляхом узагальнення стандартних алгебр Дрінфельда-Джімбо.

Проведено дослідження, яке вперше ставить питання про єдиність структури $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині, що раніше розглядалася у літературі. Подано повний перелік таких структур на квантовій площині, з якого випливає існування незчисленної кількості класів ізоморфізму структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині. Для відповідних зображень $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ у векторному просторі обчислено композиційні ряди. Розглянуто також розширення Лорана квантової площини. Подано повний перелік симетрій зі структурою, принципово відмінною від таких для стандартної квантової площини. Виявилося, що розширення Лорана є набагато більш симетричним об'єктом, ніж стандартна квантова площина (тобто відповідна алгебра звичайних поліномів). При цьому мова йде лише про так звані симетрії загального положення, описані в розділі. Тому завданням для подальшого дослідження є подання повного переліку симетрій розширення Лорана квантової площини. Звичайно, варто розглянути квантові групи симетрій для інших квантових алгебр, зокрема для квантового кола та його розширень.

ПЕРЕЛІК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] *Bershtein O.* A q-Analog of the Hua Equations / O. Bershtein, S. Sinel'shchikov // Math. Phys., Analysis, and Geometry. – 2009. – Vol. 5. – No 3. – P. 219–244.

[2] *Bershtein O.* Function theory on a q-analog of complex hyperbolic space / O. Bershtein, S. Sinel'shchikov // J. of Geometry and Physics. – 2012. – Vol. 62. – No 5. – P. 1323–1337.

[3] *Dooley A.* Non-Bernoulli systems with completely positive entropy / A. Dooley, V. Golodets, D. Rudolph, S. Sinel'shchikov // Ergodic Theory and Dyn. Syst. – 2008. – Vol. 28. – No 1. – P. 87–124.

[4] *Duplij S.* Quantum enveloping algebras with von Neumann regular Cartan-like generators and the Pierce decomposition / S. Duplij, S. Sinel'shchikov // Commun. Math Phys. – 2009. – Vol. 287. – P. 769–785.

[5] *Duplij S.* Quantum enveloping algebras, von Neumann regularity and the Pierce decomposition / S. Duplij, S. Sinel'shchikov // Proceedings of 5th Mathematical Physics Meeting [Summer School in Modern Mathematical Physics, 6 - 17 July

2008, Belgrade; Ed. B. Dragovich, Z. Rakic, Institute of Physics]. – Belgrade, 2009. – P. 241–265.

[6] *Duplij S.* Classification of $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-module algebra structures on the quantum plane / Duplij S., Sinel'shchikov S. // Math. Phys., Anal., and Geom. – 2010. – Vol. 6. – No 4. – P. 406–430.

[7] *Гефтер С. Л.* Фундаментальна група для ергодичних дій напівпростих груп Лі та їх решіток / С. Л. Гефтер, В. Я. Голодець, С. Д. Синельщиков // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1987. – No 8. – С. 6–8.

[8] *Golodets V.* Orbit properties of pseudo-homeomorphism groups of a perfect Polish space and their cocycles / V. Golodets, V. Kulagin, S. Sinel'shchikov // London Math. Soc.; Lecture Notes Ser., 2000. – Vol. 277 (Descriptive Set Theory and Dynamical Systems). – P. 211–229.

[9] *Голодець В. Я.* Структура автоморфізмів вимірних групоїдів та порівняння транзитних коциклів / В. Я. Голодець, С. Д. Синельщиков // Доповіді АН Української РСР. – 1987. – No 5. – С. 3–5.

[10] *Golodets V.* Regularization of actions of groups and groupoids on measured equivalence relations / V. Golodets, S. Sinel'shchikov // Pacific J. Math. – 1989. – Vol. 137. – P. 145–154.

[11] *Голодец В. Я.* Аменабельные эргодические действия групп и образы коциклов / В. Я. Голодец, С. Д. Синельщиков // Доклады АН СССР. – 1990. – Т. 312. – No 6. – С. 1296–1299.

[12] *Golodets V.* Classification and structure of cocycles of amenable ergodic equivalence relations / V. Golodets, S. Sinel'shchikov // J. Funct. Anal. – 1994. – Vol. 121. – No 2. – P. 455–485.

