

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна  
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова праця  
на правах рукопису

**Сухоребська Дар'я Дмитрівна**

УДК 514.774.8, 514.132

**Дисертація**

**«Прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у  
просторах постійної кривини»**

Спеціальність 111 «математика»

(Галузь знань 11 «математика та статистика»)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне  
джерело.

\_\_\_\_\_ Сухоребська Д.Д.

Науковий керівник: **Борисенко Олександр Андрійович**, доктор  
фізико-математичних наук, дійсний член (академік) НАН України,  
професор, головний науковий співробітник відділу диференціальних  
рівнянь і геометрії Фізико-технічного інституту низьких температур  
ім. Б. І. Веркіна Національної академії наук України.

Харків – 2023

## Анотація

Сухоребська Д.Д. “Прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у просторах постійної кривини”, - кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «математика» (галузь знань 11 «математика та статистика»). Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України.

Предметом дослідження дисертаційної роботи є прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у тривимірному сферичному просторі та просторі Лобачевського.

Лінія називається геодезичною, якщо вона є локально найкоротшою. Це означає, що для будь-яких близьких точок на цій лінії відрізок геодезичної між ними є найкоротшим серед усіх відрізків на поверхні, що з'єднують ці точки. На опуклому багатограннику геодезична має наступні властивості: 1) геодезична складається з прямолінійних відрізків на гранях багатогранника; 2) геодезична формує рівні кути з ребром на сусідніх гранях; 3) геодезична не проходить через вершину опуклого багатогранника. Геодезична називається простою, якщо вона не має точок самоперетину і не накручуються на себе.

У **Розділі 1** представлено огляд літератури про властивості геодезичних на регулярних поверхнях додатної і від'ємної кривини та на багатогранниках у евкладовому просторі.

Грані тетраедра у евклідовому просторі мають нульову гаусову кривину. Кривина тетраедра сконцентрована лише у його вершинах. Кут грані тетраедра визначений однозначно і дорівнює  $\pi/3$ . Розгортка правильного тетраедра вздовж геодезичної є частиною триангуляції евклідової площини правильними трикутниками. Вершини триангуляції допускають однознач-

чне позначення, узгоджене з позначеннями вершин розгортки тетраедра. З цього факту слідує повна класифікація замкнених геодезичних на правильному тетраедрі у евклідовому просторі [18].

У сферичному просторі та у просторі Лобачевського гаусова кривина граней тетраедра дорівнює 1 або  $-1$  відповідно. У цьому випадку кривина тетраедра визначається не лише його вершинами, але і гранями. У сферичному просторі кут  $\alpha$  грані тетраедра задовольняє умовам  $\pi/3 < \alpha \leq 2\pi/3$ . У просторі Лобачевського кут  $\alpha$  грані задовольняє  $0 < \alpha < \pi/3$ . В обох випадках внутрішня геометрія правильного тетраедра залежить від величини кута грані. Взагалі не існує розбиття сферичної площини або площини Лобачевського правильними трикутниками. Дослідження нашої задачі потребувало методи з ріманової геометрії, топології, синтетичні методи роботи з сингулярностями та оцінки з теорії чисел.

Проста замкнена геодезична має тип  $(p, q)$  на тетраедрі, якщо вона перетинає одну пару протилежних ребер у  $p$  точках кожне, другу пару - у  $q$  точках кожне, і у  $(p + q)$  точках кожне ребро третьої пари протилежних ребер тетраедра. Пара взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$  визначає комбінаторний тип геодезичної, тобто порядок, у якому геодезична перетинає ребра тетраедра, з точністю до ізометрії тетраедра. Відзначимо, що це визначення не залежить від кривини граней тетраедра.

У **Розділі 2** ми розглядали прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у евклідовому просторі. Відомо, що для кожної пари взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$  існує цілий клас простих замкнених геодезичних типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі у евклідовому просторі (з точністю до ізометрії тетраедра). На розгортці тетраедра геодезичні, що належать одному класу, паралельні між собою. Зауважимо, що будь-яка замкнена геодезична на правильному тетраедрі у евклідовому просторі є простою.

Ми показали, що у кожному класі простих замкнених геодезичних існує геодезична, яка проходить через середини двох пар протилежних ребер

тетраедра. Як наслідок, ми показали, що розгортка тетраедра вздовж простої замкненої геодезичної складається з чотирьох рівних багатокутників. Будь-які два сусідні багатокутника переводяться один в одного поворотом на кут  $\pi$  навколо середини спільного ребра.

У **Розділі 3** розглядаються прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у сферичному просторі. Якщо кут  $\alpha$  грані тетраедра дорівнює  $2\pi/3$ , то тетраедр є двомірною сферою радіуса один. У цьому випадку на ньому існує нескінченно багато простих замкнених геодезичних. Вони є великими колами сфери. Надалі ми вважаємо, що кут  $\alpha$  задовольняє умовам  $\pi/3 < \alpha < 2\pi/3$ .

На відміну від евклідового простору, на правильному тетраедрі у сферичному просторі існує скінченна кількість простих замкнених геодезичних. Довжина простої замкненої геодезичної менша  $2\pi$ . У роботі доведено наступні результати.

**Теорема.** *Для будь-якої пари взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$  існують такі числа  $\alpha_1, \alpha_2$ , де  $\pi/3 < \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi/3$ , що*

1) *на правильному тетраедрі у сферичному просторі з кутом грані  $\alpha \in (\pi/3, \alpha_1)$  існує проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$ . Ця геодезична єдина, з точністю до ізометрії тетраедра, і вона проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра.*

2) *на правильному тетраедрі у сферичному просторі з кутом грані  $\alpha \in (\alpha_2, 2\pi/3)$  не існує простої замкненої геодезичної типу  $(p, q)$ .*

У роботі Борисенка [5] було знайдено необхідну і достатню умову існування простої замкненої геодезичної на правильному тетраедрі у сферичному просторі, у термінах довжини абстрактної найкоротшої лінії розгортки (згідно з визначенням, поданим у статті).

У **Розділі 4** представлена повна класифікація простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського. Нагадаємо, що у цьому випадку кут  $\alpha$  грані тетраедра задовольняє умовам  $0 < \alpha < \pi/3$ . У роботі доведено наступні результати.

**Теорема.** 1) Нехай  $(p, q)$ ,  $0 \leq p < q$ , – пара взаємно простих натуральних чисел. Тоді на правильному тетраедрі з кутом грані  $\alpha \in (0, \pi/3)$  у просторі Лобачевського існує проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$ . Ця геодезична єдина, з точністю до ізометрії тетраедра, і вона проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра.

2) Геодезичними типу  $(p, q)$  вичерпуються усі прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського.

3) Асимптотичний ріст числа простих замкнених геодезичних довжини не більше  $L$  на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського дорівнює  $c(\alpha)L^2$ , де  $L \rightarrow \infty$ .

У Розділі 5 вивчається ізометричне занурення підмноговидів малої ковимірності з індукованою метрикою обертання у простір Лобачевського. Розглядаються три природні випадки, а саме, коли зовнішня секційна кривина індукованої метрики 1) від’ємна, 2) нульова, 3) додатна. Отримані результати є узагальненням теорем, доведених у роботі Борисенка [9], стосовно підмноговидів з індукованою метрикою обертання у евклідовому просторі.

**Теорема.** Нехай  $F^l$  є підмноговидом простору Лобачевського  $H^{l+p}$ , і нехай на  $F^l$  індукована метрика обертання

$$ds^2 = (du^1)^2 + \varphi^2(u^1)d\sigma^2,$$

де  $d\sigma^2$  – ріманова метрика постійної секційної кривини.

1) Припустимо  $F^l$  має від’ємну зовнішню секційну кривину та  $p = l - 1$ . Якщо геодезичні координатні лінії  $u^1$  індукованої метрики обертання  $F^l$  є лініями кривини, то підмноговид  $F^l$  є підмноговидом обертання.

2) Припустимо  $F^l$  має нульову зовнішню секційну кривину та  $p = 1$ . Якщо геодезичні координатні лінії  $u^1$  індукованої метрики обертання  $F^l$  є лініями кривини, то підмноговид  $F^l$  є циліндром, конусом або асимптотичним конусом (в залежності від кривини метрики  $d\sigma^2$ ) з одомірною твірною.

3) Припустимо  $F^l$  має нульову зовнішню секційну кривину та  $p = 1$ .

*Якщо  $l > 2$ , тоді  $F^l$  є гіперповерхнею обертання. Якщо  $l = 2$  та геодезичні координатні лінії  $u^1$  є лініями кривини, то гіперповерхня  $F^2$  є поверхнею обертання у просторі Лобачевського  $H^3$ .*

Доведення проводиться у моделі просторі Лобачевського як у підмноговиді псевдоевклідового простору з індукованою метрикою постійної від'ємної кривини.

**Ключові слова:** прості замкнені геодезичні, правильний тетраедр, сферичний простір, простір Лобачевського, підмноговид обертання.

### Список публікацій здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. Borisenko A.A., Sukhorebska D.D.: A classification of simple closed geodesics on regular tetrahedra in the Lobachevsky space. Reports of the National Academy of Sciences Ukraine. 4, 3-9 (2019).  
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.04.003>
2. Sukhorebska D.: Necessary condition for the existence of a simple closed geodesic on a regular tetrahedron in the spherical space. Reports of the National Academy of Sciences Ukraine, 10, 9-14 (2020).  
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.009>
3. Sukhorebska D.: Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature. J. Math. Phys. Anal. Geom., 18(4), 562-610 (2022).  
<https://doi.org/10.15407/mag18.04.562>
4. Sukhorebska D.: Multidimensional Submanifolds with Metric of Revolution in Hyperbolic Space. J. Math. Phys. Anal. Geom., 18(2), 269-285 (2022).  
<https://doi.org/10.15407/mag18.02.269>

Тези доповідей на конференціях, які засвідчують апробацію результатів дисертації

5. Sukhorebska D., Borisenko A., “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in Lobachevsky space”, Lake Como School of Advanced Studies “Geometric Analysis on Riemannian and Singular Metric Measure Spaces (3rd edition)”, Como, Italy (July 1-5, 2019).
6. Sukhorebska D., Borisenko A., “Geodesics on regular tetrahedra in spherical space”, International scientific online conference “Algebraic and geometric methods of analysis”, Odesa, Ukraine (May 26-30, 2020).
7. Sukhorebska D., Borisenko A., “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature”, 8th European Congress of Mathematics (8ECM), Portoroz, Slovenia (June 20-26, 2021).

Доповіді на семінарах та воркшоплах, де були представлені результати дисертації

1. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in Lobachevsky space”, Seminar of the topology laboratory of the Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, the head: Prof. Dr. S. Maksymenko, Kyiv, Ukraine (April 12, 2019).
2. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spherical space”, Kharkiv State Geometric Seminar, the head: Prof. Dr. A. Borisenko, Kharkiv, Ukraine (February, 10 and 17, 2020).
3. “The structure of multidimensional submanifolds with induced metric of revolution in hyperbolic space” (poster presentation), Workshop on Curvature and Global Shape, Münster, Germany (August 1-7, 2021).
4. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in hyperbolic and spherical space” (poster presentation), Workshop «The Young Geometers Meeting

on Geometric Analysis and Differential Geometry», Copenhagen, Denmark  
(April 19-23, 2021).

5. "Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature",  
Oberseminar of Differential geometry group at Mathematical Institute in  
WWU Münster, the head: Prof. Dr. B. Wilking, Münster, Germany  
(April 4, 2022).
6. "Results on simple closed geodesics on regular tetrahedra in spherical and  
hyperbolic spaces Oberseminar of Geometry group at Institut für Algebra  
und Geometrie in Karlsruher Institut für Technologie, the head:  
Prof. Dr. A. Lytchak, Karlsruher, Germany (December 1, 2022).



# Abstract

D. Sukhorebska, “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature” – Scholarly manuscript.

PhD Thesis in Mathematics (speciality code: 111). B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine.

In the Thesis all simple closed geodesics on a regular tetrahedron in three-dimensional spherical or hyperbolic spaces are described.

A geodesic is a locally shortest curve. On a convex polyhedron a geodesic has following properties: 1) it consists of line segments on faces of the polyhedron; 2) it forms equal angles with an edge on the adjacent faces; 3) the geodesic cannot pass through a vertex of the convex polyhedron. A geodesic is called simple if it has no points of self intersection and doesn't go along itself.

In **Chapter 1** we presented an overview of the literature about properties of closed geodesics on regular closed surfaces of positive or negative curvature and on polyhedra in Euclidean space.

In Euclidean space the faces of a tetrahedron have zero Gaussian curvature, and the curvature of the tetrahedron is concentrated only on its vertices. The classification of closed geodesics on a regular tetrahedron in Euclidean space follows from a fact that a development of the tetrahedron along the geodesic is contained in a standard triangular tiling of Euclidean plane. Vertices of the tiling can be labelled in such way that for any development the labelling of the vertices of the tetrahedron matches the labelling of the vertices of the tiling [18].

In spherical or hyperbolic space the Gaussian curvature of faces of a tetrahedron is 1 or  $-1$  respectively. The curvature of a tetrahedron is determined not only by its vertices, but also by its faces. In spherical space the planar angle  $\alpha$  of a face of a regular tetrahedron satisfies the conditions  $\pi/3 < \alpha \leq 2\pi/3$ . In hyperbolic space the planar angle  $\alpha$  satisfies the inequalities  $0 < \alpha < \pi/3$ . In

both cases the intrinsic geometry of the tetrahedron depends on the value of the planar angle. In general there is no tiling of hyperbolic or spherical plane by regular triangles. For solving our problem it was necessary to use methods from Riemannian geometry, topology, synthetic singular methods and evaluations from the number theory.

A simple closed geodesic  $\gamma$  on a tetrahedron has *type*  $(p, q)$  if  $\gamma$  has  $p$  points on each of two opposite edges of the tetrahedron,  $q$  points on each of other two opposite edges, and  $(p + q)$  points on each edge of the third pair of opposite edges. The pair of coprime integers  $(p, q)$  determines the combinatorial type of the geodesic, and hence the order of intersections of the geodesic with edges of the tetrahedron, up to isometries of the tetrahedron. Note, that this definition doesn't depend on the curvature of the ambient space of the tetrahedron.

In **Chapter 2** we consider simple closed geodesics on a regular tetrahedron in Euclidean space. It was known that for each ordered pair of coprime integers  $(p, q)$  there exists a class of simple closed geodesics of type  $(p, q)$  on a regular tetrahedron in Euclidean space (up to isometries of the tetrahedron). Geodesics from one class are parallel to each other on a development of the tetrahedron. Note, that any closed geodesic is simple on a regular tetrahedron in Euclidean space [18].

We proved that in each class of simple closed geodesics of type  $(p, q)$  there is one that passes through the midpoints of two pairs of opposite edges of the tetrahedron. As a consequence, we showed that the development of the tetrahedron obtained by unrolling along a closed geodesic consists of four equal polygons. Any two adjacent polygons are mapped to each other by rotating through an angle  $\pi$  around the midpoint of their common edge.

In **Chapter 3** we consider simple closed geodesics on regular tetrahedra in spherical space. If the planar angle  $\alpha$  of the regular tetrahedron equals  $2\pi/3$ , then the tetrahedron is the two-dimensional unit sphere. Hence there are infinitely many simple closed geodesics on it and they are great circles of the sphere. Thus we assume  $\alpha$  satisfies the inequalities  $\pi/3 < \alpha < 2\pi/3$ .

We showed that, unlike to Euclidean space, on a regular tetrahedron in spherical space there exist a finite number of simple closed geodesics. The length of a simple closed geodesic is less than  $2\pi$ . The following result was proved.

**Theorem.** *For any coprime integers  $(p, q)$ ,  $0 \leq p < q$  there exist numbers  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$ , satisfying the inequalities  $\pi/3 < \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi/3$ , such that*

- (i) *if  $\pi/3 < \alpha < \alpha_1$ , then on a regular tetrahedron in spherical space with the planar angle  $\alpha$  there exists a simple closed geodesic  $\gamma$  of type  $(p, q)$ . The geodesic  $\gamma$  is unique, up to the rigid motion of the tetrahedron, and  $\gamma$  passes through the midpoints of two pairs of opposite edges of the tetrahedron.*
- (ii) *if  $\alpha_2 < \alpha < 2\pi/3$ , then on a regular tetrahedron with the planar angle  $\alpha$  there is no simple closed geodesic of type  $(p, q)$ .*

In [5] Borisenko proved a necessary and sufficient condition for the existence of a simple closed geodesic on a regular tetrahedron in spherical space in terms of the length of an abstract shortest curve in the development (according to the definitions from this article).

In **Chapter 4** we present the full classification of simple closed geodesics on a regular tetrahedron in hyperbolic space. Recall that the planar angle  $\alpha$  of a regular tetrahedron in hyperbolic space satisfies  $0 < \alpha < \pi/3$ . We proved following results

- Theorem.** 1) *Let  $(p, q)$  be a pair of coprime integers, and  $0 \leq p < q$ . Then on a regular tetrahedron with the planar angle  $\alpha \in (0, \pi/3)$  in hyperbolic space there exists a simple closed geodesic  $\gamma$  of type  $(p, q)$ . This geodesic  $\gamma$  is unique, up to the rigid motion of the tetrahedron, and  $\gamma$  passes through the midpoints of two pairs of opposite edges of the tetrahedron.*
- 2) *Geodesics of type  $(p, q)$  exhaust all simple closed geodesics on a regular tetrahedron in hyperbolic space.*
- 3) *The asymptotic growth of the number of simple closed geodesics of length at most  $L$  on a regular tetrahedron in hyperbolic space is equal to  $c(\alpha)L^2$ , when  $L \rightarrow \infty$ , and  $c(\alpha) > 0$  for all  $\alpha \in (0, \pi/3)$ .*

In **Chapter 5** we consider an isometric immersion of a submanifold of low codimension with an induced metric of revolution in hyperbolic space. We consider the following three natural cases, when the extrinsic sectional curvature of the induced metric is 1) negative; 2) zero; 3) positive. The obtained results are the generalization of the theorems proved by Borisenko [9] for the submanifolds with induced metric of revolution in Euclidean space.

**Theorem.** *Let  $F^l$  be a submanifold of hyperbolic space  $H^{l+p}$  with induced metric of revolution*

$$ds^2 = (du^1)^2 + \varphi^2(u^1)d\sigma^2,$$

*where  $d\sigma^2$  is a Riemannian metric of constant sectional curvature.*

- 1) *Suppose  $F^l$  has negative extrinsic sectional curvature and  $p = l - 1$ . If geodesic coordinate lines  $u^1$  of the induced metric are lines of curvature of  $F^l$ , then the submanifold  $F^l$  is a submanifold of revolution in  $H^{2l-1}$ .*
- 2) *Suppose  $F^l$  has zero extrinsic sectional curvature and  $p = 1$ . If the geodesic coordinate lines  $u^1$  of the induced metric are the lines of curvature of  $F^l$ , then the submanifold  $F^l$  is either a cylinder, or a cone, or an asymptotic cone (depending on the curvature of  $d\sigma^2$ ) with one-dimensional generator.*
- 3) *Suppose  $F^l$  has positive extrinsic sectional curvature and  $p = 1$ . If  $l > 2$ , then  $F^l$  is a hypersurface of revolution. If  $l = 2$  and the coordinate lines  $u^1$  are lines of curvature, then  $F^2$  is a hypersurface of revolution in  $H^3$ .*

The proof is carried out in the model of hyperbolic space as in a submanifold of the pseudoeuclidean space. The condition  $p = l - 1$  in the first case is natural, since there is no submanifold of codimension  $< l - 1$  with a metric of negative extrinsic sectional curvature. To prove the third case we use the Pogorelov's transformation of hyperbolic space into Euclidean.

**Keywords:** simple closed geodesics, regular tetrahedron, spherical space, hyperbolic space, submanifolds of revolution.

## **Publications of the candidate related to the Thesis topic**

### Journal papers in which the main results of the Thesis are published

1. Borisenko A.A., Sukhorebska D.D.: A classification of simple closed geodesics on regular tetrahedra in the Lobachevsky space. Reports of the National Academy of Sciences Ukraine. 4, 3-9 (2019).  
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.04.003>
2. Sukhorebska D.: Necessary condition for the existence of a simple closed geodesic on a regular tetrahedron in the spherical space. Reports of the National Academy of Sciences Ukraine, 10, 9-14 (2020).  
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.009>
3. Sukhorebska D.: Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature. J. Math. Phys. Anal. Geom., 18(4), 562-610 (2022).  
<https://doi.org/10.15407/mag18.04.562>
4. Sukhorebska D.: Multidimensional Submanifolds with Metric of Revolution in Hyperbolic Space. J. Math. Phys. Anal. Geom., 18(2), 269-285 (2022).  
<https://doi.org/10.15407/mag18.02.269>

### Thesis of the talks on the conferences where the main results of the Thesis were approbate

5. Sukhorebska D., Borisenko A., “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in Lobachevsky space”, Lake Como School of Advanced Studies “Geometric Analysis on Riemannian and Singular Metric Measure Spaces (3rd edition)”, Como, Italy (July 1-5, 2019).
6. Sukhorebska D., Borisenko A., “Geodesics on regular tetrahedra in spherical space”, International scientific online conference “Algebraic and geometric methods of analysis”, Odesa, Ukraine (May 26-30, 2020).
7. Sukhorebska D., Borisenko A., “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature”, 8th European Congress of Mathematics (8ECM), Portoroz, Slovenia (June 20-26, 2021).

Talks on the seminars and workshops where the main results of  
the Thesis were presented

1. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in Lobachevsky space”, Seminar of the topology laboratory of the Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, the head: Prof. Dr. S. Maksymenko, Kyiv, Ukraine (April 12, 2019).
2. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spherical space”, Kharkiv State Geometric Seminar, the head: Prof. Dr. A. Borisenko, Kharkiv, Ukraine (February, 10 and 17, 2020).
3. “The structure of multidimensional submanifolds with induced metric of revolution in hyperbolic space” (poster presentation), Workshop on Curvature and Global Shape, Münster, Germany (August 1-7, 2021).
4. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in hyperbolic and spherical space” (poster presentation), Workshop «The Young Geometers Meeting on Geometric Analysis and Differential Geometry», Copenhagen, Denmark (April 19-23, 2021).
5. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature”, Oberseminar of Differential geometry group at Mathematical Institute in WWU Münster, the head: Prof. Dr. B. Wilking, Münster, Germany (April 4, 2022).
6. "Results on simple closed geodesics on regular tetrahedra in spherical and hyperbolic spaces Oberseminar of Geometry group at Institut für Algebra und Geometrie in Karlsruher Institut für Technologie, the head: Prof. Dr. A. Lytchak, Karlsruher, Germany (December 1, 2022).

# Зміст

<b>Вступ</b>	<b>16</b>
<b>1 Геодезичні на замкнених ріманових многовидах (огляд літератури)</b>	<b>27</b>
1.1 Геодезичні на регулярних замкнених ріманових многовидах	27
1.2 Геодезичні на нерегулярних замкнених поверхнях . . . . .	28
1.3 Висновки до Розділу 1 . . . . .	31
<b>2 Замкнені геодезичні на правильному тетраедрі в евклідовому просторі</b>	<b>32</b>
2.1 Повна класифікація простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі . . . . .	32
2.2 Симетрія розгортки правильного тетраедра вздовж простої замкненої геодезичної . . . . .	36
2.3 Висновки до Розділу 2 . . . . .	40
<b>3 Прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у сферичному просторі</b>	<b>41</b>
3.1 Визначення і приклади . . . . .	41
3.2 Властивості простої замкненої геодезичної на правильному тетраедрі . . . . .	45
3.3 Оцінка на кут $\alpha$ , за якого не існує простої замкненої геодезичної типу $(p, q)$ . . . . .	50

3.4	Оцінка на кут $\alpha$ , за якого існує проста замкнена геодезична типу $(p, q)$ . . . . .	52
3.5	Висновки до Розділу 3 . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у просторі Лобачевського</b>	<b>69</b>
4.1	Необхідні умови простоти замкненої геодезичної . . . . .	69
4.2	Єдиність простої замкненої геодезичної на правильному тетраедрі . . . . .	74
4.3	Існування простої замкненої геодезичної на правильному тетраедрі . . . . .	76
4.4	Асимптотика числа простих замкнених геодезичних . . . . .	79
4.5	Висновки до Розділу 4 . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Підмноговиди з індукованою метрикою обертання у просторі Лобачевського</b>	<b>85</b>
5.1	Основні визначення . . . . .	85
5.2	Підмноговиди від'ємної зовнішньої кривини . . . . .	87
5.3	Підмноговид нульової зовнішньої кривини . . . . .	94
5.4	Підмноговиди додатної зовнішньої кривини . . . . .	102
5.5	Висновки до Розділу 5 . . . . .	104
	<b>Загальні висновки</b>	<b>107</b>
	<b>Список використаних джерел</b>	<b>110</b>



# Вступ

## Обґрунтування вибору теми дослідження.

Замкнені геодезичні на однозв'язних гладких двовимірних поверхнях виникають як інтегрований граничний випадок плоскої обмеженої задачі трьох тіл. У зв'язку з цим Пуанкаре у 1905 році висунув гіпотезу про існування як мінімум трьох простих замкнених геодезичних на гладкій замкненій опуклій двовимірній поверхні у евклідовому просторі. Ця гіпотеза була доведена Люстерніком і Шнарельманом у 1929 році [29]. З того часу були розроблені методи пошуку замкнених геодезичних на регулярних поверхнях додатної або від'ємної кривини.

На замкненому двовимірному рімановому многовиді від'ємної кривини існує нескінченно багато замкнених геодезичних. Тому цікаво оцінити кількість замкнених геодезичних в залежності від їх довжини на компактному многовиді від'ємної кривини. Хубер [24], [25] показав, що на повному замкненому двовимірному рімановому многовиді  $M^2$  постійної від'ємної кривини число замкнених геодезичних довжини не більше  $L$  має порядок росту  $e^L/L$ , коли  $L$  прямує на нескінченність. Рівін [39] та Мірзахані [32] довели, що на многовиді  $M^2$  роду  $g$  з  $n$  каспами число простих замкнених геодезичних довжини не більше  $L$  має поліноміальний порядок росту  $L^{6g-6+2n}$ , коли  $L$  прямує на нескінченність.

Теореми о геодезичних на опуклих двовимірних поверхнях грають важливу роль у геометрії “в цілому” цих поверхонь у просторах постійної кривини. Важливі результати у цій темі були отримані Кон-Фоссеном [13], Александровим [2], Погорєловим [34]. В одній з найперших робіт [35] Погорєлов довів, що на замкненій опуклій поверхні гауссової кривини  $\leq k$ ,

де  $k > 0$ , геодезична довжини  $< \pi/\sqrt{k}$  реалізує найкоротшу відстань між її кінцями. Топоногов [44] довів, що на  $C^2$ -регулярній замкненій поверхні кривини  $\geq k > 0$  довжина простої замкненої геодезичної не більше  $2\pi/\sqrt{k}$ . Борисенко [10] узагальнив цей результат Топоногова на випадок простих замкнених геодезичних у двовимірних просторах Александрова.

Вивчалися також геодезичні на нерегулярних поверхнях, у тому числі на опуклих багатогранниках в евклідовому просторі. На відміну від регулярного випадку, існують нерегулярні поверхні, які не мають простих замкнених геодезичних. Необхідна умова існування простої замкненої геодезичної на опуклому багатограннику в евклідовому просторі впливає з узагальненої теореми Гаусса-Бонне. Ця умова не виконується для більшості опуклих багатогранників, але виконується на регулярних багатогранників.

Д.Фукс та Е.Фукс доповнили та систематизували результати про замкнені геодезичні на регулярних багатогранниках у евклідовому просторі (див. [18] і [19]). Протасов [38] знайшов умову існування простих замкнених геодезичних на довільному багатограннику у евклідовому просторі.

У евклідовому просторі грані тетраедра мають нульову гауссову кривину, і кривина тетраедра сконцентрована тільки у його вершинах. Розгортка правильного тетраедра вздовж геодезичної є частиною стандартної триангуляції евклідової площини. З цього факту слідує класифікація замкнених геодезичних на регулярних тетраедрах у евклідовому просторі.

У просторі Лобачевського або у сферичному просторі гауссова кривина граней дорівнює  $k = -1$  або  $1$  відповідно. Кривина тетраедра визначається не тільки його вершинами, але і гранями. У сферичному просторі кут грані  $\alpha$  правильного тетраедра задовольняє умовам  $\pi/3 < \alpha \leq 2\pi/3$ . У просторі Лобачевського кут грані  $\alpha$  задовольняє  $0 < \alpha < \pi/3$ . В обох випадках внутрішня геометрія тетраедра залежить від величини кута грані. Не існує розбиття площини Лобачевського або сферичної площини правильними трикутниками з будь-яким кутом  $\alpha$ . Поведінка замкнених геодезичних

на правильному тетраедрі у тривимірному просторі постійної кривини  $k$  різняться в залежності від знаку  $k$ .

У дисертаційній роботі були розроблені нові методи роботи з нерегулярними поверхнями у поєднанні з теоремами ріманової геометрії, топології та оцінками з теорії чисел.

Властивості простих замкнених геодезичних на правильних тетраедрах слідують з групи симетрії правильного тетраедра. Група симетрій правильного тетраедра є скінченою групою поворотів тривимірної сфери, та не залежить від кривини об'ємлюючого простору. У роботі також розглянуті підмноговиди, група ізометрій яких містить групу поворотів сфери, а саме підмноговиди обертання.

У евклідовому просторі  $E^3$  двовимірна поверхня обертання  $F^2$  постійної гауссової кривини має стандартну систему координат, за якої метрика поверхні  $F^2$  є метрикою обертання. З іншої сторони з того, що індукована метрика на  $F^2 \subset E^3$  є метрикою обертання, ще не слідує, що поверхня  $F^2$  є поверхнею обертання. Існує локальне ізометричне вкладення  $F^2$  у  $E^3$  таке, що геодезична лінія  $u^2 = 0$  є просторовою кривою з ненульовим крученням у кожній точці. Це слідує з теореми Коші-Ковалевської.

Природньо постає питання, коли багатовимірний підмноговид  $F^l$  з індукованою метрикою обертання у просторі постійної кривини  $M^{l+p}$  є підмноговидом обертання. Борисенко [9] вирішив цю задачу у випадку, коли об'ємлюючий простір  $M^{l+p}$  є евклідовим. Підмноговид малої ковимірності у евклідовому просторі з індукованою метрикою обертання є підмноговидом обертання за умови, коли координатні геодезичні лінії є лініями кривини.

У дисертаційній роботі представлено узагальнення результатів Борисенко для многовидів з індукованою метрикою обертання у просторі Лобачевського.

Отримані результати важливі як з теоретичної точки зору, так і з прикладної.

## Мета і завдання дослідження.

Головною метою дослідження є знаходження усіх замкнених геодезичних без точок самоперетину на правильних тетраедрах у тривимірному сферичному просторі та просторі Лобачевського.

У сферичному просторі знайдено: 1) оцінку зверху на кут грані тетраедра, за якої на правильному тетраедрі існує проста замкнена геодезична даного типу та 2) оцінку знизу на кут грані тетраедра, за якої проста замкнена геодезична даного типу не існує на правильному тетраедрі.

