Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна

Фардигола Лариса Василівна

УДК 517.98: 517.95

ОПЕРАТОРИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ОПЕРАТОРИ ВПЛИВУ В ЗАДАЧАХ КЕРУВАННЯ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Коробов Валерій Іванович,
Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна,
завідувач кафедри прикладної математики;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Мурач Олександр Олександрович,
Інститут математики НАН України (м. Київ),
провідний науковий співробітник відділу нелінійного аналізу;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Холькін Олександр Михайлович,
ДВНЗ "Приазовський державний технічний університет" (м. Маріуполь),
завідувач кафедри вищої та прикладної математики.

Захист відбудеться "26" 10 2016 р. о "14" годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

Автореферат розісланий "21" 09 2016 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради В.О. Горькавий

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Оператори перетворення для рівнянь Штурма–Ліувілля є потужним інструментом для дослідження різноманітних проблем теорії диференціальних рівнянь і математичної фізики.

Нехай $T_r : L^2(0,+\infty) \to L^2(0,+\infty)$, $D(T_r) = L^2(0,+\infty)$, є добре відомим оператором перетворення[1], який зберігає асимптотику функцій на нескінченності, і такий, що

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - r(x)\right) T_r g = T_r \frac{d^2}{d\xi^2} g, \qquad g \in H^2(0,+\infty), \tag{1}$$

за умов

$$r \in C^1[0,+\infty), \qquad \int_0^\infty x|r(x)|\,dx < \infty, \tag{2}$$

де $H^2(0,+\infty)$ — простір Соболєва. Оскільки цей оператор є оборотним: $T_r^{-1} : L^2(0,+\infty) \to L^2(0,+\infty)$, $D(T_r^{-1}) = L^2(0,+\infty)$, то для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ він взаємно однозначно відображає множину розв'язків рівняння

$$-v'' = \lambda^2 v, \qquad x > 0, \tag{3}$$

на множину розв'язків рівняння

$$-y'' + r(x)y = \lambda^2 y, \qquad x > 0, \tag{4}$$

до того ж

$$\frac{y(x,\lambda)}{v(x,\lambda)} \to 1, \quad \text{коли } x \to +\infty, \tag{5}$$

якщо $y(\cdot,\lambda) = T_r v(\cdot,\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Це дає можливість застосувати цей оператор (і формулу (1)) для розв'язання різноманітних проблем для хвильового рівняння на півосі

$$w_{tt} = w_{xx} - r(x)w, \qquad x > 0,\ t > 0. \tag{6}$$

Проте, формула (1) справедлива лише для функцій $g \in H^2(0,+\infty)$, але задачі для рівняння (6) деколи доводиться розглядати в просторах функцій, ширших за $H^2(0,+\infty)$, наприклад, задачі керування для такого рівняння, як правило, розглядаються для $w(\cdot,t) \in H^0(0,+\infty)$ або $w(\cdot,t) \in H^1(0,+\infty)$, $t > 0$. Тому виникає проблема продовження цього оператора, щонайменше, на $H^{-1}(0,+\infty)$.

Крім того, досить цікавою є проблема побудови оператора, подібного до оператора перетворення, для трансформації розв'язків рівняння (3) на розв'язки рівняння

$$-y'' + q^2 y = \lambda^2 y, \qquad x > 0, \tag{7}$$

[1] Марченко В.А. *Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения* / В.А. Марченко. — К.: Наукова думка, 1977. — 331 с.

за умови (5), де $q > 0$ є сталою. Нажаль, такий оператор не є взаємно однозначним, але він відіграє важливу роль в розв'язанні проблем керованості для хвильового рівняння

$$w_{tt} = w_{xx} - q^2 w, \qquad x > 0,\ t > 0, \tag{8}$$

тому від також вартий на увагу. Його названо оператором впливу тому, що він, зокрема, описує вплив керування на кінцевий стан керованої системи.

Наступним кроком у розгляді оператора перетворення є узагальнення його на диференціальні оператори другого порядку зі змінними коефіцієнтами. А саме, побудова для заданого $m = -2, -1$ бієктивного оператора $\mathbb{T} : H^m(0, +\infty) \to \mathbb{H}^m(0, +\infty)$, $D(\mathbb{T}) = L^2(0, +\infty)$, який відображає множину розв'язків рівняння (7) на множину розв'язків рівняння

$$-\frac{1}{\rho(x)}\left(k(x)y'\right)' - \gamma(x)y = \lambda^2 y, \qquad x > 0, \tag{9}$$

за деякого аналога умови (5), де $\rho, k, \gamma \in C^1[0, +\infty)$, ρ та k є додатними на $[0, +\infty)$. Тут $\mathbb{H}^m(0, +\infty)$ є деяким новим простором соболєвського типу, який слід побудувати з урахуванням коефіцієнтів ρ і k. Такий оператор дає можливість зведення вивчення властивостей хвильового рівняння

$$z_{tt} = \frac{1}{\rho(x)}\left(k(x)z_x\right)_x + \gamma(x)z, \qquad x > 0,\ t > 0, \tag{10}$$

до властивостей рівняння (7). Добре відомо[2], що простори Соболєва $H^m(\mathbb{R})$ є "природним оточенням" для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, зокрема, хвильових рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Тому побудова оператора перетворення $\mathbb{T}$ і просторів $\mathbb{H}^m$ соболєвського типу, пов'язаних з ними, дає можливість знайти таке "природне оточення" для хвильових рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Таким чином, побудова операторів перетворення для операторів другого порядку зі змінними коефіцієнтами і просторів соболєвського типу, пов'язаних з ними, а також теорії їх застосування до проблем теорії керування і теорії крайових задач є актуальною та сучасною галуззю математичних досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в математичному відділенні Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І.Вєркіна НАН України. Результати дисертації є складовою частиною держбюджетних науково-дослідних робіт "Методи комплексного аналізу та їх застосування в теорії операторів, теорії ймовірностей і математичній статистиці" (номер державної реєстрації 0102U000320), "Методи

[2]Волевич Л.Р. *Обобщенные функции и уравнения в свертках* / Л.Р. Волевич, С.Г. Ґиндикин. — Москва: Наука, 1994. — 336 с.

комплексного аналізу та їх застосування в спектральній теорії, математичній статистиці, теорії диференціальних рівнянь та проблемі моментів” (номер державної реєстрації 0102U000321), “Теорія функцій та її застосування в спектральній теорії, аналітичних питаннях математичної статистики, теорії диференціальних рівнянь, ергодичній теорії” (номер державної реєстрації 0105U001053), “Теорія функцій та її застосування в теорії операторів, аналітичних питаннях теорії ймовірностей, теорії диференціальних та функціональних рівнянь, ергодичній теорії” (номер державної реєстрації 0108U000053) та “Нові методи теорії функцій та їх застосування в спектральній теорії, характеризаційних задачах математичної статистики, теорії керування та ергодичній теорії” (номер державної реєстрації 0113U001130).

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є побудова нових типів операторів перетворення для диференціальних операторів другого порядку, зокрема, операторів із змінними коефіцієнтами, та просторів, породжених ними, і побудова теорії застосування цих операторів до проблем теорії керування та теорії крайових задач.

Об'єктом дослідження є диференціальні оператори другого порядку, оператори перетворення та впливу для них, простори соболєвського типу, керовані системи та нелокальні крайові задачі для хвильових рівнянь на необмежених областях.

Предметом дослідження є властивості операторів перетворення для диференціальних операторів другого порядку, властивості просторів соболєвського типу, пов'язаних з ними, властивості операторів впливу, а також властивості керованості, стабілізовності та коректності нелокальних крайових задач для хвильових рівнянь на необмежених областях.

Задачі дослідження:

- побудувати і дослідити оператори перетворення для диференціальних операторів другого порядку зі змінними коефіцієнтами на півосі та простори соболєвського типу, пов'язані з ними;
- побудувати і дослідити оператори перетворення для двовимірного оператора Лапласа, визначеного на радіально симетричних розподілах, та простори соболєвського типу, пов'язані з ними та застосувати одержані результати для вивчення керованості хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півплощині;
- побудувати і дослідити оператори впливу, що виникають в задачах керованості для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі та застосувати одержані результати для вивчення керованості цього рівняння;
- вивчити проблеми стабілізовності та властивості коректності нелокальних крайових задач для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами.

- застосовуючи побудовані оператори перетворення для диференціальних операторів другого порядку зі змінними коефіцієнтами на півосі та властивості просторів соболєвського типу, пов'язаних з ними, дослідити проблеми керованості, стабілізовності та коректності нелокальних крайових задач для хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами на півосі.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовуються методи математичного і функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь та теорії керування.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі побудовано нові типи операторів перетворення для деяких диференціальних операторів другого порядку та нові простори соболєвського типу, пов'язані з ними, і розроблено теорію застосування цих операторів до проблем теорії керування та теорії крайових задач. Зокрема одержано наступні результати:

- уперше введено і досліджено оператори впливу (які є подібними до операторів перетворення), що виникають в задачах керованості для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі, керованого крайовою умовою Діріхле або Неймана;
- уперше введено і досліджено оператори перетворення для диференціального оператора другого порядку зі змінними коефіцієнтами та нові простори $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2, 2}$, соболєвського типу, пов'язані з ними;
- уперше введено та досліджено оператори перетворення для двовимірного оператора Лапласа, визначеного на радіально симетричних розподілах, і нові простори $H_0^{s[1/2]}$ та $H_{s[1/2]}^0$, $s \in \mathbb{R}$, соболєвського типу, пов'язані з ними;
- застосовуючи оператори впливу та їх властивості, одержано нові критерії керованості за заданий і вільний час для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі, керованого крайовими умовами Діріхле або Неймана;
- застосовуючи оператори перетворення для двовимірного оператора Лапласа, визначеного на радіально симетричних розподілах, та властивості просторів $H_0^{s[1/2]}$ та $H_{s[1/2]}^0$, $s \in \mathbb{R}$, одержано нові критерії керованості за заданий і вільний час для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півплощині, керованого крайовими умовами Діріхле або Неймана імпульсного типу;
- розв'язано проблему стабілізовності для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі;
- одержано критерії коректності для нелокальних крайових задач для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами;
- застосовуючи оператори перетворення для диференціального оператора

другого порядку зі змінними коефіцієнтами та властивості просторів $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2, 2}$, одержано нові критерії керованості, розв'язано проблему стабілізовності і одержано нові критерії коректності нелокальних крайових задач для хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами на півосі.

Практичне значення одержаних результатів. У дисертації проведено фундаментальні теоретичні дослідження, які поглиблюють наші знання про диференціальні оператори другого порядку зі сталими і змінними коефіцієнтами та їх зв'язок з формуванням нових операторів перетворення і нових просторів соболєвського типу. Вони можуть бути використані в теорії диференціальних рівнянь, математичній фізиці, теорії просторів соболєвського типу та інших розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації одержано автором особисто. Зі спільних праць до дисертації включено лише ті результати, які належать автору. У розділі 1 дисертації розповідається про внесок співавторів до цих робіт.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень, наведені в дисертації, доповідалися та обговорювалися на таких міжнародних конференціях та семінарах:

- “Boundary-Value Problems, Special Functions and Fractional Calculus”, Мінськ, Білорусь, 1996;
- “2nd European Congress of Mathematics”, Будапешт, Угорщина, 1996;
- “Theory of Functions and Mathematical Physics”, Харків, 2001;
- “Inverse Problems and Nonlinear Equations”, Харків, 2002;
- “Mathematical Analysis and Economics”, Суми, 2003;
- “Nonlinear Partial Differential Equations” , Алушта, 2003, 2005;
- “First Karazin Scientific Readings”, Харків, 2004;
- “International Conference on Differential Equations”, Львів, 2006;
- “Differential Equations and Related Topics” dedicated to I.G.Petrovskii, Москва, Росія, 2007;
- “Lyapunov Memorial Conference”, Харків, 2007;
- “Further Progress in Analysis”, 6th International ISAAC Congress, Анкара, Туреччина, 2007;
- “International V.Ya.Skorobohatko Mathematical Conference”, Дрогобич, 2011, 2015;
- “Complex Analysis and its Applications”, Харків, 2011;
- “Spectral Theory and Differential Equations”, Харків, 2012;
- “Mathematical Analysis and Mathematical Physics”, Харків, 2015;

- семінар з теорії функцій в Інституті математики Мюнхенського університету, Німеччина (керівник Г. Зайдентоп);
- семінар з теорії функцій і функціонального аналізу в Харківському національному університеті ім. В.Н. Каразіна (керівник А.П. Гришин);
- семінар математичного відділення Фізико-технічного інституту ім. Б.І. Вєркіна НАН України (керівник Є.Я. Хруслов);
- семінар кафедри прикладної математики в Харківському національному університеті ім. В.Н.Каразіна (керівник В.І. Коробов)
- семінар відділу нелінійного аналізу в Інституті математики НАН України, Київ (керівник В.А. Михайлець).

