ВІДГУК

про дисертацію Вишнякової Ганни Марківни «Многочлени з обмеженнями на розташування коренів і граничні класи цілих функцій», подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

1. Актуальність дослідження і його мета. Як відомо, дослідження в області теорії функцій і операторів, в тому числі, цілих функцій на площині, многочленів і матриць, є важливим об'єктом сучасної математики. Зокрема, розташування коренів цілих функцій і поліномів вивчаються багатьма вітчизняними і зарубіжними спеціалістами. Слід зауважити, що дослідження, які знаходяться на перетині дисциплін, як правило, є найцікавішими в будь-якій науці. Не зважаючи на те, що центральним об'єктом є нулі цілих функцій і поліномів, один з найяскравіших результатів дисертації – теорема про додатність матричних мінорів, яку отримано в першому розділі рукопису і потім використано в інших розділах.

Особливу увагу в дослідженнях приділено вивченню гіперболічних, стійких і позитивних многочленів, їх властивостям, цілим функціям, які наближуються многочленами з обмеженнями на розташування коренів, а також лінійним операторам, які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність. Існує безліч важливих математичних задач, розв'язання яких зводиться до спеціальних алгебраїчних рівнянь чи пошуку коренів спеціальних цілих функцій. На цьому шляху виникає потреба в інформації щодо розташування коренів цих функцій. Підкреслимо, що значний внесок у дослідження внесли такі всесвітньо відомі математики, як Ш. Ерміт, А. Гурвиць, Е. Лагерр, пізніше Дж. Поліа, Г. Сеге І.Дж. Шонберг, М.Г. Крейн, С. Карлін, Б.Я. Левін та інші. Серед сучасних робіт можна відзначити праці В. Бергвайлера, А. Єрьоменко, Дж. Ленглі, Дж. Ксордаша, Т. Кравена, А. Пінкуса, А. Сокала, Р. Варги, Е. Саффа, Дж. Борсеа, П. Брандена, Б. Шапіро і багатьох інших. Тематика дисертаційної роботи стрімко розвивається, а її автор вносить вагомий внесок в ці дослідження.

Отже, ми не маємо сумнів в актуальності обраної теми досліджень і високій оцінці отриманих результатів. Не зайвим вважаємо зауважити, що доведені в дисертації результати мають високий науковий рівень, який цілком відповідає рівню докторської дисертації.

2. Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Викладення в дисертації є послідовним і правильно (логічно) сформованим. Отримані результати є новими і цікаві для спеціалістів.

Дисертація починається зі вступу і переліку умовних позначень.

В розділі 1 вивчаються дійсні матриці з невід'ємними мінорами і дійсні матриці, у яких усі мінори, порядки яких не перевищують заданого k, є невід'ємними. Зауважимо, що відповіді на деякі важливі питання щодо коренів многочленів можна дати в термінах невід'ємності мінорів матриць, побудованих по коефіцієнтам цих многочленів. З цієї точку зору, розділ 1 є фундаментальним розділом усієї дисертації. Основна теорема 1.1.4 містить в собі достатню умову, за якою перевірку невід'ємності (додатності) мінорів матриці k-порядку можна здійснити завдяки перевірці відповідних мінорів порядку (2×2). Ці мінори будуються по вихідній матриці і містять в собі деяку мультиплікативну сталу, яка залежить від k і від значення котрої залежить виконання даного критерію. Зауважимо, що дисертантом знайдено точне значення вказаної сталої $c_k = 4\cos^2\frac{\pi}{k+1}$ для кожного k, що істотно покращує враження від результату. На наш погляд, цей результат є одним з найцікавіших і найпотужніших у дисертації.

Розділ 2 присвячений вивченню стійких многочленів і цілих функцій (тобто многочленів і цілих функцій з усіма коренями у відкритій лівій напівплощині). Оскільки при досить загальних припущеннях положення рівноваги динамічної системи є стійким, коли характеристичний многочлен лінеаризованої системи має усі корені у відкритій лівій напівплощині, вивчення стійких многочленів має певне значення. Особливо важливим є знаходження достатніх умов стійкості, які легко перевіряються, і в дисертаційній роботі такі умови знайдено. В другому розділі дисертаційної роботи знайдено найменшу можливу константу для твердження, яке є аналогом теореми 1.1.4 для матриць Гурвіця. Виявляється, що така найменша константа, на відміну від випадку теплицевих матриць або ганкелевих матриць, не залежить від розміру матриць для степеню многочлена більшого 5. Одним з найважливіших тверджень розділу 2 є, на мій погляд, теорема 2.1.7 про від'ємність дійсної частини коренів цілої функції окремого вигляду.

