Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур імені Б.І. Вєркіна

БОЛОТОВ Дмитро Валерійович

УДК 515.165.7

ТОПОЛОГІЯ ТА МАКРОСКОПІЧНА ГЕОМЕТРІЯ РІМАНОВИХ МНОГОВИДІВ

01.01.04 – геометрія і топологія

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України (м. Харків).

Науковий консультант: член-кореспондент НАН України
доктор фізико-математичних наук, професор
Борисенко Олександр Андрійович,
Сумський державний університет,
професор кафедри математичного аналізу і методів оптимізації

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Зелінський Юрій Борисович,
Інститут математики НАН України (м. Київ)
завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу;

доктор фізико-математичних наук, професор
Зарічний Михайло Михайлович,
Львівський національний університет ім. Івана Франка,професор кафедри геометрії і топології,
декан механіко-математичного факультету;

доктор фізико-математичних, професор
Пришляк Олександр Олегович,
Київський національний університет ім. Тараса Шевченко, професор кафедри геометрії.

Захист відбудеться 03 березня 2016 р. о 14^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, Харків, 61103.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, Харків, 61103.

Автореферат розісланий 01 лютого 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Горькавий В.О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Одним з найважливіших завдань геометричної топології є встановлення зв'язків між топологічними і геометричними характеристиками многовидів та їх відображень. Такі зв'язки, зокрема, дозволяють знаходити топологічні перешкоди для існування на гладкому многовиді метрик, обмежених додатковими умовами на кривину. Доволі складним виявилось питання опису топології замкнутих многовидів, які допускають метрику додатної скалярної кривини (PSC-многовидів). Одним з перших потужних результатів у цьому напрямку в 1963 році довів Ліхнеровіч. Він показав, що якщо M – замкнутий спіновий n - вимірний многовид додатної скалярної кривини вимірності $4n$, тоді A-рід многовиду $\hat{A}(M) \in Z$ дорівнює нулю. Потім в 1974 році Хитчин, а надалі Дж. Розенберг (1983) довели цей результат для узагальнених А-родів зі значеннями в гомологіях у дійсній K-теорії. Розенбергом була сформульована гіпотеза, зараз відома як гіпотеза Розенберга - Громова - Лоусона, про те, що узагальнений А-рід $\alpha(M^n, f) \in KO_n(C^*\pi)$, який враховує фундаментальну групу π многовиду M та класифікуюче відображення $f: M^n \to B\pi$ універсального накриття $p: \widetilde{M}^n \to M^n$, дорівнює нулю для замкнутого спінового многовиду вимірності ≥ 5 тоді і тільки тоді, коли многовид допускає метрику додатної скалярною кривини. Ця гіпотеза залишається актуальною і досі для фундаментальних груп без скруту, хоча і доведена у багатьох важливих спеціальних випадках.

Випадок неспінових многовидів додатної скалярної кривини виявився набагато складнішим і загадковішим. Тут навіть невідомо, чи допускає зв'язна сума $M = T^{4n} \# CP^{2n}, n > 1$, метрику додатної скалярної кривини. У неспіновому випадку суттєво відрізняються два випадки: коли універсальне накриття многовиду є спіновим (такі многовиди називаються майже *спіновими*), та коли універсальне накриття многовиду не є спіновим (такі многовиди називаються *цілком неспіновими*). На відміну від цілком неспінового випадку, у майже спіновому випадку працює аналогічний зі спіновим підхід, який використовує кручену K-теорію. Але відмітимо, що в обох випадках може бути дуже ефективно застосована теорія бордизмів завдяки глибокому результату Громова – Лоусена (незалежно Яо), який стверджує, що M є PSC-многовидом, якщо він побудований за допомогою скінченого числа перебудов уздовж сфер ковимірності ≥ 3 деякого замкнутого PSC-многовиду.

При вивченні топології многовидів додатної скалярної кривини, Громов в середині 90-х ввів поняття макроскопічної вимірності $\dim_{mc} X$ метричного простору X і сформулював ряд питань і гіпотез щодо макроскопічної вимірності ріманових многовидів, які є одним з основних об'єктів наших досліджень.

Зокрема, Громов висловив гіпотезу, що *макроскопічна вимірність універсального накриття* $dim_{mc}\widetilde{M}^n$ *замкнутого* n*-вимірного многовиду* M^n*, який допускає метрику додатної скалярної кривини, не перевищує* $n - 2$, де ріманова метрика на універсальному накритті вважається піднятою з M^n.

Ця гіпотеза має місце при $n = 2$, оскільки з теореми Гаусса–Бонне слідує, що універсальне накриття замкнутої поверхні додатної кривини є сферою, а випадок $n = 3$ доведений Громовим і Лоусеном (1983).

Зауважимо, що $\dim_{mc}\widetilde{M}^n$ не залежить від ріманової метрики на M^n та є топологічним інваріантом замкнутого многовиду M^n. Сильний аналог гіпотези Громова стверджує, що для PSC-многовиду M^n з фундаментальною группою π характеристичне відображення $f: M^n \to B\pi$ деформується у $(n-2)$ - остов $B\pi^{(n-2)}$. Неважко показати, що гіпотеза Громова має місце, якщо має місце сильна гіпотеза Громова.

Замкнуті многовиди, які допускають деформацію класифікуючого відображення $f: M^n \to B\pi$ у $(n-1)$-остов $B\pi^{(n-1)}$, Громов назвав *несуттєвими* та припустив, що характеристичне відображення несуттєвого многовиду можливо продеформувати на $(n-2)$ - остов $B\pi^{(n-2)}$. Прикладом несуттєвого многовиду є асферичний многовид, тобто $K(\pi, 1)$ - многовид. Громов довів, що якщо M^n є замкнутим асферичним многовидом, то $\dim_{mc}\widetilde{M}^n = n$, тому із гіпотези Громова щодо макроскопічної вимірності PSC - многовидів моментально випливає відома гіпотеза Громова–Лоусена, яка стверджує, що замкнутий асферичний многовид не допускає метрики позитивної скалярної кривини. Це підтверджує актуальність гіпотези Громова.

Якщо многовид має додаткову структуру, наприклад, симплектичну, контактну або структуру шарування, то природно виникає питання про топологічні обмеження на многовид, якщо додаткова структура має обмеження на геометрію. Вже у двовимірному випадку виникає питання про зв'язок між кривиною довільного шарування на торі і гомотопічним типом дотичного розподілу. Зауважимо, що з двовимірних многовидів тільки тор та пляшка Клейна допускають одновимірне шарування. Відомо, наприклад, що кожне шарування на двовимірному торі, яке є цілком геодезичним в деякій рімановій метриці, не містить рібовських компонент, і тому усі розподіли, які є дотичними до цілком геодезичних шарувань, належать лише одному гомотопічному типу.

Одним з напрямків досліджень в галузі геометрії шарувань тривимірних ріманових многовидів є зовнішня геометрія шарувань, тобто геометрія, пов'язана з другою квадратичною формою шарування. Досить яскравий результат в цьому напрямку в 1979 році отримав Д. Сулліван, який показав, що гармонічне шарування, тобто шарування з мінімальними шарами, не містить рібовських компонент, і тому таке шарування неможливо задати на замкнутих тривимірних многовидах зі скінченною фундаментальної групою, зокрема на тривимірній сфері, тому що згідно з теоремою Новікова (1964) такі многовиди зобов'язані вміщати рібовські компоненти.

О.А. Борисенко запропонував розглянути наступні класи шарувань на тривимірних многовидах, які визначаються знаком зовнішньої кривини K_e шарів. Це сідлові $(K_e \leq 0)$, сильно сідлові $(K_e < 0)$, параболічні $(K_e = 0)$ та еліптичні $(K_e \geq 0)$ шарування. І першим природним питанням виникає питання існування цих класів шарувань на замкнутих тривимірних многовидах, зокрема на тривимірній сфері. Зауважимо, що гармонійне шарування є сідловим, і як зазначалось вище, такого шарування не існує на тривимірній сфері для будь якої ріманової метрики. З іншого боку, автором у своєї кандидатській дисертації було побудовано параболічне шарування на тривимірній сфері S^3 . При цьому метрика, яка була побудована на S^3 мала невід'ємну секційну кривину. Зауважимо, що з інтегральної формули Амінова випливає, що замкнутий тривимірний многовид невід'ємної кривини Річчі не допускає сильно сідлового шарування. Більш того, згідно відомій теоремі Картана –Адамара, на сфері не існує метрики недодатної секційної кривини, тому *питання існування сильно сідлового шарування на S^3 хоча б для деякої ріманової метрики на S^3* виглядає дуже непростим з конструктивної точки зору. Також цікавим постає *питання існування сильно сідлових шарувань на однорідних, зокрема, терстоновських многовидах*.