Публікації. Результати дисертації опубліковано в 45 наукових публікаціях, в тому числі в 23 наукових статтях [1]–[23] у вітчизняних та закордонних фахових наукових виданнях та в 22 тезах доповідей на наукових конференціях [24]–[45].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 120 найменувань та займає 20 сторінок. Загальний обсяг роботи становить 295 сторінок, основна частина становить 270 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовані мета та задачі, об'єкт та предмет дослідження, розкрита наукова новизна одержаних результатів.

У *розділі 1* зроблено огляд літератури за темою дисертації, наведено деякі попередні результати та зроблено вибір напрямку дослідження. Зазначимо, що оператори перетворення досліджувалися і застосовувалися багатьма математиками: Б.Я. Левіним, Б.М. Левітаном, В.О. Марченком, О.Я. Повзнером, Є.Я. Хрусловим та іншими. Простори Соболєва та їх різноманітні модифікації досліджувалися в роботах M. Dreher, J. Eckhardt, G. Floridia, L. Hörmander, H. Triebel, I. Witt, Л.Р. Волевича, С.Г. Ґіндікіна, В.А. Михайлеця, О.О. Мурача та в роботах багатьох інших математиків. Відмітимо, також, що питання керованості та стабілізовності для хвильових рівнянь на обмежених за просторовими змінними областях вивчено досить добре і цьому йому присвячено роботи великої кількості дослідників: R. Curtain, R. Datko, S. Dolecki, M. Gugat, I. Lasiecka, G. Leugering, N. Levan, J.-L. Lions, D.L. Russel, R. Triggiani, X. Zhang, В.О. Ільїна, Є.І. Моїсєєва, В.І. Коробова, Г.М. Скляра та багатьох інших. На відміну від цього хвильові рівняння на необмежених за просторовими змінними областях вивчено набагато гірше. Вивченню крайових задач також присвячено значну кількість робіт математиків: В.М. Борок, І.Л. Віленця, О.О. Дезіна, В.С. Ільківа, І.Я. Кмить, О.А. Макарова, А.Х. Мамяна, А.М. Нахушева, В.М. Поліщук, Б.Й. Пташника, О.А. Самарського та інших.

У $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{C}^n$ через $|x|$ позначимо евклідову норму вектора x, а через (x, y) — скалярний (ермітів) добуток векторів x та y. Позначимо $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ та мультиіндекса $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, де $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Крім того, позначимо $D = (-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_n)$.

Позначимо через

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \ \forall \beta \in \mathbb{N}_0^n \ \sup\left\{\left|x^\alpha D^\beta \varphi\right| \mid x \in \mathbb{R}^n\right\} < \infty\right\}$$

простір швидко спадних функцій із наступною збіжністю: $s_k \to 0$, коли $k \to \infty$, якщо $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \ \forall \beta \in \mathbb{N}_0^n \ x^\alpha D^\beta s_k \rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R}^n$, коли $k \to \infty$. Через $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ позначимо двоїстий простір помірних розподілів (тобто, простір неперервних лінійних функціоналів на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) із слабкою топологією.

Позначимо через $\mathcal{D}$ простір нескінченно диференційовних функцій на $\mathbb{R}$ з компактними носіями, де $\varphi_n \to 0$, коли $n \to \infty$, тоді і лише тоді, коли існує $a > 0$ таке, що для кожного $n = \overline{1, \infty}$ маємо $\operatorname{supp} \varphi_n \in [-a, a]$ і для кожного $m = \overline{1, \infty}$ маємо $\varphi_n^{(m)} \rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R}$, коли $n \to \infty$. Через $\mathcal{D}'$ позначимо двоїстий до нього простір, тобто, простір розподілів над $\mathcal{D}$ із слабкою збіжністю.

Далі, для топологічного простору Ψ завжди позначатимемо через Ψ' спряжений (двоїстий) простір із слабкою топологією, а через Ψ^* — спряжений простір із сильною топологією. Через $\langle f, \varphi \rangle$ позначатимемо значення розподілу f на тестовій функції φ.

Для $s, l \in \mathbb{R}$ позначимо

$$H_l^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \left(1 + |x|^2\right)^{l/2} \left(1 + |D|^2\right)^{s/2} f \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

з нормою

$$\|f\|_l^s = \left\| \left(1 + |x|^2\right)^{l/2} \left(1 + |D|^2\right)^{s/2} f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Простір $H_l^s(\mathbb{R}^n)$ є рефлексивним, $H_{-l}^{-s}(\mathbb{R}^n) = \left(H_l^s(\mathbb{R}^n)\right)^*$ та

$$\|f\|_{-l}^{-s} = \sup\left\{ \frac{|\langle f, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_l^s} \mid 0 \neq \varphi \in H_l^s(\mathbb{R}^n) \right\}, \qquad s, l \in \mathbb{R}.$$

Простори $H_l^s(\mathbb{R}^n)$, $l, s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ та $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ є повними відносно введеної топології. Властивості просторів $H_l^s(\mathbb{R}^n)$, $l, s \in \mathbb{R}$, викладено в роботі Л.Р. Волевича і С.Г. Ґіндікіна[3].

---

[3]Волевич Л.Р. *Обобщенные функции и уравнения в свертках* / Л.Р. Волевич, С.Г. Гиндикин. — Москва: Наука, 1994. — 336 с.

Для $m \in \mathbb{N}_0$ розглянемо простір

$$H^m = \left\{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \forall k = \overline{0,m}\ \varphi^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})\right\}$$

з нормою

$$\|\varphi\|^m = \left(\sum_{k=0}^{m} \left(\left\|\varphi^{(k)}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\right)^2\right)^{1/2}$$

та спряжений до нього простір $H^{-m} = (H^m)^*$ з нормою

$$\|f\|^m = \sup\left\{\frac{|\langle f, \varphi\rangle|}{\|\varphi\|^m} \mid 0 \neq \varphi \in H^m\right\}.$$

Добре відомо[4], що простори $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ та H^m, $m \in \mathbb{Z}$, є повними відносно введеної топології. Також добре відомо (див. щойно згадану роботу Л.Р. Волевича і С.Г. Ґіндікіна), що для будь-якого $m \in \mathbb{Z}$ маємо $H^m = H_0^m(\mathbb{R})$, і тотожне вкладення є ізоморфізмом цих просторів, зокрема,

$$\frac{1}{K_m}\|f\|^m \leq \|f\|_0^m \leq K_m \|f\|^m, \qquad f \in H^m,$$

де $K_m > 0$ є деякою сталою.

Позначимо $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $H_l^s = H_l^s(\mathbb{R})$, $s, l \in \mathbb{R}$. Для $s, l \in \mathbb{R}$ позначимо через $\widetilde{H}_l^s$ підпростір усіх непарних розподілів простору H_l^s, а через $\widehat{H}_l^s$ підпростір усіх парних розподілів простору H_l^s. Зрозуміло, що простори $\widetilde{H}_l^s$ та $\widehat{H}_l^s$ є повними відносно топології, індукованої H_l^s. Позначимо $\widetilde{\mathbf{H}}_0^s = \widetilde{H}_0^s \times \widetilde{H}_0^{s-1}$ та $\widehat{\mathbf{H}}_0^s = \widehat{H}_0^s \times \widehat{H}_0^{s-1}$ з нормою $|||\cdot|||_0^s$, і позначимо $\widetilde{\mathbf{H}}_l = \widetilde{H}_l \times \widetilde{H}_{l-1}$ та $\widehat{\mathbf{H}}_l = \widehat{H}_l \times \widehat{H}_{l-1}$ з нормою $|||\cdot|||_l$. Для $m \in \mathbb{Z}$ позначимо через $\widetilde{H}^m$ підпростір усіх непарних розподілів простору H^m, а через $\widehat{H}^m$ — підпростір усіх парних розподілів простору H^m. Очевидно, що простори $\widetilde{H}^m$ та $\widehat{H}^m$ є повними відносно топології, індукованої H^m. Позначимо $\widetilde{\mathbf{H}}^m = \widetilde{H}^m \times \widetilde{H}^{m-1}$ та $\widehat{\mathbf{H}}^m = \widehat{H}^m \times \widehat{H}^{m-1}$ з нормою $|||\cdot|||^m$. Маємо $\widetilde{\mathbf{H}}^m = \widetilde{\mathbf{H}}_0^m$ та $\widehat{\mathbf{H}}^m = \widehat{\mathbf{H}}_0^m$ і тотожні вкладення є ізоморфізмами для обох пар просторів (див. згадану вище роботу Л.Р. Волевича і С.Г. Гіндікіна).

Далі скрізь позначатимемо через $D(A)$, $N(A)$ та $R(A)$ область визначення, ядро та образ оператора A, відповідно.

Розглянемо класичний оператор перетворення для оператора Штурма—Ліувілля на півосі, який зберігає асимптотику на нескінченності. Далі ми вважаємо, що виконано наступні умови:

$$r \in C^1[0, +\infty) \cap L^\infty(0, +\infty) \quad \text{та} \quad \int_0^\infty \lambda\,|r(\lambda)|\,d\lambda < \infty. \tag{11}$$

[4]Hörmander L. *The Analisis of Linear Partial Differential Operators: in 4 v* / L. Hörmander. — Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo: Springer—Verlag, 1983—1985. — . — V. 1: Distribution Theory and Fourier Analysis. — 1983. — 440 p.

Нехай K є розв'язком системи

$$\begin{cases} K_{y_1y_1}(y) - K_{y_2y_2}(y) = r(y_1)K(y), & y_2 > y_1 > 0, \\ K(y_1, y_1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{y_1}^{\infty} r(\xi)\, d\xi, & y_1 > 0 \\ \displaystyle\lim_{y_1+y_2\to\infty} K_{y_1}(y) = \lim_{y_1+y_2\to\infty} K_{y_2}(y) = 0, & y_2 > y_1 > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Система (12) має єдиний розв'язок K, і справджується наступна теорема[5].

Теорема 1.9. *Нехай K є розв'язком системи* (12). *Тоді* $K \in C^2\{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 > y_1 > 0\}$ *і*

$$|K(y)| \le M_0\sigma_0\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right), \qquad y_2 > y_1 > 0 \tag{13}$$

$$\left|K_{y_j}(y)\right| \le \frac{1}{4}\left|r\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)\right| + M_1\sigma_0\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right), \qquad y_2 > y_1 > 0,\ j = 1, 2. \tag{14}$$

де $M_0 > 0$, $M_1 > 0$ *та* $\sigma_0(\lambda) = \int_\lambda^\infty |r(\xi)|\, d\xi$, $\lambda > 0$.

Розглянемо оператор $\mathrm{T}_0 : L^2(0, +\infty) \to L^2(0, +\infty)$, $D(\mathrm{T}_0) = L^2(0, +\infty)$,

$$(\mathrm{T}_0 g)(\lambda) = g(\lambda) + \int_\lambda^\infty K(\lambda, \xi) g(\xi)\, d\xi, \quad \lambda > 0,\ g \in D(\mathrm{T}_0).$$

Бачимо, що цей оператор зберігає асимптотику функцій на нескінченності, але не зберігає їх початкові значення. Крім того, з результатів вже згаданою роботи В.О. Марченка випливає наступна формула

$$\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} - r(\cdot)\right)\mathrm{T}_0 g = \mathrm{T}_0 \frac{d^2}{d\xi^2} g, \quad g \in H^2(0, +\infty). \tag{15}$$

У тій же книзі В.О. Марченка також доведено, що оператор T_0 є оборотним, $\mathrm{T}_0^{-1} : L^2(0, +\infty) \to L^2(0, +\infty)$, $D\left(\mathrm{T}_0^{-1}\right) = L^2(0, +\infty)$,

$$\left(\mathrm{T}_0^{-1} f\right)(\xi) = f(\xi) + \int_\xi^\infty L(\xi, \lambda) f(\lambda)\, d\lambda, \quad \xi > 0,\ f \in D(\mathrm{T}_0^{-1}),$$

де ядро $L \in C^2\{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 > y_1 > 0\}$ визначається співвідношенням

$$L(y) + K(y) + \int_{y_1}^{y_2} L(y_1, \xi) K(\xi, y_2)\, d\xi = 0, \qquad y_2 > y_1 > 0, \tag{16}$$

[5]Марченко В.А. *Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения* / В.А. Марченко. — К.: Наукова думка, 1977. — 331 с.

