Отзыв

официального оппонента на диссертационную работу
Ямпольского Александра Леонидовича
«**Геометрия подмногообразий в расслоенных пространствах**»,
на соискание научной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология

По мере развития геометрии и топологии в этих науках естественным образом возникают новые пространства, такие как многомерные евклидовы пространства, произведения сфер, проективные пространства, грассмановы многообразия, симметрические пространства, касательные и более общие расслоения и т.д. Эти пространства играют большую роль и в геометрии, и в топологии. И сразу ставится вопрос об исследовании их геометрических и топологических свойств.

Диссертация А.Л. Ямпольского посвящена изучению геометрических свойств подмногообразий римановых пространств, которые являются касательными расслоениями других римановых пространств. При этом эти касательные расслоения наделяются метрикой Сасаки, которая была предложена еще в 1958 г. В 1962 г. П. Домбровский обобщил метод Сасаки, заменив риманову связность, связанную с базой, на произвольную линейную связность.

В данном направлении уже работали известные геометры: В. Клингенберг, С. Сасаки, П. Домбровский, О. Жиль-Медрано, Л. Ванэке, А.А. Борисенко, О. Ковальский и др. Поэтому тема диссертации является актуальной. Но ряд естественных и важных вопросов оставался открытым ввиду трудности их изучения. В данной диссертации получены исчерпывающие ответы на многие из этих вопросов и тем самым значительно продвинуто это актуальное направление.

Если $ds^2 = g_{ij}du^i dv^j$ – риманова метрика многообразия M^n и ξ^i – компоненты касательного вектора, то метрика Сасаки касательного расслоения задается в виде:

$$d\sigma^2 = ds^2 + g_{ij}D\xi^i D\xi^j,$$

где $D\xi^i = d\xi^i + \Gamma^i_{kl}\xi^k du^l$ и Γ^i_{kl} – символы Кристоффеля заданной метрики ds^2.

Для сравнения упомянем известный интересный результат, полученный Клингенбергом и Сасаки о том, что для единичной сферы S^2, единичное касательное расслоение T_1S^2 с метрикой Сасаки изометрично проективному пространству RP^3 постоянной секционной кривизны $\frac{1}{4}$.

Заметим, для полноты изложения, что этот результат был значительно дополнен Ямпольским А.Л., который доказал, что для n-мерной единичной сферы S^n, секционная кривизна метрики Сасаки T_1S^n изменяется в пределах $\left[0,\frac{5}{4}\right]$ (результат, вошедший в кандидатскую диссертацию). Я бы назвал этот результат классическим. Он напоминает результат Вонга о том, что кривизна грассмановых многообразий $G_{m,n}$, отличных от сфер, лежит в интервале $[0,2]$.

Во втором разделе рассматриваются подмногообразия касательного расслоения, которые возникают как интегральные подмногообразия векторного распределения Z, удовлетворяющего некоторому алгебраическому уравнению, связанному с оператором кривизны. Метрика риманова многообразия (M,g) с оператором кривизны R(X,Y) называется сильно $s-$ сферической/гиперболической, если существует $s-$мерное распределение векторов Z, удовлетворяющих уравнению:

$$R(X,Y) = c(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y ,$$

где постоянная $c > 0-$ сферический случай, $c < 0-$ гиперболический. В диссертации решается вопрос о существовании сильно сферических распределений на сферическом расслоении с метрикой Сасаки, поставленный А.А. Борисенко. Полный ответ получен, когда многообразие M^2 двумерно. Доказана

Теорема 2.1 *Единичное касательное расслоение T_1M^2 допускает сильно сферическое распределение с $c > 0$ только и только тогда, когда M^2 есть пространство постоянной кривизны $K > 0$. При этом,*

(а) если $K = 1$, то $s = 3$, $c = \frac{1}{4}$ и распределение совпадает со всем касательным пространством к T_1M^2 (т.е. T_1M^2 имеет постоянную кривизну $c = \frac{1}{4}$);

(б) если $K \neq 1$, то $s = 1$, $c = \frac{k^2}{4}$ и распределение огибает одномерные слои T_1M^2

