ВІДГУК

офіційного опонента про дисертаційну роботу **Вишнякової Ганни Марківни** **"Многочлени з обмеженнями на розташування коренів і граничні класи цілих функцій"**, поданої до захисту на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01–математичний аналіз

1. Актуальність дослідження і його мета. Проблеми опису асимптотичних властивостей аналітичних функцій як у зв'язку з властивостями їхніх нульових множин, так і в залежності від властивостей коефіцієнтів їхніх степеневих розвинень, є одними з найдавніших центральних проблем теорії аналітичних функцій. Разом з цим ряд важливих застосувань як аналітичних функцій взагалі, так і поліномів, зокрема, базуються на фактах, що пов'язують розташування коренів цих об'єктів з властивостями коефіцієнтів їхніх степеневих розвинень (чи більш загально, коефіцієнтів їхніх зображень різними функціональними рядами). В ідеальному варіанті хотілося би мати методи знаходження коренів з довільною наперед заданою точністю, проте це бажання є реалізовним, як загально відомо, лише в дуже простих часткових випадках. Тому, доводиться обмежуватися більш "грубими" способами опису нульових множин. Проте у багатьох важливих застосуваннях навіть такого сорту результати виявляються вкрай потрібними. Одним з найвідоміших прикладів потрібності результатів стосовно локалізації нулів многочленів, є приклад пов'язаний з проблемами стійкості положення рівноваги динамічної системи. За досить загальних припущень відомо, що положення рівноваги системи є стійким у випадку, коли всі корені характеристичного многочлена лінеаризованої системи лежать у відкритій лівій півплощині. Комплексні многочлени, усі корені яких розташовані у відкритій лівій півплощині, називаються стабільними, або стійкими. Критерій Ерміта-Білера стійкості комплексних многочленів встановлює зв'язок між стійкими многочленами і гіперболічними многочленами, тобто, дійсними многочленами, всі корені яких розташовані на дійсній осі. Критерій Рауса-Гурвіца стійкість дійсного многочлена пов'язує з додатністю головних мінорів матриці Гурвіца, побудованої за коефіцієнтами многочлена. При цьому виявилося, що матриця Гурвіца стійкого многочлена є тотально додатною. З огляду на ці глибокі зв'язки між тотальною додатністю матриць, гіперболічністю многочленів і стійкістю многочленів, не повинно виникати жодних сумнівів стосовно актуальності розгляду різних проблем, пов'язаних з переліченими вище об'єктами і розглянутих в даній дисертаційній роботі. Іншою важливою проблемою в теорії розподілу коренів многочленів і трансцендентних цілих функцій, розглянутою у дисертаційному дослідженні, є проблема опису лінійних операторів, які переводять сукупність многочленів з усіма коренями в заданій множині у сукупність многочленів з усіма коренями в іншій заданій множині. Важливими частковими випадками є випадки, коли ці обидві множини є дійсними осями, лівими півплощинами або комплексними площинами без дійсної осі. Ш. Ерміт і Е. Лаґерр першими розпочали дослідження таких проблем систематично. Дж.Поліа і Г.Сеге (1914) дали повний опис лінійних операторів, які є діагональними в стандартному степеневому базисі, що зберігають множину гіперболічних многочленів. Дж.Поліа отримав також перший результат про збереження класу цілих функцій Лагерра-Поліа при відображенні лінійними скінченно-різницевими операторами. У цьому контексті варто згадати теорему Лаґерра-Поліа, що дає повний опис замикання в топології рівномірної збіжності на компактах множини гіперболічних многочленів (клас цілих функцій Лаґерра-Поліа) і множини гіперболічних многочленів з усіма додатними коефіцієнтами (клас цілих функцій Лаґерра-Поліа типу I). З теореми Гурвіца зрозуміло, що нулі цілих функцій, які є рівномірними границями послідовностей дійсних многочленів з дійсними нулями (гіперболічних многочленів) є цілими функціями лише з дійсними нулями. Власне, такими є цілі функції з класу Лагерра-Поліа. Нескладно також зрозуміти, що обернене твердження в загальному є не правильним, тобто, ціла функція з дійсними нулями може виявитися рівномірною границею на компактах поліномів без дійсних нулів. Лінійні оператори, які відображають множину гіперболічних многочленів в себе, у подальші роки досліджували Н.Обрешков, С.Карлін, Б.Я.Левін, Дж.Ксордаш, Т.Кравен, К. де Бур, Р.Варга, А.Ісерліс, С.Норсет, Е.Саф і багато інших. П.Бранден і Дж.Борсеа повністю характеризували усі лінійні оператори, які зберігають гіперболічність (а також оператори, які зберігають корені в деяких інших множинах). Важливим окремим випадком є випадок операторів, які зберігають множину додатних многочленів. У цьому зв'язку варто також відзначити актуальність дослідження лінійних операторів, які не зменшуються мінімально можливу відстань (меш) між попарно різними коренями поліномів.