або

$$L(y)+K(y)+\int_{y_1}^{y_2} K(y_1,\xi)L(\xi,y_2)\,d\xi=0, \qquad y_2>y_1>0, \tag{17}$$

та для ядра L справедлива властивості, аналогічні властивостям ядра K.

Продовження оператора T_0 на $\widetilde{H}^{-2}$ було спочатку розглянуто і досліджено для деяких спеціальних потенціалів r в роботі [5], а потім узагальнено на випадок, коли потенціал r задовольняє умову (11), в роботі К.С. Халіної[6] та в [2]. У наступних теоремах 1.11–1.15 викладено властивості цього продовження, одержані у цих роботах.

Позначимо через $\widetilde{\mathrm{T}}_0$ продовження оператора T_0 на $\widetilde{H}^0$. Маємо $\widetilde{\mathrm{T}}_0 : \widetilde{H}^0 \to \widetilde{H}^0$, $D\left(\widetilde{\mathrm{T}}_0\right)=\widetilde{H}^0$,

$$\left(\widetilde{\mathrm{T}}_0 g\right)(\lambda)=g(\lambda)+\operatorname{sgn}\lambda\int_{|\lambda|}^{\infty} K(|\lambda|,\xi)g(\xi)\,d\xi, \quad \lambda\in\mathbb{R},\ g\in D(\widetilde{\mathrm{T}}_0).$$

Очевидно, що цей оператор є оборотним і $\widetilde{\mathrm{T}}_0^{-1} : \widetilde{H}^0 \to \widetilde{H}^0$, $D(\widetilde{\mathrm{T}}_0^{-1})=\widetilde{H}^0$,

$$\left(\widetilde{\mathrm{T}}_0^{-1} f\right)(\xi)=f(\xi)+\operatorname{sgn}\xi\int_{|\xi|}^{\infty} L(|\xi|,\lambda)f(\lambda)\,d\lambda, \quad \xi\in\mathbb{R},\ f\in D(\widetilde{\mathrm{T}}_0^{-1}).$$

Для того, щоб продовжити оператор $\widetilde{\mathrm{T}}_0$ на $\widetilde{H}^{-2}$, розглянемо спряжений до нього оператор. Маємо $\widetilde{\mathrm{T}}_0^* : \widetilde{H}^0 \to \widetilde{H}^0$, $D(\widetilde{\mathrm{T}}_0^*)=\widetilde{H}^0$,

$$\left(\widetilde{\mathrm{T}}_0^* \varphi\right)(\xi)=\varphi(\xi)+\operatorname{sgn}\xi\int_0^{|\xi|} K(\lambda,|\xi|)\varphi(\lambda)\,d\lambda, \qquad \xi\in\mathbb{R},\ \varphi\in D(\widetilde{\mathrm{T}}_0^*),$$

та $(\widetilde{\mathrm{T}}_0^{-1})^*=(\widetilde{\mathrm{T}}_0^*)^{-1} : \widetilde{H}^0 \to \widetilde{H}^0$, $D\big((\widetilde{\mathrm{T}}_0^*)^{-1}\big)=\widetilde{H}^0$,

$$\left((\widetilde{\mathrm{T}}_0^*)^{-1}\psi\right)(\lambda)=\psi(\lambda)+\operatorname{sgn}\lambda\int_0^{|\lambda|} L(\xi,|\lambda|)\psi(\xi)\,d\xi,\ \lambda\in\mathbb{R},\ \psi\in D\big((\widetilde{\mathrm{T}}_0^*)^{-1}\big).$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1.11. *Оператор* $\widetilde{\mathrm{T}}_0^*$ *є автоморфізмом простору* $\widetilde{H}^m$, $m=0,1,2$.

Позначимо $\widetilde{\mathbf{T}}_r=\left(\widetilde{\mathrm{T}}_0^*|_{\widetilde{H}^2}\right)^*$. Маємо $\widetilde{\mathbf{T}}_r : \widetilde{H}^{-2} \to \widetilde{H}^{-2}$, $D(\widetilde{\mathbf{T}}_r)=\widetilde{H}^{-2}$,

$$\left\langle \widetilde{\mathbf{T}}_r g,\varphi\right\rangle=\left\langle g,\widetilde{\mathrm{T}}_0^*\varphi\right\rangle, \qquad g\in D(\widetilde{\mathbf{T}}_r),\ \varphi\in D(\widetilde{\mathrm{T}}_0^*)\cap\widetilde{H}^2=\widetilde{H}^2.$$

[6] Халіна К.С. *Про керованість крайовими умовами Діріхле для неоднорідної струни на півосі* / К.С. Халіна // Доп. НАНУ. — 2012. — № 10. — С. 24-29.

Тоді $\widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1} = \left(\left(\widetilde{\mathrm{T}}_0^*\right)^{-1}|_{\widetilde{H}^2}\right)^*$ і $\widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1} : \widetilde{H}^{-2} \to \widetilde{H}^{-2}$, $D(\widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1}) = \widetilde{H}^{-2}$,

$$\left\langle \widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1} f, \psi \right\rangle = \left\langle g, \left(\widetilde{\mathrm{T}}_0^*\right)^{-1} \psi \right\rangle, \qquad f \in D(\widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1}),\ \psi \in D\big((\widetilde{\mathrm{T}}_0^*)^{-1}\big) \cap \widetilde{H}^2 = \widetilde{H}^2.$$

Справедлива також теорема.

Теорема 1.12. *Оператор $\widetilde{\mathbf{T}}_r$ є автоморфізмом простору $\widetilde{H}^m$, $m = -2, -1, 0$.*

Крім того для оператора $\widetilde{\mathbf{T}}_r$ має місце аналог формули (15).

Теорема 1.13. *Якщо $g \in \widetilde{H}^0$ та існує $g(+0)$, то існує $\left(\widetilde{\mathbf{T}}_r g\right)(+0)$ і*

$$\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} - r(|\cdot|)\right) \widetilde{\mathbf{T}}_r g - 2\left(\widetilde{\mathbf{T}}_r g\right)(+0)\delta' = \widetilde{\mathbf{T}}_r \left(\frac{d^2}{d\xi^2} g - 2g(+0)\delta'\right).$$

Наступна теорема також є корисною при дослідженні проблем керованості.

Теорема 1.15. *Маємо $\widetilde{\mathbf{T}}_r(\delta') = \delta'$.*

Аналогічно оператор T_0 продовжується на $\widehat{H}^{-1}$. Продовжений оператор позначений через $\widehat{\mathbf{T}}_r$. Таке продовження було розглянуто і досліджено в роботі К.С. Халіної[7] та в [1].

Нехай H_0, H_1, H_2 є банаховими просторами, а $H_0 \subset H_1 \subset H_2$ є щільними вкладеннями, оператори $\mathcal{A} : H_2 \to H_2$, $D(\mathcal{A}) = H_0$, та $\mathcal{B} : \mathbb{R} \to H_2$, $D(\mathcal{B}) = \mathbb{R}$, є лінійними.

Розглянемо керовану систему

$$\mathrm{w}'' = \mathcal{A}\mathrm{w} + \mathcal{B}u, \qquad t \in (0, T), \tag{18}$$
$$\mathrm{w}(0) = \mathrm{w}_0^0, \quad \mathrm{w}'(0) = \mathrm{w}_1^0, \tag{19}$$

де $\mathrm{w}^{(j)} : [0, T] \to H_j$, $j = 0, 1, 2$, $\mathrm{w}_0^0 \in H_0$, $\mathrm{w}_1^0 \in H_1$, $u \in L^\infty(0, T)$ є керуванням. Позначивши

$$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} \mathrm{w} \\ \mathrm{w}' \end{pmatrix}, \quad \mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H} = H_1 \times H_2, \quad \mathbf{H} = H_0 \times H_1,$$
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix} : \mathrm{H} \to \mathrm{H},\ D(\mathbf{A}) = \mathbf{H}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathrm{H},\ D(\mathbf{B}) = \mathbb{R},$$

де Id є тотожнім оператором, бачимо що система (18), (19) еквівалентна системі

$$\mathrm{W}' = \mathbf{A}\mathrm{W} + \mathbf{B}u, \qquad t \in (0, T), \tag{20}$$

[7]Khalina K.S. *On the Neumann boundary controllability for a non-homogeneous string on a half-axis* / K.S. Khalina // J. Math. Phys., Anal., Geom. — 2012. — V. 8. — P. 307–335.

$$\mathrm{W}(0) = \mathrm{W}^0, \qquad (21)$$

де $\mathrm{W} : [0,T] \to \mathbf{H}$, $\mathrm{W}' : [0,T] \to \mathrm{H}$, $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$, $u \in L^\infty(0,T)$ є керуванням.

Нехай $T > 0$. Для $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$ позначимо через $\mathcal{R}_T(\mathrm{W}^0)$ множину тих $\mathrm{W}^T = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^T \\ \mathrm{w}_1^T \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$, для яких існує керування $u \in L^\infty(0,T)$ таке, що кожен розв'язок задачі Коші (18), (19) (або (20), (21)) задовольняє умову $\mathrm{W}(T) = \begin{pmatrix} \mathrm{w}(T) \\ \mathrm{w}'(T) \end{pmatrix} = \mathrm{W}^T$. Позначимо також $\mathcal{R}(\mathrm{W}^0) = \bigcup_{T>0} \mathcal{R}_T(\mathrm{W}^0)$.

Означення 1.21. *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$ *керованої системи* (18), (19) *(або* (20), (21)*) називається* L^∞*-керованим за заданий час* $T > 0$*, якщо* $0 \in \mathcal{R}_T(\mathrm{W}^0)$*.*

Означення 1.22. *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$ *керованої системи* (18), (19) *(або* (20), (21)*) називається наближено* L^∞*-керованим за заданий час* $T > 0$*, якщо* $0 \in \overline{\mathcal{R}_T(\mathrm{W}^0)}$ *(замикання розглядається в* $\mathbf{H}$*).*

Означення 1.23. *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$ *керованої системи* (18), (19) *(або* (20), (21)*) називається наближено* L^∞*-керованим за вільний час, якщо* $0 \in \overline{\mathcal{R}(\mathrm{W}^0)}$ *(замикання розглядається в* $\mathbf{H}$*).*

Нехай оператор $\mathbf{A}$ є інфінітезимальним генератором C_0-групи $\mathbb{S} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$, де $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ є простором лінійних обмежених операторов, що визначені на всьому H і діють в H. Тоді єдиним розв'язком (20), (21) є

$$\mathrm{W}(t) = \mathbb{S}(t) \left(\mathrm{W}^0 + \int_0^t \mathbb{S}(-\xi)\mathbf{B}u(\xi)\, d\xi \right), \qquad t \in [0,T]. \qquad (22)$$

Тому для $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$ маємо

$$\mathcal{R}_T(\mathrm{W}^0) = \left\{ \mathrm{W}^T \in \mathbf{H} \mid \exists u \in L^\infty(0,T) \quad \mathbb{S}(-T)\mathrm{W}^T - \mathrm{W}^0 = \mathbf{\Lambda} u \right\}$$

де $\mathbf{\Lambda} : L^2(0,+\infty) \to \mathrm{H}$ є інтегральним оператором

$$\mathbf{\Lambda} f = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathbb{S}(-\xi)\mathbf{B}f(\xi)\, d\xi,$$

визначеним для тих $f \in L^2(0,+\infty)$, для яких існує відповідна границя.

Також у цьому розділі для загального рівняння вигляду (18) поставлені задачі стабілізовності і коректної розв'язності нелокальної крайової задачі.

У *розділі 2* введено та досліджено деякі допоміжні простори Соболєва на $(0,+\infty)$, які дозволяють продовжувати розв'язки рівняння (8) на простори $H_0^m(\mathbb{R})$. Далі в класичних просторах Соболєва введено та досліджено оператори впливу, що виникають в задачах керування для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами. Уведений вище оператор впливу $\mathbf{\Lambda}$, для хвильового рівняння (8) зі сталими коефіцієнтами на півосі, керованого крайовими умовами Діріхле, набуває вигляду

$$\mathbf{\Lambda} f = -\begin{pmatrix} \Psi \mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}} f \\ \widehat{\Psi} \mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}} f \end{pmatrix}, \qquad f \in D(\mathbf{\Lambda}) = L^2(0, +\infty),$$

де $\mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}}$ є оператором непарного продовження, а Ψ та $\widehat{\Psi}$ визначені нижче. Оператор $\mathbf{\Lambda}$, а, в наслідок цього, і оператори Ψ та $\widehat{\Psi}$, є центральним об'єктом при дослідженні керованості згаданого хвильового рівняння. Ці оператори було названо операторами впливу [7], тому що вони, фактично, описують вплив керування на кінцевий стан керованої системи (20), (21). Тому тут ми досліджуємо оператори Ψ і $\widehat{\Psi}$ та їх властивості, що будуть використані при вивченні рівняння (8), керованого крайовою умовою Діріхле. Ці оператори залежать від параметра q, який ми вважатимемо невід'ємною сталою.