У просторі Лобачевського дана повна класифікація простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі. Доведено, що число простих замкнених геодезичних довжини не більше  $L$  на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського має асимптотичний порядок росту  $L^2$ , коли  $L$  прямує на нескінченність.

Другою метою дослідження є розглянути локальне ізометричне вкладення підмноговиду малої ковимірності з індукованою метрикою обертання у простір Лобачевського. Доведено, що підмноговид є підмноговидом обертання, якщо геодезичні координатні лінії індукованої метрики обертання є лініями кривини підмноговиду.

## Методи дослідження.

Головною ідеєю було розглядати комбінаторну структуру простої замкненої геодезичної  $\gamma$  на тетраедрі, що не залежить від кривини об'ємлюючого простору. Послідовність, у якій  $\gamma$  перетинає ребра тетраедра, однозначно визначається парою взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$ ,  $0 \leq p < q$  (Розділ 2).

Було побудовано спеціальне геодезичне відображення тетраедра у сферичному просторі на тетраедр у евклідовому просторі. Таким чином було отримано оцінку знизу на кут грані тетраедра, на якому не існує простої замкненої геодезичної даного типу  $(p, q)$ .

Для того, щоб отримати оцінку зверху на кут грані тетраедра, який містить просту замкнену геодезичну типу  $(p, q)$ , у сферичному просторі, ми

оцінили різницю між розгорткою тетраедра у сферичному та у евклідовому просторі. Для цього було застосовано центральну проекцію двовимірної сфери на евклідовий простір. (Розділ 3).

Для роботи з правильними тетраедрами простору Лобачевського, розглядалася модель Келі-Клейна цього простору. У цій моделі простір Лобачевського є внутрішністю одиничної кулі. Геодезичними лініями простору Лобачевського у такій моделі є хорди кулі. Певні властивості простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського були доведені, використовуючи теореми з ріманової геометрії. Ці властивості відіграли ключову роль у доведенні повної класифікації простих замкнених геодезичних на правильних тетраедрах у просторі Лобачевського.

Для оцінки числа  $N(L, \alpha)$  простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського було проаналізовано структуру розгортки тетраедра вздовж геодезичної. Застосував теорему з теорії чисел про асимптотику зростання функції Ейлера, ми отримали асимптотику числа  $N(L, \alpha)$  (Розділ 4).

Для дослідження підмноговиду  $F^l$  з індукованою метрикою обертання у просторі Лобачевського, ми представили простір Лобачевського у вигляді гіперповерхні у псевдоевклідового простору. Розглядалися окремо наступні три природні випадки: коли підмноговид  $F^l$  має від'ємну, нульову та додатну зовнішню секційну кривину. Використовуючи рівняння Гауса та Вейнгартена, було знайдено явну формулу радіус-вектора  $F^l$ . У випадку додатної зовнішньої секційної кривини було використано перетворення Погорєлова простору Лобачевського на евклідовий простір. (Розділ 5).

### **Наукова новизна отриманих результатів.**

У дисертаційній роботі вперше отримана класифікація простих замкнених геодезичних на правильних тетраедрах у сферичному просторі та у просторі Лобачевського. Отримані наступні результати.

*Розділ 2, Підрозділ 2.2 :* Розгортка тетраедра вздовж простої замкнутої геодезичної складається з чотирьох рівних багатокутників. Будь-які два су-

сідні багатокутники переводяться один в один поворотом на кут  $\pi$  навколо середини спільного ребра.

*Розділ 3 :* На правильному тетраедрі у сферичному просторі існує скінченна кількість простих замкнених геодезичних. Довжина простої замкненої геодезичної менше  $2\pi$ .

Для будь якої пари взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$  було знайдено числа  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$ , що задовольняють нерівності  $\pi/3 < \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi/3$ , і такі, що вірні наступні твердження:

- Якщо  $\pi/3 < \alpha < \alpha_1$ , то на правильному тетраедрі з кутом грані  $\alpha$  у сферичному просторі існує єдина проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$ , з точністю до ізометрії тетраедра. Ця геодезична проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра.
- Якщо  $\alpha_2 < \alpha < 2\pi/3$ , тоді на правильному тетраедрі з кутом грані  $\alpha$  у сферичному просторі не існує простої замкненої геодезичної типу  $(p, q)$ .

*Розділ 4 :* На правильному тетраедрі у просторі Лобачевського для будь якої пари взаємно простих чисел  $(p, q)$ ,  $0 \leq p < q$ , існує єдина проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$ , з точністю до ізометрії тетраедра. Ця геодезична проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра. Геодезичні типу  $(p, q)$  вичерпують усі прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського.

Число простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського має порядок росту  $c(\alpha)L^2$ , коли  $L \rightarrow \infty$ .

*Розділ 5 :* Розглядалося локально ізометричне вкладення підмноговидів малої ковимірності з індукованою метрикою обертання у простір Лобачевського. Були отримані наступні результати:

- Нехай  $F^l$  є регулярним підмноговидом простору Лобачевського  $H^{2l-1}$  з індукованою метрикою обертання від'ємної зовнішньої секційної кри-

вини. Якщо геодезичні координатні лінії метрики є лініями кривини  $F^l$ , тоді підмноговид  $F^l$  є підмноговидом обертанням.

- (ii) Нехай  $F^l$  є регулярною гіперповерхнею у просторі Лобачевського  $H^{l+1}$  з індукованою метрикою обертання нульової зовнішньої секційної кривини. Якщо геодезичні координатні лінії цієї метрики є лініями кривини  $F^l$ , тоді підмноговид  $F^l$  є циліндром, конусом або асимптотичним конусом з однією твірною.
- (iii) Нехай  $F^l$  є регулярною гіперповерхнею у просторі Лобачевського  $H^{l+1}$  з індукованою метрикою обертання додатної зовнішньої секційної кривини. Якщо  $l > 2$ , тоді  $F^l$  є підмноговидом обертання в  $H^3$ . Якщо  $l = 2$  і координатні лінії метрики є лініями кривини  $F^l$ , тоді підмноговид  $F^2$  є підмноговидом обертанням.

### **Особистий внесок здобувача.**

Постановка задач та ідеї доведення Теорем 3.4 та 4.4, розглянуті у дисертації (і, відповідно, у статтях [11], [41], [42], [40]) належать науковому керівникові О.А. Борисенку. Доведення решти результатів були отримані автором самостійно. Результати, які належать іншим науковцям, згадуються за необхідністю для повноти викладу та супроводжуються відповідними посиланнями.

### **Апробація результатів дисертації.**

Отримані у дисертаційній роботі результати доповідалися на **десяти** міжнародних конференціях, семінарах, воркшопх:

1. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in Lobachevsky space”, Seminar of the topology laboratory of the Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, the head: Prof. Dr. S. Maksymenko, Kyiv, Ukraine (April 12, 2019).
2. “Complete classification of simple closed geodesics on regular tetrahedra in Lobachevsky space”, International Conference “Geometry, Differential Equations and Analysis”, Kharkiv, Ukraine (June 17-21, 2019).

3. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in Lobachevsky space”, Lake Como School of Advanced Studies “Geometric Analysis on Riemannian and Singular Metric Measure Spaces (3rd edition)”, Como, Italy (July 1-5, 2019).
4. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spherical space”, Kharkiv State Geometric Seminar, the head: Prof. Dr. A. Borisenko, Kharkiv, Ukraine (February, 10 and 17, 2020).
5. “Geodesics on regular tetrahedra in spherical space”, International scientific online conference “Algebraic and geometric methods of analysis”, Odesa, Ukraine (May 26-30, 2020).
6. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature”, 8th European Congress of Mathematics (8ECM), Portoroz, Slovenia (June 20-26, 2021).
7. “The structure of multidimensional submanifolds with induced metric of revolution in hyperbolic space” (poster presentation), Workshop on Curvature and Global Shape, Münster, Germany (August 1-7, 2021).
8. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in hyperbolic and spherical space” (poster presentation), Workshop «The Young Geometers Meeting on Geometric Analysis and Differential Geometry», Copenhagen, Denmark (April 19-23, 2021).
9. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature”, Oberseminar of Differential geometry group at Mathematical Institute in WWU Münster, the head: Prof. Dr. B. Wilking, Münster, Germany (April 4, 2022).
10. “Results on simple closed geodesics on tetrahedra in spherical and hyperbolic spaces”, Oberseminar of Geometry group at Institute of Algebra and Geometry in Karlsruhe Institute of Technology, the head: Prof. Dr. A. Lytchak, Karlsruhe, Germany (December 1, 2022).



## **Структура та обсяг дисертації.**

Дисертація складається зі змісту, вступу, чотирьох розділів, висновку та списку використаних джерел, який містить 45 найменувань. Обсяг загального тексту дисертації – 111 сторінок. Обсяг основної частини роботи – 97 сторінок.

Розділ 1 присвячено огляду літератури за темою дисертації. У Розділі 2 доповнено та систематизовано результати про прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах в евклідовому просторі. У Розділі 3 вивчаються умови існування та не існування простих замкнених геодезичних на правильних тетраедрах у сферичному просторі. У Розділі 4 представлена повна класифікація простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського та знайдена асимптотика числа таких геодезичних довжини обмеженої зверху. У Розділі 5 розглядається локально ізометричне вкладення підмноговидів малої ковимірності з індукованою метрикою обертання у простір Лобачевського.

## **Практичне значення одержаних результатів.**

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати та запропоновані методи будуть використовуватися у подальших дослідженнях замкнених геодезичних на поверхнях з нерегулярними точками, зокрема на багатогранниках. Багато задач у фізиці, наприклад, ейлерові рухи твердого тіла, опис течії ідеальної рідини, задача трьох тіл, зводяться до вивчення поведінки геодезичних на многовидах. Задачі про геодезичні лінії також відіграють важливу роль у механіці, динамічних системах та варіаційному численні. Правильні багатогранники використовуються у теорії груп та у лінійних диференціальних рівняннях. Підмноговиди обертання грають важливу роль у рімановій геометрії, так як мають велику групу ізометрій.

## **Публікації.**

Основні результати дисертаційної роботи висвітлено у **чотирьох** статтях, дві з яких проіндексовані у міжнародних наукометричних базах Scopus

або Web of Science. Відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, статті [42] та [40], в яких відображено основні результати роботи, опубліковано у виданні, яке, належить до квартилю Q3. Дві статті [11] та [41] опубліковані у науковому виданні, включеному до переліку наукових фахових видань України. Додатково, результати дисертації відображено у трьох тезах конференцій.

## Подяки

Хочу висловити свою щирю вдячність науковому керівникові проф. Борисенку Олександру Андрійовичу за можливість працювати над цією задачею, за постійну підтримку і практичні поради, а також за надання корисних ідей під час навчання і роботи. Його керівництво дало можливість мені поглибити знання з кількох тем в математиці й отримати нові результати.

Також хочу подякувати Горькавому Василю Олексійовичу, Болотову Дмитру Валерійовичу та членам Харківського міського геометричного семінару за надання конструктивних коментарів, які допомогли мені покращити свою роботу.

Щиро вдячна співробітникам відділу диференціальних рівнянь і геометрії ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України за теплу та сприятливу робочу атмосферу.

Хочу подякувати стипендіальній програмі IMU Breakout Graduate Fellowships за фінансову підтримку впродовж мого навчання. Також хочу відмітити Фонд Ахієзера за надання гранду для підтримки молодих математиків, які проживають у Харкові.

Я щиро вдячна Вестфальському Вільгельм-Університету Мюнстера (Німеччина) за надання можливості продовжити дисертаційні дослідження в рамках програми Math for Ukraine Scholarship. Окрему подяку хочу висловити проф. Буркхарду Вілкіну та членам групи диференціальної геометрії Університету Мюнстера за створення продуктивної та дружньої робочої атмосфери.

Безмежна вдячність усім членам моєї родини за безперечну віру в мене та підтримку.

# Розділ 1

## Геодезичні на замкнених ріманових многовидах (огляд літератури)

### 1.1 Геодезичні на регулярних замкнених ріманових мно- говидках

Класична задача трьох тіл є однією з найдавніших та найскладніших задач у фізиці та в математиці. Головна мета цієї задачі полягає у вивченні руху трьох тіл під дією сил взаємного тяжіння. Розв'язки цієї задачі, сформульовані у термінах динамічної системи, мають відношення до геодезичних потоків на ріманових многовидах. Працюючи над періодичним розв'язком плоскої обмеженої задачі трьох тіл, Пуанкаре у 1905 р. сформулював гіпотезу існування щонайменше трьох простих замкнених геодезичних на гладкій замкненій опуклій двовимірній поверхні в евклідовому просторі [37].

У 1929 р. Люстернік і Шнірельман [29], [30] довели гіпотезу Пуанкаре. Проте їхня робота містила декілька прогалин, які пізніше заповнили Балман у 1978 р. [4] та, незалежно, Тайманов у 1992 р. [43]. У 1951-1952 р. Люстернік і Фет [28], [17] довели існування замкненої геодезичної на  $n$ -вимірному регулярному замкненому многовиді.

У 1898 р. Адамар [22] показав, що на замкненому двовимірному рімановому многовиді від'ємної кривини будь-яка замкнена не гомотопна нулю крива може бути продеформована у замкнену криву мінімальної довжини всередині свого вільного гомотопічного класу. Ця мінімальна крива єдина і є замкненою геодезичною. Тому цікавою є задача оцінки числа

замкнених геодезичних, в залежності від їх довжини, на компактному рімановому многовиді від’ємної кривини. Хубер [24], [25] довів, що на повному замкненому рімановому многовиді сталої кривини  $-1$  число замкнених геодезичних довжини не більше  $L$  має порядок росту  $e^L/L$ , коли  $L \rightarrow \infty$ .

У роботі Рівіна [39] і пізніше у роботі Мірзахані [32] показано, що на повній рімановій поверхні постійної від’ємної кривини роду  $g$  з  $n$  каспами число простих замкнених геодезичних довжини не більше  $L$  мають асимптотичний ріст  $L^{6g-6+2n}$ , коли  $L \rightarrow \infty$ .

Теореми, про геодезичні лінії на опуклих двовимірних поверхнях відіграють важливу роль у геометрії “в цілому”. Важливі результати були отримані Кон-Фоссеном [13], Александровим [2], Погореловим [34]. В одній з найперших своїх робіт Погорелов довів, що на замкненій поверхні гауссової кривини  $\leq k$ , де  $k > 0$ , відрізок геодезичної довжини  $< \pi/\sqrt{k}$  є найкоротшим серед відрізків, що з’єднують його кінцеві точки [35]. Топоногов [44] довів, що на  $C^2$  регулярній замкненій поверхні кривини  $\geq k > 0$  довжина простої замкненої геодезичної не більше  $2\pi/\sqrt{k}$ . Борисенко [10] узагальнив цей результат на випадок простих замкнених геодезичних у двовимірному простору Александрова. Вайгант і Матукевич [45] довів, що на регулярній замкненій поверхні кривини  $\geq k > 0$  геодезична довжини  $\geq 3\pi/\sqrt{k}$  має точку самоперетину.

## 1.2 Геодезичні на нерегулярних замкнених поверхнях

Геодезичні вивчалися також на нерегулярних поверхнях, у тому числі на багатогранниках у евклідовому просторі. На опуклому багатограннику геодезична задовольняє наступним властивостям:

- 1) вона складається з прямолінійного відрізка на грані багатогранника;
- 2) вона утворює рівні кути з ребром на сусідніх гранях;
- 3) геодезична не проходить через вершини опуклого багатогранника [2].

На відміну від гладких поверхонь, більшість опуклих поверхонь в евклідовому просторі  $\mathbb{E}^3$  не містить простої замкненої геодезичної.

Галперін [21] представив необхідну умову існування простої замкненої геодезичної на опуклому багатограннику в евклідовому просторі. Ця умова випливає з узагальнення теореми Гауса-Бонне. Кривина опуклого багатогранника в евклідовому просторі сконцентрована у його вершинах. Нехай  $\theta_1, \dots, \theta_n$  - повні кути при вершинах  $A_1, \dots, A_n$  опуклого багатогранника. Кривина вершини  $A_i$  дорівнює  $\omega_i = 2\pi - \theta_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Якщо на опуклому багатограннику існує проста замкнена геодезична, то існує набір  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$  такий, що

$$\sum_{i \in I} \omega_i = 2\pi.$$

Ця умова не виконується для більшості опуклих багатогранників, тим не менш вона виконується для правильних багатогранників.

Д.Фукс і К.Фукс доповнили та систематизували результати про замкнені геодезичні на правильних багатогранниках у тривимірному евклідовому просторі (див. [18] і [19]). Лаусон та інші [27] отримали повну класифікацію простих замкнених геодезичних на восьми опуклих багатогранниках (дельтаедрах), усі грані яких є рівними трикутниками.

Протасов [38] знайшов умову існування простої замкненої геодезичної на довільному тетраедрі в евклідовому просторі та дав оцінку зверху на кількість таких геодезичних в термінах різниці між  $\pi$  та сумою кутів при вершині тетраедра. Зокрема, він довів, що довільний симплекс має нескінченно багато різних простих замкнених геодезичних тоді і тільки тоді, коли усі його грані є рівними трикутниками. Акопян та Петрунін [1] показали, що якщо замкнена опукла поверхня  $M$  в  $\mathbb{E}^3$  має довільно довгу просту замкнену геодезичну, тоді  $M$  є тетраедром, усі грані якого є правильними трикутниками.

У роботі [15] Давіс та інші розглядали геодезичні, які починаються і закінчуються у вершинах, і не проходять через інші вершини, на правильному тетраедрі та на кубі. Наприклад, було доведено, що така геодезична

ніколи не приходить у вершину, з якої вона починається, та знайдена імовірність, з якою геодезична, що бере початок у вершині, прийде в іншу вершину. Фукс [20] узагальнив цей результат на правильний октаедр та ікосаедр (зокрема, на таких поверхнях також не існує геодезичних петель, з вершиною у вершині багатогранника).

О’Рурк та Вілку [33] вивчали прості замкнені квазігеодезичні на тетраедрах в  $\mathbb{E}^3$ . У той час, як геодезична має кут  $\pi$  у будь-якій точці, то квазігеодезична має кут не більше  $\pi$  у кожній точці. У порівнянні з геодезичними, квазігеодезичні можуть проходити через вершини з повним кутом  $< 2\pi$  на поверхні, тобто через вершини опуклого багатогранника [3].

В евклідовому просторі грані тетраедра мають нульову гауссову кривину, та кривина тетраедра зосереджена у його вершинах. У просторі Лобачевського та у сферичному просторі гауссова кривина граней дорівнює  $k = -1$  або  $1$  відповідно. Кривина тетраедра визначається не тільки його вершинами, але і гранями. У просторі Лобачевського кут  $\alpha$  грані правильного тетраедра задовольняє умовам  $0 < \alpha < \pi/3$ . У сферичному просторі кут  $\alpha$  грані задовольняє  $\pi/3 < \alpha \leq 2\pi/3$ . В обох випадках внутрішня геометрія тетраедра залежить від  $\alpha$ .

У евклідовому просторі повна класифікація простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі впливає з того, що розгортка тетраедра є частиною розбиття евклідової площини правильними трикутниками. Більш того, вершини тріангуляції допускають однозначне позначення, узгоджене з вершинами тетраедра. Будь-яка розгортка тетраедра є частиною цієї тріангуляції. Це виконується тільки для правильних тетраедрів і тільки в евклідовому просторі.

У роботі [5] Борисенко довів, що якщо кути граней довільного тетраедра у просторі Лобачевського не більше  $\pi/4$ , то на такому тетраедрі існує нескінченно багато простих замкнених геодезичних. Ця ситуація відрізняється від евклідового випадку, де довільний тетраедр не має простої замкненої геодезичної [21].

### 1.3 Висновки до Розділу 1

Наведений огляд літератури демонструє неабиякий інтерес науковців, що працюють у різних областях математики та фізики, до поведінки замкнених геодезичних ліній на регулярних та нерегулярних поверхнях. Важливо прослідкувати відмінності, що виникають при переході від регулярної поверхні до нерегулярної та від додатної кривини до від'ємної. Це підтверджує актуальність обраної тематики дисертації.



## Розділ 2

# Замкнені геодезичні на правильному тетраедрі в евклідовому просторі

### 2.1 Повна класифікація простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі

*Результати, представлені у підрозділі 2.1 не нові (див. [14], [18], [38]).*

*Вони використовуються у доведенні власних результатів автора.*

*Результати підрозділу 2.2 доведені автором і опубліковані у [42].*

Розглянемо правильний тетраедр  $A_1A_2A_3A_4$  з ребром довжини 1 в евклідовому просторі.

**Визначення 2.1.** *Проста замкнена геодезична має тип  $(p, q)$  якщо вона має по  $p$  вершин на одній парі протилежних ребер тетраедра, по  $q$  вершин на другій парі протилежних ребер тетраедра, і по  $(p + q)$  вершин на третій парі протилежних ребер тетраедра.*

Якщо  $p = 0$  і  $q = 1$ , то геодезична типу  $(0, 1)$  складається з чотирьох відрізків, які послідовно перетинають чотири ребра тетраедра. Така геодезична не проходить через одну пару протилежних ребер тетраедра. Надалі будемо вважати, що  $0 \leq p < q$ .

Зафіксуємо точку  $X$  геодезичної на ребрі  $A_1A_2$  тетраедра та будемо рухати тетраедр так, щоб геодезична завжди торкалася площини. Слід на площині, який залишають грані тетраедра при такому русі, називається

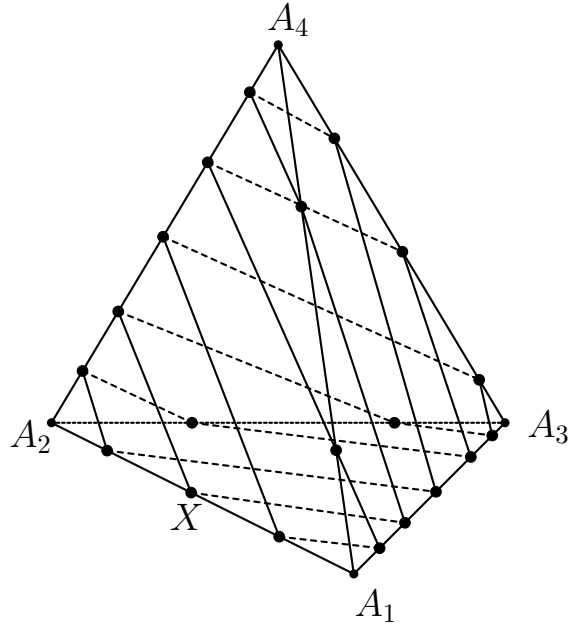


Рис. 2.1

**розгорткою** тетраедра вздовж геодезичної. Геодезична переходить у прямолінійний відрізок всередині розгортки.

Розгортка правильного тетраедра в  $\mathbb{E}^3$  є частиною стандартної триангуляції евклідової площини. Позначимо вершини триангуляції у відповідності до вершин тетраедра (див. Рис. 2.2). Розглянемо прямокутну декартову систему координат з центром  $A_1$  та вісю  $x$  вздовж ребра  $A_1A_2$ , що містить  $X$ . Тоді вершини  $A_1$  і  $A_2$  мають координати  $(l, k\sqrt{3})$ , та  $A_3$  і  $A_4$  мають координати  $(l + 1/2, (2k + 1)\sqrt{3}/2)$ , де  $k, l$  - цілі числа.

Розглянемо два ребра  $A_1A_2$  триангуляції, які мають однакову орієнтацію і не лежать на одній прямій. Зафіксуємо точки  $X(\mu, 0)$  та  $X'(\mu + q + 2p, q\sqrt{3})$  на них. Параметр  $\mu \in (0, 1)$  такий, що відрізок  $XX'$  не проходить через вершини триангуляції. Відрізок  $XX'$  є простою замкненою геодезичною  $\gamma$  на правильному тетраедрі в евклідовому просторі. Якщо числа  $(p, q)$  взаємно прості, тоді  $\gamma$  не накручується на себе. На тетраедрі  $\gamma$  має по  $p$  вершин на одній парі протилежних ребер тетраедра, по  $q$  вершин на другій парі протилежних ребер тетраедра, і по  $(p + q)$  вершин на третій парі протилежних

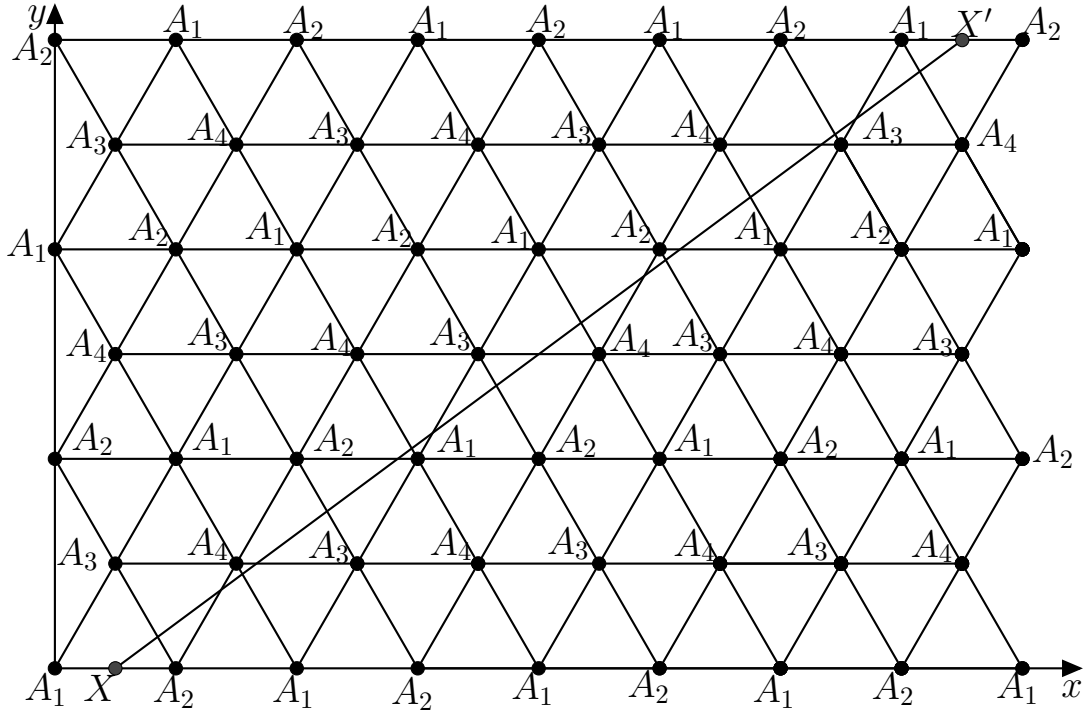


Рис. 2.2

ребер тетраедра, а отже  $\gamma$  має тип  $(p, q)$ .

Відрізки геодезичної, що лежать на одній грані тетраедра, паралельні один одному. Із цього слідує, що *будь-яка замкнена геодезична на правильному тетраедрі в евклідовому просторі не має точок самоперетину, тобто є простою*.

Розглянемо відрізки паралельні  $XX'$ . Вони характеризуються рівнянням

$$y = \frac{q\sqrt{3}}{q + 2p}(x - \mu).$$

Ми можемо змінювати параметр  $\mu$  поки ця лінія не проходить через вершини триангуляції. Отже, для кожної пари чисел  $(p, q)$  існують  $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1)$  такі, що для всіх  $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$  відрізок, що з'єднує точки  $X(\mu, 0)$  та  $X'(\mu + q + 2p, q\sqrt{3})$  є простою замкненою геодезичною типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі.

Таким чином, вірно наступне.

**Твердження 2.1.** [14], [18] *На правильному тетраедрі в Евклідовому просторі для кожної впорядкованої пари взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$  існує клас простих замкнених геодезичних типу  $(p, q)$ , з точністю до ізометрії тетраедра. На розгортці тетраедра геодезичні з одного класу паралельні між собою.*

Довжина простої замкненої геодезичної типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі дорівнює

$$L = 2\sqrt{p^2 + pq + q^2}. \quad (2.1)$$

Таким чином, правильний тетраедр містить прості замкнені геодезичні як завгодно великої довжини.

Пара взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$  визначає комбінаторну структуру простої замкненої геодезичної, тобто її порядок перетину з ребрами тетраедра.

У роботі [38] було запропоновано узагальнення простих замкнених геодезичних на багатогранниках. Ламаною на тетраедрі називається крива, що складається з відрізків, які послідовно з'єднують точки на ребрах цього тетраедра. **Абстрактною геодезичною** на тетраедрі є замкнена ломана, що задовольняє наступним властивостям:

- 1) вона не має точок самоперетину і сусідні відрізки лежать на різних гранях;
- 2) вона перетинає більше трьох ребер тетраедра і не проходить через його вершини.

Для будь-яких двох тетраедрів існує взаємно-однозначна відповідність між їхніми вершинами. Позначимо відповідні вершини тетраедрів однаково. Дві замкнені геодезичні на цих тетраедрах називаються *еквівалентними*, якщо вони перетинають однаково позначені ребра в однаковому порядку.

**Твердження 2.2.** [38] *Для кожної абстрактної геодезичної  $\tilde{\gamma}$  на тетраедрі в евклідовому просторі існує еквівалентна їй проста замкнена геодезична  $\gamma$  на правильному тетраедрі в евклідовому просторі.*

Вершина геодезичної  $\gamma$  називається *вузлом зачеплення*, якщо вона та дві сусідні до неї вершини  $\gamma$  лежать на ребрах, що виходять з однієї вершини  $A_i$  тетраедра, і ці три вершини  $\gamma$  є найближчими до  $A_i$  вершинами геодезичної.

**Твердження 2.3.** [38] *Нехай  $\gamma_1^1$  та  $\gamma_1^2$  є відрізками простої замкненої геодезичної  $\gamma$ , які виходять із вузла зачеплення на правильному тетраедрі. Нехай  $\gamma_2^1$  та  $\gamma_2^2$  є наступними за ними і т.д. Для кожного  $i = 2, \dots, 2p + 2q - 1$  відрізки  $\gamma_i^1$  та  $\gamma_i^2$  лежать на одній грані тетраедра, і між ними немає інших точок геодезичної. Відрізки  $\gamma_{2p+2q}^1$  та  $\gamma_{2p+2q}^2$  зходяться у другий вузол зачеплення геодезичної.*

## 2.2 Симетрія розгортки правильного тетраедра вздовж простої замкненої геодезичної

**Теорема 2.1.** *На правильному тетраедрі в евклідовому просторі кожен клас простих замкнених геодезичних типу  $(p, q)$  містить просту замкнену геодезичну, що проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра.*

*Доведення.* На розгортці тетраедра геодезична типу  $(p, q)$  є відрізком прямої

$$y = \frac{q\sqrt{3}}{q + 2p}(x - \mu),$$

між точками  $X(\mu, 0)$  та  $X'(\mu + q + 2p, q\sqrt{3})$ .

Для кожної пари  $(p, q)$  існують такі  $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1)$ , що лінії

$$\gamma_i : y = \frac{q\sqrt{3}}{q + 2p}(x - \mu_i), i = 1, 2 \quad (2.2)$$

проходять через вершини  $P_i$ , тріангуляції відповідно.

