

ВІДЗИВ
офіційного опонента
на дисертацію Синельщикова Сергія Дмитровича

**Дії некомутативних груп і квантових алгебр на точкових
просторах та їх q-аналогах**

на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація складається з двох частин, перша з котрих (розділи 2 - 4) належить до ергодичної теорії, а друга (розділи 5 - 7) – до теорії квантових груп. Далі я наводжу аналіз роботи по розділам.

В розділі 2 отримані точкові регуляризації для груп автоморфізмів вимірних відношень еквівалентності. Цей результат далі узагальнено на дії вимірних групоїдів. Доведено, що кожна аменабельна дія локально компактної польської групи є дією Маккі для коцикла ергодичного перетворення будь-якого типу Крігера. Встановлено, що аменабельність ергодичної дії є еквівалентною аменабельності траекторного відношення еквівалентності та аменабельності стабілізаторів майже всіх точок простору дії. Головним результатом цього розділу є слабка (траекторна) класифікація коциклів аменабельних відношень еквівалентності. Цей результат в певному сенсі завершує траекторну теорію аменабельних дій та їх локально компактних розширень. Ця теорія започаткована Г. Даєм в 1959 р. та розвинена в подальших працях Вершика, Крігера, Фельдмана, Мура, К. Шмідта, Конна, Орнстейна, Вайса, Зіммера, Голодця, Безуглого та ін. Цікаво, що декілька інших доведень теореми існування для коциклів (або окремих випадків цієї теореми) були в подальшому знайдені Ісмагіловим, Адамсом, Еліотом та Жордано, Ааронсоном і Вайсом. Також були опубліковані (вже після появи праці Голодця-Синельщикова) і часткові версії теореми про траекторну класифікацію коциклів в роботах Філдстіла, Гербер, Ааронсона і К. Шмідта. Це засвідчує неабияке значення і актуальність цих теорем в ергодичній теорії.

Наведено два застосування перелічених вище (дещо абстрактних) результатів цього розділу, а також техніки траекторної теорії, що була розроблена для їх доведення: а) побудовані нетривіальні приклади ергодичних дій з тривіальною фундаментальною групою, б) встановлено, що коли потік (тобто дія групи дійсних чисел) Маккі зберігає скінчену міру, то він є асоційованим з рекурентним коциклом з обмеженими лакунами.

В цьому розділі розглянуто також топологічно-категорні аналоги теорем існування та єдиності для коциклів. А саме, вивчаються дії груп псевдогомеоморфізмів польських просторів без ізольованих точок. Всі об'єкти розглядаються з точністю до підмножин першої категорії Бера (за аналогією з множинами міри нуль у вимірній динаміці). Доводяться теореми існування та єдиності для коциклів з щільними образами в довільних польських групах. Цікаво, що аменабельність ані групи, що діє, ані групи, в якій приймає

значення коцикл, не відіграє жодної ролі в “категорній” динаміці. В цьому сенсі результати є більш загальними, аніж їх вимірні аналоги. Відзначу також, що отримані результати доповнюють відому теорему Сулівана-Вайса-Райта про (берівську) траекторну еквівалентність груп псевдогомеоморфізмів на польських просторах. В якості застосування доводиться теорема про зовнішню спряженість зчисленних груп автоморфізмів траекторних відношень еквівалентності, що породжені топологічно транзитивною групою псевдогомеоморфізмів.

Розділ 3 складається цілком з результатів піонерської в ергодичній теорії роботи Голодця-Синельщикова про невірні ергодичні дії локально компактних груп. Головне питання, яке розглядається в роботі – знайти достатні умови, за яких у невірній ергодичній дії стабілізатори майже всіх точок є взаємно ізоморфними або взаємно спряженими. Щоб відповісти на це питання, проводиться аналіз дії групи спряженнями на компактному (в топології Фела) просторі всіх її замкнених підгруп з відповідним образом міри простору дії. В сучасній ергодичній теорії цей об’єкт називається інваріантною випадковою підгрупою (ІВП). Стабілізатори спряжені тоді і тільки тоді, коли ІВП має тип I. Головні результати: а) Якщо дійсна група Лі діє таким чином, що майже всі стабілізатори компактні, то вони є взаємно спряженими. б) Якщо довільна локально компактна польська група діє таким чином, що майже всі стабілізатори скінченні, то вони є взаємно спряженими. в) Побудовані конкретні приклади дій з неспряженими, або навіть з неізоморфними стабілізаторами (з різних орбіт).