З внутрішньої точки зору, коли нас цікавить геометрія шарування, пов'язана лише з першою квадратичною формою, виникає цілий ланцюг питань, які є шарованими аналогами подібних питань для ріманових многовидів. В деякому сенсі сам рімановий многовид є єдиним шаром шарування ковимірності нуль, тому шаровані аналоги теорем для ріманових многовидів у даному випадку є просто узагальненням на ковимірність шарування. Так у 1991 році Г. Штак довів шарований аналог теореми Картана-Адамара, а саме, він показав, що універсальне накриття повного n - вимірного многовиду, що допускає для деякої C^3 - метрики шарування ковимірності один недодатної секційної кривини є диффеоморфним $\mathbf{R}^n$. Оскільки універсальне накриття многовидів невід'ємної кривини є рівномірно стягуваним, природно виникає *питання про можливість узагальнення результату Г. Штака на клас універсально рівномірно стягуваних шарувань, тобто шарувань, універсальне накриття шарів яких є рівномірно стягуваними у піднятій метриці*. Г. Штаком також було сформульоване наступне природне питання:

чи існує на рімановому многовиді, гомеоморфному сфері S^{2n+1}, $n \geq 2$, шарування ковимірності один невід'ємної секційної кривини?

Зауважимо, що стандартне шарування Ріба дає позитивну відповідь на це питання в тривимірному випадку. Як наслідок, виникає більш загальна задача:

описати структуру шарувань ковимірності один невід'ємної кривини і знаходження топологічних перешкод для їх існування на замкнутих ріманових многовидах.

Многовиди невід'ємної кривини Річчі, зокрема, невід'ємної секційної кривини, виявилися досить доступними у розумінні їх топології. Відзначимо тут чудові роботи Топоногова, Чігера, Громола, Мілнора, Мареніча, Перельмана. Визначна теорема про розщеплення Топоногова - Чігера - Громола дозволила показати, що фундаментальна група замкнутого многовиду невід'ємної кривини Річчі містить скінчено породжену вільну абелеву групу скінченого індексу, причому ранг цієї групи збігається з вимірністю многовиду тоді і тільки тоді, коли многовид є плоским. Тому постають наступні питання:

Які існують обмеження на фундаментальну групу замкнутого многовиду, що допускає для деякої метрики шарування невід'ємної кривини Річчі ковимірності один?

Чи можливо надати топологічну характеризацію плоских шарувань?

Чи можливо характеризувати замкнуті тривимірні многовиди, які допускають шарування невід'ємної кривини?

Відповіді на поставлені вище питання і просування у вирішенні зазначених гіпотез і проблем складають головну частину дисертації. Також в дисертації даються часткові відповіді на деякі відкриті питання, що стосуються топологічних і макроскопічних перешкод до існування спеціальних класів відображень многовидів в евклідів простір, які описані нами в окремому розділі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в Математичному відділенні Фізико-технічного інституту низьких температур імені Б.І. Вєркіна НАН України в межах науково-дослідних робіт «Геометрія "в цілому" і топологія ріманових просторів і підмноговидів» (номер держреєстрації 0104U003033), «Геометричні і топологічні властивості "в цілому" поверхонь і ріманових просторів з кривиною постійного і змінного знаку і їх застосування» (номер держреєстрації 0107U000947), «Геометрія "в цілому" ріманових і псевдоріманових просторів та її застосування у фізиці та механіці» (номер держреєстрації 0112U002641).

Мета і задачі дослідження. *Мета* дисертаційної роботи полягає у знаходженні нових топологічних і макроскопічних характеристик ріманових многовидів і їх відображень.

Об'єктом дослідження є ріманові многовиди, шарування ковимірності один, неперервні і гладкі відображення многовидів в евклідовий простір.

Предметом дослідження є макроскопічна вимірність ріманових многовидів, топологічні характеристики ріманових многовидів, що допускають шарування ковимірності один з обмеженнями на внутрішню або зовнішню кривину шарів, а також топологічні і макроскопічні властивості спеціальних класів відображень многовидів в евклідовий простір.

Основними задачами дослідження є:

1) вирішення гіпотези Громова про падіння макроскопічної вимірності універсального накриття замкнутих многовидів;

2) вирішення гіпотези Громова про макроскопічну вимірність універсального накриття замкнутих многовидів додатної скалярною кривини;

3) опис топологічної структури шарування ковимірності один невід'ємної кривини на замкнутих многовидах;

4) опис фундаментальної групи замкнутих многовидів, що допускають шарування ковимірності один невід'ємної кривини;

5) знаходження топологічної характеризації плоских шарувань серед шарувань ковимірності один невід'ємної кривини на замкнутих многовидах;

6) класифікація замкнутих тривимірних многовидів, що допускають шарування невід'ємної кривини;

7) розв'язання проблеми Г. Штака про існування шарування ковимірності один невід'ємної кривини на сферах;

8) побудова сідлових шарувань на тривимірних многовидах;

9) знаходження топологічних і макроскопічних перешкод щодо існування спеціальних класів відображень в евклідів простір.

Методами дослідження є класичні методи ріманової геометрії, сучасні методи диференціальної та алгебраїчної топології.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі результати, отримані в дисертації, є новими і полягають у наступному.

1. Доведено, що макроскопічна вимірність універсального накриття тривимірного замкнутого многовиду не може дорівнювати 2, що підтверджує гіпотезу Громова про падіння макроскопічної вимірності в тривимірному випадку.

2. В кожній вимірності $n \geq 4$ побудовано несуттєвий гладкий спіновий замкнутий многовид, макроскопічна вимірність універсального накриття якого дорівнює $n-1$, що доставляє контрприклад до гіпотези Громова про падіння макроскопічної вимірності.

3. Показано, що, на відміну від спінового випадку, у разі, якщо несуттєвий замкнутий n-вимірний многовид $(n \geq 5)$ є цілком неспіновим і його фундаментальна група належить класу FP_3, то для нього має місце гомотопічний варіант гіпотези Громова про падіння макроскопічної вимірності.

4. Показано, що гіпотеза Громова про падіння макроскопічної вимірності має місце для цілком неспінових многовидів вимірності ≥ 5.

5. Показано, що якщо фундаментальна група замкнутого спінового n - вимірного многовиду додатної скалярної кривини задовольняє сильній гіпотезі Новікова та умові Розенберга - Штольца, то макроскопічна вимірність його універсального накриття не перевищує $n-2$. Зокрема, це підтверджує сильну гіпотезу Громова в спіновому випадку, коли фундаментальна група многовиду є вільною абелевою групою, добутком вільних груп або має тип FL та асимптотичну вимірність $\leq n+4$.

6. Показано, що універсальне накриття повного ріманова многовиду M з універсально рівномірно стягуваним шаруванням ковимірності один є стягуваним.

7. Отримана класифікація орієнтованих замкнутих тривимірних многовидів, які допускають шарування ковимірності один невід'ємної кривини, з якої, зокрема, випливає, що не всі тривимірні сферичні форми допускають шарування невід'ємної кривини.

8. Доведено, що шарування ковимірності один невід'ємної кривини Річчі на замкнутому многовиді є шаруванням майже без голономії.

9. Доведено, що якщо шарування $\mathcal{F}$ ковимірності один невід'ємної кривини Річчі на замкнутому многовиді M^n має шари зі скінчено породженою фундаментальною групою або $\mathcal{F}$ є шаруванням невід'ємної секційної кривини, то $\pi_1(M^n)$ є майже поліциклічною і

$$\operatorname{asdim} \pi_1(M^n) \leq n.$$

10. Знайдена топологічна характеризація плоских шарувань, а саме, показано, що якщо шарування $\mathcal{F}$ ковимірності один невід'ємної кривини Річчі на замкнутому многовиді M^n має шари зі скінчено породженою фундаментальною групою або $\mathcal{F}$ є шаруванням невід'ємної секційної кривини, то наступні умови рівносильні:

$\mathcal{F}$ є плоским;

$\operatorname{asdim} \pi_1(M^n) = n$;

M^n є $K(\pi, 1)$ – многовид.

11. Доведено, що 3-зв'язний замкнутий многовид не допускає шарування ковимірності один невід'ємної секційної кривини. Як окремий випадок, отримано повне вирішення проблеми Г. Штака щодо існування шарування ковимірності один невід'ємної секційної кривини на сферах.

12. Доведено, що тривимірна сфера допускає сильно сідлове шарування ковимірності один. Наведено приклади сильно сідлових шарувань на однорідних 3 - многовидах та надано засіб їх побудови.

13. Отримана оцінка знизу числа рібовських компонент за гомотопічним типом розподілу, дотичного до шарування на торі T^2.

14. Знайдена оцінка числа гомотопічних типів розподілів, дотичних до шарувань на T^2, що мають кривину шарів, обмежену зверху фіксованою константою.