[13] *Golodets V.* On the conjugacy and isomorphism problems for stabilizers of Lie group actions / V. Golodets, S. Sinel'shchikov // Ergod. Theory and Dyn. Syst. – 1999. – Vol. 19. – P. 391–411.

[14] *Golodets V.* Complete positivity of entropy and non-Bernoullicity for transformation groups / Golodets V., Sinel'shchikov S. // Colloq. Math. – 2000. – Vol. 84/85. – P. 421–429.

[15] *Golodets V.* On the entropy theory of finitely generated nilpotent group actions / Golodets V., Sinel'shchikov S. // Ergod. Theory and Dyn. Syst. – 2002. – Vol. 22. – P. 1747–1771.

[16] *Lemańczyk M.* Unbounded gaps for cocycles and invariant measures for their Mackey actions / M. Lemańczyk, S. Sinel'shchikov // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – Vol. 126. – P. 815–818.

[17] *Shklyarov D.* Hidden symmetry of some algebras of q-differential operators / D. Shklyarov, S. Sinel'shchikov, L. Vaksman // Noncommutative Structures in Mathematics and Physics [Ed. by S. Duplij, J. Wess]. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer, 2001. – Vol. 22 of NATO Science Series. – P. 309–320.

[18] *Sinel'shchikov S.* A Quantum Analogue of the Bernstein Functor / S. Sinel'shchikov, A. Stolin, L. Vaksman // Journal of Lie Theory. – 2007. – Vol. 17. – No 1. – P. 73–89.

[19] *Sinel'shchikov S.* Differential calculi on some quantum prehomogeneous vector spaces / S. Sinel'shchikov, A. Stolin, L. Vaksman // Journal of Mathematical Physics. – 2007. – Vol. 48. – Issue 7. – P. 073514-073514-27.

[20] *Синельщиков С. Д.* Симетрії загального положення для розширення Лорана квантової площини / С. Д. Синельщиков // Доповіді НАН України. – 2014. – No 11. – С. 22–25.

[21] *Sinel'shchikov S.* Generic symmetries of the Laurent extension of quantum plane / S. Sinel'shchikov // Math. Phys., Anal., and Geom. – 2015. – Vol. 11. – No 4. – P. 333–358.

[22] *Гефтер С. Л.* Фундаментальная группа для эргодических действий полупростых групп Ли и их решеток / С. Л. Гефтер, В. Я. Голодец, С. Д. Синельщиков // XII Школа по теории операторов в функциональных пространствах: тезисы докладов [Тамбов, 14–20 сент. 1987]. – Тамбов, 1987. – С. 47.

[23] *Sinel'shchikov S.* On conjugacy and isomorphism problems for stability groups of Lie group actions / S. Sinel'shchikov // Ergodic Theory and Dynamical Systems: Abstracts [Banach Center, June 5 – July 8], Warsaw, 1995. – P. 184.

[24] *Sinel'shchikov S.* Generic symmetries on the Laurent extension of quantum plane / S. Sinel'shchikov // AMPH 2014. II International Conference "Analysis and Mathematical Physics": Book of Abstracts. – Kharkiv, 2014. – P. 25.

[25] *Sinel'shchikov S.* Classification of symmetries on the Laurent extension of quantum plane / S. Sinel'shchikov // AMPH 2015. III International Conference "Analysis and Mathematical Physics": Book of Abstracts. – Kharkiv, 2015. – P. 14.

АНОТАЦІЯ

Синельщиков С. Д. Дії некомутативних груп і квантових алгебр на точкових просторах та їх q-аналогах. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків, 2016.

У роботі одержано остаточні результати з класифікації транзитних та рекурентних коциклів аменабельних динамічних систем; застосовано результати зі слабої еквівалентності коциклів до вивчення фундаментальних груп динамічних систем та властивостей дійснозначних коциклів з необмеженими лакунами; з'ясовано можливість регуляризації дій груп та групоїдів на вимірних

відношеннях еквівалентності; для відомих результатів зі слабої еквівалентності коциклів з щільними образами та зовнішньої спряженості підгруп нормалізатора повної групи у вимірній ергодичній теорії встановлено аналоги для груп псевдо-гомеоморфізмів досконалого польського простору; з'ясовано достатні умови спряженості та ізоморфізму стабілізаторів групових дій; побудовано ентропійну теорію для дій скінченно генерованих нільпотентних груп; встановлено існування небернулліївських дій з цілком позитивною ентропією; побудовано квантовий аналог функтора Бернштейна; встановлено дуальність комплекса де Рама для квантових передоднорідних векторних просторів комутативного параболічного типу і узагальненої БГГ-резольвенти; побудовано теорію функцій на q-аналозі комплексного гіперболічного простору; побудовано квантовий аналог інтегрального оператора Пуассона та рівнянь Хуа; побудовано квантові алгебри з ідемпотентами; подано повний перелік симетрій квантової площини, а також симетрій загального положення для розширення Лорана квантової площини.