Нехай $\Psi : \widetilde{H}^0_0 \to \widetilde{H}^0_0$, $D(\Psi) = \widetilde{H}^0_0$,

$$\Psi g = \mathcal{F}^{-1}_{\sigma \to x} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + q^2}} \left(\mathcal{F} g\right) \left(\sqrt{\sigma^2 + q^2}\right) \right), \qquad g \in D(\Psi). \tag{23}$$

Якщо $q = 0$, то $\Psi = \mathrm{Id}$.

Нехай $\widehat{\Psi} : \widetilde{H}^0_0 \to \widetilde{H}^{-1}_0$, $D(\widehat{\Psi}) = D(\Psi) = \widetilde{H}^0_0$,

$$\widehat{\Psi} g = \frac{d}{dx} \mathcal{F}^{-1}_{\sigma \to x} \left(\left(\mathcal{F}\left(\operatorname{sgn}(\cdot)\, g\right)\right) \left(\sqrt{\sigma^2 + q^2}\right) \right), \qquad g \in D(\widehat{\Psi}). \tag{24}$$

Якщо $q = 0$, то $\widehat{\Psi} = \frac{d}{dx} \operatorname{sgn}(\cdot)$, тобто, $\left(\widehat{\Psi} g\right)(x) = \left(\operatorname{sgn} x\, g(x)\right)'$.

Дослідимо оператори Ψ та $\widehat{\Psi}$.

Теорема 2.6. *Нехай $q > 0$. Тоді справедливі наступні твердження:*

(i) $R(\Psi) = \left\{ f \in \widetilde{H}^0_0 \mid \exists \widetilde{f} \in H^{1/2}_0 \ \mathcal{F} f = \sqrt{|\cdot|}\mathcal{F}\widetilde{f} \right\}$, $\overline{R(\Psi)} = \widetilde{H}^0_0$;

(ii) Ψ *є обмеженим і* $\|\Psi\| \le 1$;

(iii) $N(\Psi) = \{ g \in D(\Psi) \mid \operatorname{supp} \mathcal{F} g \subset [-q, q] \}$;

(iv) $(\Psi g)(x) = g(x) - qx \displaystyle\int_{|x|}^{\infty} \frac{J_1\left(q\sqrt{t^2 - x^2}\right)}{\sqrt{t^2 - x^2}} g(t)\, dt$, $g \in D(\Psi)$.

Тут $J_\nu(\xi)$ є функцією Бесселя.

Аналогічна теорема справедлива для оператора $\widehat{\Psi}$.

Теорема 2.7. *Нехай $q > 0$. Тоді справедливі наступні твердження:*

(i) $R(\widehat{\Psi}) = \left\{ f \in \widetilde{H}^{-1}_0 \mid \exists \widetilde{f} \in H^{-1/2}_0 \ \mathcal{F} f = \sqrt{|\cdot|}\mathcal{F}\widetilde{f} \right\}$, $\overline{R(\widehat{\Psi})} = \widetilde{H}^{-1}_0$;

(ii) $\widehat{\Psi}$ *є обмеженим і* $\left\|\widehat{\Psi}\right\| \leq 1$*;*

(iii) $N(\widehat{\Psi}) = \left\{g \in D(\widehat{\Psi}) \mid \operatorname{supp} \mathcal{F}\left(\operatorname{sgn}(\cdot)\, g\right) \subset [-q,q]\right\}$*;*

(iv) $\left(\widehat{\Psi} g\right)(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{sgn} x\, g(x) - q\displaystyle\int_{|x|}^{\infty} \frac{tJ_1\left(q\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}} g(t)\, dt\right)$, $g \in D(\widehat{\Psi})$.

Нехай $m = -2, -1, 0$, $\alpha > 0$. Позначимо через $\widetilde{H}_0^m[-\alpha,\alpha]$ підпростір усіх розподілів в $\widetilde{H}_0^m$, носії яких лежать в $[-\alpha,\alpha]$. Очевидно, що простір $\widetilde{H}_0^m[-\alpha,\alpha]$ є повним відносно топології, індукованої $\widetilde{H}_0^m$. Позначимо через Ψ_α звуження оператора Ψ на $\widetilde{H}_0^0[-\alpha,\alpha]$, а через $\widehat{\Psi}_\alpha$ звуження оператора $\widehat{\Psi}$ на $\widetilde{H}_0^0[-\alpha,\alpha]$. Очевидно, що $\widehat{\Psi}_\alpha g = \Psi_\alpha(\operatorname{sgn}(\cdot) g)'$, $g \in D(\Psi_\alpha)$.

Теорема 2.8. *Оператор* Ψ_α *є автоморфізмом* $\widetilde{H}_0^0[-\alpha,\alpha]$*.*

Теорема 2.10. *Оператор* $\widehat{\Psi}_\alpha$ *є ізоморфізмом* $\widetilde{H}_0^0[-\alpha,\alpha]$ *та* $\widetilde{H}_0^{-1}[-\alpha,\alpha]$*.*

Ці теореми дозволяють одержати критерії керованості за заданий час для рівняння (8), керованого крайовою умовою Діріхле.

Далі досліджено множини $N(\Psi)$ та $\widehat{\Psi}(N(\Psi))$. Оскільки для $q = 0$ маємо $N(\Psi) = \widehat{\Psi}(N(\Psi)) = \{0\}$, то ми досліджуємо ці множини лише у випадку $q > 0$. Зокрема, одержано наступні чотири теореми, які дозволяють одержати критерії керованості за вільний час для рівняння (8), керованого крайовою умовою Діріхле.

Теорема 2.17. *Нехай* $q > 0$, $n = \overline{0,\infty}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x\, |x|^n e^{-q|x|}$, $x \in \mathbb{R}$*. Тоді* $f \in \overline{\widehat{\Psi}(N(\Psi))}$ *(замикання розглядається в* H_0^{-1}*).*

Теорема 2.18. *Нехай* $q > 0$*. Тоді* $\widetilde{H}_0^{-1}$ *є замиканням множини* $\widehat{\Psi}\left(N(\Psi)\right)$ *за нормою* $\|\cdot\|_0^{-1}$*.*

Теорема 2.19. *Нехай* $q > 0$, $n = \overline{0,\infty}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x\, |x|^n e^{-q|x|}$, $x \in \mathbb{R}$*. Тоді* $f \in \overline{\Psi(N(\widehat{\Psi}))}$ *(замикання розглядається в* H_0^0*).*

Теорема 2.20. *Нехай* $q > 0$*. Тоді* $\widetilde{H}_0^0$ *є замиканням множини* $\Psi(N(\widehat{\Psi}))$ *за нормою* $\|\cdot\|_0^0$*.*

Аналогічні дослідження проведено для операторів впливу Φ і $\widehat{\Phi}$, що виникають при дослідженні проблем керованості для рівняння (8), керованого крайовою умовою Неймана. У цьому розділі також досліджено зв'язок між операторами впливу та операторами перетворення.

У *розділі 3* введено і досліджено оператори перетворення та простори соболєвського типу для диференціальних операторів другого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Нехай $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ і $\theta \in C^1(\mathbb{R})$ є парними додатними на $\mathbb{R}$ функціями. Крім того, вважаємо

$$\sigma(x) = \int_0^x \frac{d\mu}{\theta^2(\mu)} \to +\infty, \quad \text{коли} \quad x \to +\infty. \tag{25}$$

Зрозуміло, що σ є непарною зростаючою на $\mathbb{R}$ функцією. Далі розглянемо аналог соболєвського простору H^p, у якому звичайну похідну $\frac{d}{dx}$ замінено на "лінійно деформовану" похідну $\mathcal{D}_{\eta\theta} = \theta^2 \left(\frac{d}{dx} + \frac{\eta'}{\eta} \right)$, а звичайні простори $L^2(\mathbb{R})$ — на відповідні вагові простори з вагою $\frac{\eta^2}{\theta^2}$. А саме, позначимо

$$\mathbb{H}^p = \left\{ \varphi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \mid \forall m = \overline{0,p} \ \left(\frac{\eta}{\theta} \left(\mathcal{D}^m_{\eta\theta} \varphi \right) \right) \in H^0 \right\}, \quad p = 0, 1, 2,$$

з нормою

$$[\![\varphi]\!]^p = \left(\sum_{m=0}^{p} \left(\left\| \frac{\eta}{\theta} \left(\mathcal{D}^m_{\eta\theta} \varphi \right) \right\|^0 \right)^2 \right)^{1/2}, \qquad \varphi \in \mathbb{H}^p, \quad p = 0, 1, 2,$$

і позначимо $\mathbb{H}^{-p} = (\mathbb{H}^p)^*$ з нормою

$$[\![f]\!]^{-p} = \sup \left\{ \frac{|\langle\langle f, \varphi \rangle\rangle|}{[\![\varphi]\!]^p} \mid 0 \neq \varphi \in \mathbb{H}^p \right\}, \qquad f \in \mathbb{H}^{-p}, \quad p = 0, 1, 2,$$

де $\langle\langle f, \varphi \rangle\rangle$ є значенням розподілу $f \in \mathbb{H}^{-p}$ на тестовій функції $\varphi \in \mathbb{H}^p$. Зокрема, маємо $\mathbb{H}^0 = \left(\mathbb{H}^0\right)^*$ та

$$\langle\langle f, \varphi \rangle\rangle = \left\langle \frac{\eta}{\theta} f, \frac{\eta}{\theta} \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) \frac{\eta^2(x)}{\theta^2(x)} \, dx, \quad f, \varphi \in \mathbb{H}^0.$$

Операція диференціювання в $\mathbb{H}^p$ визначається наступною формулою

$$\langle\langle \mathcal{D}_{\eta\theta} f, \varphi \rangle\rangle = - \langle\langle f, \mathcal{D}_{\eta\theta} \varphi \rangle\rangle, \qquad f \in \mathbb{H}^{-p}, \quad \varphi \in \mathbb{H}^{p+1}, \quad p = 0, 1.$$

Разом з просторами $\mathbb{H}^m$ розглянемо оператор $\mathbf{S}$. Спочатку розглянемо допоміжний оператор $\mathrm{S}_0 : H^0 \to \mathbb{H}^0$, $D(\mathrm{S}_0) = H^0$,

$$\mathrm{S}_0 \psi = \frac{\psi \circ \sigma}{\eta}, \quad \psi \in D(\mathrm{S}_0),$$

де $\psi \circ \sigma$ є композицією ψ і σ, тобто, $(\psi \circ \sigma)(x) = \psi(\sigma(x))$, $x \in \mathbb{R}$. За побудовою, оператор S_0 є оборотним, $\mathrm{S}_0^{-1} : \mathbb{H}^0 \to H^0$, $D(\mathrm{S}_0^{-1}) = \mathbb{H}^0$,

$$\mathrm{S}_0^{-1} \varphi = (\eta \varphi) \circ \sigma^{-1}, \quad \varphi \in D(\mathrm{S}_0^{-1}).$$

Теорема 3.1. *Мають місце наступні твердження:*

(i) $\mathcal{D}_{\eta\theta}\mathrm{S}_0\psi = \mathrm{S}_0\frac{d}{d\lambda}\psi$, $\psi \in H^1$,
(ii) *Оператор* S_0 *є ізометричним ізоморфізмом* H^p *і* $\mathbb{H}^p$, $p = 0, 1, 2$.