15. У частковому випадку вирішена гіпотеза Коена-Ласка про часткову склейку орбіти $\mathbf{Z}_p$ - простору при відображенні в евклідовий простір.

16. В C^2-гладкому випадку вирішено проблему Ю.Б. Зелінського про існування 2-опуклого вкладення S^2 в E^4.

17. Доведено неможливість ізометричного занурення простору Лобачевського L^k в евклідовий простір E^n з плоскою нормальною зв'язністю у разі обмеженості довжини вектора середньої кривини.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Результати можуть бути використані для подальшого вивчення геометрії і топології шарувань та макроскопічної вимірності ріманових многовидів, в лекціях з теорії гладких многовидів та алгебраїчної топології в університетах і наукових інститутах НАН України та за кордоном, де ведуться дослідження з геометрії та топології гладких многовидів та їх застосування.

Особистий внесок здобувача. Зміст дисертації та основні положення, що виносяться на захист, відображають персональний внесок автора в опубліковані роботи. В роботі [9] внесок автора дисертації є визначальним. Результати, що належать співавтору, наводяться в дисертації в міру необхідності для повноти опису того кола питань і методів їх вирішення, які вивчаються автором дисертації.

Апробація результатів. Матеріали дисертації доповідалися та обговорювалися на геометричному семінарі математичного відділення ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України (Харків), міському геометричному семінарі в Харківському національному університеті ім. В.Н. Каразіна, на семінарі ім. М.М. Постнікова кафедри вищої геометрії і топології МДУ «Алгебраїчна топологія і її застосування» (Москва, Росія), на семінарі «Топологія та застосування» Львівського національного університету ім. Івана Франка, на семінарі кафедри геометрії Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, на семінарі відділу топології та семінарі комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики НАН України, на семінарах Інституту вищих наукових досліджень IHES (Бюр-сюр-Іветт, Франція). Також основні результати дисертації були представлені на наступних конференціях: Second Russian-German Geometry Meeting dedicated to 90-anniversary of A.D. Alexandrov (Санкт-Петербург, Росія, 2002), International Conference "Geometry and Foliations" (Кіото, Японія, 2003), International Conference "Foliations 2005" (Лодзь, Польща, 2005), Міжнародна конференція з геометрії "в цілому" (Черкаси, 2003, 2005), International conference on Global Differential Geometry (Мюнстер, Німеччина, 2006), International MM Postnikov Memorial Conference «Algebraic Topology: Old and New» (Бедлево, Польща, 2007), 7-а міжнародна конференція з геометрії та топології (Черкаси, 2007), Міжнародна конференція з геометрії, топології і викладанню геометрії (Черкаси, 2013), International conference «Geometric Group theory - Davis 60» (Бедлево, Польща, 2009), Міжнародна конференція «Геометрія «в цілому», топологія та їх застосування» (Харків, 2009), Міжнародна конференція «Метрична геометрія поверхонь і багатогранників», присвячена 100-річчю з дня народження Н.В. Ефімова (Москва, Росія, 2010), Міжнародна конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях»(Харків, 2011), International conference «Low dimensional Topology and Geometry in Toulouse on the occasion of Michel Boileau 's 60 birthday» (Тулуза, Франція, 2013), Міжнародна конференція« Геометрія в Одесі-2014»(Одеса, 2014), II International Conference «Analysis and Mathematical Physics» (Харків, 2014), International conference «Torus Actions in Geometry, Topology, and Applications» (Сколково, Росія, 2015). Також окремі результати дисертації були представлені на міжнародній конференції "Geometry and topology of foliations "(Барселона, Іспанія, 2010), де автор був у якості запрошеного доповідача.

Публікації. Результати, отримані в дисертації, опубліковані в 37 наукових публікаціях, в тому числі – в 21 статті [1] - [21] і в 16 тезах конференцій [22] - [37].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, огляду літератури, 5 розділів, висновків та бібліографії. Загальний обсяг дисертації 267 сторінок. До тексту включено 11 малюнків, жоден з яких не займає окремої сторінки. Список використаних джерел включає 131 найменувань на 13 сторінках.

На завершення автор дякує своєму науковому консультанту член-кор. НАН України професору О.А. Борисенко за увагу до роботи, постановку деяких питань і корисні дискусії. Також автор хоче подякувати професору університету Флориди (США) О.Дранішнікову за співпрацю і глибокий розвиток ідей автора в області макроскопічної вимірності. Нарешті, автор висловлює подяку професору IHES (Франція) М.Громову за неодноразово надану можливість відвідати IHES і обговорити поставлені їм проблеми, часткове вирішення яких є найбільш значущою, на погляд автора, частиною цієї дисертації.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Дисертація складається зі вступу, п'ятьох розділів, висновків та списку використаної літератури.

У **Вступі** обґрунтована актуальність дисертаційної роботи, сформульовані мета та задачі, об'єкт та предмет дослідження, аргументована наукова новизна отриманих результатів.

У **першому** розділі викладені стан розвитку і основні досягнення в тих областях геометричної топології та геометрії, яким присвячена дисертація, проведено огляд літератури за темою дисертації.

У **другому** розділі описані методи сучасної алгебраїчної топології, які використовуються в дисертації. Зокрема, на мові спектрів описані різні теорії (ко)гомологій, наданий необхідний матеріал з теорії перешкод з локальними коефіцієнтами та грубої теорії (ко)гомологій. Надано необхідний матеріал з маловимірної та геометричної топології.

Третій розділ присвячений частковому вирішенню проблем Громова щодо макроскопічній вимірності ріманових многовидів, які ми сформулюємо нижче у вигляді гіпотез.

Означення 1. Макроскопічна вимірність метричного простору X не перевищує k, або $\dim_{mc} X \leq k$, якщо існує k-вимірний поліедр P^k і власне неперервне відображення $h: X \to P^k$ таке, що $\mathrm{Diam}\left(h^{-1}(p)\right) \leq \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$ і довільного $p \in P^k$. Скажемо, що $\dim_{mc} X = k$, якщо є найменшим з чисел, для яких виконано $\dim_{mc} X \leq k$.

Гіпотеза 2. (Про падіння макроскопічної вимірності). *Нехай* M^n – *замкнутий многовид вимірності* n*. Якщо* $\dim_{mc} \widetilde{M}^n < n$, *то* $\dim_{mc} \widetilde{M}^n < n - 1$.

Зауваження 3. Нехай M^n- компактний рімановий многовид, і класифікуюче відображення $f: M^n \to B\pi$ є відображенням у k - остов $B\pi^{(k)}$. Тоді підняття даного відображення до відображення універсальних накриттів $\tilde{f}: \widetilde{M}^n \to E\pi^{(k)}$ гарантує нам, що $\dim_{mc} \widetilde{M}^n \leq k,$ якщо метрику на $\widetilde{M}^n$ припускати піднятою з M^n.

Гомотопічний аналог гіпотези 2 має наступний вигляд.

Гіпотеза 4. *Якщо* M^n *несуттєве, то класифікуюче відображення* $f: M^n \to B\pi$ *можна продеформувати на* $B\pi^{(n-2)}$.

Нагадаємо, що по Громову многовид M^n називається несуттєвим, якщо класифікуюче відображення $f: M^n \to B\pi$ можна продеформувати на $B\pi^{(n-1)}$.

Природно також дати наступне означення (О. Дранішніков): многовид M^n називається макроскопічно несуттєвим, якщо існує обмежена деформація підняття класифікуючого відображення $\tilde{f}: M^n \to E\pi$ на $E\pi^{(n-1)}$.

Ясно, що якщо M є несуттєвим, то з гіпотези 4 та зауваження 3 негайно слідує гіпотеза 2. На рівні когомологій гіпотеза 4 не має перешкод, оскільки неважко показати, що $f^*\left(H^{n-1}(B\pi)\right) = 0$.

У дисертаційній роботі автором підтверджуються гіпотези 2 і 4 лише в окремих випадках і надається негативне рішення цих гіпотез в загальному випадку. Так, наступна теорема підтверджує гіпотезу Громова про падіння макроскопічної вимірності універсального накриття замкнутого многовиду вимірності 3**.**

Теорема 5. *Нехай M^3 - замкнутий рімановий многовид вимірності 3, а $\tilde{M}^3$- його універсальне накриття. Тоді* $\dim_{mc} \tilde{M}^3 \neq 2$.

Зауваження 6. Якщо M^3 є несуттєвим, то воно не містить $K(\pi, 1)$– фактори K_i в розкладанні Кнезера - Мілнора многовиду M^3 на непривидимі многовиди:

$$M^3 = \Sigma_1 \# \ldots \# \Sigma_n \# k(S^2 \times S^1) \# K_1 \# \ldots \# K_m$$

Тому, якщо фундаментальна група $\pi = \pi_1(M^3)$ з теореми 5 не має скруту, то або π тривіальна, або $B\pi$ гомотопічно еквівалентно букету кіл, а значить, в цьому випадку підтверджується гіпотеза 4.

