Анотація

Сухоребська Д.Д. "Прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у просторах постійної кривини", - кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «математика» (галузь знань 11 «математика та статистика»). Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України.

Предметом дослідження дисертаційної роботи є прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у тривимірному сферичному просторі та просторі Лобачевського.

Лінія називається геодезичною, якщо вона є локально найкоротшою. Це означає, що для будь-яких близьких точок на цій лінії відрізок геодезичної меж ними є найкоротшим серед усіх відрізків на поверхні, що з'єднують ці точки. На опуклому багатограннику геодезична має наступні властивості: 1) геодезична складається з прямолінійних відрізків на гранях багатогранника; 2) геодезична формує рівні кути з ребром на сусідніх гранях; 3) геодезична не проходить через вершину опуклого багатогранника. Геодезична називається простою, якщо вона не має точок самоперетину і не накручуються на себе.

У Розділі 1 представлено огляд літератури про властивості геодезичних на регулярних поверхнях додатної і від'ємної кривини та на багатогранниках у евкладовому просторі.

Грані тетраедра у евклідовому просторі мають нульову гаусову кривину. Кривина тетраедра сконцентрована лише у його вершинах. Кут грані тетраедра визначений однозначно і дорівнює $\pi/3$. Розгортка правильного тетраедра вздовж геодезичної є частиною тріангуляції евклідової площини правильними трикутниками. Вершини тріангуляції допускають однозначне позначення, узгоджене з позначеннями вершин розгортки тетраедра. З цього факту слідує повна класифікація замкнених геодезичних на правильному тетраедрі у евклідовому просторі.

У сферичному просторі та у просторі Лобачевського гаусова кривина граней тетраедра дорівнює 1 або -1 відповідно. У цьому випадку кривина тетраедра визначається не лише його вершинами, але і гранями. У сферичному просторі кут α грані тетраедра задовольняє умовам $\pi/3 < \alpha \leq 2\pi/3$. У просторі Лобачевського кут α грані задовольняє $0 < \alpha < \pi/3$. В обох випадках внутрішня геометрія правильного тетраедра залежить від величини кута грані. Взагалі не існує розбиття сферичної площини або площини Лобачевського правильними трикутниками. Дослідження нашої задачі потребувало методи з ріманової геометрії, топології, синтетичні методи роботи з сингулярностями та оцінки з теорії чисел.

Проста замкнена геодезична має тип (p, q) на тетраедрі, якщо вона перетинає одну пару протилежних ребер у p точках кожне, другу пару - у q точках кожне, і у $(p + q)$ точках кожне ребро третьої пари протилежних ребер тетраедра. Пара взаємно простих натуральних чисел (p, q) визначає комбінаторний тип геодезичної, тобто порядок, у якому геодезична перетинає ребра тетраедра, з точністю до ізометрії тетраедра. Відзначимо, що це визначення не залежить від кривини граней тетраедра.

У Розділі 2 ми розглядали прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у евклідовому просторі. Відомо, що для кожної пари взаємно простих натуральних чисел (p, q) існує цілий клас простих замкнених геодезичних типу (p, q) на правильному тетраедрі у евклідовому просторі (з точністю до ізометрії тетраедра). На розгортці тетраедра геодезичні, що належать одному класу, паралельні між собою. Зауважимо, що будь-яка замкнена геодезична на правильному тетраедрі у евклідовому просторі є простою.

Ми показали, що у кожному класі простих замкнених геодезичних існує геодезична, яка проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра. Як наслідок, ми показали, що розгортка тетраедра вздовж простої замкненої геодезичної складається з чотирьох рівних багатокутників. Будь-які два сусідні багатокутника переводяться один в одного поворотом на кут π навколо середини спільного ребра.

У Розділі 3 розглядаються прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у сферичному просторі. Якщо кут α грані тетраедра дорівнює $2\pi/3$, то тетраедр є двомірною сферою радіуса один. У цьому випадку на ньому існує нескінченно багато простих замкнених геодезичних. Вони є великими колами сфери. Надалі ми вважаємо, що кут α задовольняє умовам $\pi/3 < \alpha < 2\pi/3$.

На відміну від евклідового простору, на правильному тетраедрі у сферичному просторі існує скінченна кількість простих замкнених геодезичних. Довжина простої замкненої геодезичної менша 2π. У роботі доведено наступні результати.

