До спеціалізованої вченої ради ДФ 64.175.006
у Фізико-технічному інституті
низьких температур ім. Б. І. Веркіна
61103, м. Харків, проспект Науки, 47

ВІДГУК

офіційного опонента, члена-кореспондента НАН України,
доктора фізико-математичних наук, професора,
завідувача відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України
Максименка Сергія Івановича
на дисертаційну роботу
Сухоребської Дар'ї Дмитрівни
«Прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у просторах постійної кривини»,
представлену на здобуття ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 «Математика та статистика»
за спеціальністю 111 «Математика»

Дисертаційна робота Сухоребської Дар'ї Дмитрівни «Прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у просторах постійної кривини» присвячена класифікації замкнених геодезичних на правильних тетраедрах грані яких є мають кривину 0, 1, або -1. Питання існування замкнених геодезичних є фактично питанням про періодичні траєкторії руху будь-яких фізичних об'єктів: а саме рівняння геодезичних є частинним випадком рівнянь Ейлера-Лагранжа для варіаційних задач, які, зокрема, включають описи руху тіл.

Задачам існування і класифікаціяї геодезичних присвячена величезна кількість наукових праць. Особливо потрібно відмітити роботи А. Пуанкаре, Л. Люстерніка, Л. Шнірельмана, Х. Хубера, С.Кон-Фоссена, А. Д. Александрова, О. В. Погорєлова, О. А. Борисенка, В. Протасова.

Отримані результати продовжують і уточнюють дослідження багатьох математиків, зокрема роботи О.А.Борисенка. Варто зауважити, що оскільки тетраедри є топологічними, але не гладкими многовидами, то вивчення геодезичних на них вимагає не лише аналітичних, а й додаткових комбінаторних міркувань повязаних з поведінкою цих геодезичних при перетині грані.

Коротко опишу отртимані в рброті результати.

Робота складається зі вступу, п'яти розділів, загальних висновків та списку використаних джерел.

У вступі дається історний опис досліджень геодезичних на двовимірних многовидах та багатогранниках, а також формулюються коротко отримані результати.

Перший розділ присвячений огляду відомих результатів про геодезичні на замкнених ріманових многовидах, і, зокрема, на замкнених поверхнях, які є межами багатогранників.

В другому розділі вивчається структура замкнених геодезичних на правильному тетраедрі в $\mathbb{R}^3$. Оскільки геодезична не може проходити через вершину, то можна відслідкувати скільки разів вона перетинає кожне ребро тетраедра. Зауважимо, що тетраедр має три пари протилежних ребер. З робіт [14,18] випливає, що кожна така геодезична визнається парою взаємно простих чисел (p, q) (і це включає випадок $p = 0, q = 1$): вона перетинає кожне ребро однієї пари протилежних ребер тетраеда в p точках, кожне ребро другої пари протилежних ребер тетраеда в q точках, кожне ребро третьої пари протилежних ребер тетраеда в $p+q$ точках. Кажуть, що така геодезична має тип (p, q). Всі геодезичні типу (p, q) розпадаються на класи попарно паралельних, в тому сенсі, що їх сліди на кожній грані є паралельними відрізками.

Теорема 2.1 показує існує геодезична типу (p, q), яка проходить через середини ребер тетраедра, лема 2.2 дає оцінку відстані такої геодезичної до вершин тетраедра. Також наслідок 2.1.1 описує властивості розгортки тетраедра уздовж простої геодезичної типу (p, q).

В розділі 3 розглянуто замкнені геодезичні на правильному тетраедрі в сферичному просторі. На відміну від правильних тетраердів в $\mathbb{R}^3$, які є завжди попарно гомотетичнимим, правильні тетраедри в сферичному просторі можуть мати «різну форму», і визначаються кутом α своїх граней. Цей кут може приймати значення в інтервалі $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$.

В лемі 3.1 показано, що

- для кожного $\alpha \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ існують рівно 3 прості замкнені геодезичні типу $(0, 1)$.
- більш того, якщо $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$, то інших геодезичних взагалі немає.
- а якщо $\alpha \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, то на тетраедрі також існують геодезичні типу $(1, 1)$.

Таким чином, задача далі зводиться до випадку $\alpha \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.

В лемі 3.2 показано, що прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі в сферичному просторі завжди мають довжину $< 2\pi$, а в лемі 3.3 – кожна така геодезична проходить через середини двох пар протилежних сторін тетраедра. Це дає можливість ідентифікувати такі геодезичні за послідовністю, в якій вони перетинають ребра тетраедра (наслідок 3.3.1). Зокрема, число геодезичних типу (p, q) є скінченним.

Далі в теоремі 3.4 доведено, що якщо α перевищує певний досить складний аналітичний вираз $F(p, q)$, що залежить від p і q, то на цьому тетраедрі не існує простої замкненої геодезичної типу (p, q). Якщо числа (p, q) стають досить великими, то згаданий вираз $F(p, q)$ прямує до числа $\frac{\pi}{3}$. Оскільки $\frac{\pi}{3} < \alpha$, то $\frac{\pi}{3} < F(p, q) <$

α при фіксованому α і великих (p, q). Зокрема, це показує, що для кожного α взагалі існує лише скінченне число таких геодезичних.

В підрозділі 3.4 даються достатні умови на (α, p, q) для існування простої замкненої геодезичної типу (p, q).