Если размерность многообразия M^n, $n \geq 3$, то доказано, что единичное касательное расслоение $T_1(M^n, K)$ пространства постоянной кривизны $K > 0$ допускает невертикальное сильно сферическое распределение, если M^n локально изометрично единичной сфере S^n, (т.е. $K = 1$), $S = 1$, $c = \frac{1}{4}$. Рассмотрен вопрос существования вертикального сильно сферического распределения. Доказана

Теорема 2.4 *Единичное касательное расслоение T_1M^n риманова многообразия M^n с $n \geq 3$ неотрицательной секционной кривизны не допускает вертикального сильно сферического распределения.*

Как продолжение работ по кривизне касательных расслоений доказана следующая общая

Теорема 2.5 *Пусть (M,g) риманово многообразие размерности $\neq 2,4,8$, то секционная кривизна метрики Сасаки T_1M не может быть положительной.*

Ранее, в исключительном случае $n=2$, в кандидатской диссертации было указано условие необходимое и достаточное для того, чтобы касательное расслоение T_1M^2 имело положительную секционную кривизну. В настоящей диссертации для пространства постоянной кривизны $c:(M^n,c)$ указаны точные границы изменения кривизны $\overline{K}$ метрики Сасаки единичного касательного расслоения (**Теорема 2.6**). Заметим, что из полученных оценок следует, что при $n\geq 3$ неотрицательность секционной кривизны $T_1(M^n,c)$ имеет место при $c\in\left[0,\frac{4}{3}\right]$, но при этом $\overline{K}_{\min}=0$. Доказательство этой теоремы получено очень тонким и сложным анализом.

В третьем разделе изучаются геодезические линии в касательных расслоениях. Ранее К. Сато и С. Сасаки показали, что проекция на базу любой невертикальной геодезической в том случае, когда $M^n(c)$ – пространственная форма есть кривая с постоянными кривизнами k_1,k_2 и нулевыми кривизнами $k_3,...,k_{n-1}$. П. Надь доказал, что если M^n – локально симметрическое пространство, то геодезическая кривая касательного сферического расслоения над M^n проектируется в кривую с постоянными кривизнами. В диссертации Ямпольского берется в качестве M^n вещественная пространственная форма, комплексная пространственная форма и кватернионная. Оказывается, что результаты существенно различны в этих трех случаях.

Для вещественной пространственной формы $k_3=...=k_{n-1}=0$.

Для комплексной пространственной формы $k_6=...=k_{2n-1}=0$.

Для кватернионной пространственной формы $k_{10}=...=k_{4n-1}=0$.

Заметим, что при доказательстве были получены красивые рекуррентные формулы для степеней оператора кривизны в этих пространствах. Как недостаток отметим, что не исследован вопрос существования геодезической кривой по заданной кривой γ на базе.

Затем рассмотрены вполне геодезические подмногообразия в касательных расслоениях. Заметим, что этот вопрос рассматривался еще Вальчаком П. в 1989 г. При этом используется идея рассмотрения векторного поля ξ на подмногообразии F^l базового многообразия M^n как подмногообразия $\xi(F^l)$ в касательном расслоении. В диссертации доказана

Теорема 3.23 *Пусть F^l – подмногообразие пространства $M^n(c)$ постоянной кривизны C. Пусть ξ – нормальное векторное поле на F^l. Тогда $\xi(F^l)$ вполне геодезическое в $M^n(c)$ и ξ параллельно в нормальном расслоении.*

В случае $n=2$ дается классификация вполне геодезических двумерных подмногообразий $\widetilde{F}^2$ в TM^2. В этом случае $\widetilde{F}^2$ либо а) отдельный слой T_qM^2, либо в) если гауссова кривизна $K=const$, то это базовое многообразие, вложенное в TM^2 нулевым сечением, либо с) линейчатая поверхность, построенная на геодезической γ в M^2 с образующими, порожденными параллельным вдоль γ единичным векторным полем. Отметим также теорему о том, что если M^2 – риманово многообразие со знако-постоянной кривизной, то TM^2 не допускает 3-мерного вполне геодезического подмногообразия.