Теорема. *Для будь-якої пари взаємно простих натуральних чисел* (p, q) *існують такі числа* α_1, α_2, *де* $\pi/3 < \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi/3$, *що*

1) *на правильному тетраедрі у сферичному просторі з кутом грані* $\alpha \in (\pi/3, \alpha_1)$ *існує проста замкнена геодезична типу* (p, q). *Ця геодезична єдина, з точністю до ізометрії тетраедра, і вона проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра.*

2) *на правильному тетраедрі у сферичному просторі з кутом грані* $\alpha \in (\alpha_2, 2\pi/3)$ *не існує простої замкненої геодезичної типу* (p, q).

У роботі Борисенка було знайдено необхідну і достатню умову існування простої замкненої геодезичної на правильному тетраедрі у сферичному просторі, у термінах довжини абстрактної найкоротшої лінії розгортки (згідно з визначенням, поданим у статті).

У Розділі 4 представлена повна класифікація простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського. Нагадаємо, що у цьому випадку кут α грані тетраедра задовольняє умовам $0 < \alpha < \pi/3$. У роботі доведено наступні результати.

Теорема. 1) *Нехай (p, q), $0 \leq p < q$, – пара взаємно простих натуральних чисел. Тоді на правильному тетраедрі з кутом грані $\alpha \in (0, \pi/3)$ у просторі Лобачевського існує проста замкнена геодезична типу (p, q). Ця геодезична єдина, з точністю до ізометрії тетраедра, і вона проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра.*
2) *Геодезичними типу (p, q) вичерпуються усі прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського.*
3) *Асимптотичний ріст числа простих замкнених геодезичних довжини не більше L на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського дорівнює $c(\alpha)L^2$, де $L \to \infty$.*

У Розділі **??** 5 вивчається ізометричне занурення підмноговидів малої ковимірності з індукованою метрикою обертання у простір Лобачевського. Розглядаються три природні випадки, а саме, коли зовнішня секційна кривина індукованої метрики 1) від'ємна, 2) нульова, 3) додатна. Отримані результати є узагальненням теорем, доведених у роботі Борисенка,стосовно підмноговидів з індукованою метрикою обертання у евклідовому просторі.

Теорема. *Нехай F^l є підмноговидом простору Лобачевського H^{l+p}, і нехай на F^l індукована метрика обертання*

$$ds^2 = \left(du^1\right)^2 + \varphi^2(u^1)d\sigma^2,$$

де $d\sigma^2$ - ріманова метрика постійної секційної кривини.
1) *Припустимо F^l має від'ємну зовнішню секційну кривину та $p = l - 1$. Якщо геодезичні координатні лінії u^1 індукованої метрики обертання F^l є лініями кривини, то підмноговид F^l є підмноговидом обертання.*
2) *Припустимо F^l має нульову зовнішню секційну кривину та $p = 1$. Якщо геодезичні координатні лінії u^1 індукованої метрики обертання F^l є лініями кривини, то підмноговид F^l є циліндром, конусом або асимптотичним конусом (в залежності від кривини метрики $d\sigma^2$) з одномірною твірною.*
3) *Припустимо F^l має нульову зовнішню секційну кривину та $p = 1$. Якщо $l > 2$, тоді F^l є гіперповерхнею обертання. Якщо $l = 2$ та гео-*

дезичні координатні лінії u^1 є лініями кривини, то гіперповерхня F^2 є поверхнею обертання у просторі Лобачевського H^3.

Доведення проводиться у моделі просторі Лобачевського як у підмноговиді псевдоевклідового простору з індукованою метрикою постійної від'ємної кривини.

Ключові слова: прості замкнені геодезичні, правильний тетраедр, сферичний простір, простір Лобачевського, підмноговид обертання.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. Borisenko A.A., Sukhorebska D.D.: A classification of simple closed geodesics on regular tetrahedra in the Lobachevsky space. Reports of the National Academy of Siences Ukraine. 4, 3-9 (2019). https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.04.003

2. Sukhorebska D.: Necessary condition for the existence of a simple closed geodesic on a regular tetrahedron in the spherical space. Reports of the National Academy of Siences Ukraine, 10, 9-14 (2020). https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.009

3. Sukhorebska D.: Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature. J. Math. Phys. Anal. Geom., 18(4), 562-610 (2022). https://doi.org/10.15407/mag18.04.562

4. Sukhorebska D.: Multidimensional Submanifolds with Metric of Revolution in Hyperbolic Space. J. Math. Phys. Anal. Geom., 18(2), 269-285 (2022). https://doi.org/10.15407/mag18.02.269

Тези доповідей на конференціях, які засвідчують апробацію результатів дисертації

5. Sukhorebska D., Borisenko A., "Simple closed geodesics on regular tetrahedra in Lobachevsky space", Lake Como School of Advanced Studies "Geometric Analysis on Riemannian and Singular Metric Measure Spaces (3rd edition)", Como, Italy (July 1-5, 2019).