В розділі 4 розглядається аналогічна задача про існування простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі, але вже в просторі Лобачевського. В лемі 4.1 показано, що якщо геодезична, грубо кажучи, «накручується» навколо вершини, то вона має точку самоперетину. В лемі 4.2 отримано оцінку знизу на відстань простої замкненої геодезичної до вершин тетраеда, а в лемі 4.3 – показано, що як і у сферичному випадку (лема 3.3), кожна така геодезична проходить через середини двох пар протилежних ребер. Далі, теорема 4.4. показує, що з точністю до ізометрії тетраедра для кожної пари (p, q) існує єдина проста замкнена геодезична; лема 4.6 дає оцінку знизу довжини такої геодезичної через p, q, а теорема 4.7 – описує асимптотику числа геодезичних обмеженої довжини $< L$ та фіксованого кута грані α.

В розділі 5 розглядається дещо інша задача про певну характеризацію підмноговидів обертання в багатовимірному просторі Лобачевського. Нехай F^l – це l-вимірний підмноговид в просторі Лобачевського H^k з індукованою метрикою обертання $ds^2 = (du^1)^2 + \phi(u^1)d\sigma^2$, де ϕ – додатна гладка функція, а $d\sigma^2$ – ріманова метрика постійної секційної кривини. Припустимо, що

- F^l має постійну (додатну, від'ємну або нульову) зовнішню секційну кривину
- координатні лінії u^1 є лініями кривини цього підмноговиду F^l.

В розділі показано, що для деяких значень розмірності k та в залежності від знаку зовнішньої секційної кривмни, F^l буде підмноговидом обертання. А саме, це відбувається в таких випадках:

- зовнішня секційна кривина F^l від'ємна, і $k = 2l - 1$ (теорема 5.3);
- зовнішня секційна кривина нульова F^l і $k = l + 1$ (теорема 5.4);
- зовнішня секційна кривина додатна F^l і $k = l + 1$ (теорема 5.5). Більш того, в цьому випадку, якщо $l > 2$, то умова, що координатні лінії u^1 є лініями кривини цього підмноговиду F^l є навіть зайвою.

Є декілька зауважень щодо викладення матеріалу.

1. В теоремі на стор 3 варто було б сказати, що якщо α знаходиться між α_1 і α_2, то не зрозуміло чи існують такі геодезичні в цьому випадку.

2. стор 4, теорема, п.3. Не зрозуміло що таке $c(\alpha)$. Воно визначене в теоремі 4.7, і варто було б сказати, що $c(\alpha)$ – деяка функція від α.

3. стор. 34, Твердження 2.1. На мою думку наведене формулювання не зовсім зрозуміле:

Твердження 2.1. *На правильному тетраедрі в Евклідовому просторі для кожної впорядкованої пари взаємно простих натуральних чисел* (p, q) *існує клас простих замкнених геодезичних типу* (p, q), *з точністю до ізометрії тетраедра. На розгортці тетраедра геодезичні з одного класу паралельні між собою.*

Мабуть краще сказати, що криві типу (p, q) розпадаються на класи попарно паралельних геодезичних. І більш того, ці класи попарно ізометричні, тобто для кожної пари класів існує ізометрія, яка переводить один в інший.

4. Доведення наслідку 3.4.1 не зовсім чітке – явно не виписано чому буде лише скінченне число таких геодезичних. В наслідку 3.3.1 варто було б явно відмітити, що для кожної пари (p, q) число простих замкнених геодезичних типу (p, q) на правильному тетраедрі в сферичному просторі є скінченним. Тоді з нього і з скінченності пар (p, q) таких, що $p, q < N$ для кожного N, явно випливала б скінченність числа таких геодезичних.

5. Є ще декілька орфографічних помилок

5.1. стор 16, рядок 8 зверху «*Шнарельманом*» потрібно замінити на «*Шнірельманом*».

5.2. стор 16, рядок 5 знизу: «*Теореми о геодезичних*» потрібно замінити на «*Теореми про геодезичні*».

5.3. стор 33, рядок 8 знизу - «*ореєнтацію*» потрібно замінити на «*орієнтацію*».

5.4. стор 33, рядок 7 знизу - «*Зафіксуемо*» потрібно замінити на «*Зафіксуємо*».

5.5. стор. 86, рядок 9 знизу «*внаслідок обертанням*» мабуть потрібно написати просто «*обертанням*».

Вказані недоліки носять технічний характер, легко виправляються і не впливають ні на результати дисертації ні на загальне дуже позитивне враження від неї. Це дійсно робота з геометрії – вона містить не лише аналітичні а й багато геометричних міркувань.

Результати дисертації є новими, цікавими і склаюдать важливий крок диференціальній геометрії. Потенційно вони можуть мати практичні застосування в прикладних задачах, зокрема, в робототехніці.

Робота гарно написана і добре вичитана.

Вважаю, що за новизною, актуальністю, обсягом та практичним значенням дисертація відповідає вимогам наказу МОН України №40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації» (з наступними змінами) та «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №44 від 12 січня 2022, а її авторка, Сухоребська Дар'я Дмитрівна, заслуговує присудження їй ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика».

Офіційний опонент
член кореспондент НАН України,
доктор фіз.-мат. наук, професор,
завідувач відділу алгебри і топології
Інституту математики НАН України Сергій МАКСИМЕНКО

Підпис Максименка С. І. засвідчую
Учений секретар
Інституту математики НАН України
Кандидат фіз.-мат. наук Ігор СОКОЛЕНКО