

ВІДГУК ОФІЦІЙНОГО ОПОНЕНТА

доктора фізико-математичних наук, професора,
професора кафедри фундаментальної математики факультету математики і
інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна

ЯМПОЛЬСЬКОГО Олександра Леонідовича

на дисертаційну роботу

СУХОРЕБСЬКОЇ Дар'ї Дмитрівни

на тему

**«Прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах
у просторах постійної кривини»**

на здобуття наукового ступеня доктора філософії

за спеціальністю 111 «математика», галузь знань 11 «математика та статистика».

Актуальність обраної теми. Теорія замкнених геодезичних на гладких ріманових многовидах є дуже розвинутою, має важливі застосування в геометрії, використовує глибокі теореми з топології, функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними та, власне, ріманової геометрії. До розвитку цієї теорії долучалися в різні часи такі видатні математики як M. Berge, W. Klingenberg, R. Bott, W. Ballmann, W. Ziller та ін.

У дисертаційній роботі Дар'ї Сухоребської розглядаються питання існування та поведінки замкнених геодезичних на нерегулярних многовидах, а саме, на тетраедрах у просторах сталої (постійної) кривини. Такі питання потребують застосування методів дослідження з галузі нерегулярної геометрії, розвитку комбінаторних геометричних методів та застосування геометричних ідей порівняння.

Іншим напрямком дослідження автора є розв'язання задачі ізометричного занурення підмноговиду простору Лобачевського з метрикою обертання у вигляді підмноговиду обертання. Взагалі задача ізометричного занурення даної метрики в певний многовид є класичною задачею ріманової геометрії. Сформульована в дисертаційній роботі тематика дослідження є суттєвим узагальненням аналогічної задачі щодо будови підмноговидів з метрикою обертання в Евклідовому просторі. Слід зазначити, що розв'язання такої задачі потребує глибоких знань методів регулярної ріманової геометрії.

Поєднання в одній роботі як регулярних так і нерегулярних методів є ознакою високої кваліфікації автора.

Тому я вважаю, дисертаційна робота СУХОРЕБСЬКОЇ Дар'ї Дмитрівни, яка в головному присвячена дослідженню замкнених геодезичних на правильних тетраедрах у просторах сталої кривини, є актуальною.

Наукова новизна отриманих результатів. Дисертаційна робота розв'язує актуальну геометричну проблему щодо замкнених геодезичних на нерегулярних підмноговидах у просторах сталої кривини і є суттєвим узагальненням задачі опису замкнених геодезичних на правильних тетраедрах в евклідовому просторі. Розв'язання цієї задачі виявило неочікувану фундаментальну різницю між поведінкою замкнених геодезичних на тетраедрах евклідового простору і тетраедрах у просторах з кривиною. Без сумніву, виявлення такої різниці є найяскравішим результатом дисертаційної роботи.

Робота містить раніше незахищені наукові положення та отримані автором нові науково обґрунтовані результати. А саме:

- на правильному тетраедрі в евклідовому просторі кожен клас простих замкнених геодезичних типу (p, q) містить просту замкнену геодезичну, що проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра;
- показано, що розгортка тетраедра уздовж простої замкненої геодезичної складається з чотирьох рівних багатокутників;
- доведено, що на правильному тетраедрі у сферичному просторі кожен клас простих замкнутих геодезичних типу (p, q) містить тільки одну просту замкнуту геодезичну, з точністю до ізометрії тетраедра;
- показано, що довжина простої замкненої геодезичної γ на правильному тетраедрі у сферичному просторі менша 2π ;
- отримано оцінку знизу на довжину простої замкнутої геодезичної типу (p, q) на правильному тетраедрі у сферичному просторі;
- показано, що на правильному тетраедрі в сферичному просторі існує скінченна кількість простих замкнутих геодезичних;
- доведено, що відстань від вершин правильного тетраедра у просторі Лобачевського до простої замкненої геодезичної γ на ньому відокремлена від 0, знайдено формулу для нижньої межі;
- доведено, що на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського з кутом грані $\alpha \in (0, \pi/3)$ існує проста замкнена геодезична типу (p, q) , геодезичними типу (p, q) вичерпуються усі прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського;
- подібно до сферичного простору, кожен клас простих замкнених геодезичних типу (p, q) містить тільки одну просту замкнену геодезичну, з точністю до ізометрії тетраедра;