Виявляється, що гіпотеза Громова про падіння макроскопічної вимірності не підтверджується для $n \geq 4$. Тут суттєвим виявилося наявність спінової структури на многовиді. Має місце наступна теорема.

Теорема 7. *Для кожного $n \geq 4$ існує замкнутий несуттєвий спіновий многовид M^n, що має макроскопічну вимірність універсального накриття* $\dim_{mc}\tilde{M}^n = n - 1$.

У чотиривимірному випадку приклад многовиду з теореми 7 будується наступним чином. Розглянемо розшарування на кола $S^3 \times S^1 \to S^2 \times S^1$, отримане помноженням розшарування Хопфа $S^3 \to S^2$ на S^1. Тепер розглянемо тривіальне розшарування $T^4 = S^1 \times T^3 \to T^3$ і візьмемо його зв'язну суму над S^1 з побудованим вище розшаруванням уздовж маленьких розшарованих трубок навколо фіксованих шарів з природною тривіалізацією, обумовленою розшаруваннями. Отримаємо шуканий многовид $M^4 \simeq S^3 \times S^1 \#_{S^1} T^4$, який є тотальним простором S^1-розшарування над $M^3 = S^2 \times S^1 \# T^3$. У загальному випадку контрприклад до гіпотези Громова про падіння макроскопічної вимірності доставляє многовид $M^n = M^{4+k}$, який є тотальним простором розшарування над $M^3 \times T^k$, яке індуковано проекцією pr: $M^3 \times T^k \to M^3$ і розшаруванням p: $M^4 \to M^3$, побудованим вище.

Виявилось, що у неспіновому випадку аналога теореми 7 не існує, тому що має місце наступна теорема, яка підтверджує гіпотезу Громова про падіння макроскопічної вимірності у цілком неспіновому випадку.

Теорема 8. *Нехай M^n є цілком неспіновим замкнутим орієнтованим n–вимірним многовидом, де ≥ 5, чиє універсальне накриття $\widetilde{M}^n$ є макроскопічно несуттєвим. Тоді* $\dim_{mc}\widetilde{M}^n \leq n-2$.

Нагадаємо, що многовид називається цілком неспіновим, якщо його універсальне накриття не є спіновим многовидом, або що те ж саме – має нетривіальний другий клас Штіфеля - Уїтні.

Також має місце наступна теорема, яка є гомотопічним аналогом теореми 8 та яка підтверджує гіпотезу 4 у цілком неспіновому випадку, проте з деякими обмеженнями на фундаментальну групу. Нагадаємо, що для скінчено представленої групи π, умова FP_m означає, що $B\pi$ може бути взято зі скінченним m-остовом.

Теорема 9. *Нехай M^n цілком неспіновий замкнутий орієнтований несуттєвий n- многовид, $n \geq 5$, чия фундаментальна група π має тип FP_3. Тоді класифікуюче відображення $f: M^n \to B\pi$ може бути продеформоване в $B\pi^{(n-2)}$, зокрема,* $\dim_{mc}\widetilde{M}^n \leq n-2$.

Тепер сформулюємо ряд гіпотез Громова про макроскопічну вимірність PSC- многовидів.

Гіпотеза 10. *Нехай M^n є повним PSC- многовидом вимірності n, скалярна кривина якого $Sc(M^n) > c > 0$. Тоді* $\dim_{mc}\widetilde{M}^n \leq n-2$.

Зауваження 11. У разі $n = 2$ справедливість гіпотези випливає з того, що рімановий многовид секційної кривини $K \geq K_0 > 0$, як і будь-який простір

Александрова кривини відокремленої від нуля додатною константою, має обмежений діаметр, а значить має нульову макроскопічну вимірність. Випадок $n = 3$ доведений Громовим і Лоусоном (1983).

Гіпотеза 12. (Гіпотеза Громова) *Нехай* M^n *- замкнутий PSC-многовид вимірності* n. *Тоді* $\dim_{mc}\widetilde{M}^n \leq n-2$.

Гіпотеза 13. (Сильна гіпотеза Громова). *Класифікуюче відображення* $f: M^n \to B\pi$ *замкнутого PSC- многовиду* M^n *можна продеформувати на* $(n-2)$ *- остов* $B\pi^{(n-2)}$.

Зауваження 14. Як витікає із зауваження 3, гіпотеза Громова випливає з сильної гіпотези Громова. Крім того, гіпотеза Громова негайно випливає із гіпотези 10, яку також можна вважати її сильним аналогом.

В спільній з О.М. Дранішніковим праці нами доведена наступна теорема.

Теорема 15. *Припустимо, що група* π *містить підгрупу* π' *скінченого індексу, яка задовольняє наступним двом умовам:*

1) π' *задовольняє сильній гіпотезі Новикова;*

2) відображення $\mathrm{per}: ko_n(B\pi') \to KO_n(B\pi')$ *є ін'єктивним.*

Тоді гіпотеза Громова справедлива для спінових многовидів M^n з фундаментальною групою $\pi_1(M^n) = \pi$. При цьому, якщо $\pi = \pi'$, то має місце сильна гіпотеза Громова.

Зауваження 16. Ми називаємо другу умову на фундаментальну групу умовою Розенберга - Штольца, оскільки Розенберг і Штольц вперше розглянули цю умову при доведенні гіпотези Громова -Лоусена.

З теореми 15 можна отримати наступні наслідки.

Наслідок 17. *Сильна гіпотеза Громова виконується для замкнутих спінових* n*-вимірних многовидів* M *з фундаментальною групою* $\pi_1(M) = \pi$, *яка задовольняє сильній гіпотезі Новикова та має* $\mathrm{cd}\,\pi \leq n+4$.

Наслідок 17'. *Сильна гіпотеза Громова виконується для замкнутих спінових* n*-вимірних многовидів* M *з фундаментальною групою* $\pi_1(M) = \pi$, *яка має скінчений* $B\pi$ *і задовольняє нерівності* $\mathrm{asdim}\,\pi \leq n+4$.

Зауваження 18. Зауважимо, що приклади M^n, побудовані в теоремі 7, є спіновими і мають фундаментальну групу $\pi_1(M^n) \cong (\mathbf{Z} * \mathbf{Z}^3) \times \mathbf{Z}^k$, яка задовольняє попередньому наслідку, тому вони не допускають метрики додатної скалярної кривини.

Наслідок 19. *Сильна гіпотеза Громова виконується для замкнутих спінових n-вимірних многовидів M з фундаментальною групою $\pi_1(M) = \pi$, яка дорівнює добутку вільних груп $F_1 \times \ldots \times F_n$, зокрема - для вільних абелевих груп, а значить гіпотеза Громова є вірною для абелевих груп, оскільки останні містять вільні абелеві групи скінченого індексу.*

У **четвертому** розділі ми представляємо результати, які описують топологію ріманових многовидів, наділених структурою шарування ковимірності один із заданими обмеженнями на внутрішню або зовнішню геометрію шарів, що розглядаються як ріманові підмноговиди. Зокрема, описується топологія замкнутих многовидів, що допускають шарування ковимірності один невід'ємної кривини.

У підрозділі 4.1. ми доводимо наступний результат, який є топологічним узагальненням шарованої теореми Картана - Адамара, доведеної Г. Штаком (1991).

Теорема 20. *Нехай $(M,\mathcal{F})$ – універсальне рівномірно стягуване C^2 - шарування ковимірності 1 на повному рімановому n - вимірному многовиді M. Тоді універсальне накриття $\tilde{M}$ многовиду M є стягуваним.*

Нагадаємо, що метричний простір називається рівномірно стягуваним, якщо існує неспадана функція $Q: R_+ \to R_+$, така, що будь-яка куля радіусу r стягується всередині кулі радіуса $Q(r)$. Функція Q при цьому називається функцією рівномірності.

Підрозділи 4.2 – 4.5 присвячено топології замкнутих многовидів, що допускають шарування ковимірності один невід'ємної кривини.

Так, у підрозділі 4.2. досліджується тривимірний випадок . Наступна теорема дає класифікацію орієнтованих замкнутих тривимірних многовидів, що допускають шарування невід'ємної кривини.

Теорема 21. *Нехай M^3 - гладкий замкнутий орієнтований рімановий многовид вимірності 3, а $\mathcal{F}$ - трансверсально орієнтоване C^2 - шарування невід'ємної кривини ковимірності 1 на цьому многовиді. Тоді M^3 гомеоморфно многовиду одного з наступних типів:*

1) торичне розшарування над колом;

2) торичне напіврозшарування;

3) $S^2 \times S^1$*;*

4) $\mathbf{R}P^3 \times \mathbf{R}P^3$*;*

5)лінзовий простір $L_{p/q}$*;*

6) призматичний простір.