Хоча в сучасній літературі з ергодичної теорії (останні 5 років) з’явилося чимало робіт, де вивчаються ІВП для зберігаючих міру, а також стабільних несингулярних дій неаменабельних груп, вивчаються вони здебільшого з “загальної” точки зору, як елементи деяких конструкцій (Аберт, Гласнер, Віраг, Елек, Льюїс Боуен, Тамуз, Буртон, Тюкер-Дроб та ін.). Тому на даний час конкретні приклади дій груп Лі з неізоморфними стабілізаторами з цієї дисертації залишаються єдиними в літературі.

Розділ 4 присвячений ентропійній теорії злічених аменабельних груп. Ентропійну теорію Колмогорова-Синая для окремих вимірних перетворень (тобто дій групи цілих чисел) можна вважати цілком завершеною. Виникло питання про можливі узагальнення цієї теорії. З’явилася серія робіт Вайса, Камінського, Конца, в яких розвинуто узагальнення на дії прямих сум групи цілих чисел. Згодом з’ясувалося (після робіт Кіфера та Орнстейна-Вайса), що найширшим класом груп, для яких будується змістовна ентропійна теорія подібна до теорії Колмогорова-Синая, є клас аменабельних груп. Але побудова таких узагальнень не є простою проблемою, і низка натуральних питань залишається відкритою і сьогодні. Одна з головних перешкод пов’язана з відсутністю інваріантного порядку на довільній аменабельній групі. Нагадаю, що доведення майже всіх класичних тверджень ентропійної теорії використовує відношення порядку (на групі цілих чисел). В першій частині розділу розглядаються дії скінченно породжених нільпотентних груп без кручень. Для них існує інваріантна впорядкованість, що і дає змогу здефініювати та дослідити розбиття з різноманітними властивостями інваріантності та отримати опис алгебр Пінскера. Це використовується для характеристики спектру дії в ортогональному доповненні до алгебри Пінскера: він є зліченно-кратним Хааровським. Хоча підхід до вирішення цих проблем є розвитком і удосконаленням вже

існуючих, дисертанту доводиться долати низку нових нетривіальних перешкод, пов'язаних з некомутативністю груп, що діють.

Перший приклад небернулівського перетворення з цілком додатною ентропією був побудований Орнстейном в 70-х роках минулого століття. З тих пір проблема існування небернулівських дій з цілком додатною ентропією для довільних злічених аменабельних груп залишається відкритою. В другій частині розділу дисертації дається позитивна відповідь для тих аменабельних груп, які мають елементи нескінченного порядку. Зауважу, що для цього класу груп вже не існує інваріантного упорядкування і тому неможливо вирішити цю проблему розвитком існуючих класичних підходів. Тому в дисертації розроблено кардинально новий метод, заснований на конструкції так званих коіндукованих дій. Доведено, що дія, коіндукована небернулівським перетворенням з цілком додатною ентропією, сама має ці ж властивості. Зауважу також, що запропонована конструкція коіндукованих дій знаходить різноманітні застосування і в ентропійній, і в спектральній теорії, в топологічній динаміці, тощо.

В розділі 5 побудовано q -аналог функтора Бернштейна. Вивчено властивості диференціальних числень на поліноміальних алгебрах над квантовими передоднорідними векторними просторами комутативного параболічного типу. Викладено основи теорії функцій на квантових аналогах гіперболічних просторів та відповідних ізотропних конусів. Подано квантовий аналог оператора Пуассона. Виведено рівняння Хуа у квантовому випадку. Доведено, що ці рівняння є необхідною умовою приналежності функції до образу квантового оператора Пуассона.