Викладене вище та аналіз літератури, яка стосується теми дисертації, демонструють актуальність обраної теми досліджень та її вагоме теоретичне значення як для теорії цілих функцій, так і її застосувань, а в актуальності розглянутих у дисертації Г.М. Вишнякової проблем не повинно виникнути сумніву.

2. Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Основний зміст дисертаційної роботи міститься у розділах 1–5. На думку автора відгуку, основні результати дисертаційної роботи, що складають її ядро, містяться у розділах 3 (2.2, 2.3), 4 (4.2 і 4.3) і 5 (5.2–5.6). Текст цих розділів містить найбільш вагому частину дисертаційного дослідження і за своєю новизною, значенням, завершеністю отриманих там результатів, є дослідженням найвищого математичного рівня і безумовно сам по собі відповідає всім вимогам, що висуваються до докторських дисертацій з математики.

Нижче дамо опис основних здобутків кожного розділу дисертації.

В дисертаційній роботі знайдено нові підходи до дослідження зв'язків розташування нулів многочленів і цілих функцій з властивостями коефіцієнтів таких функцій, а також отримані описи і досліджено властивості лінійних операторів, які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність. Зокрема, в дисертаційній роботі отримані такі нові наукові результати: – отримані нові достатні умови для послідовності, щоб вона була частотною послідовністю Поліа, а також для того, щоб твірна функція послідовності не мала коренів в заданому куті; отримано нову достатню умову для додатної послідовності, щоб вона була моментною послідовністю Гамбургера; отримано нову достатню умову додатності на всій дійсній осі многочлена з додатними коефіцієнтами; – отримано нову зручну достатню умову стійкості комплексних многочленів, а також достатню умову розташування коренів цілих функцій у відкритій лівій півплощині, а також перевірено, що ці умови не можна покращити; знайдено необхідні і достатні умови для того, щоб часткова тета-функція мала стійкі відрізки ряду Тейлора, а також мала усі корені у відкритій лівій півплощині; – знайдено повний опис крайніх напрямків конуса многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на дійсній осі і мають степінь не більший від заданого числа; знайдено повний опис діагональних в стандартному степеневому базисі лінійних операторів, які зберігають цей конус; знайдено найменший можливий порядок нескалярного лінійного диференціального оператора з поліномними коефіцієнтами, який зберігає вказаний конус; – отримано неперервний аналог відомої теореми М. Фекете і Дж. Поліа про домноження додатного многочлена на експоненту; отримано характеризацію нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій у випадку, якщо ці множини не перетинають деякий кут; знайдено нову необхідну умову для тих частин нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, які розташовані у вказаному куті; – знайдено, для яких значеннях параметра часткова тета-функція, а також її відрізки ряду Тейлора належать до класу Лаґерра-Поліа; досліджено належність до класу Лаґерра-Поліа низки інших важливих спеціальних цілих функцій і їх відрізків ряду Тейлора; доведено, що узагальнені нерівності Лаґерра, а також комплексні нерівності Лаґерра, є необхідними і достатніми умовами належності цілої функції до класу Лаґерра-Поліа; – отримані оцінки для меша гіперболічного многочлена і логарифмічного меша гіперболічного многочлена з додатними коефіцієнтами через коефіцієнти многочлена; доведено, що логарифмічний меш згортки Шура-Сеге двох гіперболічних многочленів не є меншим за максимум логарифмічних мешів многочленів; отримано точну оцінку знизу для меша образу гіперболічного многочлена під дією центрально-різницевого лінійного оператора зі сталими коефіцієнтами; – отримано повний опис лінійних скінченно-різницевих операторів зі сталими коефіцієнтами, які зберігають множину гіперболічних многочленів і зберігають множину многочленів з коренями у смузі; отримано повний опис лінійних скінченно-різницевих операторів, коефіцієнти яких є цілими функціями, що зберігають клас цілих функцій Лаґерра-Поліа.