Скориставшись цією теоремою, ми продовжуємо оператор S_0 на H^{-2}. Позначимо це продовження через $\mathbf{S}$. Маємо $\mathbf{S} : H^{-2} \to \mathbb{H}^{-2}$, $D(\mathbf{S}) = H^{-2}$,

$$\langle\langle \mathbf{S}g, \varphi\rangle\rangle = \langle g, \mathrm{S}_0^{-1}\varphi\rangle, \qquad g \in D(\mathbf{S}),\ \varphi \in D(\mathrm{S}_0^{-1}) \cap \mathbb{H}^2 = \mathbb{H}^2.$$

Зрозуміло, що $\mathbf{S}$ є також оборотним, $\mathbf{S}^{-1} : \mathbb{H}^{-2} \to H^{-2}$, $D(\mathbf{S}^{-1}) = \mathbb{H}^{-2}$,

$$\langle \mathbf{S}^{-1}f, \psi\rangle = \langle\langle f, S_0\psi\rangle\rangle\,, \qquad f \in D(\mathbf{S}^{-1}),\ \psi \in D(\mathrm{S}_0) \cap H^2 = H^2.$$

Беручи до уваги конструкцію $\mathbf{S}$ та теорему 3.1, одержуємо наступну теорему

Теорема 3.2. *Для* $m = \overline{-2, 2}$ *мають місце наступні твердження:*
(i) $\mathcal{D}_{\eta\theta}\mathbf{S}\psi = \mathbf{S}\frac{d}{d\lambda}\psi$, $\psi \in H^m$, $m \neq -2$,
(ii) *Оператор* $\mathbf{S}$ *є ізометричним ізоморфізмом* H^m *і* $\mathbb{H}^m$,
(iii) $\langle\langle f, \varphi\rangle\rangle = \langle \mathbf{S}^{-1}f, \mathbf{S}^{-1}\varphi\rangle$, $f \in \mathbb{H}^{-m}$, $\varphi \in \mathbb{H}^m$.

Також нам будуть потрібні наступні дві теореми.

Теорема 3.3. *Маємо* $\mathbf{S}\delta = \eta(0)\delta$.

Теорема 3.4. *Мають місце наступні щільні вкладення:*

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{H}^m \subset \mathbb{H}^n \subset \mathcal{D}', \qquad -2 \leq n \leq m \leq 2.$$

Зауваження 3.6. *На прикладах показано, що для деяких* η *та* θ *простір* $\mathcal{S}$ *є підпростором* $\mathbb{H}^m$, *але для деяких інших* η *та* θ *простір* $\mathcal{S}$ *не є підпростором* $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2, 2}$. *Аналогічно, для деяких* η *та* θ *простір* $\mathbb{H}^m$ *є підпростором* $\mathcal{S}'$, *але для деяких інших* η *та* θ *простір* $\mathbb{H}^m$ *не є підпростором* $\mathcal{S}'$, $m = \overline{-2, 2}$.

Нехай $k = \overline{-2, 2}$. Позначимо через $\widetilde{\mathbb{H}}^k$ підпростір усіх непарних розподілів простору $\mathbb{H}^k$, а через $\widehat{\mathbb{H}}^k$ — підпростір усіх парних розподілів простору $\mathbb{H}^k$. Очевидно, що простори $\widetilde{\mathbb{H}}^k$ та $\widehat{\mathbb{H}}^k$ є повними відносно топології, індукованої $\mathbb{H}^k$. Позначимо $\widetilde{\mathbb{H}}^k = \widetilde{\mathbb{H}}^k \times \widetilde{\mathbb{H}}^{k-1}$ та $\widehat{\mathbb{H}}^k = \widehat{\mathbb{H}}^k \times \widehat{\mathbb{H}}^{k-1}$ з нормою $[\![\cdot]\!]^k$. З теореми 3.2 одразу одержуємо

Висновок 3.7. *Оператор* $\mathbf{S}$ *є ізометричним ізоморфізмом* $\widetilde{H}^k$ *та* $\widetilde{\mathbb{H}}^k$, *а також ізометричним ізоморфізмом* $\widehat{H}^k$ *та* $\widehat{\mathbb{H}}^k$, $k = \overline{-2, 2}$.

Далі в цьому розділі введено та досліджено деякі допоміжні модифіковані простори соболєвського типу на $(0, +\infty)$, які дозволяють продовжувати розв'язки рівняння (10) на простори $\mathbb{H}_0^m$ на $\mathbb{R}$.

У цьому ж розділі вивчено оператори перетворення для диференціальних операторів зі змінними коефіцієнтами. Уважаємо, що умову (25) виконано. Нехай також r є парною функцією, для якої виконано умову (11).

Для дослідження хвильового рівняння (10) зі змінними коефіцієнтами, керованого крайовою умовою Діріхле, буде використано оператор $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$. Дослідимо його.

З теореми 1.12 та висновку 3.7 одержуємо наступну теорему.

Теорема 3.13. *Оператор* $\widetilde{\mathbb{T}}$ *є ізоморфізмом просторів* $\widetilde{H}^m$ *та* $\widetilde{\mathbb{H}}^m$, $m = \overline{-2,0}$.

З теорем 1.13, 1.15, 3.2 та 3.3 випливають наступні дві теореми

Теорема 3.14. *Якщо* $g \in \widetilde{H}^0$ *і існує* $g(+0) \in \mathbb{R}$, *то існує* $(\widetilde{\mathbb{T}}g)(+0)$ *і*

$$\left(\mathcal{D}_{\eta\theta}^2 - r \circ \sigma\right) \widetilde{\mathbb{T}}g - 2\eta^2(0)(\widetilde{\mathbb{T}}g)(+0)\mathcal{D}_{\eta\theta}\delta = \widetilde{\mathbb{T}}\left(\frac{d^2}{d\xi^2}g - 2g(+0)\delta'\right).$$

Теорема 3.16. *Маємо* $\widetilde{\mathbb{T}}\delta' = \eta(0)\mathcal{D}_{\eta\theta}\delta$.

У цьому розділі також досліджено оператор перетворення $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$, який буде використано для вивчення хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами (10), керованого крайовою умовою Неймана.

У *розділі 4* введено і досліджено оператори перетворення $\mathbf{\Psi}$ та $\mathbf{\Phi}$ і простори $H_0^{s[1/2]}$ та $H^0_{s[1/2]}$, $s \in \mathbb{R}$, соболєвського типу для двовимірного оператора Лапласа зі сталими коефіцієнтами, визначеного на радіально симетричних розподілах.

У *розділі 5* на основі результатів, одержаних у розділі 2, одержано критерії керованості для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі, керованого крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана.

Розглянемо хвильове рівняння зі сталими коефіцієнтами (8), кероване крайовою умовою Діріхле

$$w(0,t) = u(t), \qquad t \in (0,T), \tag{26}$$

за початкових умов

$$w(x,0) = w_0^0(x), \quad w_t(x,0) = w_1^0(x), \qquad x > 0, \tag{27}$$

де $T > 0$, $q \ge 0$ — деякі сталі; $u \in L^\infty(0,T)$ — керування; $w_0^0 \in H^0(0,+\infty)$, $w_1^0 \in H^{-1}(0,+\infty)$ — початкові дані, які є непарно продовжуваними до розподілів в $\widetilde{H}^0$ і $\widetilde{H}^{-1}$, відповідно. Цю керовану систему розглядаємо у просторах Соболєва $H^{-2}(0,+\infty)$. Скориставшись результатами розділу 2, непарно продовжуємо ров'язки цієї системи до функцій в $\widetilde{H}^0$. Позначимо через w, w_0^0 та w_1^0 непарні продовження за x для w, w_0^0 та w_1^0, відповідно. Тоді для w маємо

$$\mathrm{w}_{tt} = \mathrm{w}_{xx} - q^2\mathrm{w} - 2u\delta', \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T), \tag{28}$$

$$\mathrm{w}(x,0)=\mathrm{w}_0^0(x), \quad \mathrm{w}_t(x,0)=\mathrm{w}_1^0(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{29}$$

де δ — це розподіл Дірака за x; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{w} : [0,T]\to \widetilde{H}^{-m}$, $m=0,1,2$; $\mathrm{w}_0^0\in\widetilde{H}^0$, $\mathrm{w}_1^0\in\widetilde{H}^{-1}$. Доведено, що для розв'язку w системи (28), (29) виконано умову

$$\mathrm{w}(+0,t)=u(t) \quad \text{м. с. на } [0,T], \tag{30}$$

отже, звуження цього розв'язку на $(0,+\infty)$ задовольняє систему (8), (26), (27). Таким чином, системи (8), (26), (27) і (28), (29) є еквівалентними, тому далі ми розглядатимемо систему (28), (29) замість (8), (26), (27). Позначимо $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix}\mathrm{w}_0^0\\ \mathrm{w}_1^0\end{pmatrix}$. Бачимо, що $\mathrm{W}^0\in\widetilde{\mathbf{H}}^0$.

Позначимо через $\mathcal{A}:\widetilde{H}^{-2}\to\widetilde{H}^{-2}$ диференціальний оператор $\left(\frac{d}{dx}\right)^2-q^2$, а через $\mathcal{B}:\mathbb{R}\to\widetilde{H}_0^{-2}$ — оператор множення на $-2\delta'(x)$. Отже, (28), (29) перетворюється на (18), (19), де $H_0=\widetilde{H}^0$, $H_1=\widetilde{H}^{-1}$ та $H_2=\widetilde{H}^{-2}$. Керована система (20), (21) еквівалентна системі (18), (19), а, отже, і системам (8), (26), (27) та (28), (29). Тому далі ми будемо розглядати систему (20), (21), де $\mathbf{H}=\widetilde{\mathbf{H}}^0$ та $\mathrm{H}=\widetilde{\mathbf{H}}^{-1}$. У цьому розділі доведено, що оператор $\mathbf{A}$ керованої системи (20), (21) генерує C_0-групу $\mathbb{S}:\mathbb{R}\to\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{H}}^{-1})$. Тому, скориставшись формулою (22) та теоремами 2.6, 2.7, одержуємо наступну теорему

Теорема 5.1–5.2. *Нехай $u\in L^\infty(0,T)$ та $\mathrm{W}^0\in\widetilde{\mathbf{H}}^0$. Тоді розв'язок системи* (28), (29) *є єдиним і задовольняє умову*

$$\left|\!\left|\!\left|\begin{pmatrix}\mathrm{w}(\cdot,t)\\ \mathrm{w}_t(\cdot,t)\end{pmatrix}\right|\!\right|\!\right|^0 \le Q\left\|\mathrm{W}^0\right\|^0+\sqrt{2T}(1+T^2)(1+q^2)\left\|u\right\|_{L^\infty(0,T)},\ t\in[0,T]. \tag{31}$$

тобто, задача (28), (29) *є коректно поставленою. Тут $Q=1/q$, якщо $q>0$, і $Q=2\sqrt{1+t^2}$, якщо $q=0$.*

Використовуючи теореми 2.8, 2.10, доведено критерій керованості для системи (28), (29) за заданий час.

Теорема 5.7. *Нехай $T>0$.*

(i) *Стан $\mathrm{W}^0\in\widetilde{\mathbf{H}}^0$ системи* (28), (29) *є наближено L^∞-керованим за заданий час T тоді і лише тоді, коли виконано дві умови:*

$$\operatorname{supp}\mathrm{w}_0^0\subset[-T,T], \tag{32}$$

$$\mathrm{w}_1^0-\widehat{\Psi}_T\Psi_T^{-1}\mathrm{w}_0^0=0. \tag{33}$$

(ii) *Стан $\mathrm{W}^0\in\widetilde{\mathbf{H}}^0$ системи* (28), (29) *є L^∞-керованим за заданий час T тоді і лише тоді, коли виконано три умови:* (32), (33) *та*

$$\mathrm{w}_0^0\in L^\infty(\mathbb{R}). \tag{34}$$

Крім того, за умов (32)–(34) керування $u(t) = \mathrm{w}_0^0(t)$, $t \in [0, T]$, *розв'язує задачу* L^∞*-керованості за час* T.

Зауваження 5.8. *Для* $q = 0$ *умова* (33) *набирає вигляду*

$$\mathrm{w}_1^0 - \big(\operatorname{sgn}(\cdot)\, \mathrm{w}_0^0\big)' = 0. \tag{35}$$

За допомоги теорем 2.17–2.20 також доведено критерії керованості для системи (28), (29) за вільний час.

Теорема 5.9. *Для* $q > 0$ *будь-який стан* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ *системи* (28), (29) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час.*

Теорема 5.10. *Для* $q = 0$ *стан* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ *системи* (28), (29) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли виконано умову* (35).

Бачимо, що властивості керованості за заданий час системи (28), (29) є подібними, а властивості керованості цієї системи за вільний час є суттєво відмінними у випадках $q > 0$ і $q = 0$.

Аналогічні результати одержано у цьому розділі для керованої системи (28), (29), розглянутої у просторах $\widetilde{H}_0^{-5/2[1/2]}$.

У цьому ж розділі для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами (8), керованого крайовою умовою Неймана, одержано аналоги всіх властивостей встановлених вище для цього ж рівняння, керованого умовою Діріхле.