Кожен з перерахованих многовидів для деякої метрики допускає шарування невід'ємної кривини.

Зауважимо, що усі перераховані простори допускають структуру шарування Зейферта. Наприклад, призматичний простір – це сферична форма, яка має структуру шарування Зейферта над орбіфолдом $P(n)$ для деякого $n \in N$, де $P(n)$ означає проективну площину з однією конічною точкою кратності n.

Наслідок 22. *З теореми 21 випливає, що не усі тривимірні сферичні форми допускають шарування невід'ємної кривини. Наприклад, таке шарування неможливо на гомологічній сфері Пуанкаре з фундаментальною групою* I*, ізоморфною* A_5*, і що є групою симетрій ікосаедра.*

Серед шарувань невід'ємної кривини плоскі шарування характеризуються наступною теоремою.

Теорема 23. *Трансверсально орієнтоване* C^2*- шарування* $\mathcal{F}$ *ковимірності один невід'ємної кривини на замкнутому орієнтованому тривимірному многовиді* M *є плоским тоді і тільки тоді, коли* M *є торичним розшаруванням або напіврозшаруванням.*

У підрозділах 4.3 - 4.5 розглядаються шарування ковимірності один невід'ємної кривини в довільній вимірності. Одним з основних наших спостережень є наступний результат, що узагальнює тривимірний випадок.

Твердження 24. *Нехай* $\mathcal{F}$ *- трансверсально орієнтоване* C^2 *- шарування ковимірності один невід'ємної кривини Річчі на* M*, де* M *- орієнтований замкнутий многовид. Тоді* $\mathcal{F}$ *- шарування майже без голономії.*

Нагадаємо, що шарування ковимірності один називається шаруванням майже без голономії, якщо усі некомпактні шари мають тривіальну голономію. Останнє означає, що якщо ми розглянемо будь яку замкнуту криву γ на шарі, який ми вважаємо таким, що не має голономії, то існує трансверсальне до шарування занурення $f: S^1 \times (-\varepsilon; +\varepsilon) \to M$ таке, що $f(S^1 \times 0) = \gamma$ та індуковане шарування на $S^1 \times (-\varepsilon; +\varepsilon)$ буде тривіальним розшаруванням на кола.

Зауваження 25. Вимогу невід’ємності кривини Річчі в твердженні 24 можна послабити і вимагати, щоб шари мали лише поліноміальний ріст і скінченне число кінців.

Твердження 24 робить можливим застосування відомих результатів Іманіші щодо шарувань майже без голономії до шарувань невід’ємної кривини.

Введемо наступне означення.

Означення 26. Скажемо, що компактна підмножина B замкнутого многовиду M з шаруванням $\mathcal{F}$ ковимірності один є *блоком*, якщо B - зв'язний многовид з краєм, який є об'єднанням шарів.

Наступна структурна теорема дозволяє нам більш детально описати топологічну структуру блоків, оснащених шаруванням невід’ємної кривини Річчі.

Теорема 27. *Нехай $\mathcal{F}$ - трансверсально орієнтоване C^2 - шарування ковимірності один невід’ємної кривини Річчі на замкнутому орієнтованому рімановому многовиді M . Тоді виконана одна з наступних можливостей:*

1) Усі шари усюди щільні і M є розшаруванням над S^1. При цьому фундаментальна група M описується груповим розширенням:

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(M) \to \boldsymbol{Z}^k \to 0 \ (k \geq 1)$$

2) $\mathcal{F}$ містить компактний шар і M можна розбити кінцевим числом компактних шарів на блоки одного з наступних типів:

A) Винятковий блок: B гомеоморфний $L \times I$, де L є компактним шаром шарування і шар $L \times 0$ є граничним для множини компактних шарів;

B) Щільний блок: всі внутрішні шари діффеоморфні типовому шару L і всюди щільні в B;

C) Власний блок: всі внутрішні шари діффеоморфні типовому шару L і є власними (вкладеними підмноговидами) в B .

Фундаментальна група блоків описується груповим розширенням:

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(B) \to \boldsymbol{Z}^k \to 0$$

При цьому, якщо $k = 1$, то $\operatorname{int} B$ є розшаруванням над колом з шаром L, та в цьому випадку блок буде власним. Якщо $k \geq 2$, то блок буде щільним. Для любого k має місце гомеоморфізм:

$$\widetilde{\operatorname{int} B} \simeq \tilde{L} \times R.$$

Нами доведено наступне твердження, яке описує геометричну і топологічну структуру блоків з більш ніж однією компонентою зв'язності границі.

Твердження 28. *Нехай B - блок без внутрішніх компактних шарів, оснащений шаруванням невід'ємної кривини Річчі, і границя ∂B має більше однієї компоненти зв'язності, тоді:*

1) кожен внутрішній шар є регулярним ізометричним накриттям будь-якого граничного шару $K \in \partial B$;

2) число компонент зв'язності ∂B дорівнює 2, а B є h - кобордізмом.

Наслідком Твердження 28 є наступне важливе твердження.

Твердження 29. *Нехай B є блоком без внутрішніх компактних шарів, оснащений шаруванням невід'ємної кривини Річчі.*

Якщо фундаментальна група типового шару L скінченно породжена, тоді:

1) фундаментальна група $\pi_1(B)$ є майже поліциклічною;

2) образ гомоморфізму $i_*: \pi_1(K) \to \pi_1(B)$, індукованого включенням граничного шару $i: K \to B$ має індекс в $\pi_1\ (B)$, що не перевищує 2.

За допомогою твердження 29 нам вдалося довести наступний результат, який описує фундаментальну групу замкнутих многовидів, що допускають шарування ковимірності один невід'ємної кривини і є шарованим аналогом відповідних результатів Чігера-Громолла про топологічну структуру замкнутих многовидів невід'ємної кривини Річчі.

Теорема 30. *Нехай M – замкнутий рімановий n-вимірний многовид із заданим C^2 - шаруванням $\mathcal{F}$ ковимірності один невід'ємної кривини Річчі.*

Припустимо, що всі шари мають скінчено породжену фундаментальну групу (наприклад $\mathcal{F}$ - шарування невід'ємної секційної кривини). Тоді

1) $\pi_1\ (\mathrm{M})$ - майже поліциклічна група.

2) $\mathcal{F}$ плоске, тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{M} \in \mathrm{K}\,(\pi, 1)$ - многовидом. При цьому виконана одна з наступних можливостей:

а) $\mathcal{F}$ не містить компактні шари. Тоді $\mathcal{F}$ є шарування без голономії з усюди щільними шарами, ізометрічними ріманову добутку $\mathrm{S} \times \mathrm{E}^{\mathrm{k}}$, а сам многовид є гомеоморфним розшаруванню над S^1.

б) $\mathcal{F}$ містить компактні шари. Якщо $\dim \mathrm{M}\ \geq\ 5$, тоді всі компактні шари гомеоморфні між собою, а сам многовид, або його дволисте накриття є гомеоморфним розшаруванню над S^1 з шаром, гомеоморфним компактному шару шарування.

3) $\operatorname{asdim} \pi_1(\mathrm{M}) \leq \mathrm{n}$, причому $\operatorname{asdim} \pi_1(\mathrm{M}) = \mathrm{n}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{M} \in \mathrm{K}\,(\pi, 1)$ - многовидом. Якщо $\operatorname{asdim} \pi_1(\mathrm{M}) < \mathrm{n}$, то $\operatorname{asdim} \pi_1(\mathrm{M}) < \mathrm{n} - 1$.

Наслідок 31. *Нехай M задовольняє умові теореми 30. Тоді для M має місце гіпотеза Громова про падіння макроскопічної вимірності, оскільки має місце нерівність* $dim_{mc}\,\pi_1(M) \leq asdim\,\pi_1(M)$.

У підрозділі 4.5. вивчається питання Г. Штака про можливість існування шарування ковимірності один невід'ємної секційної кривини на $(2n+1)$ - вимірній сфері S^{2n+1}, де $n \geq 2$. Зауважимо, що стандартне шарування Ріба на стандартній круглій сфері S^3 дає приклад шарування невід'ємної кривини. Нами доведено наступний результат, який дає вичерпну відповідь на питання Г. Штака.

Теорема 32. *3-зв'язний многовид M, зокрема – многовид, гомеоморфний S^n, не допускає C^2 - шарування ковимірності один невід'ємної кривини.*

У підрозділі 4.6 вивчається питання, поставлене О.А. Борисенком, щодо існування сідлових шарувань на тривимірних замкнутих многовидах.

Автором запропоновано розглянути еквівалентне, більш геометричне, означення другої квадратичної форми шарування наступним способом:

Нехай υ дотичний вектор до $\mathcal{F}_x$ в точці x та $\Phi = \{\Phi^t, t \in R\}$ потік, індукований одиничним ортогональним до $\mathcal{F}$ векторним полем.