Зазначимо, що теорема 2.1.7 спирається на значення кореня конкретного многочлена $x^3 - x^2 - 2x - 1$. На нашу думку, цікаво було б отримати відповідь на питання, чому саме цей многочлен і як саме дисертантом було його знайдено.

В **розділі 3** вивчаються різноманітні види додатності. Базуючись на результатах розділу 1, отримано нову достатню умову додатності многочлена з додатними коефіцієнтами і перевірено, що цю умову не можна покращити. В цьому розділі розглядається також конус многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на всій дійсній осі і мають степінь, не більший заданого числа. В роботі отримано повний опис крайніх напрямків цього нормального опуклого конусу. В кінці розділу 3 автор вивчає абсолютно монотонні функції, тобто перетворення Лапласа невід'ємних скінчених борелевських мір з носіями на додатній півосі. Відзначимо, що абсолютно монотонні функції, впроваджені С.Н. Бернштейном, є аналітичними в лівій напівплощині. В розділі 3 відзначимо теорему 3.6.4, в котрій отримано критерій, коли задана множина без граничних точок є множиною нулів деякої цілої абсолютно монотонної функції. Результат є цікавим для спеціалістів.

В **розділі** 4 вивчаються гіперболічні многочлени і цілі функції класу Лаґерра-Поліа. Дійсний многочлен називається гіперболічним, якщо усі його корені є дійсними. Ціла функція належить до класу Лаґерра-Поліа, якщо вона є локально рівномірною границею на компактах послідовності гіперболічних многочленів. Визначна теорема Е.Лагерра і Дж.Поліа дає повний опис класу цілих функцій Лаґерра-Поліа. Клас цілих функцій Лаґерра-Поліа відіграє значну роль в комплексному аналізі, дослідженням властивостей функцій цього класу і його численним характеризаціям присвячена велика кількість робіт, дослідження у цьому напрямку активно розвиваються в останні роки, тому такі дослідження є дуже актуальними. В першому підрозділі розділу 4 дається відповідь на наступне питання: при яких значеннях параметру часткова тета-функція належить класу Лаґерра-Поліа? В дисертаційній роботі доведена теорему 4.1.8, яка містить декілька варіантів відповідей (критеріїв) на це питання.

Розділ 5 є завершальним. Тут вивчаються поширені міри відділення коренів гіперболічних многочленів: меш і логарифмічний меш. Доведено, що логарифмічний меш згортки Шура-Сеге гіперболічних многочленів з додатними коефіцієнтами не є меншим, ніж максимум їх логарифмічних мешів. Знайдено нову достатню умову знаконезалежної гіперболічності многочлена, а також достатню умову для того, щоб гіперболічний многочлен мав меш (гіперболічний меш), який є більшим за задане число. Крім того, вивчаються скінченно-різничні лінійні оператори скінченного порядку зі сталими коефіцієнтами, досліджується, за яких умов ці оператори зберігають множину гіперболічних многочленів, а також вивчаються властивості образу гіперболічного многочлена під дією таких операторів (простота коренів, мінімальний можливий меш образу та інші). В розділі 5 також отримано відповідь на питання, при яких умовах ці оператори зберігають клас Лагерра-Поліа, див. теорему 5.4.3.

3. Обґрунтованість і достовірність наукових положень. Дисертаційне дослідження є солідною науковою працею, що містить в собі низку вагомих результатів, які є цікавими для спеціалістів. Всі результати, наведені в дисертації, є новими і строго доведені. При перевірці тексту помилок не виявлено. Рівень викладення матеріалу є високим, зокрема, рівень доведень відповідає загальноприйнятим уявленням про математичну строгість. Автореферат правильно і повно відображає зміст дисертації. Результати, представлені в дисертації, є опублікованими в фахових виданнях України, або в виданнях, які входять до бази даних "Scopus", що відповідає положенню про захист дисертацій.

4. Зауваження. При читанні дисертації виявлено низку недоліків, які мають редакційний характер, або пов'язані з певною незручністю читання рукопису чи складністю його розуміння. Відслідкуємо це по пунктах:

1) Зміст дисертації починається лише на 19 сторінці, що є не зручним для читання. Можливо, такий порядок рекомендований відповідним положенням про структуру дисертації.

