

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР
ім. Б.І. ВЕРКІНА НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б.І. Веркіна Національної академії наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Рижов Артем Ігорович

УДК 538.915, 538.945

ДИСЕРТАЦІЯ


**ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРФЕРОМЕТРІЇ
ЛАНДАУ-ЗІНЕРА-ШТЮКЕЛЬБЕРГА-МАЙОРАНИ
ДЛЯ КОНТРОЛЮ ДИНАМІКИ КВАНТОВИХ СИСТЕМ**

104 — Фізика та астрономія

10 — Природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 А.І. Рижов
(підпис здобувача)

Науковий керівник: **Шевченко Сергій Миколайович**, доктор фізико-
математичних наук, професор

Харків 2024

АНОТАЦІЯ

Рижов А. І. Застосування інтерферометрії Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани для контролю динаміки квантових систем. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 104 – «Фізика та астрономія» (10 – Природничі науки). – Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна Національної академії наук України, Харків, 2024.

Дисертацію присвячено дослідженню динаміки квантових дворівневих і багаторівневих систем та розробці нових підходів до її опису та контролю з використанням рівняння Ліндблада, інтерферометрії Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани, адіабатично-імпульсної моделі та рівнянь балансу.

У **вступі** коротко обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету та основні завдання дослідження, об'єкт, предмет та методи дослідження. Сформульовано наукову новизну та описано практичне значення отриманих результатів. Також у цьому розділі наведено інформацію про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації. Наведено інформацію про структуру та обсяг дисертації.

Розділ 1 присвячено огляду та аналізу літератури за темою дисертації.

Перехід ймовірності заселеності між енергетичними рівнями квантової системи під час проходження квазіперетину рівнів називається переходом Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани (ЛЗШМ). Коли квантова система з квазіперетином рівнів знаходиться під впливом періодичного сильного збудження з достатньо великою амплітудою, відбувається послідовність ЛЗШМ переходів. Фаза, накопичена між переходами (відома як фаза Штюкельберга), може призвести до конструктивної або деструктивної інтерференції. Як наслідок, фізично спостережувані величини системи, такі як ймовірності заселеностей енергетичних рівнів, виявляють періодичну залежність від параметрів зовнішнього збудження. Це називається інтерферометрією ЛЗШМ.

Згідно з адіабатично-імпульсною моделлю, динаміку таких збуджуваних квантових систем можна розділити на два етапи еволюції: неадіабатичні

ЛЗШМ переходи між енергетичними рівнями поблизу квазіперетинів рівнів та адіабатичну еволюцію далеко від квазіперетинів. Аналітичні вирази матриць відповідних операторів еволюції дають змогу описувати та керувати динамікою цих збуджуваних систем.

У деяких випадках динаміка і релаксаційні процеси в багаторівневих квантових системах можуть бути добре описані формалізмом рівнянь балансу. Перевагою такого підходу є його відносна простота, порівняно з підходом рівняння Ліндблада.

Дисертацію присвячено вивченню квантових дворівневих та багаторівневих систем, а також підходів і методів їх опису та керування ними. Надано огляд та аналіз літератури, пов'язаної з рівнянням Ліндблада, рівнянням Ліувілля-фон Неймана, рівняннями Блоха, підходом рівнянь балансу, та іншими рівняннями, що можуть бути використані для вивчення квантових систем; а також літератури, пов'язаної з інтерферометрією ЛЗШМ, переходами ЛЗШМ, адіабатично-імпульсною моделлю (також відомою як метод матриць переходу), осциляціями Рабі, амплітудною спектроскопією. В цьому розділі надано огляд літератури, пов'язаної з кубітами, експериментальними реалізаціями надпровідникових кубітів та кубітів на основі кремнієвих подвійних квантових точок, в яких використовуються як орбітальні, так і долинні ступені свободи. Також було надано огляд літератури, пов'язаної з одно- та двокубітними квантовими логічними операціями (реалізованими як класично за допомогою осциляцій Рабі, так і альтернативним методом за допомогою переходів ЛЗШМ, якому присвячено цей розділ було проаналізовано), квантовими системами з подвійним збудженням та іншими квантовими системами, де є актуальною фізика ЛЗШМ.

Розділ 2 присвячено дослідженню альтернативної парадигми реалізації квантових логічних операцій на основі нерезонансного збудження з переходами ЛЗШМ.