Тоді

$$B\,(v,v) := \frac{1}{2}\frac{d}{dt} g(\pi \circ d\Phi^t(v))|_{t=0}\,,$$

де π: $TM \rightarrow L$ проекція на дотичний до $\mathcal{F}$ розподіл L.

Цей підхід дозволив довести наступну ключову лему.

Лема 33. *Нехай ξ - одиничне векторне поле, ортогональне $\mathcal{F}$ в метриці g, а B' – друга фундаментальна форма розподілу L' в іншій рімановоої метриці g', для якої виконане наступне:*

1) L' ортогональне до ξ;

2) ξ має одиничну довжину в g';

3) $g(X,X) = g'(X',X')$ для кожного вектора X' дотичного до L', який є проекцією вздовж ξ вектора X, дотичного до $\mathcal{F}$.

Тоді

$$B\,(X,X) = B'(X',X')$$

Введемо означення:

$$\overline{d\Phi^t} := \pi \circ d\Phi^t$$

Виявляється, що можливо охарактеризувати сильно сідлові шарування (тобто шарування, зовнішня кривина шарів якого $K_e := \det B < 0$) мовою лінійного потоку $\overline{d\Phi^t}$ наступним чином: шарування $\mathcal{F}$ є сильно сідловим тоді і тільки тоді, коли в кожній точці $x \in M$ та для кожного достатньо малого $t \in \mathbf{R}$ знайдуться одиничні вектори v, w та константа $C > 0$, для яких має місце:

$$|\overline{d\Phi^t}(v)| \le e^{-Ct}|v|, \ |\overline{d\Phi^t}(w)| \ge e^{Ct}|w|.$$

Ця дуальність дозволяє побудувати однорідні сильно сідлові шарування на групах Лі, які задаються груповим розширенням:

$$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},$$

де $\mathbf{R}$ діє на $\mathbf{R}^2$ за допомогою матриці повороту A :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – параболічний поворот.

2. $A = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ - гіперболічний поворот.

3. $A = \begin{pmatrix} \cos(t) & -k\sin(t) \\ \frac{1}{k}\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} (k > 1)$ - еліптичний поворот.

Якщо профакторизувати групу Лі $\mathbf{R}^3$ з відповідною однорідною метрикою по решітці, ми одержимо сильно сідлове шарування, яке являє собою довільне торичне розшарування над колом.

Аналогічно, можливо охарактеризувати омбілічно вільні шарування, тобто шарування, які не містять омбілічних точок. А саме, шарування $\mathcal{F}$ є омбілічно вільним тоді і тільки тоді, коли в кожній точці $x \in M$ та для кожного достатньо малого $t \in \mathbf{R}$ знайдуться одиничні вектори v, w та константа $C > 0$, для яких має місце нерівність:

$$|\overline{d\Phi^t}(w)| \ge e^{Ct} |\overline{d\Phi^t}(v)|.$$

Як наслідок, ми одержуємо наступне.

Наслідок 34. *Нехай* ξ *- одиничне векторне поле, трансверсальне* $\mathcal{F}$.

1) Якщо ξ *породжує регулярний потік Аносова, тоді існує метрика на* M, *для якої* $\mathcal{F}$ *є сильно сідловим.*

2) Якщо ξ *породжує регулярний проективний потік Аносова, тоді існує метрика на* M, *для якої* $\mathcal{F}$ *є омбілічно вільним.*

За допомогою леми 33 нам вдалося також довести наступну теорему, яка відповідає на питання О.А. Борисенка щодо існування сильно сідлових шарувань на тривимірних многовидах.

Теорема 35. *На* S^3 *існує ріманова метрика, для якої шарування Ріба є сильно сідловим.*

У підрозділі 4.7 ми досліджуємо зв'язок між гомотопічним типом розподілу на рімановому торі T^2, дотичного до деякого C^2 - шарування, з абсолютною кривиною цього шарування. Під абсолютною кривиною шарування розуміється інтеграл $\int_{T^2}|k|d\sigma$, де $|k|(x)$ це кривина (без знаку) в точці $x \in T^2$ шару, що проходить через $x \in T^2$.

Першим кроком в оцінці інтеграла є оцінка знизу числа рібовських компонент шарування даного гомотопічного класу.

Це число оцінюється знизу так званим абсолютним числом обертання розподілу. А саме, вірна наступна теорема.

Теорема 36. *Мінімальне можливе число рібовських компонент шарування тора* T^2 *з дотичним розподілом заданого гомотопічного типу* $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$ *дорівнює абсолютному числу обертання* $|\mu|$ *розподілу. Причому, якщо* $m \neq 0$ *та* $n \neq 0$, *то* $|\mu| = \text{НОД}\,(m,n)$.

Ця теорема дозволила довести наступний результат, який дає оцінку знизу абсолютної кривини шарування, що належить фіксованому гомотопічному класу.

Теорема 37. *Нехай* $(T^2,\mathcal{F})$ *- двовимірний тор із заданим шаруванням* $\mathcal{F}$ *класу* C^2. *Припустимо, що гомотопічний тип дотичного до* $\mathcal{F}$ *розподілу дорівнює* (m,n). *Тоді*

$$\int_{T^2}|k|d\sigma \geq 2|\mu|l_{geod},$$

де l_{geod} *- довжина глобально мінімальної геодезичної, що представляє клас замкнутої кривої на торі, в який переходить пряма* $mx+ny=0$ *при факторизації* $\mathbf{R}^2$ *по* $\mathbf{Z}^2$.

Зауваження 38. Відзначимо, що оцінка в теоремі 37 є оптимальною. Нерівності переходять в рівності для шарування, заданого розподілом $(\cos\pi(mx+ny), \sin\pi(mx+ny))$, якщо метрика на торі є евклідовою та індукованою з $\mathbf{R}^2$.

З останньої теореми, як наслідок, нами доводиться наступний важливий результат.

Наслідок 39. *Нехай* (T^2, g) - *тор з деякою рімановою метрикою* g *на ньому.*

Тоді для заданої константи $C > 0$ *існує не більше ніж скінченне число* N *гомотопічних класів одновимірних* C^2- *розподілів на* T^2 *таких, що шари дотичного до розподілу шарування* $\mathcal{F}$ *мають кривину обмежену зверху нерівністю* $|k| < C$.

П'ята глава присвячена частковому вирішенню окремих питань, пов'язаних із відображеннями топологічних просторів, зокрема многовидів, в евклідовий простір.

У підрозділі 5.1 розглядається проблема Коена - Ласка про часткову склейку орбіти $\mathbf{Z}_p$ -простору (p - просте) в евклідовий простір. Визначимо множину

$$A(f,q) = \{x \in X|\ \text{існують такі}\ i_1, i_2, \dots i_q \left(0 \le i_1 < i_2 < \dots < i_q < p\right), \text{що}\ f\left(\sigma^{i_1}x\right) = f\left(\sigma^{i_2}x\right) = \dots = f\left(\sigma^{i_n}x\right)\},$$

де σ позначає твірну $\mathbf{Z}_p$.

Коен і Ласк довели, що якщо X – паракомпактний хаусдорфовий простір, на якому діє група $\mathbf{Z}_p$, де p - просте число, а $f: X \to \mathbf{R}^n$ довільне неперервне відображення в n-вимірний векторний простір, тоді якщо $H^i(X) = 0$ для $0 < i < (n-1)(p-1) + q - 1$ і $q \ge \binom{p+1}{2}$ чи $q = 2$, то

$$A(f,q) \neq 0. \tag{1}$$

Гіпотеза Коена-Ласка полягає в тому, що (1) має місце без усяких обмежень на q. Наш результат покращує оцінку на q, наведену Коеном і Ласком при деяких незначних обмеженнях на p. А саме, має місце наступна теорема.

Теорема 40. *Нерівність (1) має місце у випадку* $q = \left[\frac{p}{2}\right],\ p \ge 11$.

У підрозділі 5.2 ми розглядаємо одне з фундаментальних питань геометрії в цілому про можливість ізометричного занурення простору Лобачевського L^n в евклідів простір E^m більшої вимірності. При цьому ми вимагаємо плоску зв'язність в нормальному розшаруванні, що, наприклад, завжди має місце у випадку найменшій можливій вимірності занурення $m = 2n - 1$.

Нами доведено наступний результат, що узагальнює теорему Гільберта про неможливість ізометричного занурення в цілому L^2 в E^3.

Теорема 41. *Не існує ізометричного занурення L^n в E^m з плоскою нормальною зв'язністю і обмеженим модулем вектора середньої кривини.*

Ця теорема є продовженням цілої низки результатів Ю.А. Амінова, Ф. Ксав'є, Ю.А. Ніколаєвського, Л.О. Масальцева, отриманих у цьому напрямку.

Підрозділ 5.3 присвячений частковій відповіді на наступне питання, поставлене професором Ю. Б. Зелінським.