Центральное место в диссертации занимает раздел 4: Геометрия единичного векторного поля. Заметим, что подход автора диссертации существенно отличается от классического. В классическом подходе, который был использован и в наших работах, векторное поле рассматривается на самом многообразии M^n. При этом для векторного поля были даны обобщения формулы Гаусса-Бонне, дана характеристика неголономности поля и т.д.

В диссертации векторные поля ξ рассматриваются как подмногообразия $\xi(M)$ в касательном расслоении T_1M. В таком случае можно определить объекты на $\xi(M)$, связанные с погружением $\xi(M)$ в T_1M – вторую квадратичную форму, оператор Вейнгаартена, грубый лапласиан и др. Автор вычисляет вторую квадратичную фундаментальную форму $\xi(M)$ относительно произвольной нормали и устанавливает условие необходимое и достаточное для вполне геодезичности $\xi(M^n)$ в T_1M^n. Более подробно рассматривается случай $n=2$. Установлено достаточно простое выражение для средней кривизны поверхности $\xi(M^2)$ в T_1M^2. Доказана

Теорема 4.9 *Единичное геодезическое векторное поле ξ на двумерном римановом многообразии M^2 является минимальным тогда и только тогда, когда M^2 несет метрику вращения и ξ есть поле касательных меридианов этой метрики.*

Найдено довольно громоздкое выражение для гауссовой кривизны $\xi(M^2)$ и установлены случаи, когда эта кривизна постоянна (**Теорема 4.15**).
В 4-ом разделе рассмотрены также многообразия Сасаки, единичные поля Киллинга и поля Хопфа. Многообразие Сасаки обладает специальным векторным полем ξ, называемым характеристическим и удовлетворяющим условию

$$R(X,Y)\xi = <\xi,Y> X - <\xi,X> Y$$

для всех векторных полей X,Y на многообразии. В диссертации установлена

Теорема 4.*18* *Пусть M^{2m+1} – многообразие Сасаки и ξ – характеристическое векторное поле. Тогда $\xi(M^{2m+1})$ – вполне геодезическое подмногообразие в T_1M^{2m+1}.*

Векторные поля Хопфа возникают при хопфовских отображениях $f: S^{2m+1} \to CP^m$. Это отображение является локально тривиальным расслоением со слоем S^1. Единичное касательное векторное поле со слоем S^1 образует поле Хопфа ξ. В диссертации показано, что подмногообразие $\xi(S^{2m+1})$ является Сасакиевым многообразием, у которого специальная «сасакиева» кривизна постоянна и равна $\frac{5}{4}$. (В этой теореме предполагается, что S^{2m+1} – единичная сфера).

Проведенное рассмотрение геометрии подмногообразия $\xi(S^{2m+1})$ автор применяет к исследованию на устойчивость этих многообразий с использованием второй вариации объема. Ранее в работах Педерсен [63], Джонсона [43], Брито [14] и Жиль-Медрано [33], [34], Хуртадо [46] уже рассматривался такой подход. В этих работах была показана устойчивость поля Хопфа расслоения $S^3 \to S^2$ относительно специальных поле-вариаций. В диссертации доказывается

Теорема 4.30 *Векторное поле Хопфа на единичной 3-сфере устойчиво относительно классических нормальных вариаций.*

В дополнение заметим, что в работе Gil-Medrano и Leinares-Fuster [33] установлена **Теорема 4.31** Векторное поле Хопфа на единичной сфере размерности $2m+1>3$ неустойчиво.

Много внимания в диссертации уделено векторным полям на 3-мерных группах Ли с лево-инвариантной метрикой. Опять же рассматривается вопрос о существовании и построении вполне геодезических единичных векторных полей. Вопрос сводится к рассмотрению алгебр Ли и ответ дается в терминах структурных констант λ_i и канонического ортонормированного базиса e_1, e_2, e_3 алгебры Ли. Доказана **Теорема 4.47** о том, что лево-инвариантное единичное векторное поле ξ является вполне геодезическим в следующих случаях

1) ξ – произвольное при $\lambda_i = 0$,
2) $\xi = e_i$ или $\xi = \cos t e_j + \sin t e_k$, при $\lambda_i \neq \lambda_j + \lambda_k$, $\lambda_j = \lambda_k$, $i, j, k \neq$, $t = const$,
3) ξ – главное направление Риччи, с кривизной Риччи $= 2$.