Традиційна реалізація квантових логічних операцій і контролю базується на резонансних осциляціях Рабі ймовірності заселеності системи. Цей підхід має певні обмеження та ускладнення, пов'язані з обмеженнями наближення обертової хвилі та витоком ймовірностей заселеностей на рівні, що лежать

за межами області кубіта. ЛЗШМ переходи запроваджують альтернативу традиційним операціям, що основані на резонансному збудженні. Порівняно з традиційними осциляціями Рабі, основними відмінностями є нерезонансна частота збуджувального сигналу та мала кількість періодів у зовнішньому збуджувальному сигналі. У розглянутій альтернативній парадигмі збудження складається з періодів адіабатичної еволюції та коротких неадіабатичних переходів. Ймовірності заселеностей енергетичних рівнів, а також різниця фаз між ними можуть бути обрані шляхом зміни параметрів збудження (частоти та амплітуди), що забезпечує іншу парадигму контролю станом квантової системи.

У дисертації розвивається парадигму квантових логічних операцій на основі ЛЗШМ переходів, досліджуємо динаміку багаторівневої квантової системи під впливом ЛЗШМ збудження та оптимізуємо параметри для підвищення швидкостей квантових логічних операцій. За допомогою адіабатично-імпульсної моделі визначено параметри зовнішнього керуючого сигналу, необхідні для реалізації конкретної квантової логічної операції. Було описано гамільтоніан кубіта та його два основні базиси, демонструємо реалізації однокубітних операцій X , Y , Адамара та фазової операції, використовуючи як осциляції Рабі, так і ЛЗШМ переходи, і порівнюємо швидкість та точність, досягнуті за допомогою обох підходів. Досліджено спосіб збільшення швидкості та точності ЛЗШМ операцій за рахунок використання множинних переходів. Також було узагальнено розглянуту парадигму використання адіабатично-імпульсної моделі для реалізації квантових логічних операцій для багаторівневих квантових систем і описуємо реалізацію двокубітних операцій i SWAP та CNOT за допомогою двох ЛЗШМ переходів. Надано деякі деталі реалізації інших двокубітних операцій: SWAP, $\sqrt{\text{SWAP}}$, $\sqrt{i\text{SWAP}}$, CPhase(ϕ), CZ, CS.

Розділ 3 присвячено вивченню спектроскопії кремнієвої подвійної квантової точки (ПКТ), в якій використовуються як орбітальні, так і долинні ступені свободи.

Періодично збуджувана квантова система з квазіперетином рівнів зазнає як неадіабатичних переходів, так і фазових змін хвильової функції. Це призводить до появи когерентних інтерференційних смуг у ймовірностях

заселеностей системи. Для кубітів із квазіперетином енергетичних рівнів така ЛЗШМ інтерференція демонструє дугоподібні резонансні лінії. У випадку багаторівневої системи з квазіперетином двох нижніх рівнів продемонстровано, що форма резонансів може змінюватися від опуклих дуг до увігнутих серцеподібних і арфоподібних резонансних ліній. Дійсно, весь енергетичний спектр визначає форму таких резонансних смуг, і це також надає уявлення про спектроскопію низькочастотної системи.

Як конкретний приклад, це було розглянуто для кремнієвих долинно-орбітальних квантових точок, які є важливими для нової галузі вальєтроніки. Розглянуто чотирирівневий гамільтоніан кремнієвої долинно-орбітальної ПКТ. Обговорено, як підготувати стани ПКТ для низькочастотної ЛЗШМ-спектроскопії, одягнувши їх резонансним сигналом. Одягання дозволяє звести чотирирівневу систему до дворівневої. Це дає змогу застосувати формули інтерферометрії ЛЗШМ для дворівневих квантових систем. У дисертації були обговорені отримані інтерференційні смуги та проаналізована форма резонансних ліній. Для одягненої чотирирівневої системи вони матимуть арфоподібну форму. Також було проаналізовано окремий випадок із симетричним гамільтоніаном.

Розділ 4 присвячено опису квантових багаторівневих систем за допомогою рівняння Ліндблада, адіабатично-імпульсної моделі та методу рівнянь балансу.