Застосовуючи результати розділу 4 щодо операторів перетворення $\mathbf{\Psi}$ та $\mathbf{\Phi}$ і просторів $H_0^{s[1/2]}$ та $H^0_{s[1/2]}$, $s \in \mathbb{R}$, а також результати щодо керованості одновимірного хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами (8) у просторах $H_0^{s[1/2]}$, одержано також критерії керованості для двовимірного хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півплощині, керованого крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана імпульсного типу. У цьому ж розділі доведено стабілізовність хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами за допомоги позиційного керування без запізнення або за допомоги такого керування із запізненням. Крім того, одержано критерії коректності нелокальної крайової задачі для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами.

У *розділі 6*, застосовуючи результати, одержані у розділі 3, основні результати розділу 5 узагальнено на хвильові рівняння зі змінними коефіцієнтами на півосі.

Нехай ρ, k, γ — задані функції такі, що $\gamma \in C^1[0, +\infty)$, а $\rho, k \in C^1[0, +\infty)$ є позитивними на $[0, +\infty)$, $(\rho k) \in C^2[0, +\infty)$, $(\rho k)'(0) = 0$ і

$$\int_0^x \sqrt{\rho(\mu)/k(\mu)}\, d\mu \to +\infty, \qquad \text{коли } x \to +\infty. \tag{36}$$

Ми також вважаємо, що виконано дві умови:

$$P(k,\rho)-\gamma \in L^{\infty}(0,+\infty) \bigcap C^1[0,+\infty), \tag{37}$$

$$\exists q=\mathrm{const}\ge 0 \quad \sigma\sqrt{\frac{\rho}{k}}\left(P(k,\rho)-\gamma-q^2\right) \in L^1(0,+\infty), \tag{38}$$

де $P(k,\rho)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{\rho}}\left(\sqrt{\frac{k}{\rho}}\left(\frac{k'}{k}+\frac{\rho'}{\rho}\right)\right)'+\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{\rho}}\left(\frac{k'}{k}+\frac{\rho'}{\rho}\right)\right)^2$.

Позначимо через η парне продовження $(k\rho)^{1/4}$, а через θ — парне продовження $(k/\rho)^{1/4}$. Бачимо, що $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ і $\theta \in C^1(\mathbb{R})$ є парними додатними на $\mathbb{R}$ функціями. З (36) випливає що для них виконано умову (25). Як і в розділі 3, $\mathcal{D}_{\eta\theta}=\theta^2\left(d/dx+\eta'/\eta\right)$, а σ визначається формулою (25). У цьому розділі ми будемо використовувати оператор $\mathbf{S}$ і простори $\mathbb{H}^k$, $k=\overline{-2,2}$, які було введено та досліджено в розділі 3 за такими η і θ.

Нехай також $\widehat{\gamma}$ є парним продовженням γ, $p=\nu-\widehat{\gamma}$, $\nu=\mathcal{D}_{\eta\theta}\left(\theta^2\frac{\eta'}{\eta}\right)$. З (37) і (38) випливає, що $p\in C^1(\mathbb{R})$ є парною функцією, для якої виконано умову

$$\exists q=\mathrm{const}\ge 0 \left(r=p\circ\sigma^{-1}-q^2 \in C^1(\mathbb{R})\cap L^{\infty}(\mathbb{R}) \wedge \int_0^{\infty}\lambda|r(\lambda)|\,d\lambda<\infty\right), \tag{39}$$

зокрема, $p=r\circ\sigma+q^2$, де $q\ge 0$ — це стала з умови (38) та (39), а r задовольняє умову (11). Далі ми будемо використовувати оператори $\widetilde{\mathbb{T}}=\mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ та $\widehat{\mathbb{T}}=\mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$, які було вивчено в розділі 3.

Розглянемо хвильове рівняння (10) зі змінними коефіцієнтами, кероване крайовою умовою Діріхле

$$z(0,\cdot)=v(t), \qquad t\in(0,T), \tag{40}$$

за початкових умов

$$z(\cdot,0)=z_0^0, \quad z_t(\cdot,0)=z_1^0, \qquad x>0, \tag{41}$$

де $T>0$ — деяка стала; $v\in L^{\infty}(0,T)$ — керування; $z_0^0\in\mathbb{H}^0(0,+\infty)$, $z_1^0\in\mathbb{H}^{-1}(0,+\infty)$ — початкові дані, які є непарно продовжуваними до розподілів в $\widetilde{\mathbb{H}}^0$ і $\widetilde{\mathbb{H}}^{-1}$, відповідно. Цю керовану систему розглядаємо у просторах Соболєва $\mathbb{H}^{-2}(0,+\infty)$. Скориставшись результатами розділу 3, непарно продовжуємо ров'язки цієї системи до функцій в $\widetilde{\mathbb{H}}^0$. Позначимо через z, z_0^0 та z_1^0 непарні продовження за x для z, z_0^0 та z_1^0, відповідно. Тоді z задовольняє систему

$$\mathrm{z}_{tt}=\mathcal{D}_{\eta\theta}^2\mathrm{z}-p\mathrm{z}-2\eta^2(0)v\mathcal{D}_{\eta\theta}\delta, \qquad x\in\mathbb{R},\ t\in(0,T), \tag{42}$$

$$\mathrm{z}(\cdot,0)=\mathrm{z}_0^0, \quad \mathrm{z}_t(\cdot,0)=\mathrm{z}_1^0, \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{43}$$

де δ — це розподіл Дірака за x; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{z} : [0,T] \to \widetilde{\mathbb{H}}^{-m}$, $m = 0,1,2$; $\mathrm{z}_0^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$, $\mathrm{z}_1^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}$. Доведено, що для розв'язку z системи (42), (43) виконано умову

$$\mathrm{z}(+0,t) = v(t) \quad \text{м. с. на } [0,T], \tag{44}$$

отже, звуження цього розв'язку на $(0,+\infty)$ задовольняє систему (10),(40), (41). Таким чином, системи (10),(40), (41) і (42), (43) є еквівалентними, тому далі ми розглядатимемо систему (42), (43) замість (10),(40), (41). Позначимо $\mathrm{Z}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{z}_0^0 \\ \mathrm{z}_1^0 \end{pmatrix}$. Бачимо, що $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$. Зрозуміло, що ця керована система має вигляд (18), (19).

Далі за допомоги операторів $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ та їх властивостей, описаних в теоремах 3.13, 3.14, 3.16, ми одержуємо властивості керованості системи (42), (43) з властивостей керованості системи (28), (29), яку було досліджено в розділі 5.

Теорема 6.1. *Нехай* w *є розв'язком керованої системи* (28), (29) *для деяких* $u \in L^\infty(0,T)$ *і* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$. *Нехай також* $\mathrm{z}(\cdot,t) = \widetilde{\mathbb{T}}\mathrm{w}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$. *Тоді* z *є розв'язком* (42), (43) *з* $\mathrm{Z}^0 = \widetilde{\mathbb{T}}\mathrm{W}^0$ *та*

$$\eta(0)v(t) = u(t) + \int_0^\infty K(0,\xi)\mathrm{w}(\xi,t)\,d\xi, \qquad t \in [0,T], \tag{45}$$

і умову (44) *виконано. Крім того,*

$$\left[\!\left[\!\left[\begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot,t) \\ \mathrm{z}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right]\!\right]\!\right]^0 \le C_0 \left|\!\left|\!\left| \begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right|\!\right|\!\right|^0, \qquad t \in [0,T], \tag{46}$$

$$\|v\|_{L^\infty(0,T)} \le C_1 \left(2(1+T^2)^2(1+q^2)\,\|u\|_{L^\infty(0,T)} + Q(T)\left|\!\left|\!\left|\mathrm{W}^0\right|\!\right|\!\right|^0 \right), \tag{47}$$

де $C_0, C_1 > 0$ *є сталими, що не залежать від* q *та* T, *а* Q *є сталою з оцінки* (31).

Теорема 6.3. *Нехай* z *є розв'язком керованої системи* (42), (43) *для деяких* $v \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$. *Нехай також* $\mathrm{w}(\cdot,t) = \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$. *Тоді* w *є розв'язком* (28), (29) *з* $\mathrm{W}^0 = \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$ *та*

$$u(t) = \eta(0)v(t) + \int_0^\infty L(0,x)\mathbf{S}^{-1}\mathrm{z}(x,t)\,dx, \qquad t \in [0,T]. \tag{48}$$

Крім того,

$$\left|\!\left|\!\left| \begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right|\!\right|\!\right|^0 \le G_0 \left[\!\left[\!\left[\begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot,t) \\ \mathrm{z}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right]\!\right]\!\right]^0, \qquad t \in [0,T], \tag{49}$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T)} \le G_1 Q e^{TG_2} \left(\|v\|_{L^\infty(0,T)} + \left[\!\left[\!\left[\mathrm{Z}^0\right]\!\right]\!\right]^0 \right), \tag{50}$$

де Q *є сталою з оцінки* (31), $G_0, G_1, G_2 > 0$ *є сталими, що не залежать від* q,T.

З теорем 6.1, 6.1 та 5.1–5.2 випливає наступний висновок.

Висновок 6.4–6.5. *Нехай* $v \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$. *Тоді розв'язок системи* (42), (43) *є єдиним і задовольняє умову*

$$\left|\left|\left| \begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot,t) \\ \mathrm{z}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right|\right|\right|^0 \le Q_1(T,q) \left(\left|\left|\left|\mathrm{Z}^0\right|\right|\right|^0 + \|u\|_{L^\infty(0,T)} \right), \quad t \in [0,T].$$

тобто, задача (42), (43) *є коректно поставленою. Тут* $Q_1(T,q) > 0$ *є сталою, що залежить від* T *і* q.

Таким чином, керована система (42), (43) із загальним хвильовим оператором є трансформацією за допомоги оператора $\widetilde{\mathbb{T}}$ керованої системи (28), (29) з найпростішим хвильовим оператором, і навпаки: керована система (28), (29) є трансформацією за допомоги оператора $\widetilde{\mathbb{T}}^{-1}$ керованої системи (42), (43).

З теорем 6.2, 6.3 одразу випливають наступні два висновки.

Висновок 6.6. *Нехай* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$, $\mathrm{W}^0 = \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$ *і час* $T > 0$ *є заданим. Тоді*

(i) *Стан* Z^0 *системи* (42), (43) *є наближено* L^∞*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли стан* W^0 *системи* (28), (29) *є наближено* L^∞*-керованим за той же час;*

(ii) *Стан* Z^0 *системи* (42), (43) *є* L^∞*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли стан* W^0 *системи* (28), (29) *є* L^∞*-керованим за той же час.*

Висновок 6.7. *Нехай* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ *і* $\mathrm{W}^0 = \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$. *Тоді стан* Z^0 *системи* (42), (43) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли стан* W^0 *системи* (28), (29) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час.*

Таким чином, беручи до уваги теореми 5.7, 5.9 та 5.10, одержуємо наступні критерії керованості для системи (42), (43).

Теорема 6.8. *Нехай* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ *і час* $T > 0$ *є заданим. Тоді*

(i) *Стан* Z^0 *системи* (42), (43) *є наближено* L^∞*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли виконано дві умови*

$$\operatorname{supp} \mathrm{z}_0^0 \subset [-\sigma^{-1}(T), \sigma^{-1}(T)], \tag{51}$$

$$\mathrm{z}_1^0 - \widetilde{\mathbb{T}}\widehat{\Psi}_T \Psi_T^{-1} \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}_0^0 = 0; \tag{52}$$

(ii) *Стан* Z^0*системи* (42), (43) *є* L^∞*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли* $\eta \mathrm{z}_0^0 \in L^\infty(0, \sigma^{-1}(T))$ *і виконано умови* (51) *та* (52).

Теорема 6.9. *Нехай* $q = 0$. *Стан* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$*системи* (42), (43) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли*

$$\mathrm{z}_1^0 - \widetilde{\mathbb{T}} \left(\operatorname{sgn}(\cdot)\, \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}_0^0 \right)' = 0. \tag{53}$$

Відмітимо, що для $q = 0$ умови (53) та (52) є еквівалентними.

Теорема 6.10. *Нехай* $q > 0$. *Кожний стан* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\widehat{\mathbb{H}}}{}^0$ *системи* (42), (43) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час.*

Таким чином, трансформована керована система (42), (43) із загальним хвильовим оператором відтворює властивості керованості вихідної керованої системи (28), (29) з найпростішим хвильовим оператором і навпаки.

У цьому розділі для хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами (10), керованого крайовою умовою Неймана, за допомогою оператора перетворення $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$ одержано аналоги всіх властивостей встановлених вище для цього ж рівняння, керованого умовою Діріхле. Крім того, для хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами (10), застосовуючи оператори перетворення $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ та $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$, доведено стабілізовність за допомоги позиційного керування та одержано критерії коректності нелокальної крайової задачі.