Питання 42. *Чи існує континуум в E^4, що має гомотопічний тип двовимірної сфери і є 2-опуклим? Останнє означає, що через кожну точку поза континууму проходить двовимірна площина, що має пустий перетин з континуумом.*

В дисертації отримано часткову відповідь на це питання, а саме – ми відповідаємо на питання Зелінського, переформульоване автору професором О.А. Борисенком для гладкого випадку.

Теорема 43. *Нехай $S^2 \subset E^4$ двовимірна сфера, C^2-гладко вкладена в евклідів чотиривимірний простір E^4. Тоді знайдеться така точка $x \in E^4$ поза S^2, що будь-яка двовимірна площина в E^4, що проходить через x, перетинає S^2. Іншими словами, не існує 2-опуклого вкладення класу гладкості C^2 двовимірної сфери S^2 в E^4.*

Зауваження 44. Можна показати, що для двовимірного тора наведена теорема вже не є вірною. Прикладом є стандартний тор Кліффорда $T^2 \subset S^3 \subset E^4$.

ВИСНОВКИ

Таким чином, в дисертації досліджено топологічні, гомотопічні та макроскопічні інваріанти ріманових многовидів та їх відображень.

Одним з основних питань, порушених у дисертації, є дослідження проблем, поставлених М. Громовим, про макроскопічну вимірність універсального накриття замкнутого ріманового многовиду, зокрема – гіпотеза про падіння макроскопічної вимірності. Отримані в дисертації результати підтверджують гіпотезу в тривимірному випадку і багатовимірному цілком неспіновому випадку, та спростовують її в спіновому випадку вимірності > 3.

Найбільш значуща гіпотеза Громова про макроскопічну вимірність універсального накриття замкнутого многовиду, що допускає метрику додатної скалярною кривини, виявилася тісно пов'язана з фундаментальною групою многовиду. Встановлено, що у випадку спінового многовиду гіпотеза має позитивне рішення, якщо фундаментальна група задовольняє деяким додатковим умовам, наприклад – є абелевою.

Наступним фундаментальним питанням, піднятим в дисертації, є опис топології замкнутих ріманових многовидів, що допускають шарування ковимірності один невід'ємної кривини. Нам вдалося описати топологічну структуру таких шарувань. Це дозволило показати, що фундаментальна група охоплюючого многовиду повинна бути майже поліциклічною. У разі невід'ємної секційної кривини виявилося, що 3-зв'язне замкнуте шарування не допускає шарування невід'ємної секційної кривини. Таким чином, надано вичерпну відповідь на питання, поставлене Г. Штаком, про можливість існування шарування ковимірності один невід'ємної секційної кривини на сферах. Крім того, нами отримана топологічна характеризація плоских шарувань, а в тривимірному випадку нам вдалося класифікувати замкнуті орієнтовані шарування, що допускають шарування невід'ємної кривини.

Розглянуто питання, пов'язані із зовнішньою геометрією шарування на тривимірних многовидах. Зокрема, доведено, що для деякої метрики на тривимірній сфері шарування Ріба є сильно сідловим. Пред'явлена конструкція побудови таких шарувань і на інших многовидах, зокрема - на однорідних тривимірних многовидах.

Досліджено питання про зв'язок гомотопічного типу розподілу, дотичного до шарування на двовимірному торі, з абсолютною кривиною цього шарування. Введено поняття абсолютного числа обертання розподілу. Виявилося, що це число обмежує знизу число рібовських компонент шарування. Це дозволило показати, що якщо кривина шарів обмежена зверху загальною константою, то число гомотопічних класів розподілів, дотичних до таких шарувань є скінченним.

Також в дисертації досліджено питання топологічних і макроскопічних перешкод до існування деяких класів відображень в евклідовий простір. У спеціальному окремому випадку доведена гіпотеза Коена - Ласка про часткову склейку орбіти $\mathbf{Z}_p$ - простору при відображенні в евклідовий простір. Доведена неможливість ізометричного занурення з плоскою нормальною зв'язністю простору Лобачевського в евклідів простір за умови обмеженості довжини вектора середньої кривини. У гладкому випадку отримана відповідь на питання, поставлене Ю.Б. Зелінським, а саме доведено неможливість 2-опуклого C^2-вкладення двовимірної сфери в чотиривимірний евклідовий простір.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ РОБІТ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Болотов Д.В. О некоторых гиперслоениях пространств положительной кривизны / Д.В. Болотов // Доповіді НАН України. – 2000. – Т. 8. – С. 7–10.
2. Болотов Д.В. Гипотеза Коена-Ласка / Д.В. Болотов // Математические заметки. – 2001. – Т. 70. – С. 22–26.
3. Bolotov D. Macroscopic dimension of 3-Manifolds / D. Bolotov // Math. Physics, Analysis and Geometry. – 2003. – Vol. 6. – P. 291 – 299.
4. Bolotov D. Extrinsic geometry of foliations on 3-Manifolds / D. Bolotov // Foliations–2005. Proc. of the Int. Conf. Lodz, Poland, June 13–24, 2005. – Lodz, 2006. – P. 109–120.
5. Bolotov D. Gromov’s macroscopic dimension conjecture / D. Bolotov // Algebraic & Geometric Topology. – 2006. – Vol. 6. – P. 1669 – 1676.
6. Болотов Д.В. Об изометрическом погружении с плоской нормальной связностью пространства Лобачевского в евклидово пространство + / Д.В. Болотов // Математические заметки. – 2007. – Т. 82. – С. 11–13.
7. Болотов Д.В. Слоения неотрицательной кривизны на замкнутых трехмерных многообразиях / Д.В. Болотов // Мат. Сб. – 2009. – Т. 200:3. – С. 3–16.
8. Bolotov D. About the macroscopic dimension of certain PSC-manifolds / D. Bolotov // Algebraic & Geometric Topology. – 2009. – Vol. 9. – P. 21–27.
9. Bolotov D. On Gromov’s scalar curvature conjecture / D. Bolotov, A. Dranishnikov // Proceedings of the American Math. Society. – 2010. – Vol. 138. – P. 1517– 1524.
10. Болотов Д.В. Об универсально равномерно стягиваемых слоениях коразмерности 1 / Д.В. Болотов // Доповіді НАН України. – 2010. – Т. 9. – С. 7–9.
11. Болотов Д.В. О структуре слоений коразмерности один неотрицательной кривизны / Д.В. Болотов // Современные проблемы математики, механики и информатики. – Х.: Апостроф, – 2011. – С. 324–331.
12. Болотов Д.В. Абсолютная кривизна слоений на торе / Д.В. Болотов // Современные проблемы математики и механики. Изд-во Московского университета. – 2011. – Т. VI: 2. – С. 171–175.
13. Болотов Д.В. О макроскопической размерности неспиновых многообразий / Д.В. Болотов // Доповіді НАН України. – 2011. – Т. 7. – С. 7–11.

14. Болотов Д.В. Топология слоений неотрицательной кривизны на пятимерных многообразиях / Д.В. Болотов // Доповіді НАН України. – 2012. – Т. 12. – С. 7–12.

15. Болотов Д.В. О вложениях ^{2} в ^{4} / Д.В. Болотов // Доповіді НАН України. – 2013. – Т. 11. – С. 19–22.

16. Болотов Д.В. Топология плоских слоений коразмерности один / Д.В. Болотов // Доповіді НАН України. – 2013. – Т. 9. – С. 16–21.

17. Болотов Д.В. Топология слоений коразмерности 1 неотрицательной кривизны / Д.В. Болотов // Мат. сб. – 2013. – Т. 204:5. – С. 3–24.

18. Болотов Д.В. Топология слоений коразмерности 1 неотрицательной кривизны, II / Д.В. Болотов // Мат. сб. – 2014. – Т. 205:10. – С. 3–18.

19. Болотов Д.В. О слоениях сфер / Д.В. Болотов // Доповіді НАН України. – 2014. – Т. 8. – С. 7–13.

20. Болотов Д.В. Топология слоений неотрицательной кривизны на пятимерных многообразиях II / Д.В. Болотов // Доповіді НАН України. – 2014. – Т. 5. – С. 7–10.

21. Болотов Д.В. Характеризация плоских слоений / Д.В. Болотов // Доповіді НАН України. – 2014. – Т. 12. – С. 12–17.

22. Bolotov D. Macroscopic dimension of 3- Manifolds / D. Bolotov // Second Russian-German Geometry Meeting dedicated to 90-anniversary of A.D. Alexandrov : in Book of abstracts, June 16–23, 2002. – St-Petersburg (Russia), 2002. – P. 12.

23. Bolotov D. Four dimensional hyperfoliations of nonnegative curvature / D. Bolotov // International Conference Geometry and Foliations: in Book of abstracts, September 10–19, 2003. – Kyoto (Japan), 2003. – P. 102–108.