Сильне збудження багаторівневої квантової системи дає змогу як характеризувати її стан, так і керувати ним. В цьому розділі вивчається сильно збуджувана дисипативна чотирирівнева ПКТ. Отримано її гамільтоніан та розв'язується рівняння Ліндблада. Ця система працює як пристрій «чотири в одному» з такими властивостями: інтерферометр ЛЗШМ; конденсатор з квантовим підсиленням, мікрохвильовий детектор і двосторонній інтерферометр. Іншими словами, існує чотири різні режими ЛЗШМ: багатопрхідний, однопрхідний, двопрхідний і некогерентний. Розраховано ймовірності заселеностей кожного стану системи як функції часу для всіх режимів роботи. Отримані результати дають корисні уявлення щодо керування, характеристикації та ініціалізація станів багаторівневих квантових систем.

Також в цьому розділі описується як використовувати адіабатично-імпульсну модель і підхід рівнянь балансу для опису квантових багаторівневих систем. Адіабатично-імпульсна модель може описувати динаміку багаторівневих квантових систем з ЛЗШМ переходами без релаксації. Підхід на основі рівнянь балансу може описувати квантові багаторівневі системи з енергетичною релаксацією. Поєднання адіабатично-імпульсної моделі та методу рівнянь балансу дозволяє в деяких випадках описати динаміку багаторівневих квантових систем з енергетичною релаксацією та ЛЗШМ переходами.

Була розрахована динаміка (залежність ймовірностей заселеностей адіабатичних енергетичних рівнів від часу, або, в даному випадку, від зовнішнього магнітного потоку) детектора мікрохвильових фотонів на основі потокового кубіта для стадії перезарядки детектора. Отримана динаміка досить добре узгоджується (за винятком околиць точок квазіперетину) з результатами, отриманими чисельним розв'язком рівняння Ліндблада.

Результати даної роботи мають одночасно значення для прикладного застосування, для розробки та створення нових пристроїв для квантових обчислень, і фундаментальне значення для розвитку розуміння фізичної поведінки складних квантових систем. Так, запропоновані методи реалізацій квантових логічних операцій можуть бути безпосередньо використані для постановки новітніх експериментів. Механізми та підходи, що розвинуті в роботі, після деякого доповнення експериментальними методиками, можуть безпосередньо бути застосовані для виконання квантових логічних операцій на певних типах реалізацій квантових комп'ютерів. Продемонстрований метод застосування інтерферометрії ЛЗШМ для одягнених квантових багаторівневих систем може використовуватись для визначення низки параметрів квантової системи на основі її експериментальних інтерферограм ЛЗШМ, тобто для спектроскопії цієї системи. Продемонстрований метод застосування адіабатично-імпульсної моделі з формалізмом рівнянь балансу за певних умов може використовуватись для визначення параметрів на етапі перезарядки детектору мікрохвильових фотонів на основі потового кубіту. Побудований опис та метод розрахунку динаміки подвійної квантової точки за допомогою розв'язання рівняння Ліндблада може бути використаний

для опису та кращого розуміння будь-яких подібних відкритих квантових багаторівневих систем.

Ключові слова: Кубіт, дворівнева система, квантова інтерференція, інтерферометрія Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани, перехід Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани, квантові переходи, неадіабатичний перехід, матриця переходу, адіабатично-імпульсна модель, квантова логічна операція, надпровідність, надплинність, спін, матриця густини, динаміка квантових систем.

ABSTRACT

Ryzhov A. I. Application of Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry for the control of the dynamics of quantum systems. — Qualification scientific work printed as manuscript.

Dissertation for a Doctor of Philosophy degree in speciality 104 – «Physics and Astronomy» (10 – Natural Sciences). – B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, NAS of Ukraine, Kharkiv 2024.

The dissertation is devoted to the study of the dynamics of quantum two-level and multilevel systems and the development of new approaches to its description and control using the Lindblad equation, Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry, adiabatic-impulse model and rate equation approach.

In the **introduction** I briefly justify the relevance of the dissertation topic, defined purpose and main tasks of the research, objects, subject, and research methods. The scientific novelty is formulated and the practical value of the obtained results is described. Also, this chapter includes the information about the publications, personal applicant's contribution, and approbation of the dissertation results. The information about the structure and volume of the dissertation is also given.

The **chapter 1** is devoted to the review and analysis of the literature related to the topic of the dissertation.