2) На стор. 24, 4 рядок зверху читаємо: «Актуальність задач такого типу не потребує пояснень і посилань, але ми наведемо деякі приклади і історичні факти». Нам здається, що для непрямих спеціалістів, які можуть знайомитись з дисертацією, ці пояснення якраз потрібні, або ця фраза є зайвою в тексті. Складається враження, що в цьому випадку здобувач говорить особисто про себе.

3) Рукопис не позбавлено зайвих епітетів, непотрібних (малозмістовних)

слів і зворотів. Наприклад, слово «знаменитий», використане в російському варіанті замість українського слова «видатний» (11 і 14 рядки на стор. 27; 14 рядок на стор. 66, 7 рядок на стор. 187), є зайвим для математичних текстів. Рекомендуємо дисертанту уникати вживання подібних слів, особливо по відношенню до математичних тверджень. Також радимо до нейтрального викладення, без акцентування уваги на захоплення результатом чи твердженням.

На сторінці 3, 3 рядок «отримано нову достатню умову...» зайвим є слово «нову» (краще написати: «отримано достатню умову...»). Якщо йдеться про дисертацію чи статтю, то дивно виглядало, якщо б здобувач намагався захищати старий результат. У 2-му абзаці стор. 3: «Доведена нова зручна достатня умова...», «нова зручна...» – зайві слова. Краще написати: «Доведено достатню умову...». Зауважимо, що слово «нова» і так припускається за змістом, бо йдеться про дисертацію, а слово «зручна» не збагачує текст змістом. Таких речень і зворотів багато в тексті.

4) На стор. 35 і нижче автор веде розповідь від першої особи. Наприклад, 20 рядок на стор. 35: «Ольга Каткова – мій співавтор по роботі...». Ми радимо дисертанту звертатися від третьої особи, до речі, кількома рядками вище на цій же сторінці автор так і робить.

5) Є дрібні математичні зауваження:

5.1) слід використати великі дужки у формулі (4.81) на стор. 192. Так само і у формулі (4.17) на стор. 157.

5.2) У 3-му рядку на стор. 200 «Тоді з наших оцінок ми маємо...» – невідомо, з яких саме оцінок, бо нема прямого посилання.

5.3) На сторінці 200 і у багатьох місцях використовуються одночасно і десяткові і раціональні дроби, що є незручним для сприйняття.

5.4) У формулі (4.102) запис «$n \to \infty$» загальноприйнято писати або над, або під символом «$\longrightarrow$», але ніяк не збоку.

5.5) На стор. 225, рядки 19 і 26, під знаками сум не позначено індекс сумування.

5.6) Нема пробілу у формулі (4.16) після знаку «$\exists$» на стор. 157.

5.7) Перші дві виносних формули на с. 259 даються в тексті без належного пояснення, ми радили б давати усім (навіть «очевидним») формулам строге аналітичне доведення.

5.8) Стор. 44, після наслідку 1.1.5: «Наступна теорема демонструє...» –

стилістична помилка, бо математичне твердження не може бути суб'єктом дій.

5.9) Стор. 256, доведення теорем 5.3.3 і 5.3.5. Потрібно вказати, що доводиться необхідність умов теорем.

5.10) Сторінка 257, 6 рядок зверху. Потрібне посилання на теорему Гурвиця.

6) У багатьох місцях дисертації вживається «із» замість «з». Зокрема, на стор. 259, 13 рядок «Із леми 5.3.6» замість «З леми 5.3.6».

5. Висновки. Наведені зауваження не впливають на позитивне враження від дисертації. Не виявлено суттєвих недоліків, зокрема, математичних помилок, які б ставили під сумнів результати рукопису. Слід зауважити, що дисертація є потужною математичною працею, що охоплює декілька областей математики і має, переважно, теоретичний характер. Результати, отримані здобувачем, є фундаментальними, новими, цікавим для спеціалістів і можуть бути використані у подальших дослідженнях. Отже, вважаю, що Вишнякова Ганна Марківна заслуговує на присудження їй наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Професор кафедри математичного аналізу
Житомирського державного університету
імені Івана Франка, д.ф.-м.н.,
старший науковий співробітник — Є.О. СЕВОСТЬЯНОВ

Підпис засвідчую:
проректор з наукової і міжнародної роботи
Житомирського державного університету
імені Івана Франка, доктор педагогічних наук,
професор — Н.А. СЕЙКО

Відгук надійшов до ради 24.05.2019
Вчений секретар
Спец. вченої ради Д 64.175.01 (В.О. Пріхадько)