Затем дается полный исчерпывающий ответ для всех унимодулярных 3-мерных групп в виде таблицы со значениями λ_i и видом векторов ξ, для которых соответствующее подмногообразие является вполне геодезическим (см.стр. 201).

Полный ответ получен также и в случае неунимодулярной группы. Далее рассмотрен вопрос об устойчивости и неустойчивости вполне геодезических полей ξ в случае трехмерных унимодулярных групп G и их факторов по дискретным подгруппам. Ответ выписан в терминах кривизн Риччи метрики и канонических базисных векторов e_i. Заметим, что в работах [39] Gonzalez-Davila, Vanhecke, Gil-Medrano и др. получены результаты по неустойчивости единичных векторных полей на группах Ли. В этом случае можно было ограничиться поле-вариациями. Но в работах Ямпольского А.Л. получены результаты об устойчивости в классе общих вариаций, что является существенным усилением.

Развитый аппарат для касательных расслоений автор переносит на произвольные расслоения (Раздел 5), используя при этом для построения метрики на расслоении, произвольно заданную связность уже не имеющую отношения к базе. В частности, более подробно рассматриваются векторные расслоения. Построены аналоги многих геометрических понятий: тензора кривизны, грубого гессиана, тензора гармоничности векторного поля и др. Указаны примеры минимальных и вполне геодезических подмногообразий единичного нормального расслоения подмногообразия, порождаемых нормальными векторными полями.

Представленные в диссертации результаты вызвали большой интерес у геометров. Так например, теорема 2.5 была включена в работу [52] Ковальского и др. с разрешения автора.

Замечания.

1. На стр. 126 при рассмотрении экстремалей функционала энергии было бы полезно привести выражение грубого лапласиана
$$\overline{\Delta}\xi = -\sum_i \left(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}\xi - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}\xi\right)$$
2. При доказательстве теоремы 4.18 (стр. 155) полезно дать определение структуры и многообразий Сасаки. Это определение приведено лишь значительно дальше на стр. 203.
3. Автор рассматривает векторные поля Хопфа не приводя их определения, предполагая, что читатель с ними знаком. Считаю, что было бы полезно напомнить кратко их определение.
4. Приведу некоторые опечатки:

стр. 32 написано: теорема 1.8 и 1.8.

стр. 40 в определении сильной s – сферичности не указано, что c – постоянное число.

стр. 43 написано: выражение тензора кривизны (1.6), должно быть: в лемме (1.6).

стр. 49 в выражении $Z(\xi)(\xi)$ лишнее (ξ).

стр. 53 в выражении $\frac{1}{4}|\,R(\xi,Y)X$ не хватает знака модуля.

стр. 58 в выражении ν надо X заменить на Y.

Отмеченные недостатки существенно не влияют на содержание диссертации.

Таким образом, оценивая работу в целом, считаю, что в работе получен ряд важных и трудных результатов по современным вопросам геометрии подмногообразий. Содержание диссертации было полностью отражено в публикациях в специализированных журналах и идентично содержанию автореферата.

По моему мнению диссертационная работа «Геометрия подмногообразий в расслоенных пространствах» отвечает требованиям «Порядку присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника», а ее автор заслуживает присуждения научной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология.

Главный научный сотрудник
ФТИНТ им. Б.И. Веркина НАН Украины,
профессор, док. физ.-мат. наук

Ю.А. Аминов

20.10.2015

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна Національної академії наук України
Україна, м. Харків
Ідентифікаційний код 03534601

Аминова Ю.А.
ЗАСВІДЧУЮ
Вчений секретар ФТІНТ ім. Б.І.Вєркіна
Національної академії наук України
Калиненко А.Н.