A transition of the occupation probability between energy levels of a quantum system during the passage of an avoided crossing of the levels is known as a Landau-Zener-Stückelberg-Majorana (LZSM) transition. When a quantum system with an avoided-level crossing is subject to periodic strong driving with sufficiently large amplitude, a sequence of LZSM transitions occurs. The phase accumulated between transitions (known as the Stückelberg phase) may result in constructive or destructive interference. As the result, the physical observables of the system, like the occupation probabilities of the energy levels, exhibit periodic dependence on the parameters of the external driving. This is referred to as LZSM interferometry.

According to the adiabatic-impulse model, the dynamics of such driven quantum systems can be split into two evolution stages: non-adiabatic LZSM transitions between the energy levels in the vicinity of the level anticrossings and adiabatic evolution far from the anticrossings. The analytical expressions of the

matrices of the corresponding evolution operators allows to describe and control the dynamics of these driven systems.

In some cases the dynamics and relaxation processes in the multilevel quantum systems can be well described by the rate equation formalism. The advantage of such approach is its relative simplicity, compared to the Lindblad master equation approach.

The dissertation is devoted to studying quantum two-level and multilevel systems and the approaches and methods for describing and controlling them. We provide the review analysis and the literature related to the Lindblad master equation, Liouville-von Neumann master equation, Bloch equations, rate equation approach, and other equations that can be used to study quantum systems; and the literature related to LZSM interferometry, LZSM transitions, adiabatic-impulse model (also known as the transition matrix method), Rabi oscillations, and amplitude spectroscopy. We also provide an overview of the literature related to qubits, experimental realizations of superconducting qubits and qubits based on silicon double quantum dots, exploiting both orbital and valley degrees of freedom. We provide an overview of the literature related to one- and two-qubit quantum logic gates (realized both classically by Rabi oscillations and by an alternative method, using LZSM transitions, researched in this chapter), quantum systems with double driving signal and other quantum systems where LZSM physics is relevant.

The **chapter 2** is devoted to the study of an alternative paradigm for implementing quantum logic gates based on non-resonant driving with LZSM transitions.

A conventional realization of quantum logic gates and control is based on resonant Rabi oscillations of the occupation probability of the system. This approach has certain limitations and complications, connected with the limitations of the rotating-wave approximation and leakage of the occupation probabilities to levels that lie outside the qubit subspace. LZSM transitions provide an alternative to conventional gates based on resonant driving. Compared to traditional Rabi oscillations, the main differences are a non-resonant driving frequency and a small number of periods in the external driving signal. In the considered alternative paradigm the driving consists of the periods of adiabatic evolution and short non-

adiabatic transitions. The energy-level occupation probabilities, as well as the phase difference between them, can be chosen by varying the driving parameters (the driving frequency and amplitude), which provides a different paradigm for control of the quantum system.

We further develop the paradigm of quantum logic gates, based on LZSM transitions, explore the dynamics of a multi-level quantum system under LZSM drive and optimize the parameters for increasing the quantum logic gates speed. We define the parameters of the external driving required for implementing a specific quantum logic gate using the adiabatic-impulse model. We describe the qubit Hamiltonian and its two main bases, demonstrate the implementations of single-qubit X, Y, Hadamard, and phase gates implementations using both Rabi oscillations and LZSM transitions, and compare the speed and fidelities achieved with both paradigms. We explore the way of increasing the gate speed and fidelity of the LZSM gates by using multiple transitions. We generalize the considered paradigm of using the adiabatic-impulse model to realize quantum logic gates for multi-level quantum systems, and describe the realization of two-qubit iSWAP and CNOT gates with two LZSM transitions. We also provide some details for implementing other two-qubit gates: SWAP, $\sqrt{\text{SWAP}}$, $\sqrt{i\text{SWAP}}$, $\text{CPhase}(\phi)$, CZ, CS.

The **chapter 3** is devoted to the study of the spectroscopy for a silicon double quantum dot (DQD), exploiting both orbital and valley degrees of freedom.

A periodically driven quantum system with avoided level crossing experiences both non-adiabatic transitions and wave-function phase changes. These result in coherent interference fringes in the system's occupation probabilities. For qubits with repelling energy levels, such LZSM interference displays arc-shaped resonance lines. In the case of a multi-level system with an avoided level crossing of the two lower levels, we demonstrate that the shape of the resonances can change from convex arcs to concave heart-shaped and harp-shaped resonance lines. Indeed, the whole energy spectrum determines the shape of such resonance fringes and this also provides insight on the slow-frequency system spectroscopy.