Ключові слова: коцикли динамічних систем, поля стабілізаторів, алгебри Пінскера, коіндукція, квантові диференціальні числення, оператор Пуассона, рівняння Хуа, ідемпотенти квантових алгебр, квантова площина і її симетрії.

АННОТАЦИЯ

Синельщиков С. Д. Действия некоммутативных групп и квантовых алгебр на точечных пространствах и их q-аналогах. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, 2016.

В работе получены окончательные результаты по классификации транзитных и реккурентных коциклов аменабельных динамических систем; найдено приложение результатов о слабой эквивалентности коциклов к изучению фундаментальных групп динамических систем и свойств вещественнозначных коциклов с неограниченными лакунами; установлена возможность регуляризации действий групп и группоидов на измеримых отношениях эквивалентности; для известных результатов о слабой эквивалентности коциклов с плотными образами и внешней сопряженности подгрупп нормализатора полной группы в измеримой эргодической теории установлены аналоги для групп псевдогомеоморфизмов совершенного польского пространства; установлены достаточные условия сопряженности и изоморфизма стабилизаторов групповых действий; построена энтропийная теория для действий конечнопорожденных нильпотентных групп; установлено существование небернуллиевских действий с вполне положительной энтропией; построен квантовый аналог функтора Бернштейна; установлена двойственность комплекса де Рама для квантовых пре-

доднородных векторных пространств коммутативного параболического типа и обобщенной БГГ-резольвенты; построена теория функций на q-аналоге комплексного гиперболического пространства; построен квантовый аналог интегрального оператора Пуассона и уравнений Хуа; построены квантовые алгебры з идемпотентами; представлен полный список симметрий квантовой плоскости, а также симметрий общего положения для расширения Лорана квантовой плоскости.

Ключевые слова: коциклы динамических систем, поля стабилизаторов, алгебры Пинскера, коиндукция, квантовые дифференциальные исчисления, оператор Пуассона, уравнения Хуа, идемпотенты квантовых алгебр, квантовая плоскость и ее симметрии.

ABSTRACT

Sinel'shchikov S. D. Actions of non-commutative groups and quantum algebras on point spaces and their q-analogs. – Manuscript.

The doctoral thesis (in physics and mathematics, specialization 01.01.01 – mathematical analysis). B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2016.

The work contains final results on classification of transient and recurrent cocycles of amenable dynamical systems; the results on weak equivalence of cocycles are applied to studying fundamental groups of dynamical systems and properties of real-valued cocycles with unbounded gaps; the possibility of regularization is established for actions of groups and groupoids on measured equivalence relations; the known results on weak equivalence of cocycles with dense ranges and outer conjugacy for subgroups of the normalizer of full group in measure theoretic ergodic theory are supplied with counterparts for pseudo-homeomorphism groups of a perfect Polish space; sufficient conditions are established for conjugacy and isomorphism of stability groups of ergodic group actions; entropic theory for actions of finitely generated nilpotent groups is produced; the existence of non-Bernoulli actions with completely positive entropy is established; a quantum analogue of the Bernstein functor is produced; the duality between the de Rham complex for quantum prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type and the generalized BGG-resolution is established; the function theory on a q-analogue of complex hyperbolic space is produced; a quantum analogue of the Poisson integral operator and the Hua equations are constructed; quantum algebras with idempotents are produced; a complete list of symmetries of quantum plane is produced, along with list of generic symmetries for the Laurent extension of quantum plane.

Key words: cocycles of dynamical systems, fields of stability groups, Pinsker algebras, coinduction, quantum differential calculi, Poisson operator, the Hua equations, idempotents in quantum algebras, quantum plane and its symmetries.