24. Болотов Д.В. Слоения неотрицательной кривизны / Д.В. Болотов // 5-а Міжнародна конференція з геометрії і топології пам’яті О.В. Погорелова: тези. доп., Черкаси, 2003. – С. 16.

25. Болотов Д.В. Об изометрическом погружении пространства Лобачевского в Евклидово пространство с плоской нормальной связностью / Д.В. Болотов // 6-а Міжнародна конференція з геометрії та топології: тези доп., Черкаси, 2005. – С. 8–9.

26. Bolotov D. Saddle foliations on 3-Manifolds / D. Bolotov // International conf. on Global Differential Geometry, Munster, 14–19 August. Munster, Germany, 2006. URL: http://geo06.uni-muenster.de/download/SectionFri24.pdf.

27. Болотов Д.В. Слоения неотрицательной кривизны на замкнутых 3-многообразиях / Д.В. Болотов // 7-а міжнародна конференція з геометрії та топології: тези доп., Черкаси, 2007. – С. 6.

28. Bolotov D. Macroscopic dimension of Manifolds / D. Bolotov // International conference .Algebraic Topology: Old and New M. M. Postnikov Memorial Conference.: in Book of abstracts, June 18–24, 2007, – Bedlewo, Polland, 2007. – P. 25.

29. Болотов Д.В. Слоения неотрицательной кривизны / Д.В. Болотов // Международная конференция "Геометрия "в целом топология и их приложения посвященная 90-летию со дня рождения А. В. Погорелова: сб. тез., Харьков, 2009. – С. 8–9.

30. Bolotov D. The Gromov's macroscopic dimension conjecture for PSC - manifolds and a fundamental group / D. Bolotov // International conference .Geometric Group theory — Davis 60, Bedlewo, Polland, 2009. URL: http://www.math.uni.wroc.pl/ggt/davis09/talks/Bolotov.txt.

31. Болотов Д.В. Абсолютная кривизна слоений на торе / Д.В. Болотов // Сборник тезисов международной конференции. Метрическая геометрия поверхностей и многогранников. посвященная 100-летию со дня рождения Н.В.Ефимова: сб. тез., 18–21 августа 2010. – Москва, 2010. – С. 13.

32. Болотов Д.В. Слоения неотрицательной кривизны / Д.В. Болотов // Международная конференция .Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях.: сб. тез., 17–22 апреля 2011. – Харьков, 2011. – С. 139.

33. Bolotov D. Foliations of nonnegative curvature on 3-Manifolds / D. Bolotov // International conference .Low dimensional Topology and Geometry in Toulouse on the occasion of Michel Boileau' s 60 birthday.: in Book of abstracts, June 24–28, 2013, – Toulouse, France, 2013. – P. 12.

34. Болотов Д.В. О слоениях неотрицательной кривизны / Д.В. Болотов // 8 міжнародна конференція з геометрії, топології та викладання геометрії: тези доп., 9–15 вересня 2013 р. – Черкаси, 2013. – С. 9.

35. Bolotov D. Inessentiality of PSC-manifolds / D. Bolotov // II International Conference Analysis and Mathematical Physics: in Book of abstracts, June 16–20, 2014. – Kharkov, 2014. – P. 9.

36. Болотов Д.В. О макроскопической размерности вполне неспиновых многообразий / Д.В. Болотов, А.Н. Дранишников // Тезисы докладов международной конференции «Геометрия в Одессе-2014». Одесса, 26 мая – 31 мая 2014 г. – С. 25.

37. Bolotov D. On characterization of flat foliations / D. Bolotov // International conference .Torus Actions in Geometry, Topology, and Applications.: in Book of abstracts, February 16–21, 2015, – Skolkovo, Moscow, 2015. – P. 13.

АНОТАЦІЯ

Болотов Д.В. Топологія та макроскопічна геометрія ріманових многовидів. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико – математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія і топологія. – Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Вєркіна НАН України, Харків, 2016.

Дисертація присвячена вивченню топологічних, гомотопічних та макроскопічних інваріантів ріманових многовидів та їх відображень.

Частково вирішено проблеми Громова щодо макроскопічної вимірності універсального накриття замкнутих ріманових многовидів, зокрема, PSC-многовидів.

Вивчена топологія шарування ковимірності один невід’ємної кривини. Вирішена проблема Г.Штака щодо існування шарувань невід’ємної кривини ковимірності один на сферах. Дана топологічна характеризація плоских шарувань.

Запропоновано спосіб побудови сідлових шарувань на тривимірних многовидах, зокрема на тривимірній сфері. Доведено скінченність гомотопічних класів розподілів на двовимірному торі, дотичних до шарувань з кривиною шарів обмеженою зверху константою.

Доведено новий аналог теореми Гільберта о незануренні простору Лобачевського L^n у евклідів простір E^m. Частково вирішено гіпотезу Коена - Ласка о частковій склейці **Z** - простра при відображенні у евклідів простір. У C^2-гладкому випадку дано відповідь на питання, поставлене Ю.Б. Зелінським, про існування 2-опуклого вкладення двовимірної сфери у чотиривимірний евклідів простір.

Ключові слова: макроскопічна вимірність, топологія ріманових многовидів, скалярна кривина, шарування ковимірності один, відображення у евклідів простір.

АННОТАЦИЯ

Болотов Д.В. Топология и макроскопическая геометрия римановых многообразий. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология. – Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков, 2016.

Диссертация посвящена изучению топологических, гомотопических и макроскопических инвариантов римановых многообразий и их отображений.

Решена проблема Громова о падении макроскопической размерности: она подтверждена в трехмерном и многомерном вполне неспиновом случаях и опровергнута в спиновом случае размерности больше 3. Для специального класса фундаментальных групп, в частности – для абелевых групп, подтверждена гипотеза Громова о макроскопической размерности спиновых PSC-многообразий.

Изучена топология слоений неотрицательной кривизны. Доказано, что замкнутое 3-связное многообразие не допускает слоения коразмерности один неотрицательной секционной кривизны. Тем самым полностью решена проблема Г. Штака о существовании слоений коразмерности один неотрицательной секционной кривизны на сферах.

Доказана почти полицикличность фундаментальной группы замкнутого многообразия, допускающего слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи при условии конечной порожденности фундаментальной группы слоев. С помощью фундаментальной группы дана топологическая характеризация плоских слоений.

Предъявлен способ построения седловых слоений на трехмерных многообразиях, в частности, построено сильно седловое слоение на трехмерной сфере, что дает ответ на вопрос, поставленный А.А. Борисенко. Доказана конечность гомотопических классов распределений на двумерном торе, касательных к слоениям, чьи слои имеют кривизну, ограниченную сверху фиксированной константой.

Доказан новый аналог теоремы Гильберта о непогружаемости пространства Лобачевского L^n в евклидово пространство E^m. Дано частичное решение гипотезы Коэна - Ласка о частичной склейке орбиты свободного $\mathbf{Z}_p$ -пространства при отображении в евклидово пространство. В C^2-гладком случае дан ответ на вопрос, поставленный Ю. Б. Зелинским, о существовании 2-выпуклого вложения двумерной сферы в четырехмерное евклидово пространство.

Ключевые слова: макроскопическая размерность, топология римановых многообразий, скалярная кривизна, слоения коразмерности один, отображения в евклидово пространство.

ABSTRACT

D.V Bolotov. Topology and macroscopic geometry of Riemannian manifolds. – Manuscript.

Thesis to acquire a scientific degree of doctor of sciences in physics and mathematics by speciality 01.01.04 – geometry and topology. – B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2016.

The thesis is devoted to studying topological, homotopic and macroscopic invariants of Riemannian manifolds and their mappings.

Gromov's problems on macroscopic dimension of universal coverings of closed Riemannian manifolds, in particular – PSC-manifolds, is solved in part.

The topology of nonnegative curvature codimension one foliation was studied. G. Stuck problem on existence of codimension one nonnegative curvature foliation on spheres is solved. Topological characterization of flat foliations is done.

The method for constructing of saddle foliations on three dimensional manifolds, in particular, on three dimensional sphere was presented. Finiteness of homotopical classes of distributions tangent to the foliations on two dimensional torus, such that curvature of leaves are bounded above by a constant is proved.

New Gilbert theorem about non-immersibility of Lobachevski space L^n to Euclidean space E^m is proved.

The question of Cohen and Lusk about the partial gluing of an orbit under a map of a free $\mathbf{Z}_p$ - space to $\mathbf{R}_n$ is answered in part.

The question of Yu. Zelinsky about the existence of 2-convex embeddings of two - dimensional spheres to the four-dimensional Euclidean space is answered in the case of C^2 - embeddings.

Keywords: macroscopic dimension, topology of Riemannian manifolds, scalar curvature, foliation of codimension one, mappings to Euclidean space.