6. Sukhorebska D., Borisenko A., "Geodesics on regular tetrahedra in spherical space", International scientific online conference "Algebraic and geometric methods of analysis", Odesa, Ukraine (May 26-30, 2020).

7. Sukhorebska D., Borisenko A., "Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature", 8th European Congress of Mathematics (8ECM), Portoroz, Slovenia (June 20-26, 2021).

Доповіді на семінарах та воркшопах, де були представлені результати дисертації

1. "Simple closed geodesics on regular tetrahedra in Lobachevsky space", Seminar of the topology laboratory of the Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, the head: Prof. Dr. S. Maksymenko, Kyiv, Ukraine (April 12, 2019).

2. "Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spherical space", Kharkiv State Geometric Seminar, the head: Prof. Dr. A. Borisenko, Kharkiv, Ukraine (February, 10 and 17, 2020).

3. "The structure of multidimensional submanifolds with induced metric of revolution in hyperbolic space" (poster presentation), Workshop on Curvature and Global Shape, Münster, Germany (August 1-7, 2021).

4. "Simple closed geodesics on regular tetrahedra in hyperbolic and spherical space" (poster presentation), Workshop «The Young Geometers Meeting

on Geometric Analysis and Differential Geometry», Copenhagen, Denmark (April 19-23, 2021).

5. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature”, Oberseminar of Differential geometry group at Mathematical Institute in WWU Münster, the head: Prof. Dr. B. Wilking, Münster, Germany (April 4, 2022).

6. "Results on simple closed geodesics on regular tetrahedra in spherical and hyperbolic spaces Oberseminar of Geometry group at Institut für Algebra und Geometrie in Karlsruher Institut für Technologie, the head: Prof. Dr. A. Lytchak, Karlsruher, Germany (December 1, 2022).

Abstract

D. Sukhorebska, "Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature" – Scholarly manuscript.

PhD Thesis in Mathematics (speciality code: 111). B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine.

In the Thesis all simple closed geodesics on a regular tetrahedron in three-dimensional spherical or hyperbolic spaces are described.

A geodesic is a locally shortest curve. On a convex polyhedron a geodesic has following properties: 1) it consists of line segments on faces of the polyhedron; 2) it forms equal angles with an edge on the adjacent faces; 3) the geodesic cannot pass through a vertex of the convex polyhedron. A geodesic is called simple if it has no points of self intersection and doesn't go along itself.

In **Chapter 1** we presented an overview of the literature about properties of closed geodesics on regular closed surfaces of positive or negative curvature and on polyhedra in Euclidean space.

In Euclidean space the faces of a tetrahedron have zero Gaussian curvature, and the curvature of the tetrahedron is concentrated only on its vertices. The classification of closed geodesics on a regular tetrahedron in Euclidean space follows from a fact that a development of the tetrahedron along the geodesic is contained in a standard triangular tiling of Euclidean plane. Vertices of the tiling can be labelled in such way that for any development the labelling of the vertices of the tetrahedron matches the labelling of the vertices of the tiling [**?**].

In spherical or hyperbolic space the Gaussian curvature of faces of a tetrahedron is 1 or -1 respectively. The curvature of a tetrahedron is determined not only by its vertices, but also by its faces. In spherical space the planar angle α of a face of a regular tetrahedron satisfies the conditions $\pi/3 < \alpha \leq 2\pi/3$. In hyperbolic space the planar angle α satisfies the inequalities $0 < \alpha < \pi/3$. In

both cases the intrinsic geometry of the tetrahedron depends on the value of the planar angle. In general there is no tiling of hyperbolic or spherical plane by regular triangles. For solving our problem it was necessary to use methods from Riemannian geometry, topology, synthetic singular methods and evaluations from the number theory.