- знайдено оцінку знизу на довжину простої замкненої геодезичної типу (p, q) на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського, оцінено асимптотичний порядок росту кількості замкнених геодезичних на правильному тетраедрі простору Лобачевського довжини не більше L ;
- знайдено умову, за якої ізометричне занурення підмноговиду F^l малої ковимірності з індукованою метрикою обертання у гіперболічний простір H^{l+p} є підмноговидом обертання у випадках від'ємної, нульової або додатної зовнішньої кривини та з'ясовано його геометричну будову.

Ступінь обґрунтованості наукових положень, висновків та їх достовірність.

Обґрунтованість та достовірність результатів дисертації забезпечуються чіткою формулювкою проблем, що розглядаються, використанням достовірних методів дослідження, зрозумілою і бездоганною логікою синтетичних доведень, кваліфікованим виконанням обчислень з використанням апаратів математичного аналізу та теорії диференціальних рівнянь.

Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у фахових виданнях України та пройшли апробацію на 10 міжнародних конференціях, семінарах та спеціалізованих воркшопх в Україні, Німеччині, Данії, Італії та Словенії.

Отримані в дисертаційній роботі геометричні результати є повною мірою обґрунтованими та достовірними, узгодженими з відомими базовими результатами інших авторів.

Повнота викладу в наукових публікаціях, зарахованих за темою дисертації, відсутність порушення академічної доброчесності.

Основні наукові результати дисертаційної роботи викладені в 4 наукових публікаціях 2 з яких у виданні, що індексується наукометричною базою SCOPUS, 3 тези доповідей включено до матеріалів міжнародних конференцій (Одеса, Італія, Словенія) в тому числі до матеріалів 8-го Європейського Математичного Конгресу. З 4 опублікованих статей 3 виконані без співавторів. Особистий внесок здобувача в публікації, що виконана у співавторстві, розкритий у вступній частині дисертації.

Аналіз змісту дисертаційної роботи. Дисертація Дар'ї СУХОРЕБСЬКОЇ містить двомовну анотацію (українська та англійська), вступ, п'ять розділів, висновки, список використаних джерел (45 найменувань). Загальний обсяг дисертації складає 115 сторінок.

У вступній частині дисертації висвітлено обґрунтування тематики досліджень, мета і завдання дисертаційної роботи, надано стислий опис методів дослідження та сформульовані основні результати роботи, висвітлено особистий внесок здобувача та наведено дані про публікації і апробацію досягнутих результатів.

Перший розділ містить виклад базових результатів з теорії геодезичних на замкнених регулярних та нерегулярних ріманових многовидах. Зміст розділу дозволяє оцінити актуальність задач і мети дисертації, місце досягнутих результатів у низці подібних досліджень.

Другий розділ містить результати автора про прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі тривимірного евклідового простору. В цьому розділі авторка розробила підхід для розв'язання аналогічної задачі для правильного тетраедра в просторах сталої кривини. Результати розділу є важливими для порівняння властивостей замкнених геодезичних на тетраедрах в просторах з кривиною з властивостями геодезичних на класичному правильному тетраедрі.

У третьому розділі вивчається поведінка простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі у сферичному просторі. Перший головний результат розділу складає Теорема 3.4 про оцінку на кут тетраедра, за якого *не існує* на правильному тетраедрі простої замкненої геодезичної заданого типу. Доведення спирається на ряд попередніх лем 3.1, 3.2 та 3.3, що мають і самостійний інтерес. Доведення лем і основної теореми базується на акуратних геометричних побудовах синтетичного характеру, доповнених нетривіальними аналітичними оцінками. Другий головний результат розділу складає Теорема 3.5, що навпаки визначає умови *існування* на правильному тетраедрі простої замкненої геодезичної заданого типу. Доведення спирається на дві дуже технічні леми 3.7 та 3.8, містить тонкі аналітичні викладки та доведення нетривіальних нерівностей задля знаходження відповідної умови.