Основними результатами розділу 3 на нашу думку є такі твердженнях: – Теорема 3.2.5, яка дає опис крайніх напрямків конусу многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на всій дійсній осі і мають степінь не більше за задане число. – Теорема 3.2.9, яка дає характеризацію діагональних в стандартному степеневому базисі лінійних операторів, що зберігають конус многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на всій дійсній осі. – Теореми 3.3.6 і 3.3.8, які дають опис диференціальних операторів скінченного порядку з поліномними коефіцієнтами, що зберігають множину невід'ємних многочленів зі степенем не більшим за задане число. – Теорема 3.6.2, яка дає опис нульових множин цілих функцій, які є обмеженими у півплощинах. – Теорема 3.6.4, яка дає характеризацію нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, якщо ці множини не перетинають деякий кут.

В розділі 4 розглянуто гіперболічні многочлени, а також клас цілих функцій Лаґерра-Поліа, який є замиканням класу гіперболічних многочленів в топології рівномірної збіжності на компактах. Крім того, розглядаються спеціальні лінійні оператори, які не зменшують кількості дійсних коренів дійсного многочлена. Центральна місце у дослідженнях цього розділу займають встановлені тут нові твердження про необхідні і достатні умови належності цілої функції до класу Лагерра-Поліа, а також дослідження подібних питань для часткової тета-функції та многочленів, що є частинними сумами її степеневого розвинення. В кінці розділу напрацьовані тут підходи застосовані до оцінки числа дійсних коренів спеціальних квазімногочленів і для оцінки локального модуля опуклості банахової алгебри в одиниці. До основних результатів розділу відносяться: – Теорема 4.1.8, яка дає повну відповідь на питання, при яких значеннях параметра часткова тета-функція і її відрізки ряду Тейлора належать до класу Лаґерра-Поліа. – Теорема 4.3.1 про стійкість відрізків ряду Тейлора часткової тета-функції. – Теореми 4.6.6 і 4.6.10, в яких стверджується, що узагальнені нерівності Лаґерра, а також комплексні нерівності Лаґерра, є необхідними і достатніми умовами для того, щоб довільна ціла функція належала до класу Лаґерра-Поліа. – Теорема 4.8.5, яка дає оцінку локального модуля опуклості довільної дійсної банахової алгебри в одиниці.