У *розділі 7* наведено приклади, що ілюструють та доповнюють результати попередніх розділів.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі введено та досліджено нові оператори перетворення $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ та $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$ для диференціального оператора $\dfrac{1}{\rho(x)}\dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{d}{dx}(\cdot)\right)$ і нові простори $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2, 2}$, соболєвського типу та розроблено теорію їх застосування до задач теорії керування та теорії крайових задач.

Крім того, введено і досліджено оператори впливу Ψ та Φ (а також їх модифікації $\widehat{\Psi}$ та $\widehat{\Phi}$), які є небієктивними аналогами операторів перетворення, та застосовано їх для одержання критеріїв керованості хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами з керуванням в умові Діріхле або в умові Неймана.

Також введено і досліджено оператори перетворення $\mathbf{\Psi}$ та $\mathbf{\Phi}$ і простори соболєвського типу $H_0^{s[1/2]}$ та $H^0_{s[1/2]}$, $s \in \mathbb{R}$, для двовимірного оператора Лапласа Δ, визначеного на радіально симетричних розподілах.

Застосовуючи оператори впливу (Ψ, $\widehat{\Psi}$, Φ та $\widehat{\Phi}$) та їх властивості, одержано критерії керованості для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами і сталим потенціалом, керованого крайовою умовою Діріхле або умовою Неймана.

Застосовуючи оператори перетворення $\mathbf{\Psi}$ та $\mathbf{\Phi}$, доведено, що двовимірне хвильове рівняння зі сталими коефіцієнтами на півплощині, кероване крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана імпульсного типу, відтворює властивості одновимірного хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі, керованого крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана, відповідно. Тут перша проблема розглядається в класичних просторах Соболева, а друга — у модифікованих просторах $H_0^{s[1/2]}$ соболєвського типу. Таким чином, критерій керованості для двовимірного хвильового рівняння на півплощині одержано з критерію керованості одновимірного хвильового рівняння на півосі.

Доведено стабілізовність хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами за допомоги позиційного керування без запізнення та за допомоги позиційного керування із запізненням. Також, одержано критерії коректності нелокальної крайової задачі для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтам і сталим потенціалом.

Застосовуючи оператори перетворення $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ та $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$ доведено, що хвильове рівняння зі змінними коефіцієнтами на півосі, кероване крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана, відтворює властивості керованості хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами і сталим потенціалом на півосі, кероване крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана, відповідно. Тут перша керована система розглядається в модифікованих просторах $\mathbb{H}^m$ соболєвського типу, а друга — в класичних просторах Соболєва H^m. Таким чином, критерій керованості для хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами одержано з критерію керованості для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Застосовуючи оператор перетворення $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$, одержано стабілізовність за допомоги позиційного керування для хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами з відповідного результату для рівняння зі сталими коефіцієнтами. За допомоги операторів перетворення $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ та $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$ одержано також критерії коректності нелокальної крайової задачі для хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтам з відповідних результатів для рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Таким чином, усі основні результати цієї роботи, одержані для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами, узагальнено за допомоги операторів перетворення $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ та $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$ на випадок хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами.

Усі основні результати дисертації подано з повними математичними доведеннями. Одержані результати носять теоретичний характер. Вони поглиблюють наші знання про диференціальні оператори другого порядку зі сталими і змінними коефіцієнтами та їх зв'язок з формуванням нових операторів перетворення і нових просторів соболєвського типу. У роботі розроблено методику застосування операторів перетворення до задач теорії керування і теорії крайових задач. Ця методика і, власне, самі результати можуть бути використані в теорії диференціальних рівнянь, математичній фізиці, теорії просторів соболєвського типу та інших розділах математики.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Fardigola L.V. *Transformation operators and modified Sobolev spaces in controllability problems on a half-axis* / L.V. Fardigola // J. Math. Phys., Anal., Geom. — 2016. — V. 12. — P. 17–47.

[2] Fardigola L.V. *Transformation operators in controllability problems for the wave equations with variable coefficients on a half-axis controlled by the Diriclet boundary condition* / Larissa V. Fardigola // Mathematical Control and Related Fields. — 2015. — V. 5. — P. 31–53.

[3] Fardigola L.V. *Modified Sobolev spaces in controllability problems for the wave equation on a half-plane* / L.V. Fardigola // J. Math. Phys., Anal., Geom. — 2015. — V. 11. — P. 18–44.

[4] Фардигола Л.В. *Проблеми керованості для хвильового рівняння на півплощині та модифіковані простори Соболєва* / Л.В. Фардигола // Доп. НАНУ. — 2015. — № 9. — С. 18-24.

[5] Fardigola L.V. *Transformation operators of the Sturm–Liouville problem in controllability problems for the wave equation on a half-axis* / Larissa V. Fardigola // SIAM J. Control Optim. — 2013. — V. 51. — P. 1781–1801.

[6] Fardigola L.V. *Controllability problems for the 1-d wave equations on a half-axis with Neumann boundary control* / Larissa V. Fardigola // Mathematical Control and Related Fields. — 2013. — V. 3. — P. 161–183.

[7] Fardigola L.V. *Controllability problems for the 1-d wave equation on a half-axis with the Dirichlet boundary control* / Larissa V. Fardigola // ESAIM: Control, Optim. Calc. Var. — 2012. — V. 18. — P. 748–773.

[8] Fardigola L.V. The Fourier transform method in controllability problems for the finite string equation with a boundary control bounded by a hard constant / L.V. Fardigola // Further Progress in Analysis. Proc. 6th Int. ISAAC Congress. Ankara, Turkey, Aug. 13–18, 2007. — World Scientific. — 2009. — P. 337–346.

[9] Фардигола Л.В. *Прблеми керованості крайовими умовами Неймана для рівняння струни на півосі* / Л.В. Фардигола // Доп. НАНУ. — 2009. — № 10. — С. 36–41.

[10] Fardigola L.V. *Controllability problems for the string equation on a half-axis with a boundary control bounded by a hard constant* / L.V. Fardigola // SIAM J. Control Optim. — 2008. — V. 47. — P. 2179–2199.

[11] Фардигола Л.В. *Прблеми керованості для хвильового рівняння* / Л.В. Фардигола, К.С. Халіна // УМЖ. — 2007. — Т. 59, № 7. — С. 939–952.

[12] Fardigola L.V. *On controllability problems for the wave equation on a half-plane* / L.V. Fardigola // J. Math. Phys., Anal., Geom. — 2005. — V. 1. — P. 93–115.

[13] Fardigola L.V. *On stabilizability of evolution systems of partial differential equations on $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ by time-delayed feedback controls* / L.V. Fardigola // Central Europ. J. Math. — 2003. — V. 1, No. 2. — P. 141–155.

[14] Fardigola L.V. *On stabilizability of evolution partial differential equations on $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ by time-delayed feedback controls* / L.V. Fardigola, M.V. Lobanova // Mat. Fisika, Analiz, Geom. — 2003. — V. 10, No. 2. — P. 188–204.

[15] Sklyar G.M. *The Markov power moment problem in problems of controllability and frequency extinguishing for the wave equation on a half-axis* / G.M. Sklyar, L.V. Fardigola // J. Math. Anal. Appl. — 2002. — V. 276. — P. 109–134.

[16] Sklyar G.M. *The Markov trigonometric moment problem in problems of controllability and frequency extinguishing for the wave equation on a half-axis* / G.M. Sklyar, L.V. Fardigola // Mat. Fisika, Analiz, Geom. — 2002. — V. 9, No. 2. — P. 233–242.

[17] Фардигола Л.В. *Про можливість стабілізації еволюційних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними на $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ за допомогою одновимірних позиційних керувань* / Л.В. Фардигола, Ю.В. Шевелева // УМЖ. — 2002. — Т. 54, № 9. — С. 1289–1296.

[18] Фардигола Л.В. *Критерий стабилизируемости во всем пространстве дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* / Л.В. Фардигола // Дифф. уравн. — 2000. — Т. 36, № 12. — С. 1699–1706.

[19] Fardigola L.V. *On stabilizability of evolution systems of partial differential equations on $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ by feedback control* / L.V. Fardigola // Вісник Харк. ун-ту. Сер. Матем., прикл. матем і мех. — 2000. — № 475. — С. 183–194.

[20] Фардигола Л.В. *О нелокальной двухточечной краевой задаче в слое для уравнения с переменными коэффициентами* / Л.В. Фардигола // Сиб. мат. журн. — 1997. — Т. 38, № 2. — С. 424–438.

[21] Фардигола Л.В. *Интегральная краевая задача в слое для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных* / Л.В. Фардигола // Мат. сб. — 1995. — Т. 186, № 11. — С. 123–144.

[22] Фардигола Л.В. *Нелокальная краевая задача в слое для эволюционного уравнения второго порядка по времрнной переменной* / Л.В. Фардигола // Дифф. уравн. — 1995. — Т. 31, № 4. — С. 662–671.

[23] Фардигола Л.В. *Нелокальные двухточечные краевые задачм в слое с дифференциальными операторами в краевом условии* / Л.В. Фардигола // УМЖ. — 1995. — Т. 47, № 8. — С. 1128–1134.

[24] Fardigola L. *On the wave equation controlled by the Dirichlet boundary condition on a half-axis* / Larissa Fardigola // III International Conference "Analysis

and Mathematical Physics, June 15–19, 2015: Book of abstracts. — Kharkiv, 2015. — P. 7-8.

[25] Fardigola L. *On transformation operators and modified Sobolev spaces in controllability problems for the wave equations with variable coefficients* / Larissa Fardigola // International Conference V. Skorobohatko Mathematical Conference, Aug. 25–28, 2015: Book of abstracts. — Drohobych, 2015. — P. 37.

[26] Fardigola L. *On transformation operators in controllability problems for the wave equations with variable coefficients on a half-axis controlled by the Dirichlet boundary condition* / Larissa Fardigola // II International Conference "Analysis and Mathematical Physics, June 16–20, 2014: Book of abstracts. — Kharkiv, 2014. — P. 12.

[27] Fardigola L.V. *Controllability problems for the 1-d wave equation on a half-axis controlled by the Dirichlet boundary condition* / L.V. Fardigola // "Spectral Theory and Differential Equations" International Conference in Honor of Vladimir A. Marchenko's 90th Birthday, Aug. 20–24, 2012: Book of abstracts. — Kharkiv, 2012. — P. 33-34.

[28] Fardigola L.V. *Influence operators in controllability problems for the string equation on a half-axis* / L.V. Fardigola // "Complex Analysis and its Applications" International Conference Dedicated to the 70th Anniversary of A.F. Grishin, Aug. 15–18, 2011: Book of abstracts. — Kharkiv, 2011. — P. 19–20.

[29] Fardigola L. *Influence operators in controllability problems for the wave equation on a half-axis* / Larissa Fardigola // International Conference V.Ya. Skorobohatko Mathematical Conference, Sep. 19–23, 2011: Book of abstracts. — Drohobych, 2011. — P. 87-88.

[30] Фардигола Л.В. *О стабилизируемости систем дифференциальных уравнений в частных производных во всем пространстве с помощью одномерных позиционных упрвлений* / Л.В. Фардигола // Український математичний конгрес, 27–29 сер. 2009: Book of abstracts. — Київ, 2009. — p. 43.

[31] Fardigola L.V. *Controllability problems for the string equation on a halh-axis* / L.V. Fardigola // International Conference "Differential Equations and Related Topics" dedocated to I.G. Petrovskii, May 21–26, 2007: Book of abstracts. — Moscow, 2007. — P. 90.

[32] Fardigola L.V. *On controllability problems for the 1-d wave equation on a half-axis* / L.V. Fardigola // "Lyapunov Memorial Conference": International Conference on the Occasion of the 150th Birthday of Aleksandr Mikhailoviv Lyapunov, May 21–26, 2007: Book of abstracts. — Kharkiv, 2007. — P. 42.

[33] Fardigola L.V. *The Fourier transform method and the Markov power moment problem in controllability problems for the wave equation on a half-axis* / L.V. Fardigola // 6th International ISAAC Congress, Aug. 13 – 18, 2007: Book of abstracts. — Ankara, 2007. — P. 33.

[34] Fardigola L.V. *Controllability problems for the wave equation on a half-axis* / L.V. Fardigola // International Conference on Differential Equations Dedicated to the 100th Anniversary of Ya.B. Lopatinsky, Sep. 12–17, 2006: Book of abstracts. — Lviv, 2006. — P. 87-88.