Розглянемо замкнену геодезичну  $\gamma_0$ , що належить прямій

$$\gamma_0 : y = \frac{q\sqrt{3}}{q+2p} \left( x - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \right).$$

Покажемо, що  $\gamma_0$  проходить через середину ребра. Нехай точки  $P_1$  і  $P_2$  є відповідно вершинами  $A_1$  і  $A_2$  триангуляції. Тоді вони мають координати  $P_1(l_1, k_1\sqrt{3})$  і  $P_2(l_2, k_2\sqrt{3})$ , де  $k_1, k_2, l_1, l_2$  - цілі числа. Геодезична  $\gamma_0$  проходить через точку  $P_0((l_1 + l_2)/2, \sqrt{3}(k_1 + k_2)/2)$ . Оскільки  $P_0$  не є вершиною триангуляції, то  $P_0$  є серединою ребра  $A_1A_2$  або  $A_3A_4$ .

Випадки, коли  $P_1$  та  $P_2$  збігаються з іншими вершинами триангуляції, доводяться аналогічно.

Тепер доведемо, що якщо геодезична проходить через середину одного ребра, то вона проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра.

Припустимо, що проста замкнена геодезична  $\gamma_0$  проходить через середину ребра  $A_1A_2$ . На розгортці тетраедра геодезична  $\gamma_0$  є відрізком прямої

$$y = \frac{q\sqrt{3}}{q+2p} \left( x - \frac{1}{2} \right) \quad (2.3)$$

між точками  $X_1(1/2, 0)$  та  $X'_1(q+2p+1/2, q\sqrt{3})$ .

Підставимо координати вершин  $A_3$  і  $A_4$  у рівняння (2.3):

$$q(2l - 2k - 1) = 2p(2k + 1). \quad (2.4)$$

Якщо  $q$  - парне число, то існують  $k$  і  $l$ , які задовольняють рівнянню (2.4). Із цього випливає, що  $\gamma_0$  проходить через вершину триангуляції. Із цього протиріччя ми отримуємо, що  $q$  є непарним числом.

Розглянемо точку  $X_2(q/2 + p + 1/2, q\sqrt{3}/2)$ , що є серединою відрізка  $X_1X'_1$ . Оскільки  $q$  непарне, представимо  $q = 2q_1 + 1$ . Тоді координати точки  $X_2$  дорівнюють  $(q_1 + p + 1, (q_1 + 1/2)\sqrt{3})$ . Вираз другої координати  $X_2$  передбачає, що  $X_2$  належить прямій з вершинами  $A_3$  і  $A_4$ . Оскільки перша координата  $X_2$  є цілим числом, то  $X_2$  є серединою ребра  $A_3A_4$ .

Нехай  $Y_1$  є серединою відрізка  $X_1X_2$ . Тоді вона має наступні координати:

$$Y_1 \left( \frac{q_1 + p}{2} + \frac{3}{4}, \frac{(2q_1 + 1)\sqrt{3}}{4} \right).$$

Легко помітити, що  $Y_1$  є центром одного з ребер  $A_1A_3$ , або  $A_3A_2$ , або  $A_2A_4$ , або  $A_4A_1$ .

Аналогічно можна довести, що середина  $Y_2$  відрізка  $X_2X'_1$  є серединою ребра триангуляції. На тетраедрі ребра, що містять точки  $Y_1$  та  $Y_2$  відповідно, не мають спільної вершини.  $\square$

**Наслідок 2.1.1.** *Розгортка тетраедра вздовж простої замкненої геодезичної складається з чотирьох рівних багатокутників. Будь-які два сусідні багатокутники переводяться один в одного поворотом на кут  $\pi$  навколо середини їх спільного ребра.*

*Доведення.* Не порушуючи загальності, припустимо, що проста замкнена геодезична  $\gamma_0$  проходить через точки  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$  і  $Y_2$ , що є серединами ребер  $A_1A_2$ ,  $A_4A_3$ ,  $A_1A_3$  і  $A_2A_4$  відповідно.

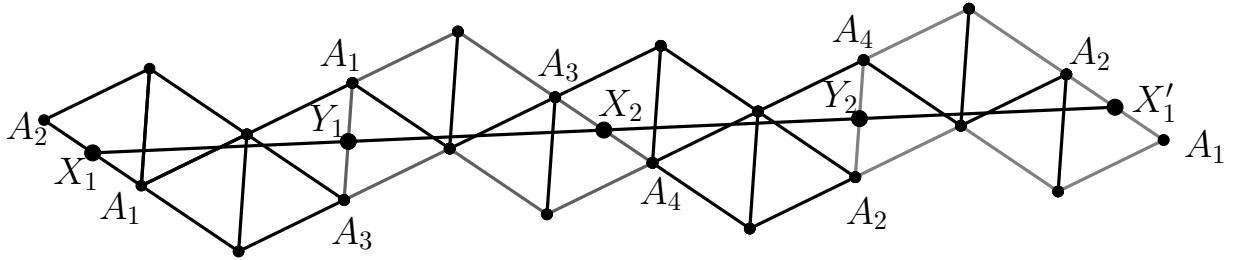


Рис. 2.3

Поворот правильного тетраедра на кут  $\pi$  навколо прямої, що проходить через точки  $X_1$  і  $X_2$  є ізометрією тетраедра. Цей поворот міняє місцями точки  $Y_1$  та  $Y_2$ . Крім того, сегмент  $\gamma_0$ , який починається з  $X_1$  на грані  $A_1A_2A_4$  відображається у сегмент  $\gamma_0$ , який починається з точки  $X_1$  на  $A_1A_2A_3$ . Тобто відрізки  $X_1Y_1$  і  $X_1Y_2$  переходять один в один. Так само після повороту відрізки  $X_2Y_1$  та  $X_2Y_2$  геодезичної  $\gamma_0$  також міняються місцями.

Із цього випливає, що розгортка тетраедра вздовж відрізка  $Y_1X_1Y_2$  геодезичної є центральньо-симетричним багатокутником з центром  $X_1$ . Розгортка вздовж  $Y_1X_2Y_2$  є центральньо-симетричною відносно  $X_2$ .

Тепер розглянемо поворот правильного тетраедра на кут  $\pi$  навколо прямої, що проходить через точки  $Y_1$  і  $Y_2$ . З тих самих аргументів, що є вище, випливає, що розгортка тетраедра уздовж відрізка  $X_1Y_1X_2$  є центральньо-симетричним багатокутником з центром  $Y_1$ , а розгортка вздовж  $X_2Y_2X_1$  є центральньо-симетричною відносно  $Y_2$  (див. Рис. 2.3).  $\square$

**Лема 2.2.** *Нехай  $\gamma$  є простою замкненою геодезичною типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі в евклідовому просторі, і нехай  $\gamma$  перетинає середини двох пар протилежних ребер. Тоді відстань  $h$  від вершин тетраедра до  $\gamma$  задовольняє умові*

$$h \geq \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{p^2 + pq + q^2}}. \quad (2.5)$$

*Доведення.* Припустимо,  $\gamma$  перетинає ребро  $A_1A_2$  в точці  $X$ , що є серединою цього ребра. Тоді геодезична  $\gamma$  розгортається у відрізок  $XX'$ , що лежить на прямій

$$y = \frac{q\sqrt{3}}{q + 2p} \left( x - \frac{1}{2} \right).$$

Відрізок  $XX'$  перетинає ребра  $A_1A_2$  в точках

$$(x_b, y_b) = \left( \frac{2(q + 2p)k + q}{2q}, k\sqrt{3} \right),$$

де  $k \leq q$ . Оскільки  $XX'$  не проходить через вершини розгортки,  $x_b$  не може бути цілим числом. Отже, на ребрі  $A_1A_2$  відстань від вершин тетраедра до точок  $\gamma$  не менше  $1/2q$ .

Аналогічно на ребрі  $A_3A_2$  відстань від вершин тетраедра до точок  $\gamma$  не менше  $1/2p$ .

Розгорнемо грані  $A_1A_2A_4$  і  $A_2A_4A_3$  на площину. Позначимо точки  $B_1$  на ребрі  $A_2A_1$  і  $B_2$  на ребрі  $A_2A_3$  так, щоб довжина  $A_2B_1$  дорівнює  $1/2q$ , а довжина  $A_2B_2$  дорівнює  $1/2p$ . Нехай  $A_2H$  - висота трикутника  $B_1A_2B_2$ .



Тоді

$$|A_2H| = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{p^2 + pq + q^2}}.$$

Відстань  $h$  від вершини  $A_2$  до  $\gamma$  не менше ніж  $|A_2H|$ . □

## 2.3 Висновки до Розділу 2

У цьому Розділі доповнено результати про прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі в евклідовому просторі.

Порядок, у якому проста замкнена геодезична  $\gamma$  перетинає ребра тетраедра однозначно визначається парою взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$ ,  $0 \leq p < q$ . Для кожної впорядкованої пари взаємно простих чисел  $(p, q)$  на правильному тетраедрі в евклідовому просторі існує цілий клас простих замкнених геодезичних типу  $(p, q)$ , з точністю до ізометрії тетраедра. Усередині розгортки тетраедра геодезичні одного класу є паралельними між собою (Підрозділ 2.1).

Ми довели, що у кожному класі є проста замкнена геодезична  $\gamma_0$ , яка проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра (Теорема 2.1). Як наслідок показано, що розгортка тетраедра уздовж простої замкненої геодезичної складається з чотирьох рівних багатокутників. Будь-які два сусідні багатокутники переводяться один в одний поворотом на кут  $\pi$  навколо середини спільного ребра. Додатково ми оцінили відстань від вершин тетраедра до  $\gamma_0$  (Підрозділ 2.2).

## Розділ 3

# Прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у сферичному просторі

*Результати цього Розділу опубліковані у роботах [41], [42].*

### 3.1 Визначення і приклади

*Сферичним трикутником* є опуклий багатокутник на одиничній сфері, обмежений трьома найкоротшими лініями.

*Правильним тетраедром*  $A_1A_2A_3A_4$  у тривимірному сферичному просторі  $\mathbb{S}^3$  є замкнений опуклий багатограник, усі грані якого є правильними сферичними трикутниками, і всі вершини – правильними тригранними кутами. Кут  $\alpha$  грані правильного тетраедра в  $\mathbb{S}^3$  задовольняє умові  $\pi/3 < \alpha \leq 2\pi/3$ . Зазначимо, що існує єдиний (з точністю до ізометрії) правильний тетраедр у сферичному просторі з заданим кутом грані. Довжина ребра тетраедра дорівнює

$$a = \arccos \left( \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \right), \quad (3.1)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/3} a = 0; \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} a = \pi/2; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi/3} a = \pi - \cos^{-1} 1/3. \quad (3.2)$$

Якщо  $\alpha = 2\pi/3$ , то тетраедр є двовимірною одиничною сферою. На ньому існує нескінченно багато простих замкнених геодезичних.

Надалі будемо вважати, що  $\alpha \in (\pi/3, 2\pi/3)$ .

Сферичний простір кривини 1 реалізується одиничною тривимірною сферою  $S^3$  у чотиривимірному евклідовому просторі. Правильний тетраедр  $A_1A_2A_3A_4$  розташований у відкритій півкулі. Розглянемо евклідовий простір, дотичний до цієї півкулі в точці, що є центром описаної сфери тетраедра. Центральна проекція півкулі на цей дотичний простір відображає правильний тетраедр зі сферичного простору у правильний тетраедр в евклідовому просторі. Проста замкнена геодезична  $\gamma$  на  $A_1A_2A_3A_4$  проектується в абстрактну геодезичну на правильному тетраедрі в евклідовому просторі. З Твердження 2.2 випливає, що існує проста замкнена геодезична на правильному тетраедрі в евклідовому просторі, еквівалентна абстрактній геодезичній. Із цього можна зробити висновок, що *проста замкнена геодезична на правильному тетраедрі в  $S^3$  характеризується парою взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$*  і має таку ж комбінаторну структуру, як замкнена геодезична на правильному тетраедрі в евклідовому просторі.

**Лема 3.1.** 1) *На правильному тетраедрі з кутом грані  $\alpha \in (\pi/3, 2\pi/3)$  у сферичному просторі існують три різні прості замкнені геодезичні типу  $(0, 1)$ . Вони є рівними з точністю до ізометрії тетраедра.*

2) *Геодезичними типу  $(0, 1)$  вичерпуються усі прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі з кутом грані  $\alpha \in [\pi/2, 2\pi/3)$  у сферичному просторі.*

3) *На правильному тетраедрі з кутом грані  $\alpha \in (\pi/3, \pi/2)$  у сферичному просторі існують три різні прості замкнені геодезичні типу  $(1, 1)$ . Вони є рівними з точністю до ізометрії тетраедра.*

*Доведення.* 1) Розглянемо правильний тетраедр  $A_1A_2A_3A_4$  в  $S^3$  з кутом грані  $\alpha \in (\pi/3, 2\pi/3)$ . Нехай  $X_1$  і  $X_2$  є серединами ребер  $A_1A_4$  і  $A_3A_2$ , та  $Y_1$  і  $Y_2$  – серединами  $A_4A_2$  і  $A_1A_3$  відповідно. З'єднаємо ці точки послідовно відрізками через грані. Трикутники  $X_1A_4Y_1$ ,  $Y_1A_2X_2$ ,  $X_2A_3Y_2$  і  $Y_2A_1X_1$  рівні. З цього випливає, що замкнена ламана  $X_1Y_1X_2Y_2$  є простою замкненою геодезичною типу  $(0, 1)$  на правильному тетраедрі у сферичному просторі

(див. Рис. 3.1). З'єднуючи середини інших пар протилежних ребер тетраедра, будуються інші дві геодезичні типу  $(0, 1)$  на тетраедрі.

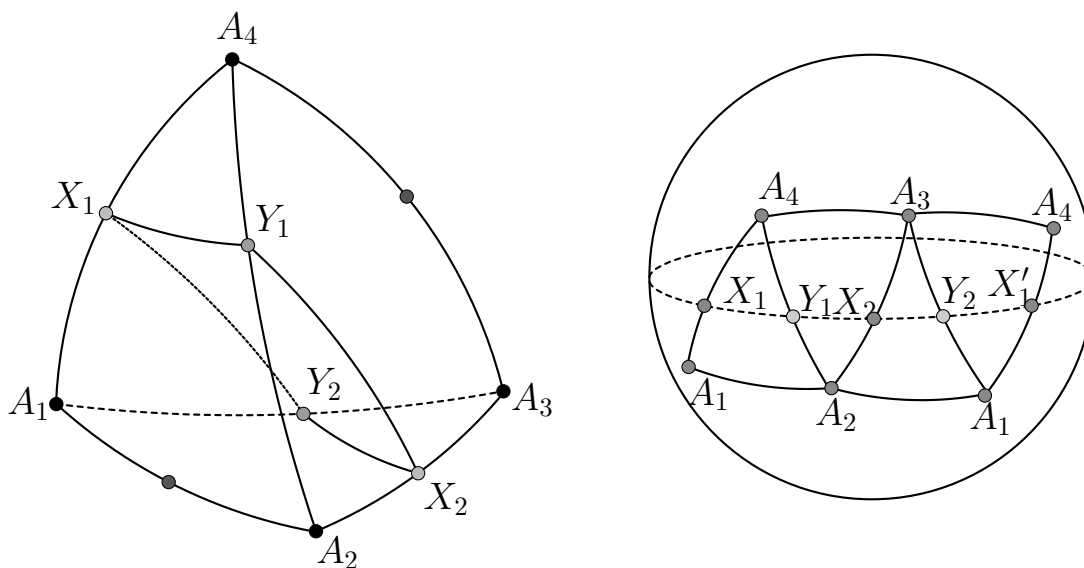


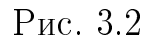
Рис. 3.1

2) Розглянемо правильний тетраедр із кутом грані  $\alpha \geq \pi/2$ .

Оскільки геодезична є прямолінійним відрізком всередині розгортки тетраедра, то вона не може послідовно перетинати три ребра, що виходять з однієї вершини тетраедра.

Якщо проста замкнена геодезична на правильному тетраедрі має тип  $(p, q)$ , де  $p = q = 1$  або  $1 < p < q$ , тоді ця геодезична послідовно перетинає три ребра, що виходять з однієї вершини (див. Твердження 2.3). Тільки проста замкнена геодезична типу  $(0, 1)$  перетинає два ребра тетраедра, які мають спільну вершину, і не перетинає третє ребро. Звідси випливає, що на правильному тетраедрі у сферичному просторі з кутом грані  $\alpha \in [\pi/2, 2\pi/3)$  існує лише три прості замкнені геодезичні типу  $(0, 1)$  і немає інших.

3) Розглянемо правильний тетраедр  $A_1A_2A_3A_4$  в  $\mathbb{S}^3$  з кутом грані  $\alpha \in (\pi/3, \pi/2)$ . Як і вище, точки  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  є серединами ребер  $A_1A_4, A_3A_2, A_4A_2$  і  $A_1A_3$  відповідно.



Дві інші прості замкнені геодезичні типу  $(1, 1)$  на тетраедрі можна побудувати аналогічно, з'єднуючи середини інших пар протилежних ребер тетраедра.  $\square$

44

### 3.2 Властивості простої замкненої геодезичної на правильному тетраедрі

**Лема 3.2.** *Довжина простої замкненої геодезичної на правильному тетраедрі у сферичному просторі менше  $2\pi$ .*

*Доведення.* Нехай  $\gamma$  - проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі  $A_1A_2A_3A_4$  у сферичному просторі. Оскільки  $\gamma$  має таку саму комбінаторну структуру, як і проста замкнена геодезична на правильному тетраедрі в евклідовому просторі, то будемо досліджувати структуру  $\gamma$  використовуючи Твердження 2.3.

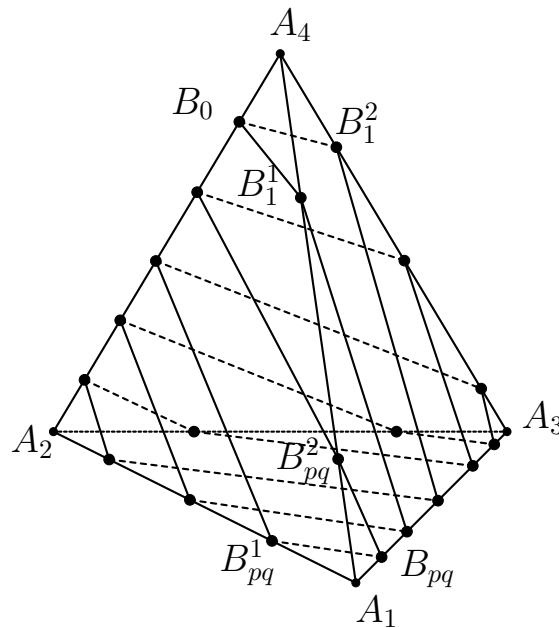


Рис. 3.3

Припустимо,  $\gamma$  має по  $p$  точок на ребрах  $A_1A_2$  і  $A_3A_4$ , по  $q$  точок на  $A_1A_4$  і  $A_2A_3$ , і по  $p + q$  точок на  $A_2A_4$  і  $A_1A_3$ . Розглянемо вузол зачеплення  $B_0$  геодезичної  $\gamma$  на ребрі  $A_4A_2$ . Вершини  $B_1^1$  і  $B_1^2$  геодезичної є найближчими точками  $\gamma$  до  $A_4$  на ребрах  $A_4A_1$  і  $A_4A_3$  відповідно. Відрізки геодезичної  $B_0B_1^1$  і  $B_0B_1^2$  відповідають  $\gamma_1^1$  і  $\gamma_1^2$ . На розгортці граней  $A_1A_2A_4$  та  $A_2A_4A_3$  відрізки  $\gamma_1^1$  і  $\gamma_1^2$  утворюють прямолінійний відрізок. Трикутник  $B_1^1A_4B_1^2$  на розгортці будемо називати *трикутником зачеплення*.

Відрізки  $\gamma_{2p+2q}^1$  і  $\gamma_{2p+2q}^2$  сходяться у другий вузол зачеплення  $B_{pq}$  геодезичної. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що  $B_{pq}$  є найближчою вершиною  $\gamma$  до  $A_1$  на ребрі  $A_1A_3$ . Сусідні вершини  $B_{pq}^1$  і  $B_{pq}^2$  геодезичної є найближчими точками  $\gamma$  до  $A_1$  на ребрах  $A_1A_2$  і  $A_1A_4$  відповідно. Вони утворюють другий трикутник зачеплення  $B_{pq}^1A_1B_{pq}^2$ .

З трикутників зачеплення  $B_1^1A_4B_1^2$  і  $B_{pq}^1A_1B_{pq}^2$  маємо наступні нерівності

$$|B_1^1B_1^2| < |B_1^1A_4| + |A_4B_1^2|; \quad |B_{pq}^2B_{pq}^1| < |B_{pq}^2A_1| + |A_1B_{pq}^1|. \quad (3.3)$$

Тепер розгорнемо тетраедр на двовимірну сферу вздовж частин  $\gamma_i^1$  і  $\gamma_i^2$ ,  $i = 2, \dots, 2p + 2q - 1$  геодезичної. Відрізки  $\gamma_2^1$  і  $\gamma_2^2$  починаються в точках  $B_1^1$  і  $B_1^2$  на грані  $A_1A_4A_3$  відповідно. Далі вони перетинають ребро  $A_1A_3$ . Відрізки  $\gamma_i^1$  і  $\gamma_i^2$ ,  $i = 3, \dots, 2p + 2q - 2$ , розгортаються у два прямолінійні відрізки на сфері, які перетинають ребра тетраедра в однаковому порядку, і між ними немає інших точок геодезичної. Останні відрізки  $\gamma_{2p+2q-1}^1$  і  $\gamma_{2p+2q-1}^2$  геодезичної перетинають ребро  $A_2A_4$ , переходять на грань  $A_1A_2A_4$  і закінчуються в точках  $B_{pq}^1$  і  $B_{pq}^2$  відповідно. Із цього випливає, що вершини  $A_4$  і  $A_1$  тетраедра лежать всередині сферичної лунки, утвореної двома дугами великих кул, що містять  $B_1^1B_{pq}^1$  і  $B_1^2B_{pq}^2$ . Ми отримали опуклий шестикутник  $B_1^1A_4B_1^2B_{pq}^2A_1B_{pq}^1$  на сфері (див. Рис. 3.4).

З нерівностей (3.3) випливає, що довжина геодезичної  $\gamma$  менша за периметр шестикутника  $B_1^1A_4B_1^2B_{pq}^2A_1B_{pq}^1$ . Оскільки периметр опуклого багатокутника на одиничній сфері менше  $2\pi$ , отримуємо, що на правильному тетраедрі у сферичному просторі з кутом грані  $\alpha < \pi/2$  довжина простої замкненої геодезичної менше  $2\pi$ .

З Лема 3.1 відомо, що на правильному тетраедрі з кутом грані  $\alpha \in [\pi/2, 2\pi/3)$  існує лише три прості замкнені геодезичні, і вони мають тип  $(0, 1)$ . Довжина цих геодезичних дорівнює

$$L_{0,1} = 4 \arccos \left( \frac{\sin(3\alpha/2)}{2 \sin(\alpha/2)} \right). \quad (3.4)$$

Легко перевірити, що  $L_{0,1} < 2\pi$ , коли  $\pi/3 < \alpha < 2\pi/3$ .  $\square$

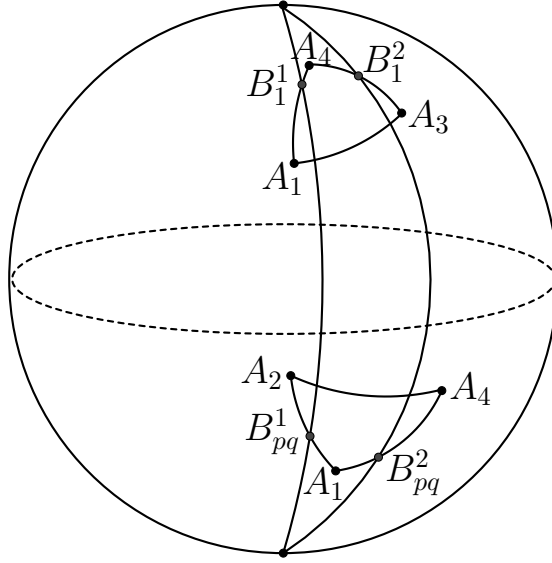


Рис. 3.4

**Зауваження 3.1.** Лему 3.2 можна розглядати як окремий випадок результату, доведеного у роботі Борисенко [10], про узагальнення теореми Топоногова [44] на випадок двовимірного простору Александрова.

**Лема 3.3.** На правильному тетраедрі у сферичному просторі проста замкнена геодезична перетинає середини двох пар протилежних ребер.

*Доведення.* Нехай  $\gamma$  є простою замкненою геодезичною на правильному тетраедрі  $A_1A_2A_3A_4$  в  $\mathbb{S}^3$ . Як показано вище, на правильному тетраедрі в евклідовому просторі існує проста замкнена геодезична  $\tilde{\gamma}$  еквівалентна  $\gamma$ . З Теорема 2.1 будемо вважати, що  $\tilde{\gamma}$  проходить через  $\tilde{X}_1$  і  $\tilde{X}_2$  – середини ребер  $A_1A_2$  і  $A_3A_4$  на тетраедрі. Позначимо через  $X_1$  і  $X_2$  вершини  $\gamma$  на ребрах  $A_1A_2$  і  $A_3A_4$  тетраедра в  $\mathbb{S}^3$  такі, що  $X_1$  і  $X_2$  еквівалентні точкам  $\tilde{X}_1$  і  $\tilde{X}_2$ .

Розглянемо розгортку тетраедра вздовж  $\gamma$ , починаючи з точки  $X_1$ , на двовимірній одиничній сфері. Геодезична  $\gamma$  розгортається у відрізок  $X_1X'_1$  довжини  $< 2\pi$  всередині розгортки. Позначимо через  $T_1$  і  $T_2$  частини розгортки уздовж  $X_1X_2$  і  $X_2X'_1$  відповідно.



Нехай  $M_1$  і  $M_2$  — середини ребер  $A_1A_2$  і  $A_3A_4$  на тетраедрі в  $\mathbb{S}^3$  відповідно. Поворот на кут  $\pi$  навколо прямої  $M_1M_2$  є ізометрією тетраедра. Це означає, що розгортка тетраедра є центрально-симетричним багатокутником з центром  $M_2$ .

З іншого боку, симетрія відносно  $M_2$  міняє місцями частини  $T_1$  і  $T_2$ . Точка  $X'_1$  на ребрі  $A_1A_2$  частини  $T_2$  відображається у точку  $\widehat{X}'_1$  на ребрі  $A_2A_1$  частини  $T_1$ . Довжини  $A_2X_1$  і  $\widehat{X}'_1A_1$  рівні. Симетричною до точки  $X_1$  на  $T_1$  є точка  $\widehat{X}_1$  на ребрі  $A_1A_2$  в  $T_2$ . Оскільки  $M_2$  є серединою  $A_3A_4$ , то симетрія відображає точку  $X_2$  у точку  $\widehat{X}_2$  на тому самому ребрі  $A_3A_4$ . Довжини  $A_4X_2$  і  $\widehat{X}_2A_3$  рівні. Отже, відрізок  $X_1X'_1$  центральною симетрією відображається у відрізок  $\widehat{X}'_1\widehat{X}_1$  всередині розгортки.

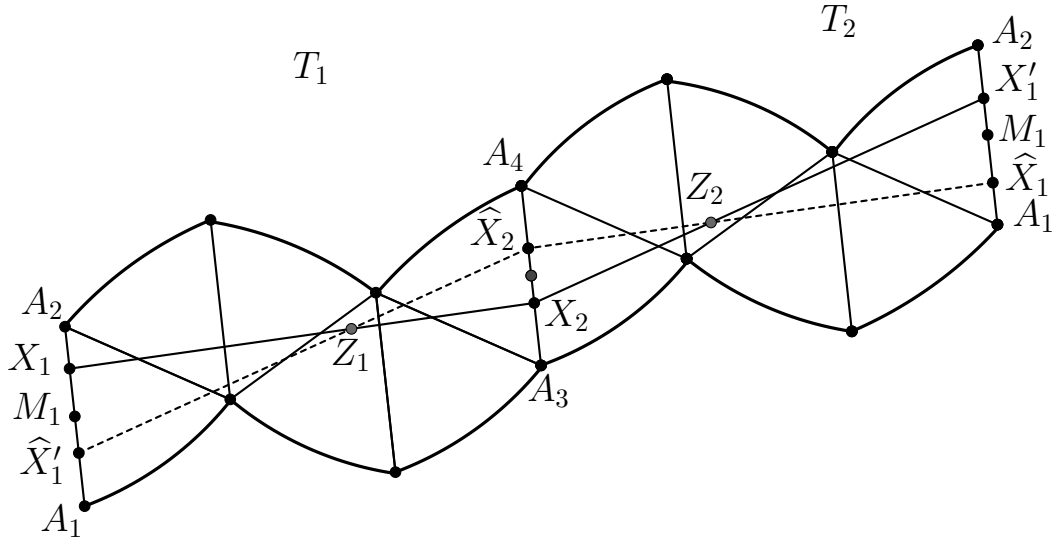


Рис. 3.5

Припустимо, відрізки  $\widehat{X}'_1\widehat{X}_2$  і  $X_1X_2$  перетинаються в точці  $Z_1$  всередині  $T_1$ . Тоді відрізки  $\widehat{X}_2\widehat{X}_1$  і  $X_2X'_1$  перетинаються в точці  $Z_2$  на  $T_2$ . Точки  $Z_1$  і  $Z_2$  є центрально симетричними відносно  $M_2$  (див. Рис. 3.5). Всередині багатокутника на сфері отримуємо дві дуги кола  $X_1X'_1$  і  $\widehat{X}'_1\widehat{X}_1$ , які перетинаються у двох точках. Це означає, що  $Z_1$  і  $Z_2$  є діаметрально протилежними точками на сфері, і довжина геодезичного відрізка  $Z_1X_2Z_2$  дорівнює  $\pi$ .

Тепер розглянемо розгортку тетраедра вздовж  $\gamma$ , починаючи з точки  $X_2$ .

Ця розгортка також складається з двох сферичних багатокутників  $T_2$  і  $T_1$ , але у даному випадку вони склеюються вздовж ребра  $A_1A_2$ , і є центрально-симетричними відносно  $M_1$ .

Симетрія відносно  $M_1$  на розгортці змінює місцями відрізки  $X_2X_1X'_2$  і  $\widehat{X}_2\widehat{X}_1\widehat{X}'_2$ . Оскільки симетрії відносно  $M_1$  та  $M_2$  відповідають одній ізометрії тетраедра, то дуги  $X_2X_1X'_2$  і  $\widehat{X}_2\widehat{X}_1\widehat{X}'_2$  також перетинаються в точках  $Z_1$  і  $Z_2$ . Звідси випливає, що довжина відрізка  $Z_1X_1Z_2$  геодезичної також дорівнює  $\pi$ .

Отже, довжина геодезичної  $\gamma$  на правильному тетраедрі у сферичному просторі дорівнює  $2\pi$ , що суперечить Лемі 3.2. Це означає, що відрізки  $\widehat{X}'_1\widehat{X}_2$  і  $X_1X_2$  або не перетинаються, або збігаються.