В розділі 6 побудовано нові біалгебри на основі $U_q(sl_2)$, які містять ідемпотенти та інші дільники нуля. У деяких випадках наведено явні формули для R -матриць. Визначено майже R -матриці, що задовольняють умові регулярності фон Неймана.

В літературі з квантових алгебр завжди розглядалася лише одна структура $U_q(sl_2)$ -модульної алгебри на квантовій площині. В розділі 7 дисертації показано, що подібних структур існує багато – незчисленна кількість – і подано їх повний перелік. Розглянуто також більш симетричний об'єкт ніж стандартна квантова площина, а саме розширення Лорана з оборотними твірними. Подано перелік симетрій загального положення, разом з повним переліком симетрій, в яких дія картанівського генератора не зводиться до множення твірних на константи (як у випадку стандартної квантової площини).

Всі вище перелічені результати мають теоретичний характер. Їх достовірність не викликає сумніву. Особливо відзначу теореми про структуру та класифікацію коциклів аменабельних дій, які, на мій погляд, є одним з найвидатніших досягнень в траєкторній траєкторній теорії аменабельних дій. Не можна не відмітити унікальних прикладів дій з неспряженими та неізоморфними стабілізаторами, побудованих дисертантом, а також розв'язання складної довго відкритої проблеми існування небернулівських дій з цілком додатною ентропією для аменабельних груп з елементами нескінченного порядку. Запропонована дисертантом техніка, пов'язана з коіндукованими діями, з успіхом використовується низкою авторів в різноманітних галузях сучасної теорії динамічних систем. Головні результати дисертації опубліковані в міжнародних періодичних виданнях з високим імпаکت-фактором, серед яких: *J. Funct. Anal.*, *Ergod. Theory & Dynam. Systems*,

Pacific J. Math., Proc. Amer. Math. Soc., J. Math. Phys., Internat. J. Math., тощо. Вони доповідалися на міжнародних конференціях і є широко відомими в світі. Тому дисертант, Синельщиков С. Д. користується безумовним авторитетом серед спеціалістів.

Автореферат і основні положення дисертації є ідентичними за змістом.

Недоліком дисертації вважаю дещо абстрактний стиль викладення в розділі 2. Траєкторна теорія не є мейнстрімом в ергодичній теорії і тому треба було б продемонструвати міць отриманих "загальних" результатів низкою корисних застосувань до конкретних проблем класичної ергодичної теорії. Хоча дисертант і наводить декілька застосувань, але їх явно бракує. Незрозуміло, чому автор навіть не цитує робіт інших математиків, які суттєво використовували його результати (з розділу 2), наприклад, для вивчення централізатору, факторів, джойнінгів ергодичних дій, проблем асиметрії ергодичних перетворень, тощо. Ще одним недоліком дисертації вважаю її великий об'єм, якого вистачило б, принаймні, на дві окремі повноцінні докторські дисертації. Ці зауваження, звичайно, не псують загального дуже позитивного враження від роботи.

Виходячи з всього вищевикладеного, я не маю сумнівів, що дисертація Синельщикова С. Д. "Дії некомутативних груп і квантових алгебр на точкових просторах та їх q -аналогах" є завершеною науковою працею, в якій отримано нові, науково обгрунтовані результати, що в сукупності є суттєвими для подальшого розвитку ергодичної теорії та теорії квантових алгебр. Дисертація відповідає всіх вимогам (і перевищує їх з великим запасом!) до докторських дисертацій, а її автор заслуговує наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 (математичний аналіз).

О. І. Даниленко, провідний науковий співробітник Фізико-технічного інституту низьких температур НАН України



Особистий підпис: *Даниленко О. І.*

СВІДЧУЮ
член секретар ФТІНТ ім. Б.І.Веркіна
Національної академії наук України
кандидат фізико-математичних наук

Горьковська Л. М.

Відук надійшов до ради 07.10.20

Вчений секретар

Спец. Великої ради Д 64.175.01



Горьковська Л. М.