[35] Кальная Е.С. *Исследование проблемы управляемомти для волнового уравнения на отрезке* / Е.С. Кальная, Л.В. Фардигола // XI Міжнародна конференція ім. акад. М. Кравчука, 18–20 травня 2006: зб. доп. — Київ, 2006. — С. 119.

[36] Fardigola L.V. *On the null-controllability problem for the wave equation on a half-plane and the Markov power moment problem* / Larissa V. Fardigola // First Karazin Scientific Readings Dedicated to the Bicentenary of Karazin Kharkiv Nationl University, Kharkiv, June 14–16, 2004: Book of abstracts. — Kharkiv, 2004. — P. 16.

[37] Fardigola L.V. *The Markov power moment problem in controllability problems for the traverse vibration equation on a half-axis* / Larissa V. Fardigola // Second International Conference "Mathematical Analysis and Economics", Apr. 1–4, 2003: Book of abstracts. — Kharkiv, 2003. — P. 15-16.

[38] Fardigola L. *On the null-controllability problem for the wave equation on a half-plane and the Markov power moment problem* / Larissa Fardigola // International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations", Alushta, Sep. 15–21, 2003: Book of abstracts. — Donetsk, 2003. — P. 15-16.

[39] Fardigola L.V. *The Markov power moment problem in the problem of partial null-controllability for the wave equation on a half-axis* / L.V. Fardigola // International Conference "Inverse Problems and Nonlinear Equations", Aug. 12–16, 2002: Book of abstracts. — Kharkiv, 2002. — P. 27.

[40] Fardigola L.V. *On stabilizability of evolution partial differential equations by time-delayed feedback control* / L.V. Fardigola, M.V. Lobanova // International Akhiezer Centenary Conference "Theory of Functions and Mathematical Physics", Aug. 13–17, 2001: Book of abstracts. — Kharkiv, 2001. — P. 21–22.

[41] Fardigola L.V. *The Markov power moment problem in problems of null-controllability and approximate null-controllability for the wave equation on a half-axis* / L.V. Fardigola, G.M. Sklyar // International Akhiezer Centenary Conference "Theory of Functions and Mathematical Physics", Aug. 13–17, 2001: Book of abstracts. — Kharkiv, 2001. — P. 23–24.

[42] Фардигола Л.В. *О стабилизируемости систем дифференциальных уравнений в частных производных во всем пространстве с помощью одномерных позиционных упрвлений* / Л.В. Фардигола, Ю.В. Шевелева // International Akhiezer Centenary Conference "Theory of Functions and Mathematical Physics", Aug. 13–17, 2001: Book of abstracts. — Kharkiv, 2001. — p. 22–23.

[43] Fardigola L.V. *On stabilizability of evolution systems of partial differential equations by time-delayed feedback contol* / L.V. Fardigola // 1st Ukrainian Congress of Mathematics , Aug. 21–23, 2001: Book of abstracts. — Kyiv, 2001. — P. 35.

[44] Fardigola L.V. *On two-point boundary-value problems in a layer for partial differential equationswith variable coefficients* / L.V. Fardigola // Conference on Differential Equations and their Applications, Aug. 25–29, 1997: Enlarged Abstracts. — Brno, 1997. — P. 117–118.

[45] Fardigola L.V. *Non-local boundary-value problems in an infinite layer for linear partial evolutional systems with integral boundary conditions* / L.V. Fardigola // International Conference "Boundary-Value Problems, Special Functions and Fractional Calculus", Feb. 16–20, 1996: Book of abstracts. — Minsk, 1996. — P. 128–129.

АНОТАЦІЯ

Фардигола Л.В. *Оператори перетворення та оператори впливу в задачах керування.* — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України, Харків, 2016.

У дисертації введено та досліджено нові оператори перетворення для диференціального оператора другого порядку зі змінними коефіцієнтами та для двовимірного оператора Лапласа, що діє на радіально симетричних розподілах. Разом з цими операторами введено та вивчено нові простори соболєвського типу, пов'язані з ними. Також введено та досліджено оператори впливу, які діють у класичних просторах Соболєва. Застосовуючи оператори впливу, одержано критерії керованості, доведено стабілізовність та одержано критерії коректності нелокальної крайової задачі для хвильового рівняння на півосі зі сталими коефіцієнтами і сталим потенціалом у просторах Соболєва. За допомоги операторів перетворення одержано критерії керованості, доведено стабілізовність та одержано критерії коректності нелокальної крайової задачі для хвильового рівняння на півосі зі змінними коефіцієнтами в модифікованих просторах соболєвського типу з відповідних властивостей для рівняння зі сталими коефіцієнтами, а також, одержано критерії керованості для двовимірного хвильового рівняння на півплощині, керованого крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана імпульсного типу.

Ключові слова: *хвильове рівняння, оператор перетворення, оператор впливу, модифіковані простори соболєвського типу, керована система, керованість, стабілізовність, коректність, крайова задача.*

АННОТАЦИЯ

Фардигола Л.В. *Операторы преобразования и операторы влияния в задачах управления.* — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков, 2016.

В диссертации введены и исследованы новые операторы преобразования для дифференциального оператора второго порядка с переменными коэффициентами и для двумерного оператора Лапласа, действующего на радиально симметричных распределениях. Вместе с этими операторами введены и изучены новые пространства Соболева, связанные с ними. Также введены и исследованы операторы влияния, действующие в классических пространствах Соболева. Применяя операторы влияния, получены критерии управляемости, доказана стабилизируемость и получены критерии корректности нелокальной краевой задачи для волнового уравнения с постоянными коэффициентами в пространствах Соболева. С помощью операторов преобразования получены критерии управляемости, доказана стабилизируемость и получены критерии корректности нелокальной краевой задачи для волнового уравнения с переменными коэффициентами в модифицированных пространствах соболевского типа, а также, получены критерии управляемости для двумерного волнового уравнения на полуплоскости, управляемого краевым условием Дирихле или краевым условием Неймана импульсного типа.

Ключевые слова: *волновое уравнение, оператор преобразования, оператор влияния, модифицированные пространства соболевского типа, управляемая система, управляемость, стабилизируемость, корректность, краевая задача.*

ABSTRACT

Fardigola, L.V. *Transformation operators and influence operators in control problems.* — Manuscript.

The thesis for obtaining the degree of Doctor of Sciences (Doctor Habilitatus) in physics and mathematics, speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis. B.I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Kharkiv, Ukraine, 2016.

In the thesis, novel transformation operators $\widetilde{\mathbb{T}}$ and $\widehat{\mathbb{T}}$ are introduced and studied for the differential operator $\dfrac{1}{\rho(x)}\dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{d}{dx}(\cdot)\right)$. Here $\rho \in C^1[0,+\infty)$ and $k \in C^1[0,+\infty)$ are positive functions on $[0,+\infty)$, and they satisfy some additional restrictions. Together with this operators we introduce the special modified spaces $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2,2}$, of the Sobolev type where the space $L^2(\mathbb{R})$ is replaced by the space $L^2_\rho(\mathbb{R})$ with the weight $\sqrt{\rho}$ and the differential operator d/dx is replaced by

the "linearly deformed" one $\sqrt{\widehat{k}/\widehat{\rho}}\Big(d/dx+\big(\widehat{\rho}'/\widehat{\rho}+\widehat{k}'/\widehat{k}\big)/4\Big)$, $\widehat{k}$ and $\widehat{\rho}$ are the even extensions of k and ρ, respectively. The growth of distributions from these spaces is associated with the differential operator data ρ and k. The classical transformation operator for the Sturm–Liouville problem saving the asymptotics of solutions at infinity is also used in the thesis.

Together with the transformations operators, influence operators Ψ and Φ (and their modifications $\widehat{\Psi}$ and $\widehat{\Phi}$) are introduced and studied. These operators are non-bijective analogs of transformation operators. They are used for studying the wave equation $w_{tt}=w_{xx}-q^2w$, $x>0$, $t\in(0,T)$, controlled by the Dirichlet boundary condition: $w(0,t)=u(t)$, or by the Neumann one: $w_x(0,t)=u(t)$, $t>0$, where $q\geq 0$, $T>0$ are constants, $u\in L^\infty(0,T)$ is a control. These control systems are considered in classical Sobolev spaces H^s and in some modified spaces $H_0^{s[1/2]}$ of the Sobolev type. By using the influence operators Ψ and Φ, necessary and sufficient conditions for L^∞-controllability and approximate L^∞-controllability are obtained at a given time $T>0$ and at a free time. It is proved that controllability properties are similar at a given time in the cases $q=0$ and $q>0$. It is also proved that the case $q=0$ essentially differs from the case $q>0$ at a free time. In particular, if $q>0$, then each initial state is approximately L^∞-controllable at a free time. However, if $q=0$, then an initial state (w,w_t) of this system is approximately L^∞-controllable at a free time iff $w_t(\cdot,0)=w_x(\cdot,0)$. A similar relation is necessary for L^∞-controllability and approximate L^∞-controllability at a given time in the both cases: $q=0$ and $q>0$.

In the thesis, transformation operators $\mathbf{\Psi}$ and $\mathbf{\Phi}$ are introduced and studied for the 2D Laplace operator, acting in the Sobolev spaces of radially symmetric functions. Together with this operators, novel spaces $H_0^{s[1/2]}$ and $H^0_{s[1/2]}$ of the Sobolev type are introduced and investigated here. By using the operators $\mathbf{\Psi}$ and $\mathbf{\Phi}$, it is proved that the 2D wave equation on a half-plane controlled by the Dirichlet or the Neumann boundary condition of the impulse type replicates controllability properties of the 1D wave equation on a half-axis controlled by the Dirichlet or the Neumann boundary condition, respectively. Here the first of these equations is considered in the classical Sobolev spaces, and the second of them is considered in the modified spaces $H_0^{s[1/2]}$ of the Sobolev type. Thus, necessary and sufficient conditions for L^∞-controllability and approximate L^∞-controllability at a given time and at a free time are obtained for the 2D wave equation on a half-plane from those for the 1D wave equation on a half-axis.

In the thesis, the wave equation $z_{tt}=\frac{1}{\rho}\left(kz_x\right)_x+\gamma z$, $x>0$, $t\in(0,T)$, is studied in the modified spaces $\mathbb{H}^m$ of the Sobolev type. Here ρ, k, and γ are given functions on $[0,+\infty)$ under some restrictions. By using transformation operators $\widetilde{\mathbb{T}}$ and $\widehat{\mathbb{T}}$ introduced and studied in the thesis, we see that this equation controlled by the Dirichlet or the Neumann boundary condition replicates the controllability properties of the auxiliary wave equation $w_{tt} = w_{xx} - q^2 w$, $x > 0$, $t \in (0, T)$, controlled by the Dirichlet or the Neumann boundary condition, respectively. Here $q \geq 0$ is a constant determined by ρ, k, and γ. The auxiliary equation is considered in the classical Sobolev spaces. Thus, necessary and sufficient conditions of L^∞-controllability and approximate L^∞-controllability at a given time $T > 0$ and at a free time are obtained for the main system from those for the auxiliary system.

In the thesis, it is proved that the wave equation with constant coefficients on a half-axis is stabilizable by a feedback or a time-delayed feedback. Applying the transformation operator $\widetilde{\mathbb{T}}$, it is proved that the wave equation with variable coefficients on a half-axis replicates the stabilizability properties of the wave equation with constant coefficients on a half-axis. Thus, stabilizability of the wave equation with variable coefficients by a feedback is obtained from stabilizability of the wave equation with constant coefficients.

In the thesis, necessary and sufficient conditions for well-posedness are obtained for the wave equation with constant coefficients on a half-axis. Applying the transformation operators $\widetilde{\mathbb{T}}$ and $\widehat{\mathbb{T}}$, it is proved that the wave equation with variable coefficients on a half-axis replicates the well-posedness properties of the wave equation with constant coefficients on a half-axis. Thus, necessary and sufficient conditions for well-posedness are obtained for the wave equation with variable coefficients from those for the wave equation with constant coefficients.

All the main results obtained in the thesis for the wave equation with constant coefficients are generalized to the case of the wave equation with variable coefficients using the transformation operators $\widetilde{\mathbb{T}}$ and $\widehat{\mathbb{T}}$. In fact, in the thesis, a novel method is developed for application of these transformation operators to the mathematical control theory and the theory of boundary-value problems. This method and, indeed, the results themselves can be used in the differential equation theory, the theory of Sobolev spaces, mathematical physics, and other areas of mathematics.

Key words: *wave equation, transformation operator, influence operator, modified spaces of the Sobolev type, control system, controllability, stabilizability, well-posedness, boundary-value problem.*