Четвертий розділ містить розв'язання задач аналогічних за постановкою щодо простих замкнених геодезичних на правильних тетраедрах сферичного простору на випадок правильного тетраедра в просторі Лобачевського. Проте, за технологією і ідеями дослідження простих замкнених геодезичних, а також за результатами дослідження, цей розділ є цілком самостійною частиною дисертаційної роботи. Основні результати розділу складають Теореми 4.4 та 4.7. У Теоремі 4.4 доведено існування на правильному тетраедрі в просторі Лобачевського єдиної з точністю до ізометрії тетраедра простої замкненої геодезичної заданого типу. У Теоремі 4.7 знайдено оцінку числа простих замкнених геодезичних довжини не більше L на правильному тетраедрі із заданим кутом грані.

Розділ 5 відрізняється за змістом задач попередніх розділів. У ньому розглядається задача ізометричного занурення підмноговиду з метрикою обертання в простір Лобачевського у вигляді поверхні обертання. Теореми 5.3, 5.4 та 5.5 визначають достатні умови, за яких таке ізометричне занурення є можливим у випадках, відповідно, від'ємної, нульової та додатної зовнішньої кривини підмноговиду. Результати теорем викладені в зрозумілих геометричних термінах. Доведення спирається на ряд теорем з теорії диференціальних рівнянь і свідчить про обізнаність автора з методами ріманової геометрії регулярних підмноговидів.

В цілому, зміст і використані методи дослідження засвідчують високу кваліфікацію автора. Робота виконана на високому науковому рівні, відповідає вимогам академічної доброчесності та містить розв'язання актуальних задач сучасної геометрії. Вона характеризується цілісністю і логічністю викладу матеріалу дослідження та оформлена відповідно до вимог Міністерства освіти та науки України, що висуваються до дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика.

Зауваження до дисертаційної роботи.

До зауважень загального характеру, можна виділити два:

С. 32: «Надалі будемо вважати, що $0 \leq p < q$ » : С. 71: «Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $0 \leq \beta \leq \alpha/2$.» – доречно було б включити до дисертації обґрунтування цих тверджень.

Є певна кількість зауважень редакційного характеру:

С. 16₅: «Теореми о геодезичних ...» – Теореми про геодезичні

С. 16₄ і далі за текстом: «просторах постійної кривини» – просторах сталої кривини

С. 17¹²: «на регулярних багатогранників» – для регулярних багатогранників

С. 18⁷: «слідують з групи симетрії» – впливають з групи симетрій

С. 18⁸ і далі за текстом: «об'ємлюючого простору» – охоплюючого простору

С. 18^{16,21}: «ще не слідує» – ще не впливає

С. 20¹⁴: «Застосував теорему» – Застосувавши теорему

С. 20¹⁹: «у псевдоевклідовому просторі» – у псевдоевклідовому просторі

С. 21¹³: «тоді» – тоді

С. 22⁶: «циліндром. конусом» – циліндром, конусом

С. 22₁₄: «науковому керівникові О.А. Борисенку» – науковому керівникові О.А. Борисенку

С. 25⁶: «відображено у трьох тезах конференцій» – відображено у тезах трьох конференцій

- С. 26¹¹: «відмітити» – відзначити
С. 47²: «доведеного у роботі Борисенко» – доведеного у роботі Борисенка
С. 85⁴: «у роботах [40]» – у роботі [40]
С. 89⁶: «дорівнює один» – дорівнює одиниці

Зауважень, щодо достовірності та повноти викладення результатів, що суттєво впливали б на оцінку дисертаційної роботи, немає.

Загальна оцінка роботи та висновок. Дисертаційна робота є цілісною завершеною науковою працею, що повністю відповідає заявленій спеціальності 111 Математика. Отримані результати повністю відповідають заявленій меті дослідження.

За актуальністю, змістом, науковою новизною, обґрунтованістю і достовірністю результатів, відсутністю ознак порушення здобувачем академічної доброчесності вважаю, що дисертаційна робота «Прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у просторах постійної кривини» відповідає вимогам Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженому постановою Кабінету Міністрів України № 44 від 12 січня 2022 р., а її авторка, СУХОРЕБСЬКА Дар'я Дмитрівна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 - Математика.

Офіційний опонент:

професор кафедри фундаментальної математики
Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна,
доктор фізико-математичних наук, професор



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ



ПИС ЗАСВІДЧУЮ
начальник відділу
кадрів

М. Білоширенко