Якщо  $X_1X_2$  і  $\widehat{X}'_1\widehat{X}_2$  не перетинаються, то вони утворюють чотирикутник  $X_1X_2\widehat{X}_2\widehat{X}'_1$  всередині  $T_1$ . Оскільки  $\gamma$  є замкненою геодезичною, то  $\angle A_1X_1X_2 + \angle A_2\widehat{X}'_1\widehat{X}_2 = \pi$ . Крім того,  $\angle X_1X_2A_3 + \angle \widehat{X}'_1\widehat{X}_2A_4 = \pi$ . Отримуємо опуклий чотирикутник на сфері, сума внутрішніх кутів якого дорівнює  $2\pi$ . Тоді інтеграл від гаусової кривини за площею чотирикутника  $X_1X_2\widehat{X}_2\widehat{X}'_1$  на сфері дорівнює нулю. Це можливо лише у випадку, коли відрізки  $X_1X_2$  і  $\widehat{X}'_1\widehat{X}_2$  збігаються при симетрії розгортки. Тобто точки  $X_1$  і  $X_2$  геодезичної  $\gamma$  є серединами ребер  $A_1A_2$  і  $A_3A_4$  відповідно.

Аналогічно доводиться, що  $\gamma$  перетинає середини другої пари протилежних ребер тетраедра. □

**Наслідок 3.3.1.** *Якщо дві прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі у сферичному просторі перетинають ребра тетраедра в однаковому порядку, то ці геодезичні співпадають.*

### 3.3 Оцінка на кут $\alpha$ , за якого не існує простої замкненої геодезичної типу $(p, q)$

**Теорема 3.4.** *Нехай  $(p, q)$  – пара взаємно простих натуральних чисел, і нехай  $\alpha < \pi/2$  та*

$$\alpha > 2 \arcsin \sqrt{\frac{p^2 + pq + q^2}{4(p^2 + pq + q^2) - \pi^2}}. \quad (3.5)$$

*Тоді на правильному тетраедрі у сферичному просторі з кутом грані  $\alpha$ , не існує простої замкненої геодезичної типу  $(p, q)$ .*

*Доведення.* Нехай  $A_1A_2A_3A_4$  – правильний тетраедр у сферичному просторі з кутом грані  $\alpha \in (\pi/3, \pi/2)$  і нехай  $\gamma$  – проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$  на ньому.

Кожна грань тетраедра є правильним сферичним трикутником. Розглянемо двовимірну одиничну сферу, що містить грань  $A_1A_2A_3$ . Побудуємо евклідову площину  $\Pi$ , яка проходить через точки  $A_1, A_2$  і  $A_3$ . Перетин сфери з  $\Pi$  є малим колом.

Розглянемо геодезичне відображення трикутника  $A_1A_2A_3$  на площину  $\Pi$ . Через кожну точку на  $A_1A_2A_3$  проведено промінь з початком у центрі сфери  $O$ . Образом сферичного трикутника  $A_1A_2A_3$  є трикутник  $\tilde{\Delta}A_1A_2A_3$  на евклідовій площині  $\Pi$ .

Ребра  $\tilde{\Delta}A_1A_2A_3$  є хордами, що з'єднують вершини сферичного трикутника. З формули (3.1) випливає, що довжина  $\tilde{a}$  ребра  $\tilde{\Delta}A_1A_2A_3$  дорівнює

$$\tilde{a} = \frac{\sqrt{4 \sin^2(\alpha/2) - 1}}{\sin(\alpha/2)}. \quad (3.6)$$

Відрізки геодезичної  $\gamma$ , що лежать всередині  $A_1A_2A_3$ , відображаються у прямолінійні відрізки всередині  $\tilde{\Delta}A_1A_2A_3$  (див. Рис. 3.6).

Аналогічно інші грані тетраедра  $A_2A_3A_4$ ,  $A_2A_4A_1$  і  $A_1A_4A_3$  відображаються у плоскі трикутники  $\tilde{\Delta}A_2A_3A_4$ ,  $\tilde{\Delta}A_2A_4A_1$  і  $\tilde{\Delta}A_1A_4A_3$  відповідно. Оскільки сферичний тетраедр правильний, то побудовані плоскі трикутники рівні. Ми можемо склеїти їх разом у правильний тетраедр в евклідовому

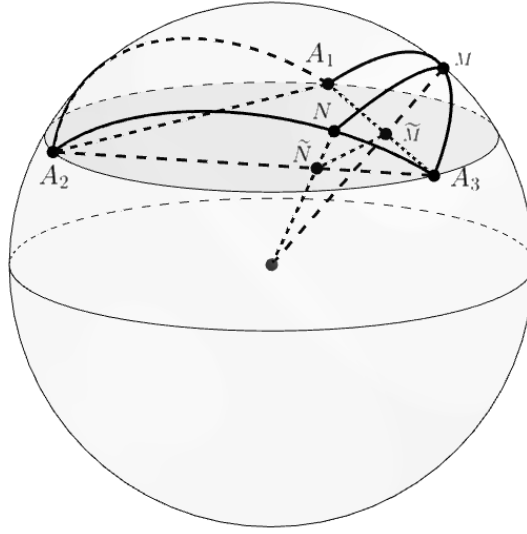


Рис. 3.6

просторі. Оскільки відрізки  $\gamma$  відображаються у прямолінійні відрізки всередині плоских трикутників, то вони утворюють абстрактну геодезичну  $\tilde{\gamma}$  на правильному тетраедрі в  $\mathbb{E}^3$ , яка еквівалентна  $\gamma$ .

Покажемо, що довжина  $\gamma$  більша за довжину  $\tilde{\gamma}$ . Розглянемо дугу  $MN$  геодезичної  $\gamma$  на грані  $A_1A_2A_3$ . Промені  $OM$  і  $ON$  перетинають площину  $\Pi$  у точках  $\tilde{M}$  і  $\tilde{N}$  відповідно. Відрізок  $\tilde{M}\tilde{N}$ , що лежить в  $\tilde{\Delta}A_1A_2A_3$ , є геодезичним образом дуги  $MN$  (див. Рис. 3.6). Припустимо, що довжина дуги  $MN$  дорівнює  $2\varphi$ . Тоді довжина відрізка  $\tilde{M}\tilde{N}$  дорівнює  $2\sin \varphi$ . Тому довжина  $\gamma$  на правильному тетраедрі у сферичному просторі більша ніж довжина його образу  $\tilde{\gamma}$  на правильному тетраедрі в евклідовому просторі.

З Твердження 2.2 відомо, що на правильному тетраедрі в евклідовому просторі існує проста замкнена геодезична  $\hat{\gamma}$  еквівалентна  $\tilde{\gamma}$ . На розгортці тетраедра геодезична  $\hat{\gamma}$  є відрізком прямої лінії, а абстрактна геодезична  $\tilde{\gamma}$  є ламаною. Тоді довжина  $\hat{\gamma}$  менша за довжину  $\tilde{\gamma}$ .

Отже, на правильному тетраедрі  $A_1A_2A_3A_4$  в  $\mathbb{S}^3$  з кутом грані  $\alpha$  довжина  $L_{p,q}$  простої замкненої геодезичної  $\gamma$  типу  $(p, q)$  більша за довжину простої замкненої геодезичної  $\hat{\gamma}$  типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі з

ребром довжини  $\tilde{a}$  в  $\mathbb{E}^3$ . З рівнянь (2.1) і (3.6) отримуємо, що

$$L_{p,q} > 2\sqrt{p^2 + pq + q^2} \frac{\sqrt{4\sin^2(\alpha/2) - 1}}{\sin(\alpha/2)}.$$

Якщо  $\alpha$  таке, що виконується наступна нерівність

$$2\sqrt{p^2 + pq + q^2} \frac{\sqrt{4\sin^2(\alpha/2) - 1}}{\sin(\alpha/2)} > 2\pi, \quad (3.7)$$

тоді не виконується необхідна умова існування простої замкненої геодезичної типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі з кутом грані  $\alpha$  у сферичному просторі. Таким чином, якщо

$$\alpha > 2 \arcsin \sqrt{\frac{p^2 + pq + q^2}{4(p^2 + pq + q^2) - \pi^2}},$$

то не існує простої замкненої геодезичної типу  $(p, q)$  на тетраедрі з кутом грані  $\alpha$  у сферичному просторі.  $\square$

**Наслідок 3.4.1.** [42] *На правильному тетраедрі в сферичному просторі існує скінченна кількість простих замкнених геодезичних.*

*Доведення.* Якщо числа  $(p, q)$  прямують на нескінченність, то

$$\lim_{p,q \rightarrow \infty} 2 \arcsin \sqrt{\frac{p^2 + pq + q^2}{4(p^2 + pq + q^2) - \pi^2}} = 2 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

З нерівності (3.5) отримуємо, що для великих чисел  $(p, q)$  проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі у сферичному просторі може існувати, якщо кут грані  $\alpha$  є близьким до  $\pi/3$ .  $\square$

Пари  $p = 0, q = 1$  та  $p = 1, q = 1$  не задовольняють умови (3.5). Геодезичні цього типу описані в Лемі 3.1.

### 3.4 Оцінка на кут $\alpha$ , за якого існує проста замкнена геодезична типу $(p, q)$

Так як  $\alpha > \pi/3$ , запишемо  $\alpha = \pi/3 + \varepsilon$ , де  $\varepsilon > 0$ . Враховуючи твердження Лема 3.1, будемо вважати  $\varepsilon < \pi/6$ .

**Теорема 3.5.** *Нехай  $(p, q)$  – пара взаємно простих натуральних чисел,  $0 \leq p < q$ , і нехай  $\varepsilon$  задовольняє умові*

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4c_0 \sqrt{p^2 + q^2 + pq} \sum_{i=0}^{\left[\frac{p+q}{2}\right]+2} \left( c_l(i) + \sum_{j=0}^i c_\alpha(j) \right)}; \frac{1}{8 \cos \frac{\pi}{12} (p+q)^2} \right\}, \quad (3.8)$$

де

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{3 - \frac{(p+q+2)}{\pi \cos \frac{\pi}{12} (p+q)^2} - 16 \sum_{i=0}^{\left[\frac{p+q}{2}\right]+2} \tan^2 \left( \frac{\pi i}{2(p+q)} \right)}{1 - \frac{(p+q+2)}{2\pi \cos \frac{\pi}{12} (p+q)^2} - 8 \sum_{i=0}^{\left[\frac{p+q}{2}\right]+2} \tan^2 \left( \frac{\pi i}{2(p+q)} \right)}, \\ c_l(i) &= \frac{\cos \frac{\pi}{12} (p+q)^2 (4 + \pi^2 (2i+1)^2)}{(p+q-i-1)^2}, \\ c_\alpha(j) &= 4 \left( 8\pi(p+q)^2 \cos \frac{\pi}{12} \tan^2 \frac{\pi j}{2(p+q)} + 1 \right). \end{aligned}$$

Тоді на правильному тетраедрі в сферичному просторі з кутом грані  $\alpha = \pi/3 + \varepsilon$  існує і єдина (з точністю до ізометрії тетраедра) проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$ .

Спочатку доведемо допоміжні леми.

**Лема 3.6.** *Довжина ребра правильного тетраедра в сферичному просторі кривини 1 задовольняє нерівності*

$$a < \pi \sqrt{2 \cos(\pi/12)} \sqrt{\varepsilon}, \quad (3.9)$$

де  $\alpha = \pi/3 + \varepsilon$  – кут грані тетраедра.

*Доведення.* З (3.1) вірно

$$\sin a = \frac{\sqrt{4 \sin^2(\alpha/2) - 1}}{2 \sin^2(\alpha/2)}.$$

Підставивши  $\alpha = \pi/3 + \varepsilon$ , отримуємо

$$\sin a = \frac{\sqrt{\sin(\varepsilon/2) \cos(\pi/6 - \varepsilon/2)}}{\sin^2(\pi/6 + \varepsilon/2)}.$$

Так як  $\varepsilon < \pi/6$ , то

$$\cos(\pi/6 - \varepsilon/2) < \cos \pi/12, \quad \sin(\pi/6 + \varepsilon/2) > \sin \pi/6 \quad \text{і} \quad \sin(\varepsilon/2) < \varepsilon/2.$$

Використовуючи ці оцінки, ми отримуємо

$$\sin a < 2\sqrt{2 \cos(\pi/12)} \sqrt{\varepsilon}.$$

З нерівності  $a < \pi/2$  випливає, що  $\sin a > (2/\pi)a$ . Таким чином

$$a < \pi\sqrt{2 \cos(\pi/12)} \sqrt{\varepsilon}.$$

□

До цього ми вважали, що правильний тетраедр розташований у сферичному просторі кривини 1. Гранями тетраедра є правильні сферичні трикутники з кутами  $\alpha$  на одиничній двовимірній сфері. Довжина  $a$  ребер тетраедра є функцією від  $\alpha$ , заданою формулою (3.1).

Сферичний простір кривини 1 реалізується як одинична тривимірна сфера  $S^3$  в  $\mathbb{E}^4$ . Застосуємо гомотетію з центром у центрі сфери  $S^3$  і коефіцієнтом  $\lambda = 1/a$ . Тоді кривина сферичного простору дорівнює  $a^2$ . Грані тетраедра є правильними сферичними трикутниками на двовимірній сфері радіуса  $R = 1/a$ , а довжина ребер тетраедра дорівнює 1.

Розглянемо наступну параметризацію двовимірної сфери  $S^2$  радіуса  $R$  в евклідовому просторі:

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = -R \cos \varphi \end{cases}, \quad (3.10)$$

де  $\varphi \in [0, \pi]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Нехай точка  $P$  має координати  $\varphi = r/R$ ,  $\theta = 0$ , де  $r/R < \pi/2$ , а точка  $X_1$  відповідає  $\varphi = 0$ .

Позначимо через  $Pr : S^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  центральну проекцію півкулі  $\varphi \in [0, \pi/2]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  на евклідову площину, дотичну до сфери в точці  $X_1$ .

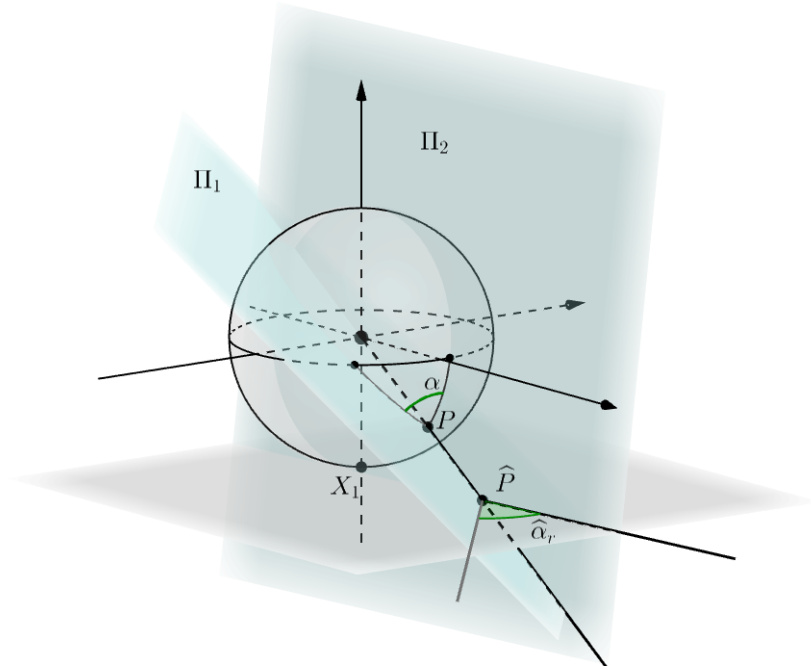


Рис. 3.7

**Лема 3.7.** Центральна проекція  $Pr$  відображає кут  $\alpha = \pi/3 + \varepsilon$  з вершиною у точці  $P(R \sin(r/R), 0, -R \cos(r/R))$  на півкулі у кут  $\hat{\alpha}_r$  на площині, який задовольняє нерівності

$$\left| \hat{\alpha}_r - \pi/3 \right| < \pi \tan^2(r/R) + \varepsilon. \quad (3.11)$$

*Доведення.* Побудуємо площини  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ , які проходять через центр півкулі і точку  $P(R \sin(r/R), 0, -R \cos(r/R))$  :

$$\Pi_1 : a_1 \cos(r/R) x + \sqrt{1 - a_1^2} y + a_1 \sin(r/R) z = 0;$$

$$\Pi_2 : a_2 \cos(r/R) x + \sqrt{1 - a_2^2} y + a_2 \sin(r/R) z = 0,$$

де

$$|a_1|, |a_2| \leq 1. \quad (3.12)$$

Якщо кут між цими площинами  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  дорівнює  $\alpha$ , тоді

$$\cos \alpha = a_1 a_2 + \sqrt{(1 - a_1^2)(1 - a_2^2)}. \quad (3.13)$$



Рівняння дотичної площини до  $S^2$  у точці  $X_1$  є  $z = -R$ . Площини  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  перетинають дотичну площину вздовж прямих, які утворюють кут  $\widehat{\alpha}_r$  (див. Рис. 3.7), і

$$\cos \widehat{\alpha}_r = \frac{a_1 a_2 \cos^2(r/R) + \sqrt{(1 - a_1^2)(1 - a_2^2)}}{\sqrt{1 - a_1^2 \sin^2(r/R)} \sqrt{1 - a_2^2 \sin^2(r/R)}}. \quad (3.14)$$

З рівнянь (3.13) і (3.14) отримуємо

$$|\cos \widehat{\alpha}_r - \cos \alpha| < \frac{|a_1 a_2 \sin^2(r/R)|}{\sqrt{1 - a_1^2 \sin^2(r/R)} \sqrt{1 - a_2^2 \sin^2(r/R)}}. \quad (3.15)$$

З нерівностей (3.12) і (3.15) випливає

$$|\cos \widehat{\alpha}_r - \cos \alpha| < \tan^2(r/R). \quad (3.16)$$

Вірно, що

$$|\cos \widehat{\alpha}_r - \cos \alpha| = \left| 2 \sin \frac{\widehat{\alpha}_r - \alpha}{2} \sin \frac{\widehat{\alpha}_r + \alpha}{2} \right|$$

Тоді з нерівностей  $\alpha > \pi/3$  і  $\widehat{\alpha}_r < \pi$  та

$$\left| \sin \frac{\widehat{\alpha}_r + \alpha}{2} \right| > \sin \frac{\pi}{6} \quad \text{і} \quad \left| \sin \frac{\widehat{\alpha}_r - \alpha}{2} \right| > \frac{2}{\pi} \left| \frac{\widehat{\alpha}_r - \alpha}{2} \right|,$$

маємо

$$\frac{2}{\pi} \left| \frac{\widehat{\alpha}_r - \alpha}{2} \right| < |\cos \widehat{\alpha}_r - \cos \alpha|.$$

З (3.17), (3.16) і  $\alpha = \pi/3 + \varepsilon$  отримуємо

$$\left| \widehat{\alpha}_r - \pi/3 \right| < \pi \tan^2(r/R) + \varepsilon.$$

□

На сфері (3.10) розглянемо дугу довжини 1 з початком у точці  $P$  та координатами  $\varphi = r/R, \theta = 0$ , де  $r/R < \pi/2$  (див. Рис. 3.8).

**Лема 3.8.** *Центральна проекція  $Pr$  відображає дугу довжини 1 з початком у точці  $P(R \sin(r/R), 0, -R \cos(r/R))$  у відрізок довжини  $\widehat{l}_r$ , який задовольняє нерівності*

$$\widehat{l}_r - 1 < \frac{\cos(\pi/12) (4 + \pi^2(2r + 1)^2)}{(1 - (2\pi)a(r + 1))^2} \cdot \varepsilon. \quad (3.17)$$

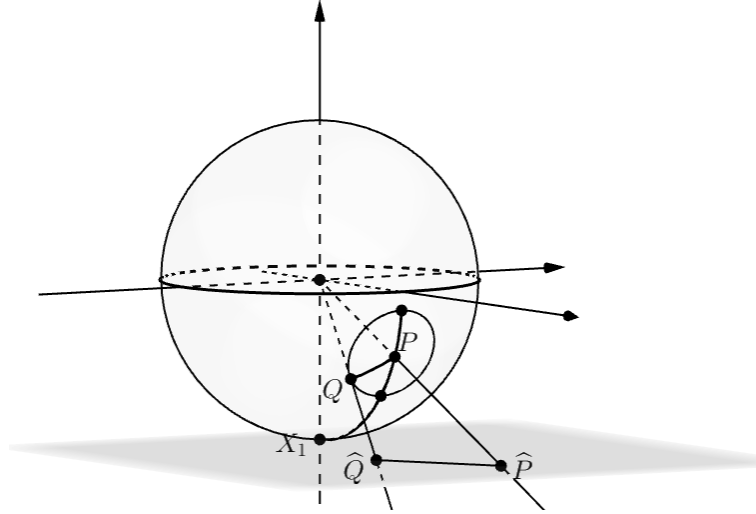


Рис. 3.8

*Доведення.* Точка  $P(R \sin(r/R), 0, -R \cos(r/R))$  на сфері  $S^2$  відображається у  $\hat{P}(R \tan(r/R), 0, -R)$  на дотичній площині  $z = -R$ .

Розглянемо точку  $Q(Ra_1, Ra_2, Ra_3)$  на сфері таку, що довжина дуги  $PQ$  дорівнює 1. Тоді  $\angle POQ = 1/R$ , де  $O$  – центр сфери  $S^2$  (див. Рис. 3.8). Маємо наступні умови на  $a_1, a_2, a_3$ :

$$a_1 \sin(r/R) - a_3 \cos(r/R) = \cos(1/R); \quad (3.18)$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1. \quad (3.19)$$

Центральна проекція на площину  $z = -R$  відображає точку  $Q$  у точку  $\hat{Q}(-\frac{a_1}{a_3}R, -\frac{a_2}{a_3}R, -R)$ . Довжина  $\hat{P}\hat{Q}$  дорівнює

$$|\hat{P}\hat{Q}| = R \sqrt{(a_1/a_3 - \tan(r/R))^2 + a_2^2/a_3^2} \quad (3.20)$$

За методом невизначених множників Лагранжа для знаходження локального екстремуму функції  $|\hat{P}\hat{Q}|$ , отримуємо, що  $|\hat{P}\hat{Q}|$  досягає мінімум, коли  $Q$  має координати

$$Q(R \sin((r-1)/R), 0, R \cos((r-1)/R)).$$

Тоді

$$|\hat{P}\hat{Q}|_{\min} = R |\tan(r/R) - \tan((r-1)/R)| = \frac{R \sin(1/R)}{\cos(r/R) \cos((r-1)/R)}.$$

Зазначимо, що  $|\widehat{P}\widehat{Q}|_{min} > 1$ .

Функція  $|\widehat{P}\widehat{Q}|$  досягає максимуму в точці

$$Q(R \sin((r+1)/R), 0, R \cos((r+1)/R)).$$

Максимальне значення дорівнює

$$|\widehat{P}\widehat{Q}|_{max} = R |\tan(r/R) - \tan((r+1)/R)| = \frac{R \sin(1/R)}{\cos(r/R) \cos((r+1)/R)}.$$

Так як  $R = 1/a$ , то довжина  $\widehat{l}_r$  проекції  $PQ$  задовольняє

$$\widehat{l}_r < \frac{\sin a}{a \cos(ar) \cos(a(r+1))}.$$

Так як  $\sin a < a$ , отримуємо

$$\widehat{l}_r - 1 < \frac{2 - \cos a - \cos(a(2r+1))}{2 \cos(ar) \cos(a(r+1))}. \quad (3.21)$$

З рівняння (3.9) випливає

$$1 - \cos a = \frac{\sin^2 a}{1 + \cos a} \leq 8 \cos(\pi/12) \varepsilon. \quad (3.22)$$

Аналогічно з нерівності (3.9) маємо

$$1 - \cos(a(2r+1)) \leq 2\pi^2 \cos(\pi/12)(2r+1)^2 \varepsilon; \quad (3.23)$$

Оцінемо знаменник (3.21), використовуючи нерівність  $\cos x > 1 - (2/\pi)x$ , де  $x < \pi/2$ . Враховуючи (3.22) і (3.23), ми отримуємо

$$\widehat{l}_r - 1 < \frac{4 \cos(\pi/12) + \pi^2 \cos(\pi/12)(2r+1)^2}{(1 - (2/\pi)a(r+1))^2} \cdot \varepsilon.$$

□

*Доведення Теорема 3.5.* Зафіксуємо пару взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$ ,  $0 < p < q$ . Розглянемо просту замкнену геодезичну  $\widetilde{\gamma}$  типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі  $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3\widetilde{A}_4$  з ребром довжини 1 в евклідовому просторі. Припустимо, що  $\widetilde{\gamma}$  проходить через точки  $\widetilde{X}_1$ ,  $\widetilde{X}_2$  і  $\widetilde{Y}_1$ ,  $\widetilde{Y}_2$ , які є серединами ребер  $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2$  і  $\widetilde{A}_3\widetilde{A}_4$  і  $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_3$ ,  $\widetilde{A}_4\widetilde{A}_2$  відповідно.

Розглянемо розгортку  $\tilde{T}_{pq}$  тетраедра вздовж  $\tilde{\gamma}$ , починаючи з точки  $\tilde{X}_1$ . Геодезична розгортається у сегмент  $\tilde{X}_1\tilde{Y}_1\tilde{X}_2\tilde{Y}_2\tilde{X}'_1$  всередині  $\tilde{T}_{pq}$ . З Наслідку 2.1.1 відомо, що частини розгортки вздовж відрізків  $\tilde{X}_1\tilde{Y}_1$ ,  $\tilde{Y}_1\tilde{X}_2$ ,  $\tilde{X}_2\tilde{Y}_2$  і  $\tilde{Y}_2\tilde{X}'_1$  є рівними багатокутниками, і будь-які два суміжні багатокутники можна перевести один в одний поворотом на кут  $\pi$  навколо середини їх спільного ребра.

Тепер розглянемо двовимірну сферу  $S^2$  радіуса  $R = 1/a$ , де  $a$  залежить від  $\alpha$  за формулою (3.1). На цій сфері візьмемо кілька копій правильних сферичних трикутників з кутом  $\alpha \in (\pi/3, \pi/2)$ . Складемо ці трикутники в тому ж порядку, в якому розгорталися грані евклідового тетраедра вздовж  $\tilde{\gamma}$  на площину. Іншими словами, побудуємо багатокутник  $T_{pq}$  на сфері  $S^2$ , утворений такою ж послідовністю правильних трикутників, як багатокутник  $\tilde{T}_{pq}$  в  $\mathbb{E}^3$ . Позначимо вершини  $T_{pq}$  відповідно до вершин  $\tilde{T}_{pq}$ . За побудовою сферичний багатокутник  $T_{pq}$  має таку ж властивість симетрії, як і евклідовий  $\tilde{T}_{pq}$ .

Оскільки групи ізометрій правильних тетраедрів в  $\mathbb{S}^3$  і в  $\mathbb{E}^3$  рівні, то багатокутник  $T_{pq}$  відповідає розгортці правильного тетраедра з кутом грані  $\alpha$  у сферичному просторі.

Позначимо через  $X_1$ ,  $X'_1$  і  $X_2$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  середини ребер  $A_1A_2$ ,  $A_3A_4$ ,  $A_1A_3$ ,  $A_4A_2$  відповідно на  $T_{pq}$ . Ці середини відповідають точкам  $\tilde{X}_1$ ,  $\tilde{X}'_1$  і  $\tilde{X}_2$ ,  $\tilde{Y}_1$ ,  $\tilde{Y}_2$  евклідової розгортки  $\tilde{T}_{pq}$ . Побудуємо дуги великих кіл  $X_1Y_1$ ,  $Y_1X_2$ ,  $X_2Y_2$  і  $Y_2X'_1$ . З властивості симетрії  $T_{pq}$  випливає, що ці дуги утворюють одну велику дугу  $X_1X'_1$  на  $S^2$ . Якщо кут  $\alpha$  такий, що  $X_1X'_1$  лежить всередині  $T_{pq}$ , то  $X_1X'_1$  відповідає простій замкненій геодезичній типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі з плоским кутом  $\alpha$  в  $\mathbb{S}^3$ .

Надалі будемо розглядати тільки частину багатокутника  $T_{pq}$  вздовж  $X_1Y_1$ , і для зручності позначаємо її також як  $T_{pq}$ . Ця частина складається з  $p + q$  правильних сферичних трикутників із ребрами довжини 1.

Багатокутник  $T_{pq}$  лежить всередині відкритої півкулі, якщо

$$a(p + q) < \pi/2, \quad (3.24)$$

Оскільки  $\alpha = \pi/3 + \varepsilon$ , то з нерівності (3.9) випливає, що (3.24) виконується за умови

$$\varepsilon < \frac{1}{8 \cos(\pi/12)(p+q)^2}. \quad (3.25)$$

У цьому випадку довжина дуги  $X_1Y_1$  менша ніж  $\pi/2a$ , і тому  $X_1Y_1$  задовольняє необхідній умові з Леми 3.2.

Застосуємо центральну проекцію сфери  $S^2$  на дотичну площину  $T_{X_1}S^2$  у точці  $X_1$ . Образом сферичної розгортки  $T_{pq}$  є багатокутник  $\widehat{T}_{pq}$  на  $T_{X_1}S^2$ .

Позначимо через  $\widehat{A}_i$  вершину  $\widehat{T}_{pq}$ , яка є образом вершини  $A_i$  на  $T_{pq}$ . Дуга  $X_1Y_1$  відображається у відрізок  $\widehat{X}_1\widehat{Y}_1$  на  $T_{X_1}S^2$ , який з'єднує середини ребер  $\widehat{A}_1\widehat{A}_2$  і  $\widehat{A}_1\widehat{A}_3$ . Якщо  $\alpha$  таке, що відрізок  $\widehat{X}_1\widehat{Y}_1$  лежить всередині багатокутника  $\widehat{T}_{pq}$ , то дуга  $X_1Y_1$  також лежить всередині  $T_{pq}$  на сфері.

Вектор  $\widehat{X}_1\widehat{Y}_1$  дорівнює

$$\widehat{X}_1\widehat{Y}_1 = \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 + \cdots + \widehat{a}_s + \widehat{a}_{s+1}, \quad (3.26)$$

де  $\widehat{a}_i$  – послідовність векторів границі  $\widehat{T}_{pq}$ ,  $\widehat{a}_0 = \widehat{X}_1\widehat{A}_2$ ,  $\widehat{a}_{s+1} = \widehat{A}_1\widehat{Y}_1$ , і  $s = \left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor + 1$  (якщо ми візьмемо границю  $\widehat{T}_{pq}$  з іншої сторони, то  $\widehat{X}_1\widehat{Y}_1$ , then  $s = \left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor$ ) (див. Рис. 3.9).

З іншого боку на евклідовій площині  $T_{X_1}S^2$  існує розгортка  $\widetilde{T}_{pq}$  правильного евклідового тетраедра  $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3\widetilde{A}_4$  з ребром довжини 1 вздовж простої замкненої геодезичної  $\widetilde{\gamma}$ . Розгортка  $\widetilde{T}_{pq}$  еквівалентна  $T_{pq}$ , а отже, еквівалентна  $\widehat{T}_{pq}$ . Відрізок  $\widetilde{X}_1\widetilde{Y}_1$  лежить всередині  $\widetilde{T}_{pq}$  і відповідає відрітку  $\widetilde{\gamma}$ .

Нехай розгортка  $\widetilde{T}_{pq}$  розміщена так, що точка  $\widetilde{X}_1$  збігається з  $\widetilde{X}_1$   $\widetilde{T}_{pq}$ , а вектор  $\widetilde{X}_1\widetilde{A}_2$  має той самий напрямок як  $\widetilde{X}_1\widetilde{A}_2$ . Аналогічно запишемо

$$\widetilde{X}_1\widetilde{Y}_1 = \widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1 + \cdots + \widetilde{a}_s + \widetilde{a}_{s+1}, \quad (3.27)$$

де  $\widetilde{a}_i$  – послідовність векторів границі  $\widetilde{T}_{pq}$ ,  $s = \left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor + 1$  and  $\widetilde{a}_0 = \widetilde{X}_1\widetilde{A}_2$ ,  $\widetilde{a}_{s+1} = \widetilde{A}_1\widetilde{Y}_1$  (див. Рис. 3.9).