В розділі 5 розглянуто дві характеристики ступеня відокремленості коренів дійсних многочленів (меш і логарифмічний меш), розглянуто приклади диференціальних операторів, які не зменшують меш гіперболічного многочлена, введено поняття послідовності множників скінченої довжини і встановлено критерій того, що дана скінчена послідовність є послідовністю множників. Крім цього, розглянуто властивості згортки Шура-Сеге многочленів. Розглянуто також знаконезалежні гіперболічні многочлени і встановлені достатні умови знаконезалежної гіперболічності. Крім того, встановлено умови, при яких деякі скінченно-різницеві лінійні оператори зберігають клас Лаґерра-Поліа. До основних результатів розділу відносяться: – Теорема 5.1.8, про те, що логарифмічний меш згортки Шура-Сеге двох гіперболічних многочленів з додатними коефіцієнтами є не меншим за максимум логарифмічних мешів цих многочленів і Теореми 5.2.2, 5.2.3 які містять достатні умови, відповідно для того, щоб даний многочлен з додатними коефіцієнтами мав меш (теорема 5.2.2), логарифмічний меш (теорема 5.2.2) не менший за наперед задане число. – Теорема 5.2.5, що містить достатню умову для знаконезалежної гіперболічності дійсного многочлена. – Теореми 5.3.3 і 5.3.5, які дають повний опис лінійних скінченно-різницевих операторів зі сталими коефіцієнтами, які зберігають множину гіперболічних многочленів, і які зберігають множину многочленів з коренями у смузі. – Теорема 5.3.9, яка дає оцінку найбільшого і найменшого кореня образу гіперболічного многочлена під дією центрально-різницевого лінійного оператора. – Теорема 5.3.15, яка дає оцінку знизу меша образу гіперболічного многочлена під дією центрально-різницевого лінійного оператора. – Теореми 5.4.2 і 5.4.3, які дають повний опис лінійних скінченно-різницевих операторів з цілими коефіцієнтами, які зберігають клас цілих функцій Лаґерра-Поліа.

Доведення основних тверджень з розділів 3 і 5 є найскладнішими, самі розділи є найбільш цільними розділами дисертації, а отримані там нетривіальні результати демонструють потужність й силу застосованих у них підходів.

Зазначимо, що ми зосередили увагу тільки на результатах, які утворюють ядро дисертаційної роботи і в достатній мірі характеризують новизну і силу дисертації. Зі сказаного вище у цьому пункті, а також в актуальності, випливає, що всі основні результати дисертаційної роботи Г.М. Вишнякової є новими, тобто отримані вперше автором дисертаційної роботи, і мають важливе значення, як для розвитку теорії функцій в цілому, так і для можливих застосувань.

У списку публікацій автора відсутні статті без співавторів, проте у підрозділі "Особистий внесок здобувача", досить чітко і зрозуміло сказано про внесок автора дисертації.

3. Обґрунтованість і достовірність результатів дисертації. Доведення всіх основних результатів дисертаційної роботи Г.М.Вишнякової наведені з достатньою повнотою на прийнятому в сучасній математичній літературі рівні строгості і тому в їх обґрунтованості і достовірності не виникає сумніву. Дисертація написана чіткою і зрозумілою мовою, виклад логічний і послідовний.

4. Зауваження.

1) Доведення у багатьох місцях є занадто конспективними, що зважаючи на велику кількість отриманих в дисертації результатів і не дивно – інакше важко їх помістити в розумний за величиною текст. В цілому це створює при прочитанні відчуття перевантаженості і перенасиченості. З іншого боку, це вказує на фундаментальність проведеного дослідження, хоча мною вже відзначено вище, що для цього достатньо познайомитися з результатами лише двох розділів. А для того, щоб оцінити витончену аналітичну майстерність автора дисертації, досить познайомитися тільки з тією частиною дисертації, яка стосується часткової тета-функції.

2) Якщо математичною мовою дисертації, її лаконічністю і довершеністю можна лише захоплюватися чи страждати через надмірну, відзначену вже вище, конспективність міркувань, то граматичний стиль викладу важко назвати українським. Скрізь присутні невдалі переклади термінів на українську мову, вживаються неправильні відмінки, граматичні форми, що є прямою калькою з російської мови. Ба, навіть степінь (чол. рід) у дисертації є вона (жін. рід).

Перелік всіх цих граматичних курйозів, як у тексті дисертації, так і в авторефераті дисертації, є доволі великим і майже ніяк не впливає на правильність сприйняття тексту – з контексту завжди зрозуміло, що ж автор, яку саме думку, намагається донести до читача. Хоча перша зустріч автора даного відгуку в тексті з терміном "скінчено-різничним" (замість "скінченно-різницевим") змусила гарячково шукати у тексті його означення, тихо при цьому сподіваючись, що все ж таки йдеться про скінченні різниці, а не про щось фатальне і криваве.