A simple closed geodesic γ on a tetrahedron has *type* (p, q) if γ has p points on each of two opposite edges of the tetrahedron, q points on each of other two opposite edges, and $(p + q)$ points on each edge of the third pair of opposite edges. The pair of coprime integers (p, q) determines the combinatorial type of the geodesic, and hence the order of intersections of the geodesic with edges of the tetrahedron, up to isometries of the tetrahedron. Note, that this definition doesn't depend on the curvature of the ambient space of the tetrahedron.

In **Chapter 2** we consider simple closed geodesics on a regular tetrahedron in Euclidean space. It was known that for each ordered pair of coprime integers (p, q) there exists a class of simple closed geodesics of type (p, q) on a regular tetrahedron in Euclidean space (up to isometries of the tetrahedron). Geodesics from one class are parallel to each other on a development of the tetrahedron. Note, that any closed geodesic is simple on a regular tetrahedron in Euclidean space [**?**].

We proved that in each class of simple closed geodesics of type (p, q) there is one that passes through the midpoints of two pairs of opposite edges of the tetrahedron. As a consequence, we showed that the development of the tetrahedron obtained by unrolling along a closed geodesic consists of four equal polygons. Any two adjacent polygons are mapped to each other by rotating through an angle π around the midpoint of their common edge.

In **Chapter 3** we consider simple closed geodesics on regular tetrahedra in spherical space. If the planar angle α of the regular tetrahedron equals $2\pi/3$, then the tetrahedron is the two-dimensional unit sphere. Hence there are infinitely many simple closed geodesics on it and they are great circles of the sphere. Thus we assume α satisfies the inequalities $\pi/3 < \alpha < 2\pi/3$.

We showed that, unlike to Euclidean space, on a regular tetrahedron in spherical space there exist a finite number of simple closed geodesics. The length of a simple closed geodesic is less than 2π. The following result was proved.

Theorem. *For any coprime integers (p, q), $0 \leq p < q$ there exist numbers α_1 and α_2, satisfying the inequalities $\pi/3 < \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi/3$, such that*

(i) if $\pi/3 < \alpha < \alpha_1$, then on a regular tetrahedron in spherical space with the planar angle α there exists a simple closed geodesic γ of type (p, q). The geodesic γ is unique, up to the rigid motion of the tetrahedron, and γ passes through the midpoints of two pairs of opposite edges of the tetrahedron.

(ii) if $\alpha_2 < \alpha < 2\pi/3$, then on a regular tetrahedron with the planar angle α there is no simple closed geodesic of type (p, q).

In [**?**] Borisenko proved a necessary and sufficient condition for the existence of a simple closed geodesic on a regular tetrahedron in spherical space in terms of the length of an abstract shortest curve in the development (according to the definitions from this article).

In **Chapter 4** we present the full classification of simple closed geodesics on a regular tetrahedron in hyperbolic space. Recall that the planar angle α of a regular tetrahedron in hyperbolic space satisfies $0 < \alpha < \pi/3$. We proved following results

Theorem. 1) *Let (p, q) be a pair of coprime integers, and $0 \leq p < q$. Then on a regular tetrahedron with the planar angle $\alpha \in (0, \pi/3)$ in hyperbolic space there exists a simple closed geodesic γ of type (p, q). This geodesic γ is unique, up to the rigid motion of the tetrahedron, and γ passes through the midpoints of two pairs of opposite edges of the tetrahedron.*
2) *Geodesics of type (p, q) exhaust all simple closed geodesics on a regular tetrahedron in hyperbolic space.*
3) *The asymptotic growth of the number of simple closed geodesics of length at most L on a regular tetrahedron in hyperbolic space is equal to $c(\alpha)L^2$, when $L \to \infty$, and $c(\alpha) > 0$ far all $\alpha \in (0, \pi/3)$.*

In **Chapter 5** we consider an isometric immersion of a submanifold of low codimension with an induced metric of revolution in hyperbolic space. We consider the following three natural cases, when the extrinsic sectional curvature of the induced metric is 1) negative; 2) zero; 3) positive. The obtained results are the generalization of the theorems proved by Borisenko [**?**] for the submanifolds with induced metric of revolution in Euclidean space.