Припустимо, що мінімальна відстань від вершин  $\widetilde{T}_{pq}$  до відрізка  $\widetilde{X}_1\widetilde{Y}_1$  досягається у вершині  $\widetilde{A}_k$  і дорівнює  $\widetilde{h}$  за формулою (2.5). Оцінимо відстань  $\widehat{h}$  між відповідною вершиною  $\widehat{A}_k$  та відрізком  $\widehat{X}_1\widehat{Y}_1$  на  $\widehat{T}_{pq}$ .

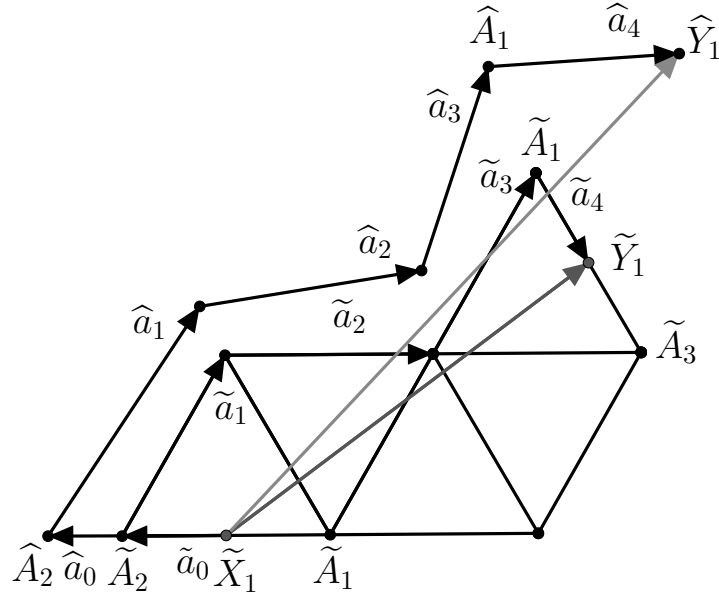


Рис. 3.9

Геодезична на правильному тетраедрі в  $\mathbb{E}^3$  перетинає не більше трьох ребер, що починаються з однієї вершини тетраедра. Із цього випливає, що внутрішні кути багатокутника  $\tilde{T}_{pq}$  не більші за  $4\pi/3$ . Отже, кути  $\hat{T}_{pq}$  не перевищують  $4\hat{\alpha}_i$ . Застосовуючи (3.11) для  $1 \leq i \leq s$ , ми отримуємо, що кут між  $\hat{a}_i$  і  $\tilde{a}_i$  задовольняє нерівності

$$\angle(\hat{a}_i, \tilde{a}_i) < \sum_{j=0}^i 4 \left( \pi \tan^2 \frac{j}{R} + \varepsilon \right). \quad (3.28)$$

Так як  $R = 1/a$ , тоді, використовуючи (3.9), отримуємо

$$\tan \frac{j}{R} < \tan \left( j\pi \sqrt{2 \cos \frac{\pi}{12}} \sqrt{\varepsilon} \right). \quad (3.29)$$

Нерівність (3.24) виконується, якщо виконується наступна умова

$$\tan \left( j\pi \sqrt{2 \cos \frac{\pi}{12}} \sqrt{\varepsilon} \right) < \tan \frac{\pi j}{2(p+q)}. \quad (3.30)$$

Якщо  $\tan x < \tan x_0$ , то  $\tan x < \frac{\tan x_0}{x_0} x$ . З (3.30) випливає

$$\tan \left( j\pi \sqrt{2 \cos \frac{\pi}{12}} \sqrt{\varepsilon} \right) < 2(p+q) \tan \frac{\pi j}{2(p+q)} \sqrt{2 \cos \frac{\pi}{12}} \sqrt{\varepsilon}. \quad (3.31)$$

Таким чином, з (3.29) та (3.31) отримуємо

$$\tan \frac{j}{R} < 2(p+q) \tan \frac{\pi j}{2(p+q)} \sqrt{2 \cos \frac{\pi}{12}} \sqrt{\varepsilon}. \quad (3.32)$$

Використовуючи (3.28) і (3.32) отримуємо остаточну оцінку на кут між векторами  $\widehat{a}_i$  і  $\widetilde{a}_i$ :

$$\angle(\widehat{a}_i, \widetilde{a}_i) < \sum_{j=0}^i 4 \left( 8\pi(p+q)^2 \cos \frac{\pi}{12} \tan^2 \frac{\pi j}{2(p+q)} + 1 \right) \varepsilon. \quad (3.33)$$

Тепер знайдемо оцінку на довжину вектора  $\widehat{a}_i - \widetilde{a}_i$ . Вірна наступна нерівність

$$|\widehat{a}_i - \widetilde{a}_i| \leq \left| \frac{\widehat{a}_i}{|\widehat{a}_i|} - \widetilde{a}_i \right| + \left| \widehat{a}_i - \frac{\widehat{a}_i}{|\widehat{a}_i|} \right|. \quad (3.34)$$

Так як  $\widetilde{a}_i$  – одиничний вектор, то

$$\left| \frac{\widehat{a}_i}{|\widehat{a}_i|} - \widetilde{a}_i \right| \leq \angle(\widehat{a}_i, \widetilde{a}_i) \quad \text{and} \quad \left| \widehat{a}_i - \frac{\widehat{a}_i}{|\widehat{a}_i|} \right| \leq \widehat{l}_i - 1. \quad (3.35)$$

З нерівності (3.17) отримуємо

$$\left| \widehat{a}_i - \frac{\widehat{a}_i}{|\widehat{a}_i|} \right| < \frac{\cos \frac{\pi}{12} (4 + \pi^2(2i+1)^2)}{\left(1 - \frac{2}{\pi}a(i+1)\right)^2} \cdot \varepsilon. \quad (3.36)$$

Оцінемо знаменник у (3.36) за допомогою 3.24).

$$\left| \widehat{a}_i - \frac{\widehat{a}_i}{|\widehat{a}_i|} \right| < \frac{\cos \frac{\pi}{12} (p+q)^2 (4 + \pi^2(2i+1)^2)}{(p+q-i-1)^2} \cdot \varepsilon. \quad (3.37)$$

З (3.34), (3.33) та (3.37) отримуємо

$$|\widehat{a}_i - \widetilde{a}_i| \leq \left( c_l(i) + \sum_{j=0}^i c_\alpha(j) \right) \varepsilon, \quad (3.38)$$

де

$$c_l(i) = \frac{\cos \frac{\pi}{12} (p+q)^2 (4 + \pi^2(2i+1)^2)}{(p+q-i-1)^2}, \quad (3.39)$$

$$c_\alpha(j) = 4 \left( 8\pi(p+q)^2 \cos \frac{\pi}{12} \tan^2 \frac{\pi j}{2(p+q)} + 1 \right). \quad (3.40)$$





Використовуючи нерівність  $\cos x > 1 - \frac{2}{\pi}x$  при  $x < \pi/2$ , отримуємо

$$|FG| < \frac{|\hat{A}_k \tilde{A}_k|}{1 - \frac{2}{\pi} \angle \hat{Y}_1 \hat{X}_1 \tilde{Y}_1}. \quad (3.45)$$

З нерівностей (3.42), (3.43) і (3.45) випливає

$$|FG| < \frac{\sum_{i=0}^k \left( c_l(i) + \sum_{j=0}^i c_\alpha(j) \right) \varepsilon}{1 - \sum_{i=0}^s \left( 64\pi(p+q)^2 \cos \frac{\pi}{12} \tan^2 \frac{\pi i}{2(p+q)} + \frac{8}{\pi} \right) \varepsilon}. \quad (3.46)$$

Застосовуючи (3.25) до знаменника в (3.46), отримуємо

$$|FG| < \frac{\sum_{i=0}^k \left( c_l(i) + \sum_{j=0}^i c_\alpha(j) \right) \varepsilon}{1 - \frac{(p+q+2)}{2\pi \cos \frac{\pi}{12} (p+q)^2} - 8 \sum_{i=0}^{s+1} \tan^2 \left( \frac{\pi i}{2(p+q)} \right)}. \quad (3.47)$$

Отже, маємо

$$\tilde{h} \leq \tilde{A}_k F \leq \hat{h} + |\hat{H}G| + |\hat{A}_k \tilde{A}_k| + |FG|; \quad (3.48)$$

Помітимо, що  $|\hat{H}G| < |\hat{Y}_1 \tilde{Y}_1|$ . З Лема 2.2 випливає

$$\tilde{h} > \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{p^2 + q^2 + pq}}.$$

З (3.48) отримуємо

$$\hat{h} > \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{p^2 + q^2 + pq}} - |\hat{Y}_1 \tilde{Y}_1| - |\hat{A}_k \tilde{A}_k| - |FG|. \quad (3.49)$$

Використовуючи оцінки (3.41), (3.43), (3.47) та рівність  $s = \left[ \frac{p+q}{2} \right] + 1$ , маємо

$$\hat{h} > \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{p^2 + q^2 + pq}} - c_0 \sum_{i=0}^{\left[ \frac{p+q}{2} \right] + 2} \left( c_l(i) + \sum_{j=0}^i c_\alpha(j) \right) \varepsilon, \quad (3.50)$$

де  $c_l(i)$  визначене формулою (3.39), та  $c_\alpha(j)$  – формулою (3.40) та

$$c_0 = \frac{3 - \frac{(p+q+2)}{\pi \cos \frac{\pi}{12} (p+q)^2} - 16 \sum_{i=0}^{\left[ \frac{p+q}{2} \right] + 2} \tan^2 \left( \frac{\pi i}{2(p+q)} \right)}{1 - \frac{(p+q+2)}{2\pi \cos \frac{\pi}{12} (p+q)^2} - 8 \sum_{i=0}^{\left[ \frac{p+q}{2} \right] + 2} \tan^2 \left( \frac{\pi i}{2(p+q)} \right)},$$

З нерівності (3.50) випливає, що якщо  $\varepsilon$  задовольняє умові

$$\varepsilon < \frac{\sqrt{3}}{4c_0\sqrt{p^2 + q^2 + pq} \sum_{i=0}^{\left[\frac{p+q}{2}\right]+2} \left(c_l(i) + \sum_{j=0}^i c_\alpha(j)\right)}, \quad (3.51)$$

то відстань від вершин багатокутника  $\hat{T}_{pq}$  до  $\hat{X}_1\hat{Y}_1$  більше нуля.

Враховуючи оцінку (3.25) отримуємо, що якщо

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4c_0\sqrt{p^2 + q^2 + pq} \sum_{i=0}^{\left[\frac{p+q}{2}\right]+2} \left(c_l(i) + \sum_{j=0}^i c_\alpha(j)\right)}; \frac{1}{8 \cos \frac{\pi}{12} (p+q)^2} \right\}, \quad (3.52)$$

то відрізок  $\hat{X}_1\hat{Y}_1$  лежить всередині багатокутника  $\hat{T}_{pq}$ . Тоді дуга  $X_1Y_1$  на сфері лежить всередині розгортки  $T_{pq}$ . Дуга  $X_1Y_1$  відповідає простій замкненій геодезичній  $\gamma$  типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі з кутом грані  $\alpha = \pi/3 + \varepsilon$  у сферичному просторі. З Наслідку 3.3.1 випливає, що ця геодезична єдина з точністю до ізометрії тетраедра.

Зазначимо, що геодезична  $\gamma$  інваріантна відносно повороту тетраедра на кут  $\pi$  навколо прямої, що проходить через середини протилежних ребер тетраедра. Поворот тетраедра на кут  $2\pi/3$  або  $4\pi/3$  навколо висоти, опущеної з вершини тетраедра до центру її протилежної грані, відображає  $\gamma$  у іншу просту замкнену геодезичну типу  $(p, q)$ .

Тож якщо  $\varepsilon$  задовольняє умові (3.52), то на правильному тетраедрі з кутом грані  $\alpha = \pi/3 + \varepsilon$  у сферичному просторі існують три різні прості замкнені геодезичні типу  $(p, q)$ , не враховуючи ізометрії тетраедра.  $\square$

Розглянемо правильний тетраедр із кутом грані  $\alpha$  у сферичному просторі  $\mathbb{S}^3$  кривини 1.

Якщо  $\alpha < \pi/3 + \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  задовольняє умові Теорема 3.5, то на цьому тетраедрі існує проста замкнена геодезична  $\gamma_{p,q}$  типу  $(p, q)$ . Нехай  $T_{p,q}(\alpha)$  – розгортка тетраедра вздовж  $\gamma_{p,q}$ . З Лема 2.1.1 випливає, що розгортка  $T_{p,q}(\alpha)$  має чотири точки симетрії  $X_1(\alpha)$ ,  $X_2(\alpha)$ ,  $Y_1(\alpha)$ ,  $Y_2(\alpha)$  і  $X'_1(\alpha)$  що відповідають серединам двох пар протилежних ребер тетраедра. Через ці середини проходить геодезична  $\gamma_{p,q}$ .

Розглянемо однопараметричний клас замкнених багатокутників  $T_{p,q}(\alpha)$  з параметром  $\alpha \in (\pi/3, 2\pi/3)$ . Розгортка  $T_{p,q}(\alpha)$  може мати перекриття на сфері. Тим не менш,  $T_{p,q}(\alpha)$  розглядається як абстрактний багатокутник, гомеоморфний диску, з внутрішньою метрикою, оскільки кожна внутрішня точка цього багатокутника має окіл, ізометричний внутрішній частині диска на одиничній сфері  $\mathbb{S}^2$ . Цей багатокутник локально ізометрично вкладений у сферу  $\mathbb{S}^2$  (див. Рис. 3.11). Розгортка  $T_{p,q}(\alpha)$  також має властивість симетрії для всіх  $\alpha \in (\pi/3, 2\pi/3)$ .

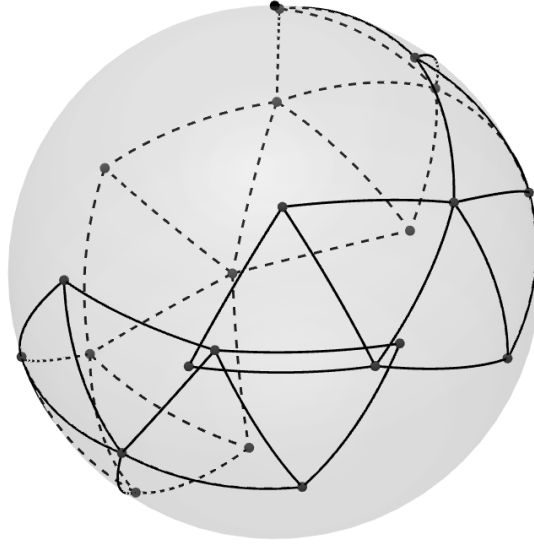


Рис. 3.11

Розглянемо спрямні криві  $\sigma_{p,q}(\alpha)$  на  $T_{p,q}(\alpha)$ , які з'єднують точки  $X_1(\alpha)$ ,  $X'_1(\alpha)$  і проходять через  $X_2(\alpha)$ ,  $Y_1(\alpha)$ ,  $Y_2(\alpha)$ . Якщо  $X_1(\alpha)X'_1(\alpha)$  лежить всередині розгортки  $T_{p,q}(\alpha)$ , то  $\sigma_{p,q}(\alpha)$  є простою замкненою геодезичною на правильному тетраедрі. З Теорема 3.5 випливає, що це вірно, якщо  $\alpha < \pi/3 + \varepsilon$ . З Лема 3.2 знаємо, що довжина  $\sigma_{p,q}(\alpha)$  менша  $2\pi$ .

У роботі [5] Борисенко довів, що ця умова також достатня для існування простої замкненої геодезичної на правильному тетраедрі в  $\mathbb{S}^3$ .

Інфімум  $L_{p,q}(\alpha)$  довжин кривих  $\sigma_{p,q}(\alpha)$  називається *довжиною абстрактної найкоротшої кривої* на розгортці.

**Теорема 3.9.** [5] *На правильному тетраедрі у сферичному просторі кривини 1 існує проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$  тоді і тільки тоді, коли довжина абстрактної найкоротшої кривої на розгортці менше  $2\pi$ .*

З Теорема 3.9 випливає достатня умова існування простої замкненої геодезичної типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі у сферичному просторі. Ця умова формулюється в термінах довжини  $a$  ребра тетраедра. Довжина  $a$  залежить від кута  $\alpha$  за формулою (3.1).

**Наслідок 3.9.1.** [5] *Якщо ребро  $a$  правильного тетраедра у сферичному просторі задовольняє нерівності*

$$a < 2 \arcsin \frac{\pi}{\sqrt{p^2 + pq + q^2} + \sqrt{(p^2 + pq + q^2) + 2\pi^2}} \quad (3.53)$$

*тоді на цьому тетраедрі існує проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$ .*

### 3.5 Висновки до Розділу 3

У цьому Розділі розглядалися прості замкнуті геодезичні на правильному тетраедрі у сферичному просторі. Кут  $\alpha$  грані такого тетраедра задовольняє умові  $\pi/3 < \alpha < 2\pi/3$ .

З бієкції між правильним тетраедром у сферичному просторі та евклідовим випливає, що проста замкнута геодезична  $\gamma$  на правильному тетраедрі у сферичному просторі також характеризується впорядкованою парою взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$ .

На відміну від евклідового простору, на правильному тетраедрі у сферичному просторі кожен клас простих замкнутих геодезичних типу  $(p, q)$  містить тільки одну просту замкнуту геодезичну, з точністю до ізометрії тетраедра. Ця геодезична проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра.

У роботі показано, що довжина простої замкненої геодезичної  $\gamma$  на правильному тетраедрі у сферичному просторі менша  $2\pi$  (див. Підрозділ 3.3,

Лема 3.2). Для доведення розглядається порядок, у якому  $\gamma$  перетинає ребра тетраедра.

Потім ми побудували спеціальне геодезичне відображення правильного тетраедра сферичного простору на правильний тетраедр в евклідовому просторі. Із цього було отримано оцінку знизу на довжину простої замкнутої геодезичної типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі у сферичному просторі. Поєднуючи з необхідною умовою на довжину геодезичної, було знайдено оцінку знизу на кут  $\alpha$  грані правильного тетраедра, який не має простої замкненої геодезичної типу  $(p, q)$ , у сферичному просторі (див. Підрозділ 3.2, Теорема 3.4). З цього також випливає, що на правильному тетраедрі в сферичному просторі існує скінченна кількість простих замкнутих геодезичних. Кількість простих замкнутих геодезичних зменшується при збільшенні  $\alpha$ . Наприклад, на правильному тетраедрі в сферичному просторі з кутом грані  $\alpha \in [\pi/2, 2\pi/3)$  існує лише одна проста замкнута геодезична (з точністю до ізометрій тетраедра). Ця геодезична має тип  $(0, 1)$ .

У останньому Підрозділі 3.4 ми розглянули центральну (геодезичну) проекцію двовимірної сфери на евклідову площину. Отже, ми змогли оцінити знизу відстань від вершин правильного тетраедра у сферичному просторі до простої замкненої геодезичної типу  $(p, q)$  на ньому. З цього випливала оцінка вище на кут  $\alpha$  грані правильного тетраедра, за якої цей тетраедр у сферичному просторі містить просту замкнену геодезичну типу  $(p, q)$ . Пізніше ця оцінка була вдосконалена в роботі Борисенка [5].

## Розділ 4

# Прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у просторі Лобачевського

*Результати цього Розділу опубліковані у роботах [11], [42].*

### 4.1 Необхідні умови простоти замкненої геодезичної

*Правильним тетраедром  $A_1A_2A_3A_4$  у тривимірному просторі Лобачевського  $\mathbb{H}^3$  є замкнений опуклий багатогранник, усі грані якого є правильними сферичними трикутниками, і всі вершини – правильними тригранними кутами. Кут  $\alpha$  грані правильного тетраедра в  $\mathbb{H}^3$  задовольняє умовам  $0 < \alpha < \pi/3$  і довжина ребра  $a$  дорівнює*

$$a = \operatorname{arcosh} \left( \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \right). \quad (4.1)$$

Не порушуючи загальності, будемо вважати, що гаусова кривина простору Лобачевського  $\mathbb{H}^3$  дорівнює  $-1$ . Розглянемо модель Келі-Клейна простору Лобачевського. У цій моделі простір Лобачевського є внутрішністю одиничної кулі, і його геодезичні лінії є хордами кулі. Нехай центр описаної навколо правильного тетраедра сфери співпадає з центром моделі. Тоді правильний тетраедр простору Лобачевського  $A_1A_2A_3A_4$  є правильним тетраедром евклідового простору. Проста замкнена геодезична  $\gamma$  на  $A_1A_2A_3A_4$  у цій моделі є абстрактною геодезичною на евклідовому тетраедрі. З Твердження 2.2 відомо, що існує проста замкнена геодезична на

правильному тетраедрі в евклідовому просторі, еквівалентна абстрактній геодезичній. Із цього можна зробити висновок, що проста замкнена геодезична на правильному тетраедрі в  $\mathbb{H}^3$  характеризується парою взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$  і має таку ж комбінаторну структуру, як замкнена геодезична на правильному тетраедрі в евклідовому просторі.

**Лема 4.1.** *Якщо геодезична на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського перетинає підряд три ребра, які виходять з однієї вершини, і повертається на перше ребро, то така геодезична має точку самоперетину.*

*Доведення.* Нехай  $\gamma$  перетинає ребра  $A_4A_1$ ,  $A_4A_2$  і  $A_4A_3$  підряд у точках  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  відповідно, і далі знову перетинає ребро  $A_4A_1$  у точці  $Y_1$ . Якщо  $Y_1$  збігається з  $X_1$ , то очевидно, що це і є точка самоперетину  $\gamma$ .

Припустимо, що довжина  $A_4X_1$  менша довжини  $A_4Y_1$ .

Розгорнемо грані  $A_1A_2A_4$ ,  $A_4A_2A_3$  і  $A_4A_3A_1$  на площину. Розглянемо площину Лобачевського в моделі Келі-Клейна і розташуємо розгортку тетраедра так, щоб вершина  $A_4$  збігалась з центром моделі. Частина  $X_1X_2X_3Y_1$  геодезичної розгорнеться у прямолінійний відрізок всередині розгортки. Отримати трикутник  $X_1A_4Y_1$ .

Нехай  $\rho(X)$  – відстань від точки  $A_4$  до точки  $X$  на  $\gamma$ . Відомо, що якщо  $\gamma$  є геодезичною на повному однозв'язному рімановому многовиді  $M$  недовдатної кривини, то відстань  $\rho(X)$  від фіксованої точки  $A$  на  $M$  до точки  $X$  на  $\gamma$  є опуклою функцією від  $X$ . Мінімум  $\rho(X)$  досягається у точці  $H_0$  на  $\gamma$  такій, що  $A_4H_0$  перпендикулярно  $\gamma$  і  $\angle H_0A_4Y_1 > 3\alpha/2$ .

Нехай  $Z_1$  – точка відрізка  $H_0Y_1$  така, що  $\angle H_0A_4Z_1 = 3\alpha/2$ . З протилежної сторони від  $H_0$  на  $\gamma$  оберемо точку  $Z_2$  так, щоб  $\angle H_0A_4Z_2 = 3\alpha/2$ . Точка  $Z_2$  також лежить на грані тетраедра при вершині  $A_4$ .

Так як  $\angle H_0A_4Z_1 = \angle H_0A_4Z_2 = 3\alpha/2$ , то  $Z_1$  і  $Z_2$  відповідають одній точці  $Z$  на твірній  $A_4Z$ , протилежній до  $A_4H_0$  на тетраедрі. У такому випадку точка  $Z$  є точкою самоперетину  $\gamma$  (див. Рис. 4.1).  $\square$

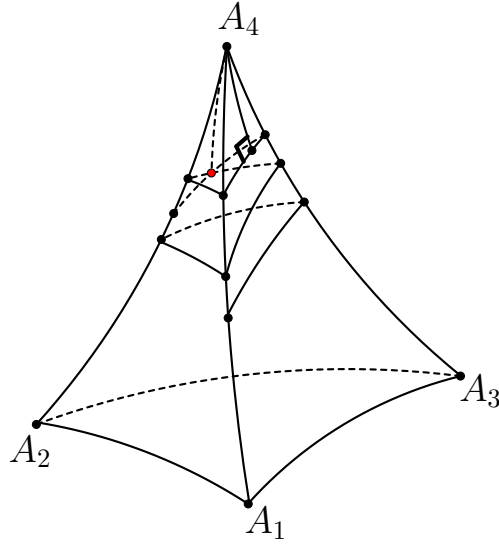


Рис. 4.1

**Лема 4.2.** Нехай  $d$  – мінімальна відстань від вершин правильного тетраедра у просторі Лобачевського до простої замкненої геодезичної на цьому тетраедрі. Тоді

$$d > \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{2\pi^3} + (\pi - 3\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi^3} - (\pi - 3\alpha)^{\frac{3}{2}}} \right), \quad (4.2)$$

де  $\alpha$  – кут грані тетраедра.

*Доведення.* Нехай  $\gamma$  – проста замкнена геодезична на правильному тетраедрі  $A_1A_2A_4A_3$  у просторі Лобачевського  $\mathbb{H}^3$ . Припустимо, що мінімальна відстань  $d$  від вершин правильного тетраедра до  $\gamma$  досягається на вершині  $A_4$  грані  $A_2A_4A_3$ . Побудуємо твірну  $A_4H$ , ортогональну до  $\gamma$  у точці  $H_0$ . Позначимо через  $\beta$  кут  $\angle A_2A_4H$ . Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що  $0 \leq \beta \leq \alpha/2$ .

Побудуємо твірну  $A_4K$  так, що кут між  $A_4K$  і  $A_4H$  дорівнює  $3\alpha/2$  на поверхні тетраедра. Тоді  $A_4K$  лежить всередині грані  $A_1A_4A_3$  і  $\angle A_1A_4K = \alpha/2 - \beta$ . Помітимо, що якщо  $\beta = \alpha/2$ , то  $A_4K$  співпадає з  $A_4A_1$ . Якщо  $\beta = 0$ , то  $A_4K$  співпадає з висотою грані тетраедра і має найменшу довжину  $h$  (див. Рис. 4.2).



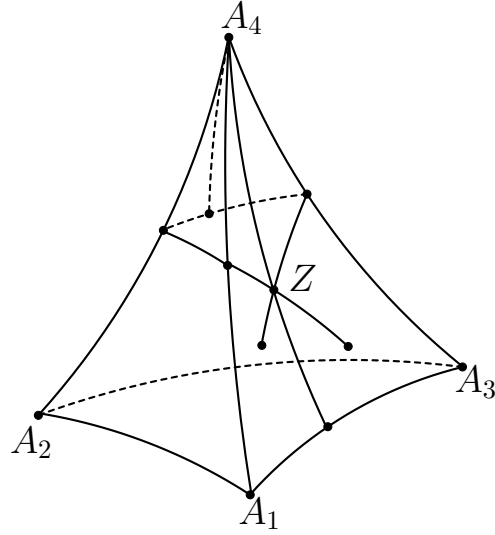


Рис. 4.2

Розріжемо тригранний кут при вершині  $A_4$  вздовж твірної  $A_4K$  та розгорнемо його на площину Лобачевського у моделі Келі-Клейна. Розташуємо вершину  $A_4$  у центрі моделі. Розгорткою тригранного кута є опуклий багатокутник  $K_1A_4K_2A_3A_2A_1$ , де  $\angle K_1A_4K_2 = 3\alpha$ . Відрізок  $A_4H$  відповідає бісектрисі кута  $K_1A_4K_2$ . Геодезична  $\gamma$  є прямолінійним відрізком всередині розгортки, який є ортогональним до  $A_4H$  у точці  $H_0$ .

Оберемо точки  $P_1$  і  $P_2$  на відрізках  $A_4K_1$  і  $A_4K_2$  відповідно так, що  $|A_4P_1| = |A_4P_2| = h$ . Відрізок  $P_1P_2$  є ортогональним до  $A_4H$  у точці  $H_p$ , і

$$\tanh |A_4H_p| = \cos(3\alpha/2) \tanh h.$$

Якщо  $d \leq |A_4H_p|$ , то  $\gamma$  розташована вище відрізка  $P_1P_2$  на розгортці, а отже перетинає  $A_4K_1$  і  $A_4K_2$  у точках  $Z_1$  і  $Z_2$  відповідно. Коли ми повернемо розгортку назад на тетраедр, відрізки  $A_4K_1$  і  $A_4K_2$  відобразяться у один відрізок  $A_4K$  на тетраедрі, і точки  $Z_1$  і  $Z_2$  – у одну точку  $Z$ , яка і буде точкою самоперетину  $\gamma$ .

Таким чином, для того, щоб  $\gamma$  не мала точок самоперетину необхідно, щоб  $d$  було більше довжини  $A_4H_p$ . Із цього випливає

$$\tanh d > \cos(3\alpha/2) \tanh h. \quad (4.3)$$

Висота  $h$  грані тетраедра задовольняє

$$\tanh h = \tanh a \cos \alpha/2 = \cos \alpha/2 \frac{\sqrt{2 \cos \alpha - 1}}{\cos \alpha}. \quad (4.4)$$

Поєднуючи (4.4) і (4.3), отримуємо

$$\tanh d > \cos \alpha/2 \cos(3\alpha/2) \frac{\sqrt{2 \cos \alpha - 1}}{\cos \alpha}, \quad (4.5)$$

Тепер оцінемо знизу вираз у правій частині (4.5). Розглянемо функцію  $\sqrt{2 \cos \alpha - 1}$ :

$$2 \cos \alpha - 1 = 4 \sin(\pi/6 - \alpha/2) \sin(\pi/6 + \alpha/2).$$

Так як функція  $\sin(\pi/6 + \alpha/2)$  є зростаючою на інтервалі  $(0, \pi/3)$ , то

$$\sin(\pi/6 + \alpha/2) > 1/2 \text{ when } \alpha \in (0, \pi/3).$$

Функція  $\sin(\pi/6 - \alpha/2)$  спадає на інтервалі  $(0, \pi/3)$ . З того, що  $\sin y > (2/\pi)y$ , коли  $0 < y < \pi/2$ , ми маємо

$$\sin(\pi/6 - \alpha/2) > \frac{1}{\pi} (\pi/3 - \alpha).$$

Отримуємо

$$\sqrt{2 \cos \alpha - 1} > \sqrt{\frac{2}{3\pi} (\pi - 3\alpha)}. \quad (4.6)$$

Функція  $\cos(3\alpha/2)$  спадає на інтервалі  $0 < \alpha < \pi/3$ . Вірно, що  $\cos y > 1 - (2/\pi)y$ , коли  $0 < y < \pi/2$ . Із цього слідує

$$\cos(3\alpha/2) > \frac{1}{\pi} (\pi - 3\alpha). \quad (4.7)$$

До того ж  $\cos \alpha/2 > \sqrt{3}/2$ , коли  $0 < \alpha < \pi/3$ .