Підсумовуючи цей перелік зауважень, зазначу, що виявлені огріхи не спотворюють змісту і сприйняття тексту дисертації, доведення якої, хоча й написані іноді занадто конспективно, проте є зрозумілими, а сумнівів у правильності основних положень дисертації у автора відгуку не виникає.

6. Публікації і апробація результатів роботи. Основні результати дисертаційної роботи з достатньою повнотою відображені у 36 наукових публікаціях, з яких 20 статей у наукових фахових виданнях, з них – 13 статей в журналах, які мають імпакт-фактор і входять до міжнародних науково-метричних баз (Scopus і Web of Science). Результати дисертаційної роботи доповідались на численних міжнародних наукових конференціях і наукових семінарах, як в Україні, так і за її межами (Китай, Німеччина, Португалія, США, Туреччина, Швеція), зокрема на Харківському міському семінарі по теорії функцій та Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій і, отже, пройшли належну апробацію.

7. Практичне значення результатів роботи. Дисертаційна робота є теоретичним дослідженням і її результати можуть знайти застосування в тих розділах математики (насамперед математичного аналізу і диференціальних рівнянь) і при дослідженні тих проблем, в яких важливо знати точну інформацію про розташування коренів многочленів або цілих функцій. Результати дисертаційної роботи можуть бути рекомендовані до використання при читанні спеціальних курсів, а також у наукових дослідженнях в таких наукових і навчальних закладах, в яких проводяться дослідження з математичного аналізу в широкому розумінні цього слова: Київському, Харківському, Одеському, Дніпровському, Чернівецькому та Львівському національних університетах, Інституті математики НАНУ, Фізико-технічному інституті низьких температур (м.Харків), Інституті прикладної математики і механіки (м.Слов'янськ) та Дрогобицькому ДПУ ім. І.Франка.

8. Висновки. Дисертаційна робота Г.М.Вишнякової є завершеним науковим дослідженням, має теоретичний характер, а її результати мають вагоме значення для теорії цілих функцій. Дисертаційна робота присвячена дослідженню однієї з центральних класичних задач теорії функцій, що стосується властивостей коренів многочленів та цілих функцій в залежності від властивостей коефіцієнтів степеневих розвинень таких функцій. В ній зокрема описано лінійні оператори, що зберігають гіперболічність, стійкість (гурвіцевість), а також опис лінійних скінченно-різницевих операторів, що зберігають клас цілих функцій Лагерра-Поліа. Отримано нову характеризацію цього класу цілих функцій через узагальнені нерівності Лагерра.

Дисертаційна робота виконана на сучасному науковому рівні. Перелічені вище зауваження до роботи не применшують хорошого враження від роботи в цілому. Аналізуючи дисертаційну роботу, слід відзначити її ідейну цілісність, вона містить остаточний розв'язок цілого ряду перелічених вище важливих для теорії функцій і її застосувань задач. Результати роботи належно опубліковані. Автореферат в цілому правильно і повно відображає зміст дисертації. З огляду на сказане вище, вважаю, що дисертаційна робота Г.М.Вишнякової задовольняє вимоги "Порядку присудження наукових ступенів"(Постанова Кабінету міністрів України №567 від 24.07.2013 щодо докторських дисертацій), результати дисертаційної роботи відповідають вимогам до наукового рівня результатів (актуальність, новизна, наукова значимість) докторської дисертації, а її автор **Ганна Марківна Вишнякова** заслуговує присудження їй наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Професор, доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри теорії функцій і теорії
ймовірностей Львівського національного
університету імені Івана Франка

О.Б.Скасків

10. 05. 2019 р.

Відгук надійшов до ради 16.05.2019,
Вчений секретар
спец. вченої ради Д 64.175.01