Theorem. *Let F^l be a submanifold of hyperbolic space H^{l+p} with induced metric of revolution*

$$ds^2 = \left(du^1\right)^2 + \varphi^2(u^1)d\sigma^2,$$

where $d\sigma^2$ is a Riemannian metric of constant sectional curvature.
1) *Suppose F^l has negative extrinsic sectional curvature and $p = l - 1$. If geodesic coordinate lines u^1 of the induced metric are lines of curvature of F^l, then the submanifold F^l is a submanifold of revolution in H^{2l-1}.*
2) *Suppose F^l has zero extrinsic sectional curvature and $p = 1$. If the geodesic coordinate lines u^1 of the induced metric are the lines of curvature of F^l, then the submanifold F^l is either a cylinder, or a cone, or an asymptotic cone (depending on the curvature of $d\sigma^2$) with one-dimensional generator.*
3) *Suppose F^l has positive extrinsic sectional curvature and $p = 1$. If $l > 2$, then F^l is a hypersurface of revolution. If $l = 2$ and the coordinate lines u^1 are lines of curvature, then F^2 is a hypersurface of revolution in H^3.*

The proof is carried out in the model of hyperbolic space as in a submanifold of the pseudoeuclidean space. The condition $p = l-1$ in the first case is natural, since there is no submanifold of codimension $< l - 1$ with a metric of negative extrinsic sectional curvature. To prove the third case we use the Pogorelov's transformation of hyperbolic space into Euclidean.

Keywords: simple closed geodesics, regular tetrahedron, spherical space, hyperbolic space, submanifolds of revolution.

Publications of the candidate related to the Thesis topic

Journal papers in which the main results of the Thesis are published

1. Borisenko A.A., Sukhorebska D.D.: A classification of simple closed geodesics on regular tetrahedra in the Lobachevsky space. Reports of the National Academy of Siences Ukraine. 4, 3-9 (2019). https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.04.003

2. Sukhorebska D.: Necessary condition for the existence of a simple closed geodesic on a regular tetrahedron in the spherical space. Reports of the National Academy of Siences Ukraine, 10, 9-14 (2020). https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.009

3. Sukhorebska D.: Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature. J. Math. Phys. Anal. Geom., 18(4), 562-610 (2022). https://doi.org/10.15407/mag18.04.562

4. Sukhorebska D.: Multidimensional Submanifolds with Metric of Revolution in Hyperbolic Space. J. Math. Phys. Anal. Geom., 18(2), 269-285 (2022). https://doi.org/10.15407/mag18.02.269

Thesis of the talks on the conferences where the main results of the Thesis were approbate

5. Sukhorebska D., Borisenko A., “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in Lobachevsky space”, Lake Como School of Advanced Studies “Geometric Analysis on Riemannian and Singular Metric Measure Spaces (3rd edition)”, Como, Italy (July 1-5, 2019).

6. Sukhorebska D., Borisenko A., “Geodesics on regular tetrahedra in spherical space”, International scientific online conference “Algebraic and geometric methods of analysis”, Odesa, Ukraine (May 26-30, 2020).

7. Sukhorebska D., Borisenko A., “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature”, 8th European Congress of Mathematics (8ECM), Portoroz, Slovenia (June 20-26, 2021).

Talks on the seminars and workshops where the main results of the Thesis were presented

1. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in Lobachevsky space”, Seminar of the topology laboratory of the Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, the head: Prof. Dr. S. Maksymenko, Kyiv, Ukraine (April 12, 2019).

2. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spherical space”, Kharkiv State Geometric Seminar, the head: Prof. Dr. A. Borisenko, Kharkiv, Ukraine (February, 10 and 17, 2020).

3. “The structure of multidimensional submanifolds with induced metric of revolution in hyperbolic space” (poster presentation), Workshop on Curvature and Global Shape, Münster, Germany (August 1-7, 2021).

4. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in hyperbolic and spherical space” (poster presentation), Workshop «The Young Geometers Meeting on Geometric Analysis and Differential Geometry», Copenhagen, Denmark (April 19-23, 2021).

5. “Simple closed geodesics on regular tetrahedra in spaces of constant curvature”, Oberseminar of Differential geometry group at Mathematical Institute in WWU Münster, the head: Prof. Dr. B. Wilking, Münster, Germany (April 4, 2022).

6. "Results on simple closed geodesics on regular tetrahedra in spherical and hyperbolic spaces Oberseminar of Geometry group at Institut für Algebra und Geometrie in Karlsruher Institut für Technologie, the head: Prof. Dr. A. Lytchak, Karlsruher, Germany (December 1, 2022).