Із цих нерівностей, разом з (4.6) і (4.7) ми маємо наступну оцінку

$$\tanh d > \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} (\pi - 3\alpha)^{3/2}. \quad (4.8)$$

З нерівності (4.8) випливає необхідна оцінка (4.2).  $\square$

## 4.2 Єдиність простої замкненої геодезичної на правильному тетраедрі

Для правильних тетраедрів у просторі Лобачевського виконується наступний аналог Леми 3.3

**Лема 4.3.** *На правильному тетраедрі у просторі Лобачевського проста замкнена геодезична перетинає середини двох пар протилежних ребер.*

*Доведення.* Нехай  $\gamma$  є простою замкненою геодезичною на правильному тетраедрі  $A_1A_2A_3A_4$  у просторі Лобачевського  $\mathbb{H}^3$ .

Як показано вище, правильний тетраедр у моделі Келі-Клейна простору Лобачевського реалізується правильним тетраедром евклідового простору. З Твердження 2.2 випливає, що на евклідовому тетраедрі існує проста замкнена геодезична  $\tilde{\gamma}$ , еквівалентна  $\gamma$ . Враховуючи Теорему 2.1, будемо вважати, що  $\tilde{\gamma}$  проходить через  $\tilde{X}_1$  і  $\tilde{X}_2$  – середини ребер  $A_1A_2$  і  $A_3A_4$  на тетраедрі. З Наслідку 2.1.1 випливає, що розгортка тетраедра вздовж  $\tilde{\gamma}$ , починаючи з  $\tilde{X}_1$ , є центрально симетричним багатокутником відносно точки  $\tilde{X}_2$ .

Позначимо через  $X_1$  і  $X_2$  вершини  $\gamma$  на ребрах  $A_1A_2$  і  $A_3A_4$  тетраедра в  $\mathbb{H}^3$  такі, що  $X_1$  і  $X_2$  еквівалентні точкам  $\tilde{X}_1$  і  $\tilde{X}_2$ . Розглянемо розгортку тетраедра вздовж  $\gamma$ , починаючи з точки  $X_1$ , на площині Лобачевського. Геодезична розгортається у відрізок  $X_1X'_1$  всередині розгортки.

Позначимо через  $M_1$  і  $M_2$  – середини ребер  $A_1A_2$  і  $A_3A_4$  на тетраедрі в  $\mathbb{H}^3$  відповідно. Так як поворот на кут  $\pi$  навколо прямої  $M_1M_2$  є ізометрією тетраедра, то розгортка тетраедра також є центрально-симетричним багатокутником відносно  $M_2$ .

Позначимо через  $T_1$  і  $T_2$  частини розгортки тетраедра вздовж  $X_1X_2$  і  $X_2X'_1$  відповідно. Центральна симетрія розгортки навколо точки  $M_2$  змінює місцями  $T_1$  і  $T_2$ .

Ребро  $A_1A_2$ , яке містить  $X'_1$ , відображається у ребро  $A_2A_1$ , яке містить  $X_1$ . Точка  $X'_1$  переходить у точку  $\hat{X}'_1$  так, що довжини  $A_2X_1$  та  $X'_1A_1$  рівні.

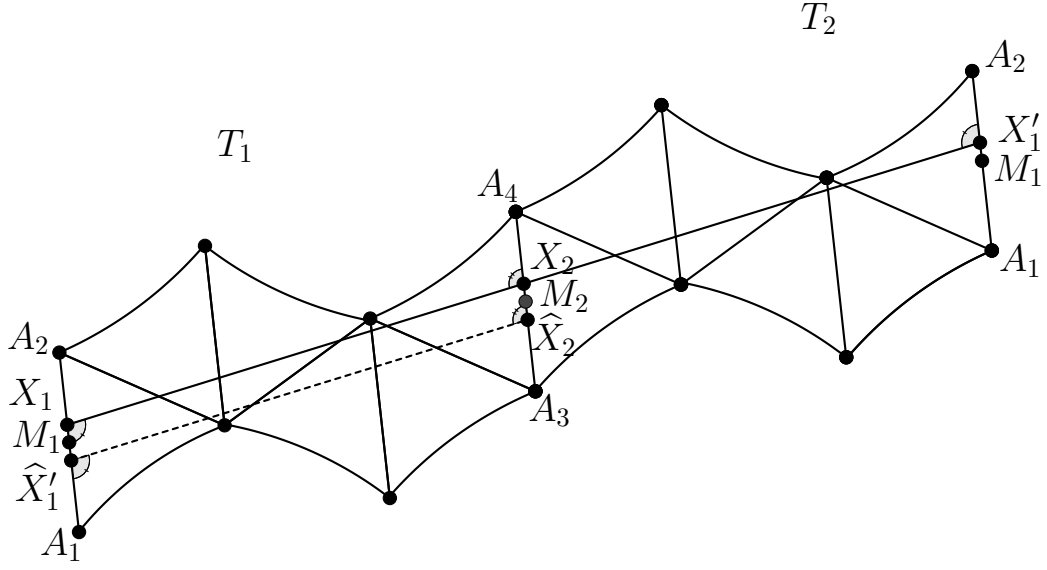


Рис. 4.3

Точку  $X_2$  центрально симетрична точці  $\widehat{X}_2$  на тому самому ребрі  $A_3A_4$ , і довжини  $A_4X_2$  та  $X'_2A_3$  рівні. До того ж  $\angle X_1X_2A_4 = \angle X'_1X'_2A_4$ . Так як геодезична  $\gamma$  замкнена, то  $\angle A_1X_1X_2 = \angle A_1X'_1X'_2$  (див. Рис. 4.3).

Отримуємо опуклий чотирикутник  $X_1X_2\widehat{X}_2\widehat{X}'_1$  всередині  $T_1$ , сума внутрішніх кутів якого дорівнює  $2\pi$ . Тоді інтеграл від  $-1$  за площею чотирикутника  $X_1X_2\widehat{X}_2\widehat{X}'_1$  на площині Лобачевського дорівнює нулю. Отже, відрізки  $X_2X'_1$  і  $X_1X_2$  є центрально-симетричними відносно точки  $M_2$ . Це означає, що точки  $X_1$  і  $X_2$  геодезичної  $\gamma$  є серединами ребер  $A_1A_2$  і  $A_3A_4$  відповідно.

Аналогічно доводиться, що  $\gamma$  перетинає середини другої пари протилежних ребер тетраедра в  $\mathbb{H}^3$ . □

**Наслідок 4.3.1.** [42] *Якщо дві прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського перетинають ребра тетраедра в однаковому порядку, то ці геодезичні співпадають.*

### 4.3 Існування простої замкненої геодезичної на правильному тетраедрі

**Теорема 4.4.** *На правильному тетраедрі у просторі Лобачевського для кожної впорядкованої пари взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$  існує і єдина, з точністю до ізометрії тетраедра, проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$ . Геодезичними типу  $(p, q)$  вичерпуються усі прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського.*

*Доведення.* Нехай  $\tilde{\gamma}$  – проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі  $\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_4$  в евклідовому просторі. Припустимо, що  $\tilde{\gamma}$  проходить через точки  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{Y}_1$  і  $\tilde{Y}_2$ , які є серединами ребер  $\tilde{A}_1\tilde{A}_2, \tilde{A}_3\tilde{A}_4$ , і  $\tilde{A}_1\tilde{A}_3$  і  $\tilde{A}_4\tilde{A}_2$  відповідно.

Розглянемо розгортку  $\tilde{T}_{pq}$  тетраедра вздовж  $\tilde{\gamma}$ , починаючи з точки  $\tilde{X}_1$ . Геодезична розгортається у прямолінійний відрізок  $\tilde{X}_1\tilde{X}'_1$  всередині  $\tilde{T}_{pq}$ . З Наслідку 2.1.1 відомо, що  $\tilde{T}_{pq}$  складається з чотирьох рівних багатокутників, і будь-які два суміжні багатокутники можна перевести один в одний поворотом на кут  $\pi$  навколо середини їх спільного ребра. Внутрішні кути  $\tilde{T}_{pq}$  дорівнюють  $\pi/3, 2\pi/3, \pi$ , або  $4\pi/3$ . Кут  $4\pi/3$  з'являється у тому разі, коли  $\tilde{\gamma}$  перетинає підряд три ребра, які виходять з однієї вершини тетраедра.

Тепер візьмемо правильні трикутники з кутом при вершині  $\alpha$  на площині Лобачевського. Складемо ці трикутники у тому ж порядку, у якому розгорталися грані правильного тетраедра вздовж  $\tilde{\gamma}$  в евклідовому просторі. Іншими словами, побудуємо багатокутник  $T_{pq}$  на площині Лобачевського, утворений такою ж послідовністю правильних трикутників, як і багатокутник  $\tilde{T}_{pq}$  в евклідовому просторі. Позначимо вершини  $T_{pq}$  у відповідності до вершин  $\tilde{T}_{pq}$ . Тоді багатокутник  $T_{pq}$  є розгорткою правильного тетраедра з кутом грані  $\alpha$  у просторі Лобачевського (див. Рис. 4.4).

Більш того, багатокутник  $T_{pq}$  має таку ж властивість симетрії, як і  $\tilde{T}_{pq}$ . Позначимо через  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  і  $X'_1$  середини ребер  $A_1A_2, A_3A_4, A_1A_3$  і  $A_2A_4$  на  $T_{pq}$  відповідно. Побудуємо прямолінійні відрізки  $X_1Y_1, Y_1X_2, X_2Y_2$ ,

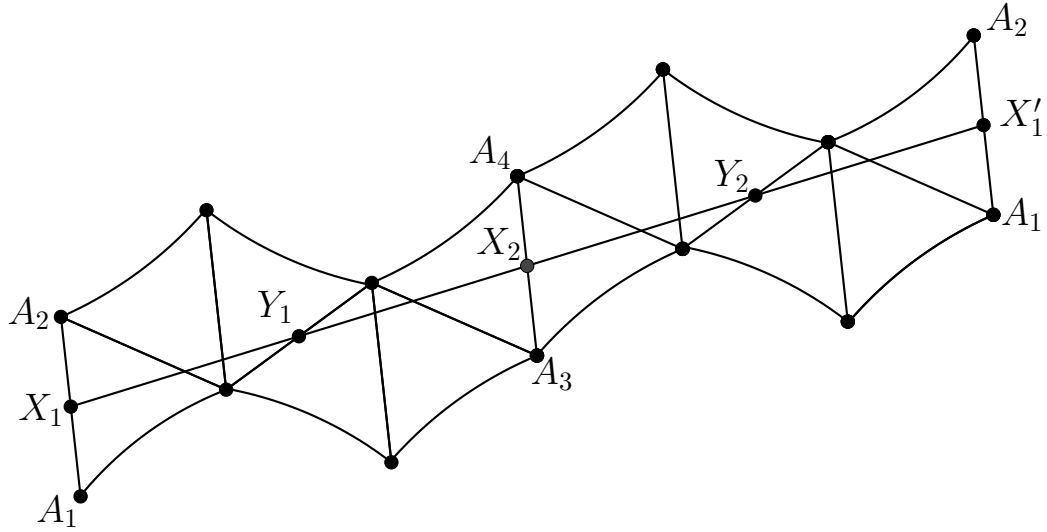


Рис. 4.4

$Y_2X'_1$ . Із властивості симетрії  $T_{pq}$  випливає, що ці прямолінійні відрізки насправді утворюють один прямолінійний відрізок  $X_1X'_1$  на розгортці. До того ж кути при вершинах  $X_1$  та  $X'_1$  такі, що якщо  $X_1X'_1$  лежить всередині розгортки, то він є простою замкненою геодезичною типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського.

За побудовою, внутрішні кути  $T_{pq}$  дорівнюють  $\alpha$ ,  $2\alpha$ ,  $3\alpha$  або  $4\alpha$ , у відповідності до евклідової розгортки.

Припустимо, що  $\alpha \in (0, \pi/4]$ . Тоді багатокутник  $T_{pq}$  є опуклим, і відрізок  $X_1X'_1$  лежить всередині нього. Із цього випливає, що відрізок  $X_1X'_1$  є простою замкненою геодезичною  $\gamma$  типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі з кутом грані  $\alpha \in (0, \pi/4]$  у просторі Лобачевського.

Тепер будемо збільшувати кут  $\alpha$ , починаючи з  $\alpha = \pi/4$ . Багатокутник  $T_{pq}$  більше не є опуклим, так як він має внутрішній кут  $4\alpha > \pi$ .

Нехай  $\alpha_0$  дорівнює супремуму  $\alpha$ , для яких відрізок  $X_1X_2$  лежить всередині розгортки  $T_{pq}$ . Припустимо, що  $\alpha_0 < \pi/3$ . Для всіх  $\alpha < \alpha_0$  відрізок  $X_1X'_1$  лежить всередині  $T_{pq}$  і відповідає простій замкненій геодезичній  $\gamma$  на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського. Відстань  $d$  від вершин тетраедра до  $\gamma$  задовольняє умові (4.2). Таким чином, існує  $\alpha_1 = \alpha_0 + \varepsilon$  та-

кий, що відрізок  $X_1X_2$  лежить всередині  $T$ . Це суперечить максимальності  $\alpha_0$ . Отже,  $\alpha_0 = \pi/3$ .

Із цього можна зробити висновок, що для будь-якого  $\alpha \in (0, \pi/3)$  на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського існує проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$ .

З Наслідку 4.3.1 випливає єдиність простої замкненої геодезичної типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі в  $\mathbb{H}^3$ . Така геодезична має по  $p$  вершин на одній парі протилежних ребер тетраедра, по  $q$  вершин на другій парі протилежних ребер тетраедра, і по  $(p + q)$  вершин на третій парі протилежних ребер тетраедра. Для кожної пари взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$ ,  $0 \leq p < q$ , існує три прості замкнені геодезичні типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі в  $\mathbb{H}^3$ . Вони переводяться одна в одну поворотом на кут  $2\pi/3$  та  $4\pi/3$  навколо висоти тетраедра, яка проведена з вершини до протилежної грані.

Так як будь-яка проста замкнена геодезична на правильному тетраедрі в  $\mathbb{H}^3$  еквівалентна простій замкненій геодезичній на правильному тетраедрі в  $\mathbb{E}^3$ , то не існує інших простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі в  $\mathbb{H}^3$ .  $\square$

У роботі [5] Борисенко довів існування нескінченного числа простих замкнених геодезичних на довільному тетраедрі у просторі Лобачевського, за умови, що кути граней тетраедра достатньо малі. Це твердження суттєво відрізняється від евклідового випадку, де не існує простої замкненої геодезичної на довільному тетраедрі.

**Теорема 4.5.** [5] *Якщо кути граней тетраедра у просторі Лобачевського не більше  $\pi/4$ , то для будь-якої пари взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$  існує проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$  на цьому тетраедрі.*

## 4.4 Асимптотика числа простих замкнених геодезичних

Нехай  $N(L, \alpha)$  – число простих замкнених геодезичних довжини не більше  $L$  на правильному тетраедрі з кутом грані  $\alpha$  у просторі Лобачевського.

**Лема 4.6.** *Якщо довжина простої замкненої геодезичної типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі простору Лобачевського не більше  $L$ , то*

$$L \geq 2(p + q) \ln \left( 2\sqrt{3} \left( 1 - \frac{3\alpha}{\pi} \right) + 1 \right),$$

де  $\alpha$  – кут грані тетраедра.

*Доведення.* Нехай  $\gamma$  – проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$ ,  $0 \leq p < q$ , на правильному тетраедрі  $A_1A_2A_3A_4$  у просторі Лобачевського.

Припустимо, що  $\gamma$  має по  $q$  вершин на ребрах  $A_1A_2$  і  $A_3A_4$ , по  $p$  вершин на  $A_1A_4$  і  $A_2A_3$  та по  $p + q$  вершин на  $A_2A_4$  і  $A_1A_3$ . Позначимо через  $B_1, \dots, B_{p+q}$  вершини геодезичної  $\gamma$  на  $A_1A_3$  та через  $B'_1, \dots, B'_{p+q}$  – точки  $\gamma$  на  $A_2A_4$ .

Розглянемо розгортку граней  $A_3A_1A_4$  і  $A_1A_4A_2$  на площину. Відрізок геодезичної, який починається у  $B_i$ , де  $i = 1, \dots, p$ , іде через ребро  $A_1A_4$  у точку  $B'_{q+i}$ . Аналогічно на розгортці граней  $A_1A_2A_3$  і  $A_2A_3A_4$  також лежать  $p$  відрізків  $\gamma$ , які з'єднують  $B'_i$  і  $B_{q+i}$ ,  $i = 1, \dots, p$  та проходять через ребро  $A_2A_3$ .

На гранях  $A_4A_1A_2$  і  $A_1A_2A_3$  відрізок геодезичної  $B_iB'_{q-(i-1)}$ ,  $i = 1, \dots, q$ , проходить через ребро  $A_1A_2$ . Аналогічно на розгортці граней  $A_2A_4A_3$  і  $A_4A_3A_1$  існує  $q$  відрізків  $B_{p+i}B'_{(p+q)-(i-1)}$ ,  $i = 1, \dots, q$  (див. Рис. 4.5).

Таким чином, геодезична  $\gamma$  складається з  $2(p+q)$  відрізків, які з'єднують протилежні ребра тетраедра. Знайдемо оцінку знизу на їх довжину.

Розглянемо чотирикутник – розгортку граней  $A_2A_1A_4$  і  $A_1A_4A_3$ . Мінімальна відстань між ребрами  $A_2A_4$  і  $A_1A_3$  досягається на відрізку  $H_1H_2$ , перпендикулярному до цих ребер. Так як кут грані тетраедра  $\alpha < \pi/3$ , то  $H_1H_2$  лежить всередині даного чотирикутника  $A_3A_1A_4A_2$  та проходить через середину  $M$  ребра  $A_1A_4$  (див. Рис. 4.6).



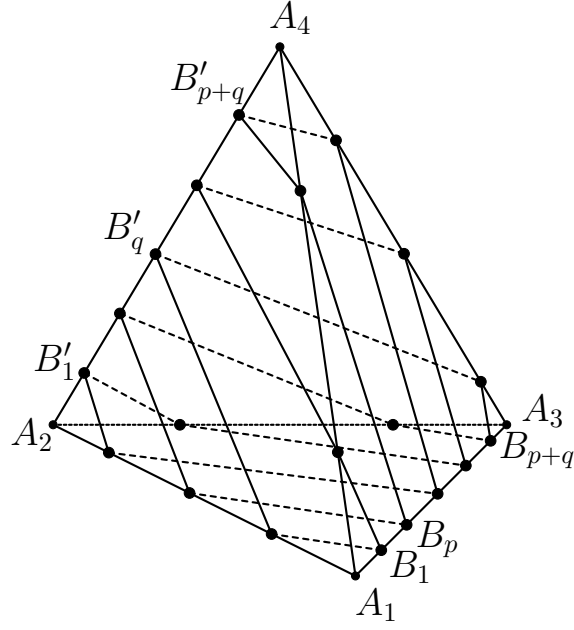


Рис. 4.5

З трикутника  $A_4MH_1$  маємо

$$\sinh |MH_1| = \sinh(a/2) \sin \alpha$$

Використовуючи (4.1), отримуємо

$$\sinh |MH_1| = \cos(\alpha/2) \sqrt{2 \cos \alpha - 1}.$$

Вірно

$$2 \cos \alpha - 1 = \frac{\cos(3\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}.$$

Отже маємо

$$\sinh |MH_1| = \sqrt{\cos(\alpha/2) \cos(3\alpha/2)}.$$

З нерівності (4.7) та  $\cos \alpha/2 > \sqrt{3}/2$  випливає

$$\sinh |MH_1| \geq \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{3\alpha}{\pi}\right)}. \quad (4.9)$$

Розглянемо функцію  $\operatorname{arsinh}(x)$ :

$$2\operatorname{arsinh}(x) = 2 \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = \ln(2x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2 + 1}) > \ln(4x^2 + 1).$$

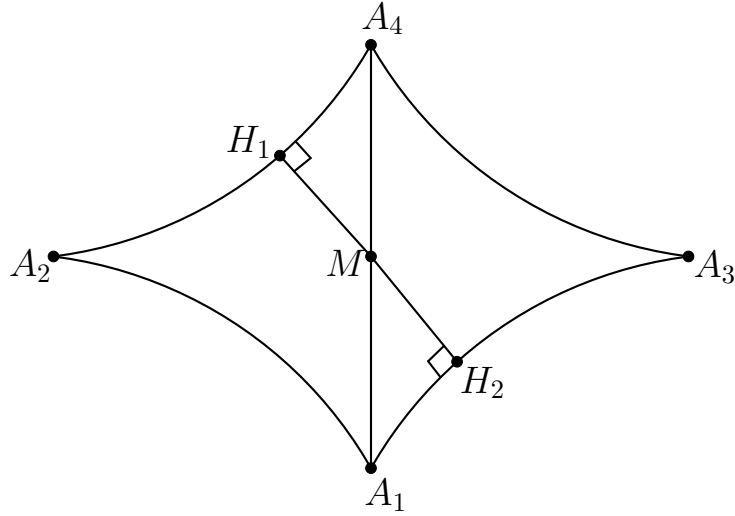


Рис. 4.6

З цієї нерівності маємо

$$|H_1 H_2| \geq \ln \left( 2\sqrt{3} \left( 1 - \frac{3\alpha}{\pi} \right) + 1 \right).$$

Таким чином, довжина  $L$  простої замкненої геодезичної  $\gamma$  типу  $(p, q)$  задовольняє

$$L \geq 2(p + q) \ln \left( 2\sqrt{3} \left( 1 - \frac{3\alpha}{\pi} \right) + 1 \right).$$

□

Функція Ейлера  $\phi(n)$  дорівнює числу натуральних чисел, які менші  $n$  та взаємно прості з  $n \in \mathbb{N}$ . З [23, Th. 330.] відомо

$$\sum_{n=1}^x \phi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \ln x), \quad (4.10)$$

де  $O(x \ln x) < Cx \ln x$ , коли  $x \rightarrow +\infty$ .

Позначимо через  $\psi(x)$  число пар взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$ , де  $p < q$  та  $p + q \leq x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Нехай  $\hat{\psi}(y)$  дорівнює числу пар взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$  таких, що  $p < q$  та  $p + q = y$ ,  $y \in \mathbb{N}$ . Тоді із визначення маємо

$$\psi(x) = \sum_{y=1}^x \hat{\psi}(y) \quad (4.11)$$

Якщо  $(p, q) = 1$  та  $p + q = y$ , то  $(p, y) = 1$  та  $(q, y) = 1$ . Розглянемо функцію Ейлера  $\phi(y)$ . Отримуємо, що множина натуральних чисел, які не більше  $y$  і взаємно прості з  $y$ , поділяється на пари взаємно простих чисел  $(p, q)$  таких, що  $p < q$  та  $p + q = y$ . Із цього випливає, що  $\phi(y)$  парне та  $\hat{\psi}(y) = \phi(y)/2$ .

З формули (4.11) маємо

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \sum_{y=1}^x \phi(y).$$

З (4.10) випливає

$$\psi(x) = \frac{3}{2\pi^2} x^2 + O(x \ln x), \quad (4.12)$$

де  $O(x \ln x) < Cx \ln x$  коли  $x \rightarrow +\infty$ .

Використовуючи цю асимптотику, доведемо наступний результат.

**Теорема 4.7.** *Нехай  $N(L, \alpha)$  – число простих замкнених геодезичних довжини не більше  $L$  на правильному тетраедрі з кутом грані  $\alpha$  у просторі Лобачевського. Тоді*

$$N(L, \alpha) = c(\alpha)L^2 + O(L \ln L), \quad (4.13)$$

де

$$c(\alpha) = \frac{9}{8\pi^2 (\ln(2\sqrt{3}(1 - 3\alpha/\pi) + 1))^2},$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}} c(\alpha) = +\infty; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} c(\alpha) = \frac{9}{8\pi^2 \ln(2\sqrt{3} + 1)}. \quad (4.14)$$

та  $O(L \ln L) \leq CL \ln L$  коли  $L \rightarrow +\infty$ .

*Доведення.* Для кожної впорядкованої пари взаємо простих натуральних чисел  $(p, q)$ ,  $p < q$  існує три різні прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі (без урахування ізометрії). Отже,

$$N(L, \alpha) = 3\psi \left( \frac{L}{2 \ln(2\sqrt{3}(1 - 3\alpha/\pi) + 1)} \right)$$

Використовуючи (4.12), отримуємо

$$N(L, \alpha) = \frac{9}{8\pi^2 (\ln(2\sqrt{3}(1 - 3\alpha/\pi) + 1))^2} L^2 + O(L \ln L),$$

коли  $L \rightarrow +\infty$ . □

## 4.5 Висновки до Розділу 4

У цьому Розділі розглядалися прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського. Кут  $\alpha$  граней тетраедра у цьому випадку задовольняє умові  $0 < \alpha < \pi/3$ . У моделі Келі-Клейна простору Лобачевського правильний тетраедр є правильним тетраедром евклідового простору. Із цього випливає, що порядок, у якому проста замкнена геодезична  $\gamma$  перетинає ребра тетраедра простору Лобачевського, визначається впорядкованою парою взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$ .

Відстань від вершин правильного тетраедра у просторі Лобачевського до простої замкненої геодезичної  $\gamma$  на ньому більше ніж  $d(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/3)$ . Ми знайшли явну формулу для  $d(\alpha)$  (див. Підрозділ 4.1, Лема 4.2). Ця властивість суттєво відрізняється від випадку евклідового та сферичного простору, де для скільки завгодно маленького  $\varepsilon > 0$  існує проста замкнена геодезична на правильному тетраедрі у такому просторі, яка проходить на відстані менше ніж  $\varepsilon$  до вершин тетраедра.

Потім ми побудували розгортку типу  $(p, q)$  правильного тетраедра на площину Лобачевського. Якщо  $\alpha \leq \pi/4$ , то ця розгортка є опуклим багаткутником, а отже містить просту замкнену геодезичну  $\gamma$  типу  $(p, q)$ . За допомогою оцінки на відстань від  $\gamma$  до вершин тетраедра, ми показали, що при збільшенні  $\alpha$  від  $\pi/4$  до  $\pi/3$ , геодезична також лежить всередині розгортки. Таким чином, на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського з кутом грані  $\alpha \in (0, \pi/3)$  існує проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$ . Геодезичними типу  $(p, q)$  вичерпуються усі прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського (див. Підрозділ 4.3).

Аналогічно до сферичного простору, кожен клас простих замкнених геодезичних типу  $(p, q)$  містить тільки одну просту замкнену геодезичну, з точністю до ізометрії тетраедра. Ця геодезична проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра (див. Підрозділ 4.2).

Далі ми проаналізували структуру розгортки вздовж геодезичної і знайшли оцінку знизу на довжину простої замкненої геодезичної типу  $(p, q)$  на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського. Із цього ми отримали, що число  $N(L, \alpha)$  простих замкнених геодезичних довжини не більше  $L$  на такому тетраедрі має порядок росту  $c(\alpha)L^2$ , коли  $L \rightarrow \infty$ . Функція  $c(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/3)$ , та  $c(\alpha) \rightarrow c_0$ , де  $c_0 > 0$ , коли  $\alpha \rightarrow 0$ .

З іншого боку, якщо кут  $\alpha$  прямує до нуля, то вершини тетраедра прямують на нескінченність. Граничний тетраедр є некомпактною поверхнею, яка гомеоморфна сфері з чотирма каспами та має повну регулярну метрику постійної кривини. Рід цієї поверхні дорівнює нулю. З роботи Рівіна [39] відомо, що число простих замкнених геодезичних на такій поверхні має порядок росту  $L^2$ . Таким чином, число простих замкнених геодезичних довжини не більше  $L$  на регулярній поверхні постійної від'ємної кривини з чотирма каспами, та на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського має однаковий порядок зростання  $L^2$ .

## Розділ 5

# Підмноговиди з індукованою метрикою обертання у просторі Лобачевського

*Результати цього Розділу опубліковані у роботах [40].*

### 5.1 Основні визначення

Нехай  $E_1^n$  є псевдоевклідовим простором, у якому скалярний добуток векторів  $X(x^0, x^1, \dots, x^n)$  і  $Y(y^0, y^1, \dots, y^n)$  дорівнює

$$\langle X, Y \rangle = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + \dots + x^n y^n, \quad (5.1)$$

Розглянемо одну частину двополосного гіперболоїда у  $E_1^n$

$$H^n = \{X(x^0, x^1, \dots, x^n) | \langle X, X \rangle = -1, x^0 > 0\}.$$

Псевдоевклідова метрика індукує метрику постійної від'ємної кривини  $-1$  на  $H^n$ .

**Визначення 5.1.** Багатовимірна ріманова метрика на многовиді  $F^l$  називається метрикою обертання, якщо існує така регулярна система координат на  $F^l$ , у якій метрика має вигляд

$$ds^2 = (du^1)^2 + \varphi^2(u^1) d\sigma^2, \quad (5.2)$$

де  $\varphi(u^1) > 0$  – регулярна функція,  $d\sigma^2$  – ріманова метрика постійної секційної кривини.

**Визначення 5.2.** Підмноговид  $F^l$  у просторі Лобачевського  $H^{l+p} \subset E_1^{l+p}$  називається підмноговидом обертання, якщо радіус-вектор  $F^l$  дорівнює

$$r(u^1, \dots, u^l) = \begin{cases} x^0 = \chi(u^1); \\ x^1 = \psi(u^1); \\ x^2 = \varphi(u^1)\rho^1(u^2, \dots, u^l); \\ \dots; \\ x^{l+p} = \varphi(u^1)\rho^{l+p-1}(u^2, \dots, u^l); \end{cases} \quad (5.3)$$

де

$$\begin{aligned} -\chi^2 + \psi^2 + \varphi^2 &= -1; \\ (\rho^1)^2 + (\rho^2)^2 + \dots + (\rho^{l+p-1})^2 &= 1. \end{aligned}$$

та  $d\sigma^2 = (d\rho^1)^2 + \dots + (d\rho^{l+p-1})^2$  є рімановою метрикою постійної секційної кривини.

Крива  $\gamma(u^1)$  з радіус-вектором

$$\gamma(u^1) = \begin{cases} x^0 = \chi(u^1); \\ x^1 = \psi(u^1); \\ x^2 = \varphi(u^1). \end{cases}$$

лежить у площині Лобачевського  $H^2 \subset E_1^2$  і  $u^1$  є натуральним параметром кривої  $\gamma$ .

Підмноговид  $F^l$  будується внаслідок обертанням кривої  $\gamma(u^1)$  навколо підмноговиду  $F^{l-1} \subset S^{l+p-2}$  в  $E_1^{l+p}$ . Радіус-вектор  $F^{l-1}$  дорівнює

$$\rho(u^2, \dots, u^l) = (0, 0, \rho^1(u^2, \dots, u^l), \dots, \rho^{l+p-1}(u^2, \dots, u^l)).$$

Підмноговид  $F^{l-1}$  має внутрішню ріманову метрику  $d\sigma^2$  постійної секційної кривини.

З (5.3) легко перевірити, що  $F^l$  допускає метрику обертання (5.2).

Розглянемо обернене питання: коли багатовимірний підмноговид  $F^l$  з індукованою метрикою обертання (5.2) буде підмноговидом обертання в  $H^{l+p}$ .

**Визначення 5.3.** Лінія  $\gamma \subset F^l \subset E_1^{l+p}$  називається лінією кривини підмноговиду  $F^l$ , якщо у кожній точці вздовж кривої дотичний вектор  $\gamma'$  є головним напрямком другої фундаментальної форми відносно кожної нормалі  $n \in NF^l$ .

**Визначення 5.4.** Дотичний напрямок  $\tau$  у точці  $Q$  до підмноговиду  $F^l$  ріманового многовиду  $M^{l+p}$  називається асимптотичним, якщо  $B_n(\tau, \tau) = 0$  для будь якої нормалі  $n \in N_Q F^l$  у точці  $Q$ , де  $B_n$  – лінійне перетворення  $T_Q F^l$ , яке відповідає другій фундаментальній формі відносно нормалі  $n$ .

## 5.2 Підмноговиди від’ємної зовнішньої кривини

**Лема 5.1.** Нехай  $F^l$  є підмноговидом у просторі Лобачевського  $H^{2l-1}$  з індукованою метрикою обертання

$$ds^2 = (du^1)^2 + \varphi^2(u^1)d\sigma^2, \quad (5.4)$$

де  $\varphi(u^1) > 0$  – регулярна функція, і  $d\sigma^2$  – ріманова метрика постійної секційної кривини. Нехай  $F^l$  має від’ємну зовнішню секційну кривину. Тоді

1. Якщо  $d\sigma^2$  є плоскою метрикою, то  $\varphi'' - \varphi > 0$  і  $(\varphi')^2 - \varphi^2 > 0$ .
2. Якщо  $d\sigma^2$  має кривину 1, то  $\varphi'' - \varphi > 0$ ,  $(\varphi')^2 - \varphi^2 > 1$  і  $\varphi' > 1$  коли  $u^1 > 0$ , та  $\varphi(0) = 0$  і  $\varphi'(0) = 1$ .
3. Якщо  $d\sigma^2$  має кривину  $-1$ , то  $\varphi'' - \varphi > 0$ ,  $(\varphi')^2 - \varphi^2 > -1$ .

*Доведення.* 1. Нехай  $d\sigma^2$  – плоска метрика. Тоді метрика обертання (5.4) дорівнює

$$ds^2 = (du^1)^2 + \varphi^2(u^1) \left( (du^2)^2 + \dots + (du^l)^2 \right). \quad (5.5)$$

У цьому випадку ненульовими символами Крістоффеля метрики  $ds^2$  є

$$\Gamma_{1i}^j = \delta_i^j \frac{\varphi'}{\varphi}, \quad \Gamma_{ij}^1 = -\delta_i^j \varphi \varphi', \quad i, j = 2, \dots, l. \quad (5.6)$$



Внутрішня секційна кривина  $F^l$  вздовж координатної площини  $\Pi_{ij}$  дорівнює

$$K(\Pi_{1j}) = -\frac{\varphi''}{\varphi}, \quad K(\Pi_{ij}) = -\frac{(\varphi')^2}{\varphi^2}, \quad i, j = 2, \dots, l.$$

З рівняння Гауса випливає, що зовнішня і внутрішня кривини підмноговиди  $F^l$  в  $H^{2l-1}$  зв'язані за формулою

$$K_{ext} = K_{int} + 1. \quad (5.7)$$

Тоді зовнішня секційна кривина  $F^l$  дорівнює

$$K_{ext}(\Pi_{1j}) = -\frac{\varphi'' - \varphi}{\varphi}, \quad K_{ext}(\Pi_{ij}) = \frac{-(\varphi')^2 + \varphi^2}{\varphi^2}, \quad i, j = 2, \dots, l.$$

Так як  $F^l$  має від'ємну зовнішню секційну кривину, то

$$\varphi'' - \varphi > 0, \quad (\varphi')^2 - \varphi^2 > 0.$$

2. Нехай  $d\sigma^2$  – метрика постійної секційної кривини 1. Тоді метрика (5.4) має вигляд

$$ds^2 = (du^1)^2 + \varphi^2(u^1) \frac{4 \left( (du^2)^2 + \dots + (du^l)^2 \right)}{(1 + (u^2)^2 + \dots + (u^l)^2)^2}.$$

У такому випадку внутрішня секційна кривина  $F^l$  вздовж координатної площини  $\Pi_{ij}$  дорівнює

$$K(\Pi_{1j}) = -\frac{\varphi''}{\varphi}, \quad K(\Pi_{ij}) = \frac{1 - (\varphi')^2}{\varphi^2}, \quad i, j = 2, \dots, l.$$

З рівняння Гауса отримуємо, що зовнішня секційна кривина  $F^l$  дорівнює

$$K_{ext}(\Pi_{1j}) = -\frac{\varphi'' - \varphi}{\varphi}, \quad K_{ext}(\Pi_{ij}) = \frac{1 - (\varphi')^2 + \varphi^2}{\varphi^2}, \quad i, j = 2, \dots, l.$$

За умовою метрика  $F^l$  є регулярною. З полярної системи координат випливає, що  $\varphi(0) = 0$  і  $\varphi'(0) = 1$ . Так як  $F^l$  має від'ємну зовнішню кривину, то при  $u^1 > 0$  маємо

$$\varphi'' - \varphi > 0, \quad (\varphi')^2 - \varphi^2 > 1. \quad (5.8)$$

3. Нехай  $d\sigma^2$  – метрика постійної секційної кривини  $-1$ . Тоді метрика (5.4) дорівнює

$$ds^2 = (du^1)^2 + \varphi^2(u^1) \frac{4 \left( (du^2)^2 + \dots + (du^l)^2 \right)}{(1 - (u^2)^2 - \dots - (u^l)^2)^2}.$$

Аналогічно отримуємо

$$K(\Pi_{1j}) = -\frac{\varphi''}{\varphi}, \quad K(\Pi_{ij}) = \frac{-1 - (\varphi')^2}{\varphi^2}, \quad i, j = 2, \dots, l.$$

Зовнішня секційна кривина  $F^l$  дорівнює

$$K_{ext}(\Pi_{1j}) = -\frac{\varphi'' - \varphi}{\varphi}, \quad K_{ext}(\Pi_{ij}) = \frac{-1 - (\varphi')^2 + \varphi^2}{\varphi^2}, \quad i, j = 2, \dots, l.$$

З того, що  $F^l$  має від'ємну зовнішню кривину, маємо

$$\varphi'' - \varphi > 0, \quad (\varphi')^2 - \varphi^2 > -1.$$

□

Позначимо через  $r = r(u^1, \dots, u^l)$  радіус-вектор підмноговиду  $F^l$  у просторі Лобачевського  $H^{2l-1} \subset E_1^{2l-1}$ . Позначимо  $\partial r / \partial u^i$  через  $r_i$ , та  $\partial^2 r / (\partial u^i \partial u^j)$  через  $r_{ij}$ .

**Лема 5.2.** *Нехай  $F^l$  є  $C^3$ -регулярним підмноговидом простору Лобачевського  $H^{2l-1} \subset E_1^{2l-1}$  з індукованою метрикою обертання від'ємної зовнішньої кривини. Якщо координатні лінії  $u^1$  є лініями кривини підмноговиду  $F^l$ , то ранг відображення*

$$\tilde{r} = \frac{\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2 - \varphi^2}} r - \frac{\varphi}{\sqrt{(\varphi')^2 - \varphi^2}} r_1 \quad (5.9)$$

дорівнює один.

*Доведення.* Нехай  $b_{ij}^\alpha$  – коефіцієнти другої фундаментальної форми підмноговиду  $F^l$  відносно ортонормованого базису нормалей  $n^\alpha$ ,  $\alpha = 0, \dots, l-1$ . Так як  $F^l$  знаходиться у просторі Лобачевського  $H^{2l-1} \subset E_1^{2l-1}$ , то  $n^0 = r$ . Тоді

$$b_{11}^0 = -\langle r_{11}, n^0 \rangle = \langle r_1, r_1 \rangle = 1.$$

Так як координатні лінії  $u^1$  є лініями кривини підмноговиду  $F^l$ , то

$$b_{1j}^\alpha = 0, \quad j = 2, \dots, l, \quad \alpha = 0, \dots, l-1.$$

Знайдемо матрицю Якобі відображення (5.9):

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 &= \left( \frac{\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2 - \varphi^2}} \right)' r + \frac{\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2 - \varphi^2}} r_1 - \left( \frac{\varphi}{\sqrt{(\varphi')^2 - \varphi^2}} \right)' r_1 - \frac{\varphi}{\sqrt{(\varphi')^2 - \varphi^2}} r_{11}; \\ \tilde{r}_j &= \frac{\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2 - \varphi^2}} r_j - \frac{\varphi}{\sqrt{(\varphi')^2 - \varphi^2}} r_{1j}, \quad j = 2, \dots, l. \end{aligned}$$

За формулами Вейнгартена для  $F^l \subset H^{l+1} \subset E_1^{l+1}$  (див. [16, §64]) вірно

$$r_{ij} = \Gamma_{ij}^k r_k + \sum_{\alpha=0}^{l-1} b_{ij}^\alpha n^\alpha$$

Використовуючи (5.6), отримуємо

$$r_{11} = r + \sum_{\alpha=1}^{l-1} b_{11}^\alpha n^\alpha, \quad r_{1j} = \frac{\varphi'}{\varphi} r_j, \quad j = 2, \dots, l.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 &= \frac{-\varphi^2 (\varphi'' - \varphi)}{((\varphi')^2 - \varphi^2)^{3/2}} r + \frac{\varphi \varphi' (\varphi'' - \varphi)}{((\varphi')^2 - \varphi^2)^{3/2}} r_1 - \sum_{\alpha=1}^{l-1} \frac{\varphi}{\sqrt{(\varphi')^2 - \varphi^2}} b_{11}^\alpha n^\alpha \neq 0; \\ \tilde{r}_j &= 0, \quad j = 2, \dots, l. \end{aligned}$$

Із цього слідує, що ранг матриці Якобі відображення (5.9) дорівнює 1, та  $\tilde{r}$  залежить тільки від змінної  $u^1$ , тобто  $\tilde{r} = \Phi(u^1)$ .  $\square$

**Теорема 5.3.** *Нехай  $F^l$  є  $C^3$ -регулярним підмноговидом простору Лобачевського  $H^{2l-1} \subset E_1^{2l-1}$  з індукованою метрикою обертання від'ємної зовнішньої кривини*

$$ds^2 = (du^1)^2 + \varphi^2(u^1) d\sigma^2, \quad (5.10)$$

*де  $\varphi(u^1)$  – додатна регулярна функція, і  $d\sigma^2$  – ріманова метрика постійної секційної кривини. Якщо координатні лінії  $u^1$  є лініями кривини підмноговиду  $F^l$ , то  $F^l$  є підмноговидом обертання.*

*Доведення.* 1. Нехай  $d\sigma^2$  – плоска метрика. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2 - \varphi^2}} r - \frac{\varphi}{\sqrt{(\varphi')^2 - \varphi^2}} r_1 = \Phi(u^1) \quad (5.11)$$

відносно вектор-функції  $r$ . Розв'язком цього рівняння є

$$r(u^1, \dots, u^l) = -\varphi(u^1) \int_0^{u^1} \frac{\sqrt{(\varphi'(t))^2 - \varphi^2(t)}}{\varphi^2(t)} \Phi(t) dt + \varphi(u^1) C(u^2, \dots, u^l).$$

Розглянемо константу  $\lambda = \frac{\sqrt{(\varphi'(0))^2 - \varphi^2(0)}}{\varphi(0)\varphi'(0)}$ , і запишемо  $r$  наступним чином:

$$\begin{aligned} r = \varphi(u^1) \left( \lambda \Phi(0) - \int_0^{u^1} \frac{\sqrt{(\varphi'(t))^2 - \varphi^2(t)}}{\varphi^2(t)} \Phi(t) dt \right) + \\ + \varphi(u^1) (C(u^2, \dots, u^l) - \lambda \Phi(0)). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Позначимо

$$\psi(u^1) = \varphi(u^1) \left( \lambda \Phi(0) - \int_0^{u^1} \frac{\sqrt{(\varphi'(t))^2 - \varphi^2(t)}}{\varphi^2(t)} \Phi(t) dt \right); \quad (5.13)$$

$$\rho(u^2, \dots, u^l) = C(u^2, \dots, u^l) - \lambda \Phi(0).$$

З вибору константи  $\lambda$ , отримуємо

$$\psi(0) = \frac{\sqrt{(\varphi'(0))^2 - \varphi^2(0)}}{\varphi'(0)} \Phi(0); \quad (5.14)$$

$$\psi'(0) = 0. \quad (5.15)$$

Радіус-вектор  $r$  підмноговиду  $F^l$  дорівнює

$$r = \psi(u^1) + \varphi(u^1) \rho(u^2, \dots, u^l).$$

Вектори, дотичні до координатних ліній  $F^l$  мають форму

$$r_1 = \psi'(u^1) + \varphi'(u^1) \rho(u^2, \dots, u^l).$$

$$r_j = \varphi(u^1) \rho_j(u^2, \dots, u^l), \quad j = 2, \dots, l.$$

Так як  $F^l$  має індуковану метрику обертання (5.5), то

$$g_{11} = \langle \psi', \psi' \rangle + 2\varphi' \langle \psi', \rho \rangle + (\varphi')^2 \langle \rho, \rho \rangle = 1. \quad (5.16)$$

$$g_{1j} = \varphi \langle \psi', \rho_j \rangle + \varphi \varphi' \langle \rho, \rho_j \rangle = 0. \quad (5.17)$$

$$g_{ij} = \varphi^2 \langle \rho_i, \rho_j \rangle = \varphi^2 \delta_i^j, \quad i, j = 2, \dots, l. \quad (5.18)$$

Розглянемо рівняння (5.16) коли  $u^1 = 0$ . Використовуючи (5.15), ми отримуємо, що

$$\langle \rho, \rho \rangle = \frac{1}{(\varphi'(0))^2}.$$

Тоді підмноговид  $F^{l-1}$  з радіус-вектором  $\rho = \rho(u^2, \dots, u^l)$  лежить на сфері  $S_R^{2l-3} \subset E^{2l-2}$  радіуса  $R = 1/\varphi'(0)$ . З (5.18) випливає, що  $F^{l-1}$  має плоску внутрішню метрику.

Покажемо, що  $F^{l-1}$  не лежить у евклідовому просторі  $E^{2l-3}$ . Припустимо протилежне. Тоді  $F^{l-1}$  є підмноговидом на сфері  $S_R^{2l-4} \subset E^{2l-3}$ . З рівняння Гауса слідує, що зовнішня кривина  $F^{l-1}$  дорівнює

$$K_{ext}(F^{l-1}) = -(\varphi'(0))^2.$$

Відомо, що якщо підмноговид  $F^m$  ріманового многовиду  $M^{m+p}$  має від'ємну зовнішню кривину, то  $p \geq m - 1$  [8, Теорема 3.2.2]. У нашому випадку  $m = l - 1$  і  $M^{m+p} = S^{2l-4}$ . Отримуємо, що ковимірність  $F^{l-1}$  дорівнює  $p = l - 3 = m - 2$ . Із цього протиріччя випливає, що  $F^{l-1}$  лежить на сфері  $S_R^{2l-3} \subset E^{2l-2}$ .

Так як  $\langle r, r_j \rangle = 0$ , то  $\langle \psi, \rho_j \rangle = 0$ . Коли  $u^1 = 0$  то з (5.14) випливає

$$\langle \Phi(0), \rho_j \rangle = 0.$$

З (5.17) маємо, що  $\langle \psi', \rho_j \rangle = 0$ . Продиференціюємо це рівняння відносно  $u^1$ :

$$\langle \psi'', \rho_j \rangle = 0, \quad \langle \psi''', \rho_j \rangle = 0, \quad \langle \psi^{(4)}, \rho_j \rangle = 0, \dots \quad (5.19)$$

Розглянемо (5.19) у точці  $u^1 = 0$ . З (5.13) отримуємо

$$\psi^{(k)}(0) \in \text{Lin}\{\Phi(0), \Phi'(0), \Phi''(0), \dots, \Phi^{(k-1)}(0)\}.$$

Таким чином для всіх  $u^2, \dots, u^l$  виконується

$$\langle \Phi'(0), \rho_j \rangle = 0, \quad \langle \Phi''(0), \rho_j \rangle = 0, \quad \langle \Phi'''(0), \rho_j \rangle = 0, \dots \quad (5.20)$$

Ці рівняння є вірними для всіх  $u^1$ , тому ми можемо перезаписати (5.20) наступним чином:

$$\langle \Phi'(u^1), \rho \rangle = c_0(u^1), \quad \langle \Phi''(u^1), \rho \rangle = c_1(u^1), \quad \langle \Phi'''(u^1), \rho \rangle = c_2(u^1), \dots \quad (5.21)$$

З (5.11) слідує, що  $\langle \Phi(u^1), \Phi(u^1) \rangle = -1$ . Розглянемо підпростір  $L$  у  $E_1^{2l-1}$  такий, що

$$L = \text{Lin}\{\Phi'(u^1), \Phi''(u^1), \Phi'''(u^1), \dots\}.$$

Якщо  $\dim L = 3$  то з (5.21) випливає, що підмноговид  $F^{l-1}$  лежить у евклідовому просторі  $E^{2l-3}$ . Як ми довели вище, цього не може бути. Отже  $\dim L = 2$  вздовж кожної точки кривої  $\Phi(u^1)$ . Таким чином,  $\Phi(u^1)$  лежить у площині  $E_1^1 \subset E_1^{2l-1}$ , і підмноговид  $F^{l-1}$  є ортогональним до  $\Phi(u^1)$ .

Оберемо ортогональну координатну систему так, щоб площина  $E_1^1$  співпадала з площиною  $x^0 O x^1$ , де  $O$  – центр координат. Тоді

$$\Phi(u^1) = (\mu(u^1), \nu(u^1), 0, \dots, 0).$$

Використовуючи (5.12), ми отримуємо, що радіус-вектор підмноговиду  $F^l$  дорівнює

$$r = \begin{cases} x^0 = \chi(u^1); \\ x^1 = \psi(u^1); \\ x^2 = \varphi(u^1)\rho^1(u^2, \dots, u^l); \\ \dots; \\ x^{l+p} = \varphi(u^1)\rho^{l+p-1}(u^2, \dots, u^l). \end{cases}$$

Із цього слідує, що підмноговид  $F^l$  є підмноговидом обертання. Це доводить частину 1 Теорема 5.3.

2. Нехай  $d\sigma^2$  – метрика постійної секційної кривини 1.

Розглянемо  $u_0^1$  таке, що  $u^1 > u_0^1 > 0$ . Припустимо, що  $u_0^1 = 0$ . Кожен підмноговид  $u^1 = u_0^1$  належить сфері  $S_R^{2l-3} \subset E^{2l-2}$  де  $R = 1/\varphi'(u_0^1)$ . З частини 2 Лема 5.1 отримуємо, що  $\varphi'(u^1) > 1$ ,  $\varphi''(u^1) > 1$  для  $u^1 > 0$ . Таким чином  $F^l$  лежить всередині сфери  $S$  радіуса 1. Більш того, ця сфера  $S$  є опорною сферою до  $F^l$  у точці  $u^1 = 0$ . Нормаль  $n$  до сфери  $S$  співпадає з нормаллю до  $F^l$  у точці  $u^1 = 0$  в  $H^{2l-1}$ . Із цього можна зробити висновок, що друга фундаментальна форма  $F^l$  є додатно визначеною формою відносно нормалі  $n$ . А тоді на ній немає асимптотичних напрямків у точці  $u^1 = 0$ .

З іншого боку  $F^l$  має від'ємну зовнішню секційну кривину в  $H^{2l-1}$ . Тоді  $F^l$  має  $2^{l-1}$  асимптотичних напрямки у кожній точці [7, Лема 3.2.1]. Із цього протиріччя випливає, що  $u_0^1 > 0$ .

Підмноговид  $F^{l-1}$  з радіус-вектором  $\rho$  має внутрішню метрику постійної кривини 1 і лежить на сфері  $S_R^{2l-3} \subset E^{2l-2}$  радіуса  $R = 1/\varphi'(u_0^1)$ . Зовнішня кривина  $K_{ext}(F^{l-1})$  підмноговиду  $F^{l-1}$  дорівнює

$$K_{ext}(F^{l-1}) = 1 - (\varphi'(u_0^1))^2 < 0.$$

Аналогічно як і в частині 1 доводиться, що крива  $\Phi(u^1)$  лежить у площині  $E_1^1 \subset E_1^{2l-1}$ , і  $\Phi(u^1)$  ортогональна  $F^{l-1}$ .

Оберемо ортогональну координатну систему так, щоб площина  $E_1^1$  співпадала з площиною  $x^0 O x^1$ . Таким чином, отримуємо, що підмноговид  $F^l$  є підмноговидом обертання.

3. Випадок, коли  $d\sigma^2$  є метрикою постійної секційної кривини  $-1$ , доводиться аналогічно випадку 1 теореми.  $\square$

### 5.3 Підмноговид нульової зовнішньої кривини

Нехай  $L^l$  – гіперповерхня постійної кривини в  $H^{l+1}$ , та  $F^{l-1}$  – підмноговид в  $L^l$ . Через кожну точку  $F^{l-1}$  побудуємо геодезичну  $\gamma$  у напрямку, дотичному до нормалі  $L^l$  в  $H^{l+1}$ . Отримуємо поверхню  $F^l$  з одновимірною твірною над підмноговидом  $F^{l-1}$  в  $H^{l+1}$ . Розглянемо  $H^{l+1}$  у моделі Келі-Клейна

всередині одиничної кулі. Тоді

- 1) Якщо всі геодезичні  $\gamma$  перетинаються у точці всередині кулі, то  $F^l$  є **конусом**.
- 2) Якщо всі геодезичні  $\gamma$  перетинаються у точці на абсолюті моделі, то  $F^l$  є **асимптотичним конусом**.
- 3) Якщо всі геодезичні  $\gamma$  не перетинаються, або перетинаються у точці за межами моделі, то  $F^l$  є **циліндром** з одновимірною твірною.

**Теорема 5.4.** *Нехай  $F^l$  є регулярною гіперповерхнею у просторі Лобачевського  $H^{l+1}$  з індукованою метрикою обертання нульової зовнішньої секційної кривини*

$$ds^2 = (du^1)^2 + \varphi^2(u^1)d\sigma^2, \quad (5.22)$$

де  $\varphi(u^1) > 0$  – регулярна функція, і  $d\sigma^2$  – ріманова метрика постійної секційної кривини. Нехай координатні лінії  $u^1$  є лініями кривини  $F^l$ .

1. Якщо  $d\sigma^2$  є метрикою постійної секційної кривини  $-1$ , то  $F^l$  є циліндром з одновимірною твірною над локальним ізометричним зануренням області простору Лобачевського  $H^{l-1}$  в  $H^l$ .
2. Якщо  $d\sigma^2$  є метрикою постійної секційної кривини  $1$ , то  $F^l$  є конусом з одновимірною твірною над локальним ізометричним зануренням області на одиничній сфері  $S^{l-1}$  у одиничну сферу  $S^l \subset H^{l+1}$ .
3. Якщо  $d\sigma^2$  є метрикою нульової секційної кривини, то  $F^l$  є асимптотичним конусом з одновимірною твірною над локальним ізометричним зануренням області евклідового простору  $E^{l-1}$  до орисфери  $E^l \subset H^{l+1}$ .

*Доведення.* Розглянемо визначення нуль-індексу (див. [6]).

**Визначення 5.5.** Зовнішнім нуль-індексом  $\mu(Q)$  в точці  $Q$  підмноговиду  $F^l$  ріманового многовиду  $M^{l+p}$  називається максимальна розмірність



підпростору  $L(Q)$  дотичного простору  $T_Q F^l$  такого, що  $B_n x = 0$  для кожного вектору  $x \in L(Q)$  і кожної нормалі  $n \in N_Q F^l$  в точці  $Q$ , де  $B_n$  – лінійне перетворення  $T_Q F^l$ , яке відповідає другій фундаментальній формі відносно нормалі  $n$ .

Черн і Кейпер (див. [12]) довели, що для підмноговидів  $F^l$  нульової зовнішньої кривини у рімановому просторі  $M^{l+p}$  зовнішній нуль-індекс задовольняє нерівності

$$\mu \geq l - p.$$

У нашому випадку нуль-індекс підмноговиду  $F^l$  у  $H^{l+1}$  дорівнює  $\mu(Q) = l - 1$  для кожної точки  $Q$  на  $F^l$ . Таким чином нуль-розшарування  $L(Q)$  є інтегрованим, і шари  $SL(Q)$  є цілком геодезичними підмноговидами постійної кривини  $-1$  у  $H^{l+1}$ . Нормаль  $n$  є сталою вздовж шара  $SL(Q)$  (див. [31]).

Розглянемо наступні випадки:

1) Цілком геодезичні шари  $SL(u^1) \subset F^l$  є ортогональними до координатних ліній  $u^1$ .

Так як  $F^l$  має індуковану метрику обертання (5.22), то шари  $SL(u^1)$  мають внутрішню метрику секційної кривини  $K_\sigma / \varphi^2(u^1)$ , де  $K_\sigma$  – постійна кривина метрики  $d\sigma^2$ . З того, що  $SL(u^1)$  має постійну кривину  $-1$ , випливає, що  $\varphi(u^1)$  є сталою функцією.

Зовнішня секційна кривина  $F^l \subset H^{l+1}$  вздовж координатної площини  $\Pi_{1j}$  дорівнює

$$K_{ext}(\Pi_{1j}) = -\frac{\varphi''}{\varphi} + 1.$$

Так як  $\varphi(u^1)$  стала, то  $F^l$  має ненульову зовнішню кривину. Із цього протиріччя отримуємо, що випадок 1) є неможливим.

2) Координатні лінії  $u^1$  належать шарам  $SL(Q)$ .

2.1) Нехай  $d\sigma^2$  є рімановою метрикою постійної від'ємної кривини  $-1$ . Із того, що підмноговид  $F^l$  має нульову зовнішню секційну кривину, випливає

$$\varphi'' - \varphi = 0, \quad (\varphi')^2 - \varphi^2 = -1.$$

Тоді  $\varphi = \cosh(u^1)$  та  $\varphi(u^1) > 0$  для всіх  $u^1 \geq 0$ . Метрика на  $F^l$  має вигляд

$$ds^2 = (du^1)^2 + \cosh^2(u^1)d\sigma^2. \quad (5.23)$$

Нехай  $r = r(u^1, \dots, u^l)$  – радіус-вектор підмноговиду  $F^l$ . Розглянемо відображення

$$\tilde{r} = -\sinh u^1 r + \cosh u^1 r_1. \quad (5.24)$$

Знайдемо ранг матриці Якобі цього відображення

$$\tilde{r}_1 = \cosh u^1 (-r + r_{11}); \quad \tilde{r}_j = -\sinh u^1 r_j + \cosh u^1 r_{1j}. \quad (5.25)$$

Нехай  $n$  є нормаллю до  $F^l$  в  $H^{l+1}$ , та  $b_{ij}$  – коефіцієнти другої фундаментальної форми. Координатні лінії  $u^1$  є лініями кривини підмноговиду  $F^l$ , а отже  $b_{1j} = 0$ ,  $j = 2, \dots, l$ . Так як лінії  $u^1$  належать шарам  $SL(Q)$ , то  $b_{11} = 0$ .

За формулами Вейнгартена для  $F^l \subset H^{l+1}$  (див. [16, §64]) отримуємо

$$r_{11} = \Gamma_{11}^k r_k + r + b_{11} n, \quad r_{1j} = \Gamma_{1j}^k r_k + b_{1j} n.$$

Прямим підрахунком знаходимо

$$\Gamma_{11}^k = 0, \quad \Gamma_{1j}^1 = 0, \quad \Gamma_{1j}^i = \delta_i^j \frac{\sinh u^1}{\cosh u^1}, \quad k = 1, \dots, l, \quad j, i = 2, \dots, l.$$

Отже

$$r_{11} = r, \quad r_{1j} = \frac{\sinh u^1}{\cosh u^1} r_j, \quad (5.26)$$

Підставивши (5.26) до рівностей (5.25), отримуємо, що ранг матриці Якобі відображення (5.24) дорівнює 0. З цього можна зробити висновок, що  $\tilde{r}$  є сталим вектором, і  $\langle \tilde{r}, \tilde{r} \rangle = 1$ . Оберемо ортогональну систему координат так, що вісь  $x^{l+1}$  співпадає з  $\tilde{r}$ , тобто  $\tilde{r} = (0, 0, \dots, 1) = e_{l+1}$ .

Розглянемо диференціальне рівняння

$$-\sinh u^1 r + \cosh u^1 r_1 = e_{l+1}.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно вектор-функції  $r$ , отримуємо

$$r = \sinh u^1 e_{l+1} + \cosh u^1 \rho(u^2, \dots, u^l), \quad (5.27)$$

де  $\rho = \rho(u^2, \dots, u^l) \in$  вектором в  $E_1^{l+1}$ .

Підмноговид  $F^l \subset H^{l+1}$  з радіус-вектором  $r$  має метрику (5.23). Розглянемо рівняння

$$\langle r, r \rangle = \sinh^2 u^1 + \cosh u^1 \sinh u^1 \langle e_{l+1}, \rho \rangle + \cosh^2 u^1 \langle \rho, \rho \rangle = -1. \quad (5.28)$$

$$\langle r_1, r_1 \rangle = \cosh^2 u^1 + \cosh u^1 \sinh u^1 \langle e_{l+1}, \rho \rangle + \sinh^2 u^1 \langle \rho, \rho \rangle = 1. \quad (5.29)$$

Віднімемо (5.28) від (5.29). Отримаємо

$$1 + (\sinh^2 u^1 - \cosh^2 u^1) \langle \rho, \rho \rangle = 2.$$

Із цього випливає, що  $\langle \rho, \rho \rangle = -1$  для всіх  $u^1$ .

З рівності  $\langle r, r_1 \rangle = 0$  маємо

$$\begin{aligned} \cosh u^1 \sinh u^1 + \sinh^2 u^1 \langle e_{l+1}, \rho \rangle + \cosh^2 u^1 \langle e_{l+1}, \rho \rangle + \\ + \cosh u^1 \sinh u^1 \langle \rho, \rho \rangle = 0; \end{aligned}$$

$$(\sinh^2 u^1 + \cosh^2 u^1) \langle e_{l+1}, \rho \rangle = 0.$$

З цього рівняння ми отримуємо, що  $\rho^{l+1}(u^2, \dots, u^l) = 0$  для будь-якого  $u^1$ .

Таким чином, з (5.27) випливає, що радіус-вектор підмноговиду  $F^l$  дорівнює

$$r = \begin{cases} x^0 = \cosh u^1 \rho^0(u^2, \dots, u^l); \\ x^1 = \cosh u^1 \rho^1(u^2, \dots, u^l); \\ \dots; \\ x^l = \cosh u^1 \rho^l(u^2, \dots, u^l); \\ x^{l+1} = \sinh u^1. \end{cases}$$

Оскільки  $F^l$  має метрику обертання (5.23), то

$$\langle r_i, r_j \rangle = \cosh^2 u^1 \langle \rho_i, \rho_j \rangle = \cosh^2 u^1 \sigma_{ij}, \quad i, j = 2, \dots, l.$$

де  $\sigma_{ij}$  є коефіцієнтами метрики  $d\sigma^2$ .

Звідси випливає, що перетин  $F^l$  з гіперболічним простором  $H^l$ , який є ортогональним до координатних ліній  $u^1$  в точці  $u^1 = 0$ , є підмноговидом  $F^{l-1}$  з радіус-вектором  $\rho = \rho(u^2, \dots, u^l)$ . До того ж  $F^{l-1}$  має внутрішню метрику постійної секційної кривини  $-1$ . Координатні лінії  $u^1$  на  $F^l$  збігаються з геодезичними лініями  $H^{l+1}$ , які ортогональні до підпростору  $H^l$ , що містить  $F^{l-1}$ . Отримуємо, що підмноговид  $F^l$  в  $H^{l+1}$  є циліндром з одновимірною твірною над  $F^{l-1}$ .

2.2) Нехай  $d\sigma^2$  є рімановою метрикою постійної кривини 1.

Так як підмноговид  $F^l$  має нульову зовнішню секційну кривину, то

$$\varphi'' - \varphi = 0, \quad (\varphi')^2 - \varphi^2 = 1.$$

Із розв'язку цих диференціальних рівнянь отримуємо, що  $\varphi = \sinh(u^1)$  і  $\varphi(u^1) > 0$  для всіх  $u^1 > 0$ . Отже, метрика підмноговиду  $F^l$  має вигляд

$$ds^2 = (du^1)^2 + 4 \sinh^2 u^1 \frac{((du^2)^2 + \dots + (du^l)^2)}{(1 + (u^2)^2 + \dots + (u^l)^2)^2}. \quad (5.30)$$

Аналогічно до частини 2.1) розглянемо відображення

$$\tilde{r} = \cosh u^1 r - \sinh u^1 r_1.$$

Ранг матриці Якобі цього відображення дорівнює 0. Це означає, що  $\tilde{r}$  є сталим вектором і  $\langle \tilde{r}, \tilde{r} \rangle = -1$ . Розглянемо таку ортогональну систему координат, що вісь  $x^{l+1}$  співпадає з  $\tilde{r}$ , тобто  $\tilde{r} = (1, 0, \dots, 0) = e_0$ .

З диференціального рівняння

$$\cosh u^1 r - \sinh u^1 r_1 = e_0.$$

отримуємо, що радіус-вектор  $F^l$  дорівнює

$$r = \cosh u^1 e_0 + \sinh u^1 \rho(u^2, \dots, u^l), \quad (5.31)$$

де  $\rho = \rho(u^2, \dots, u^l)$  – вектор в  $E_1^{l+1}$ .

Підмноговид  $F^l \subset H^{l+1}$  з радіус-вектором  $r$  має метрику (5.30). Аналогічно з  $\langle r, r \rangle = -1$  і  $\langle r_1, r_1 \rangle = 1$  випливає, що  $\langle \rho, \rho \rangle = 1$  для будь-якого  $u^1$ .

Тоді з рівняння  $\langle r, r_1 \rangle = 0$  маємо

$$(\sinh^2 u^1 + \cosh^2 u^1) \langle e_0, \rho \rangle = 0.$$

Отримуємо, що  $\rho^0(u^2, \dots, u^l) = 0$  для будь-якого  $u^1$ .

Таким чином радіус-вектор підмноговида  $F^l$  дорівнює

$$r = \begin{cases} x^0 = \cosh u^1; \\ x^1 = \sinh u^1 \rho^1(u^2, \dots, u^l); \\ \dots; \\ x^l = \sinh u^1 \rho^l(u^2, \dots, u^l); \\ x^{l+1} = \sinh u^1 \rho^{l+1}(u^2, \dots, u^l). \end{cases}$$

Оскільки  $F^l$  має метрику обертання (5.30), то

$$\langle r_i, r_j \rangle = \sinh^2 u^1 \langle \rho_i, \rho_j \rangle = \sinh^2 u^1 \sigma_{ij}, \quad i, j = 2, \dots, l.$$

де  $\sigma_{ij}$  є коефіцієнтами метрики  $d\sigma^2$ .

Отримуємо, що якщо  $u^1 > 0$ , то підмноговид  $F^{l-1}$  з радіус-вектором  $\rho(u^2, \dots, u^l)$  є локально ізометричним зануренням області на сфері  $S^{l-1}$  у сферу  $S^l \subset H^{l+1}$ . Геодезичні координатні лінії  $u^1$  збігаються з геодезичними простору  $H^{l+1}$  які ортогональні до сфери  $S^l$ . З особливості полярних координат отримуємо, що всі координатні прямі  $u^1$  перетинаються у початку системи координат. Отже, підмноговид  $F^l$  є конусом з одновимірною твірною над  $F^{l-1} \subset S^l$ .

2.3) Нехай  $d\sigma^2$  – плоска метрика. З того, що підмноговид  $F^l$  має нульову зовнішню секційну кривину, випливає

$$\varphi'' - \varphi = 0, \quad (\varphi')^2 - \varphi^2 = 0.$$

Тоді  $\varphi(u^1) = e^{-u^1}$ ,  $\varphi(0) = 1$ . Таким чином, метрика підмноговиду  $F^l$  має вигляд

$$ds^2 = (du^1)^2 + e^{-2u^1} \left( (du^2)^2 + \dots + (du^l)^2 \right). \quad (5.32)$$

Аналогічно попереднім частинам розглянемо відображення

$$\tilde{r} = e^{-u^1} r + e^{-u^1} r_1.$$

Ранг цього відображення також дорівнює 0. Із цього робимо висновок, що  $\tilde{r}$  є постійним вектором і  $\langle \tilde{r}, \tilde{r} \rangle = 0$ . Візьмемо систему координат у  $E_1^{l+1}$  таку, що

$$\tilde{r} = (1, 1, 0, \dots, 0) = e_0 + e_1 \text{ in } E_1^{l+1}.$$

Тоді радіус-вектор  $F^l$  дорівнює

$$r = \cosh u^1 e_0 + \sinh u^1 e_1 + e^{-u^1} \rho(u^2, \dots, u^l).$$

З рівності  $\langle r, r \rangle = -1$  прямим обчисленням отримуємо

$$e^{-2u^1} \langle \rho, \rho \rangle = -2e^{-u^1} \cosh u^1 \langle e_0, \rho \rangle - 2e^{-u^1} \sinh u^1 \langle e_1, \rho \rangle. \quad (5.33)$$

Так як  $\langle r, r_1 \rangle = 0$  то

$$e^{-u^1} (\sinh u^1 - \cosh u^1) \langle e_0, \rho \rangle + e^{-u^1} (\cosh u^1 - \sinh u^1) \langle e_1, \rho \rangle - e^{-2u^1} \langle \rho, \rho \rangle = 0. \quad (5.34)$$

З (5.33) і (5.34) випливає, що  $\langle e_0, \rho \rangle + \langle e_1, \rho \rangle = 0$ . Це означає, що  $\rho_0 = \rho_1$ . Отже підмноговид  $F^{l-1}$  з радіус-вектором  $\rho$  належить орисфері  $E^l \subset H^{l+1}$ . Оскільки  $F^l$  має метрику обертання (5.32), то  $F^{l-1}$  має внутрішню плоску метрику.

Радіус-вектор підмноговиду  $F^l$  має вигляд

$$r = \begin{cases} x^0 = \cosh u^1 + e^{-u^1} \rho^0(u^2, \dots, u^l); \\ x^1 = \sinh u^1 + e^{-u^1} \rho^0(u^2, \dots, u^l); \\ x^2 = e^{-u^1} \rho^2(u^2, \dots, u^l); \\ \dots; \\ x^{l+1} = e^{-u^1} \rho^{l+1}(u^2, \dots, u^l). \end{cases}$$

Отже, ми отримали, що якщо  $u^1 > 0$ , то підмноговид  $F^{l-1}$  з радіус-вектором  $\rho(u^2, \dots, u^l)$  є локально ізометричним зануренням області евклідового простору  $E^{l-1}$  до орисфери  $E^l \subset H^{l+1}$ . Координатні лінії  $u^1$  збігаються з геодезичними лініями  $H^{l+1}$ , які ортогональні до орисфери  $E^l$ .

Розглянемо  $H^{l+1}$  у моделі Келі-Клейна всередині одиничної кулі. Тоді усі координатні лінії  $u^1$  перетинаються у фіксованій точці на абсолюті моделі (точці на нескінченності). Таким чином, підмноговид  $F^l$  є асимптотичним конусом з одновимірною твірною над  $F^{l-1} \subset E^l$ .  $\square$

## 5.4 Підмноговиди додатної зовнішньої кривини

**Теорема 5.5.** *Нехай  $F^l$  є підмноговидом у просторі Лобачевського  $H^{2l-1}$  з індукованою метрикою обертання додатної зовнішньої кривини.*

1. *Якщо  $l > 2$ , то  $F^l$  є підмноговидом обертання.*
2. *Якщо  $l = 2$  і координатні лінії  $u^1$  є лініями кривини, то  $F^2$  є поверхнею обертання в  $H^3$ .*

*Доведення.* 1. Метрика обертання має вигляд

$$ds^2 = (du^1)^2 + \varphi^2(u^1)d\sigma^2, \quad (5.35)$$

де  $d\sigma^2$  – метрика постійної кривини.

Доведення є аналогічним для всіх випадків, коли кривина  $d\sigma^2$  дорівнює  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ . Розглянемо випадок, коли  $d\sigma^2$  є метрикою постійної секційної кривизни  $1$ . Тоді функція  $\varphi$  задовольняє наступним умовам:  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) = 1$  і  $\varphi''(u^1) - \varphi(u^1) < 0$ ,  $(\varphi'(u^1))^2 - \varphi^2(u^1) < 1$  при  $u^1 > 0$ .

Розглянемо гіперповерхню обертання  $F^l \subset H^{l+1} \subset E_1^{l+2}$ ,  $l > 2$ , з радіус-вектором

$$r(u^1, \dots, u^l) = \begin{cases} x^0 = h(u^1); \\ x^1 = g(u^1); \\ x^2 = f(u^1)\rho^1(u^2, \dots, u^l); \\ x^3 = f(u^1)\rho^2(u^2, \dots, u^l); \\ \dots; \\ x^{l+1} = f(u^1)\rho^l(u^2, \dots, u^l). \end{cases} \quad (5.36)$$

де  $\rho = (\rho^1(u^2, \dots, u^l), \dots, \rho^l(u^2, \dots, u^l))$  є радіус-вектором одиничної сфери  $S^{l-1}$

$$(\rho^1)^2 + (\rho^2)^2 + \dots + (\rho^l)^2 = 1.$$

Так як  $F^l$  належить гіперболоїду  $H^{l+1}$ , то  $\langle r, r \rangle = -1$ . Тоді

$$-h^2 + g^2 + f^2 = -1. \quad (5.37)$$

Припустимо, що  $F^l$  має індуковану метрику обертання (5.35). Тоді

$$g_{11} = -(h')^2 + (g')^2 - (f')^2 = 1. \quad (5.38)$$

$$\varphi^2 d\sigma^2 = f^2 d\rho^2. \quad (5.39)$$

З рівняння (5.39) випливає, що  $f(u^1) = \varphi(u^1)$ . Розглянемо рівняння (5.37) та (5.38)

$$\begin{cases} -h^2 + g^2 + \varphi^2 = -1. \\ -(h')^2 + (g')^2 + (\varphi')^2 = 1. \end{cases} \quad (5.40)$$

Розв'язком системи (5.40) є

$$\begin{aligned} g(u^1) &= \sqrt{1 + \varphi^2(u^1)} \sinh \alpha(u^1), \\ h(u^1) &= \sqrt{1 + \varphi^2(u^1)} \cosh \alpha(u^1), \end{aligned}$$

де

$$\alpha(u^1) = \int_0^{u^1} \frac{\sqrt{1 - (\varphi'(t))^2 + \varphi^2(t)}}{1 + \varphi^2(t)} dt.$$

Отримали гіперповерхню обертання  $F^l$  з індукованою метрикою обертання додатної зовнішньої кривини у просторі Лобачевського  $H^{l+1}$ .

Тепер розглянемо дві ізометричні гіперповерхні обертання  $F_1$  і  $F_2$  в  $H^{l+1}$  з індукованою метрикою обертання додатної зовнішньої секційної кривини.

Радіуси-вектори цих поверхонь дорівнюють

$$r_k = \begin{cases} x_k^0 = x_k^0(u^1, \dots, u^l); \\ x_k^1 = x_k^1(u^1, \dots, u^l); \\ \dots; \\ x_k^{l+1} = x_k^{l+1}(u^1, \dots, u^l), \end{cases} \quad k = 1, 2.$$



Розглянемо перетворення Погорєлова (див. [36]), яке відображає ізометричні гіперповерхні  $F_1^l, F_2^l \subset H^{l+1}$  у гіперповерхні  $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2^l$  в евклідовому просторі  $E^{l+1}$ . Радіус-вектори  $\tilde{F}_1$  і  $\tilde{F}_2^l$  дорівнюють

$$\tilde{F}_1 : \tilde{r}_1 = \frac{r_1 + \langle r_1, e_0 \rangle e_0}{x_1^0 + x_2^0}, \quad \tilde{F}_2 : \tilde{r}_2 = \frac{r_2 + \langle r_2, e_0 \rangle e_0}{x_1^0 + x_2^0},$$

де  $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$  – координатний вектор вздовж осі  $x^0$ .

Гіперповерхні  $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$  також є ізометричними (див. [36, Теорема 2]). Коефіцієнти других фундаментальних форм гіперповерхонь  $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$  у початку координат дорівнюють

$$\tilde{b}_{ij}^1(0) = \frac{b_{ij}^1(0)}{2}, \quad \tilde{b}_{ij}^2(0) = \frac{b_{ij}^2(0)}{2},$$

де  $b_{ij}^1$  і  $b_{ij}^2$  є коефіцієнтами другої фундаментальної форми підмноговидів  $F_1$  і  $F_2$  відповідно.

Оскільки другі фундаментальні форми гіперповерхонь  $F_1$  і  $F_2$  є додатно визначеними формами рангу  $l$ , то другі фундаментальні форми  $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$  також додатно визначені.

Якщо  $l \geq 3$ , то ранги других фундаментальних форм  $\tilde{F}_1$  і  $\tilde{F}_2$  в  $E^{l+1}$  теж  $\geq 3$ . Оскільки  $\tilde{F}_1$  і  $\tilde{F}_2$  є ізометричними, то вони збігаються з точністю до жорсткого руху в евклідовому просторі  $E^{l+1}$  [26, Теорема 6.2]. З властивостей перетворення Погорєлова отримуємо, що ізометричні гіперповерхні обертання  $F_1^l$  і  $F_2^l$  також збігаються з точністю до жорсткого руху в просторі Лобачевського  $H^{l+1}$ .

2) Для  $l = 2$  доведення подібне до доведення теореми 5.3. □

## 5.5 Висновки до Розділу 5

У цьому Розділі була знайдена умова, за якої ізометричне занурення підмноговида  $F^l$  малої ковимірності з індукованою метрикою обертання у гіперболічний простір  $H^{l+p}$  є підмноговидом обертання. Розглядалися три природні випадки, а саме, коли  $F^l$  має від’ємну, нульову і додатну зовнішню секційну кривину.

Якщо  $F^l$  є підмноговидом простору Лобачевського  $H^{2l-1}$  з індукованою метрикою обертання від'ємної зовнішньої секційної кривини, і геодезичні координатні лінії є лініями кривини, то  $F^l$  є підмноговидом обертання (див. Підрозділ 5.2, Теорема 5.3). Цей результат є узагальненням результату Борисенка [9], у якому об'ємлюючий простір є евклідовим  $\mathbb{E}^{2l-1}$ .

Зазначимо, що умова  $p = l - 1$  у цьому випадку є природною, так як не існує підмноговиду від'ємної зовнішньої секційної кривини, що має ковимірність  $< l - 1$ .

Далі розглядалися регулярні гіперповерхні  $F^l$  простору Лобачевського  $H^{l+1}$  з індукованою метрикою обертання нульової зовнішньої секційної кривини. Доведено, що якщо геодезичні координатні лінії цієї метрики є лініями кривини  $F^l$ , то підмноговид  $F^l$  є або циліндром, або конусом, або асимптотичним конусом з одновимірною твірною. У моделі Келі-Клейна простору Лобачевського циліндр реалізується або евклідовим циліндром, або конусом з вершиною поза межами моделі, конус є евклідовим конусом з вершиною в середині моделі, та асимптотичний конус є евклідовим конусом з вершиною на граничній сфері моделі, тобто на абсолюті (див. Підрозділ 5.3, Теорема 5.4). На відміну від випадку від'ємної зовнішньої секційної кривини, ізометричне занурення підмноговиду з індукованою метрикою обертання нульової зовнішньої секційної кривизни не є підмноговидом обертання. Цей випадок також відрізняється від випадку, коли об'ємлюючий простір є евклідовим. Зокрема, асимптотичний конус не існує в евклідовому просторі.

Якщо  $F^l$  є регулярним підмноговидом простору Лобачевського  $H^{l+1}$  з індукованою метрикою обертання додатної зовнішньої секційної кривини і  $l > 2$ , то  $F^l$  є підмноговидом обертання. Для доведення цього твердження ми використали перетворення Погорєлова простору Лобачевського на евклідовий простір. Якщо  $l = 2$ , то поверхня  $F^2$  з індукованою метрикою обертання додатної зовнішньої секційної кривини у просторі Лобачевського  $H^3$  буде поверхнею обертання за умови, якщо геодезичні координатні

лінії є лініями кривини цієї поверхні (див. Підрозділ 5.4, Теорема 5.5). Цей результат є подібним до випадку евклідового об'ємлюючого простору (див. [9])

Аналогічні результати вірні для підмноговидів малої ковимірності з індукованою метрикою обертання у сферичному просторі.

## Загальні висновки

Дисертаційна робота присвячена знаходженню класифікації простих замкнених геодезичних на правильних тетраедрах у сферичному просторі та у просторі Лобачевського. Класифікація замкнених геодезичних на правильному тетраедрі в евклідовому просторі впливає зі стандартної триангуляції евклідової площини. Вершини триангуляції допускають однозначне позначення, узгоджене з вершинами тетраедра. Розгортка тетраедра вздовж будь-якої замкненої геодезичної є частиною триангуляції.

Кути граней правильного тетраедра в евклідовому просторі дорівнюють  $\pi/3$ . Кривина такого тетраедра зосереджена лише у його вершинах. Кривина тетраедра у сферичному просторі або у просторі Лобачевського визначається як вершинами, так і гранями, які мають кривину відповідно 1 або  $-1$ . У сферичному просторі кут  $\alpha$  граней тетраедра задовольняє умовам  $\pi/3 < \alpha < 2\pi/3$ . У просторі Лобачевського кут  $\alpha$  граней задовольняє  $0 < \alpha < \pi/3$ . До того ж не існує розбиття сферичної площини або площини Лобачевського правильними трикутниками з довільним кутом  $\alpha$ . Отже, поведінка простих замкнених геодезичних відрізняється залежно від кривини об'ємлюючого простору.

Порядок, у якому проста замкнена геодезична  $\gamma$  перетинає ребра тетраедра визначається впорядкованою парою взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$ . Цей факт не залежить від кривини граней тетраедра.

На правильному тетраедрі в евклідовому просторі для кожної впорядкованої пари взаємно простих чисел  $(p, q)$  існує цілий клас простих замкнутих геодезичних типу  $(p, q)$ , з точністю до ізометрії тетраедра. Всередині розгортки тетраедра геодезичні одного класу є паралельними одна одній.

Ми довели, що кожен клас містить просту замкнену геодезичну, яка проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра. Звідси випливає властивість симетрії розгортки правильного тетраедра вздовж простої замкненої геодезичної (див. Розділ 2 та [42]). Зазначимо, що так як група поворотів тетраедра однакова незалежно від кривини об'ємлюючого простору, то ця властивість симетрії розгортки тетраедра також виконується у сферичному просторі та у просторі Лобачевського.

На відміну від евклідового простору, на правильному тетраедрі у сферичному просторі або у просторі Лобачевського, кожен клас простих замкнених геодезичних типу  $(p, q)$  (якщо він існує) містить лише одну просту замкнену геодезичну, з точністю до ізометрії тетраедра. Ця геодезична проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра.

На правильному тетраедрі у сферичному просторі існує скінченна кількість простих замкнених геодезичних. Довжина простої замкнутої геодезичної у такому випадку менша  $2\pi$ .

У роботі знайдено оцінку знизу на кут  $\alpha$  граней правильного тетраедра у сферичному просторі, за якої такий тетраедр не має простої замкненої геодезичної типу  $(p, q)$ . Наприклад, якщо  $\alpha$  задовольняє умовам  $\pi/2 \leq \alpha < 2\pi/3$ , то на правильному тетраедрі в сферичному просторі з кутом граней  $\alpha$  є лише одна проста замкнута геодезична (з точністю до ізометрії тетраедра), і вона має тип  $(0, 1)$ . Геодезична типу  $(1, 1)$  існує лише на правильних тетраедрах з кутом граней  $\alpha \in (\pi/3, \pi/2)$  (див. Розділ 3 та [42]).

Також дано оцінку зверху на кут  $\alpha$  граней правильного тетраедра у сферичному просторі, за якої на такому тетраедрі існує проста замкнена геодезична типу  $(p, q)$ .

Правильний тетраедр у просторі Лобачевського має нескінченну кількість простих замкнутих геодезичних. У роботі доведено, що для будь-якої впорядкованої пари взаємно простих натуральних чисел  $(p, q)$ , на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського існує і єдина проста замкнута

геодезична типу  $(p, q)$ , з точністю до ізометрії тетраедра. Ця геодезична проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра. Геодезичними типу  $(p, q)$  вичерпуються усі прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського.

Також ми показали, що число простих замкнутих геодезичних довжини не більше  $L$  на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського має порядок зростання  $L^2$ , коли  $L$  прагне до нескінченності (див. Розділ 4 та [42]). Якщо кут  $\alpha$  прямує до нуля, то вершини тетраедра прямують на нескінченність. Граничний тетраедр є некомпактною поверхнею, яка гомеоморфна сфері з чотирма каспами та має повну регулярну метрику постійної кривини. Рід цієї поверхні дорівнює нулю. З роботи Рівіна [39] відомо, що число простих замкнених геодезичних на такій поверхні має порядок росту  $L^2$ . Таким чином, число простих замкнених геодезичних довжини не більше  $L$  на регулярній поверхні постійної від'ємної кривини з чотирма каспами, та на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського має однаковий порядок зростання  $L^2$ , коли  $L$  прагне до нескінченності.

Деякі властивості простих замкнутих геодезичних на правильному тетраедрі впливають з групи симетрій тетраедра. Група симетрій тетраедра є скінченною підгрупою групи поворотів двовимірної сфери. У роботі також розглядалися підмноговиди, група ізометрії яких містить групу поворотів сфери, а саме підмноговиди обертання. Досліджувалося питання, за якої умови підмноговид малої кривини з індукованою метрикою обертання є підмноговидом обертання у просторі Лобачевського. Природньо розглядалися три окремі випадки, коли підмноговид має від'ємну, нульову і додатну зовнішню секційну кривину. Простір Лобачевського у цьому випадку розглядався як гіперплощина з індукованою метрикою постійної від'ємної кривини у псевдоевклідовому просторі. Отримані результати є узагальненням теорем, доведених у роботі Борисенка [9] для підмноговидів евклідового простору.

Доведено, що підмноговид  $F^l$  простору Лобачевського  $H^{2l-1}$  з індукова-

ною метрикою обертання від'ємної зовнішньої секційної кривини є підмноговидом обертання за умови, якщо геодезичні координатні лінії є лініями кривини  $F^l$ .

Якщо  $F^l$  є підмноговидом простору Лобачевського  $H^{l+1}$  з індукованою метрикою обертання нульової зовнішньої секційної кривини, і геодезичні координатні лінії є лініями кривини, то  $F^l$  є або конусом, або асимптотичним конусом, або циліндром з однією твірною.

Якщо  $F^l$  є регулярним підмноговидом простору Лобачевського  $H^{l+1}$  з індукованою метрикою обертання додатної зовнішньої секційної кривини і  $l > 2$ , то  $F^l$  є підмноговидом обертання. Якщо  $l = 2$ , то для того, щоб поверхня  $F^2$  з індукованою метрикою обертання додатної зовнішньої секційної кривини у просторі Лобачевського  $H^3$  була поверхнею обертання, необхідно, щоб геодезичні координатні лінії були лініями кривини цієї поверхні.

## Список використаних джерел

- [1] Akopyan, A., Petrunin, A.: A Long Geodesics on Convex Surfaces. *Math Intelligencer*. **40**, 26–31 (2018).
- [2] Alexandrov, A.D.: *Convex Polyhedra*, Springer Berlin, Heidelberg (2005).
- [3] Alexandrov, A.D., *Intrinsic Geometry of Convex Surfaces*, Chapman and Hall/CRC, NY (2005).
- [4] Ballmann, W.: Der Satz von Lusternik und Schnirelmann. Beiträge zur Differentialgeometrie, Heft 1, Bonner Math. Schriften 102, Universität Bonn, 1–25 (1978) (German).
- [5] Borisenko, A.A.: A necessary and sufficient condition for the existence of simple closed geodesics on regular tetrahedra in spherical space. *Sb. Math.* **213**(2), 161–172 (2022).
- [6] Borisenko, A.A.: Cylindrical multidimensional surfaces in Lobachevsky space. *J. Sov. Math.* **53**, 474–480 (1991).
- [7] Borisenko, A.A.: Extrinsic geometry of parabolic and saddle multidimensional manifolds. *Russian Math. Surveys*. **53**(6), 1111–1158 (1998).
- [8] Borisenko, A.A.: Isometric immersions of space forms into Riemannian and pseudo-Riemannian spaces of constant curvature. *Russian Math. Surveys*. **56**(3), 425–497 (2001).
- [9] Borisenko, A.A.: On the structure of multidimensional submanifolds with metric of revolution in Euclidean space. *J. Math. Phys. Anal. Geom.* **15**(2), 192–202 (2019).



- [10] Borisenko, A.A.: The estimation of the length of a convex curve in two-dimensional Alexandrov space. *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.* **16**(3), 221–227 (2020).
- [11] Borisenko, A.A., Sukhorebska, D.D.: A classification of simple closed geodesics on regular tetrahedra in the Lobachevsky space. *Reports of the National Academy of Science of Ukraine*, **4**, 3–9 (2019).
- [12] Chern, S.S., Kuiper, N.H.: Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifold in Euclidean space. *Ann. Math.* **56**, 422–430 (1956).
- [13] Cohn-Vossen, S.E.: *Some Problems of Differential Geometry in the Large*, Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., M. (1959) (Russian).
- [14] Cotton, A., Freeman, D., Gnepp, A., Ng, T., Spivack, J., Yoder, C.: The isoperimetric problem on some singular surfaces. *J. Aust. Math. Soc.*, **78**(2), 167–197 (2005).
- [15] Davis, D., Dods, V., Traub, C., Yang, J.: Geodesics on the regular tetrahedron and the cube. *Discrete Math.* **340**(1), 3183–3196 (2017).
- [16] Eisenhart, L.P.: *Riemannian Geometry* (1926).
- [17] Fet, A. I.: *Variational problems on closed manifolds*, Amer. Math. Soc. Transl. **90**, 15–41 (1953).
- [18] Fuchs, D., Fuchs, E.: Closed geodesics on regular polyhedra. *Mosc. Math. J.* **7**(2), 265–279 (2007).
- [19] Fuchs, D.: Geodesics on a regular dodecahedron. MPIM Preprint, Bonn, **91**, 1–14 (2009). <https://archive.mpim-bonn.mpg.de/id/eprint/802>
- [20] Fuchs, D.: Geodesics on regular polyhedra with endpoints at the vertices. *Arnold Math J.* **2**, 201–211 (2016).

- [21] Galperin, G.: Convex polyhedra without simple closed geodesics. Regul. Chaotic Dyn. **8**(1), 45–58 (2003).
- [22] Hadamard, J.: Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. J. Math. Pures et Appl. **4**(5), 27–74 (1898) (French).
- [23] Hardy, G.H., Wright, E.M.: *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, London (1975).
- [24] Huber, H.: Zur analytischen Theorie hyperbolischen Raumformen und Bewegungsgruppen. Mathematische Annalen, **138**(1), 1–26 (1959) (German).
- [25] Huber, H.: Zur analytischen Theorie hyperbolischen Raumformen und Bewegungsgruppen II. Mathematische Annalen, **143**, 463–464 (1961) (German).
- [26] Kobayashi, S., Nomizu, K.: *Foundations of Differential Geometry*. **2**, IntersciencePublishers, New York-London-Sydney (1969).
- [27] Lawson, K.A., Parish, J.L., Traub, C.M., Weyhaupt, A.G.: Coloring graphs to classify simple closed geodesics on convex deltahedra. Int. J. Pure Appl. Math., **89**(2), 123–139 (2013).
- [28] Lyusternik, L. A., Fet A. I.: Variational problems on closed manifolds. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **81**, 17–18 (1951) (Russian).
- [29] Lyusternik, L.A., Shnirelman, L.G.: Sur le problème de trois géodésique fermées sur les surfaces de genre 0. C. R. Acad. Sci. Paris **189**, 269–271 (1929) (French).
- [30] Lyusternik, L.A., Shnirelman, L.G.: Topological methods in variational problems and their application to the differential geometry of surfaces. Uspekhi Mat. Nauk **2**(1), 166–217 (1947) (Russian).
- [31] Maltz, R.: The nullity spaces of curvature like tensors. J. Diff. Geom. **6**, 219–299 (1972).

- [32] Mirzakhani, M.: Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces. *Ann. of Math.* **168**(1), 97–125 (2008).
- [33] O’Rourke, J., Vîlcu, C.: Simple closed quasigeodesics on tetrahedra. *Information*, **13**, 238 (2022).
- [34] Pogorelov, A.V.: *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1973).
- [35] Pogorelov, A.V.: One theorem about geodesic lines on a closed convex surface. *Mat. Sb.* **18**(1), 181–183 (1946) (Russian).
- [36] Pogorelov, A.V.: On the transformation of isometric surfaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **122**(1), 20–21 (1958) (Russian).
- [37] Poincaré, H.: Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. *Trans. Amer. Math. Soc.* **6**, 237–274 (1905) (French).
- [38] Protasov, V.Yu.: Closed geodesics on the surface of a simplex. *Sb. Math.* **198**(2), 243–260 (2007).
- [39] Rivin, I.: Simple curves on surfaces. *Geom. Dedicata* **87**, 345–360 (2001).
- [40] Sukhorebska, D.: Multidimensional Submanifolds with Metric of Revolution in Hyperbolic Space. *J. Math. Phys. Anal. Geom.* **18**:2, 269–285 (2022).
- [41] Sukhorebska, D.: Necessary condition for the existence of a simple closed geodesic on a regular tetrahedron in the spherical space. *Reports of the National Academy of Sciences Ukraine*, **10**, 9–14 (2020).
- [42] Sukhorebska, D.: Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature. *J. Math. Phys. Anal. Geom.*, **4**, 562–610 (2022).
- [43] Taimanov, I. A.: Closed extremals on two-dimensional manifolds. *Russian Math. Surveys*, **47**, 163–211 (1992).
- [44] Toponogov, V. A.: Estimation of the length of a convex curve on a two-dimensional surface. *Sibirsk. Mat. Zh.* **4**(5), 1189–1183 (1963) (Russian).

- [45] Vaigant, V. A., Matukevich, O. Yu.: Estimation of the length of a simple geodesic on a convex surface. *Sibirsk. Mat. Zh.* **42**(5), 833–845 (2001).