As a particular example, we consider this for valley-orbit silicon quantum dots, which are important for the emerging field of valleytronics. We consider a four-state Hamiltonian for a silicon orbital-valley DQD. We discuss how to prepare

the DQD states for low-frequency LZSM spectroscopy by dressing them with a resonant signal. The dressing allows to reduce the four-level system to a two-level one. This allows to adopt the formulas of the LZSM interferometry for the two-level quantum systems. We discuss the interference fringes obtained, and analyze the shape of the resonant lines. For a dressed four-level system, they have a harp-shaped form. We also analyze a particular case with a symmetric Hamiltonian.

The **chapter 4** is devoted to the description of the quantum multi-level systems with the Lindblad master equation, the adiabatic-impulse model, and the rate equation approach.

Strong driving of a multi-level quantum system allows to both characterize and control its state. We study a strongly driven dissipative four-level DQD. We obtain its Hamiltonian and solve the Lindblad master equation. It is demonstrated that this system works as a four-in-one device with the following features: LZSM interferometer; quantum-enhanced capacitor, microwave detector, and which-way interferometer. In other words, there are four different LZSM regimes: multi-passage, single-passage, double-passage, and incoherent one. We calculated occupation probabilities of each system's state as functions of time for all operation regimes. The gained results provide useful insights about controlling, characterizing, and initializing the multi-level quantum systems states.

We also describe how to use the adiabatic-impulse model and the rate equation approach for description of quantum multilevel systems. The adiabatic-impulse model can describe the dynamics of multilevel quantum systems with LZSM crossings without relaxation. The rate equation approach can describe quantum multilevel systems with the energy relaxation. By combination of the adiabatic-impulse model and the rate equation approach it is possible in some cases to describe the dynamics of multilevel quantum systems with energy relaxation and LZSM crossings.

We calculate the dynamics (the dependence of the adiabatic energy-level occupations on time, or, in this case on the external magnetic flux) of the detector of microwave photons, based on the flux qubit for the reset stage of the detector. The obtained dynamics is in a sufficiently good agreement (excluding the vicinities of the anticrossing points) with the results obtained by numerically solving of the Lindblad master equation.

The results of this work have value both for applications, for the development and creation of new devices for quantum computing, and fundamental value for the development of understanding of the physical behavior of complex quantum systems. Thus, the proposed methods for implementing quantum logic gates can be directly used to set up new experiments. The mechanisms and approaches developed in this work, after some supplementation with experimental techniques, can be directly applied to perform quantum logic gates on certain types of implementations of quantum computers. The demonstrated method of applying the LZSM interferometry to dressed quantum multilevel systems can be used to determine a number of parameters of a quantum system based on its experimental LZSM interferograms, i.e., for spectroscopy of this system. The demonstrated method of applying the adiabatic-impulse model with the rate equation formalism under certain conditions can be used to determine the parameters at the reset stage of the microwave photon detector based on a flux qubit. The constructed description and method of calculating the dynamics of a double quantum dot by solving the Lindblad master equation can be used to describe and better understand any similar open quantum multilevel systems.

Keywords: Qubit, two-level system, quantum interference, Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry, Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transition, quantum transitions, non-adiabatic transition, transfer matrix, adiabatic-pulse model, quantum logic operation, superconductivity, superfluidity, spin, density matrix, quantum system dynamics.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації:

1. S. N. Shevchenko, **A. I. Ryzhov**, and Franco Nori, "Low-frequency spectroscopy for quantum multilevel systems", *Physical Review B* **98**, 195434 (2018), DOI: 10.1103/PhysRevB.98.195434, Q1
2. **A. I. Ryzhov**, O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, M. F. Gonzalez-Zalba, Franco Nori, "Alternative fast quantum logic gates using nonadiabatic Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transitions", *Physical Review Research* **6**, 033340 (2024), DOI: 10.1103/PhysRevResearch.6.033340, Q1
3. O. A. Ilinskaya, **A. I. Ryzhov**, and S. N. Shevchenko, "Flux qubit based detector of microwave photons", *Physical Review B* **110**, 155414 (2024), DOI: 10.1103/PhysRevB.110.155414, Q1

Наукові праці, які засвідчують апробацію результатів:

4. **A. I. Ryzhov**, S. N. Shevchenko, "Modeling and study of the evolution of a four-level quantum system", Student conference on Applied Physics "Actual problems of modern physics", 24 Nov, 2017, Kharkiv, Ukraine, Abstracts, p. 55 (2017).
5. **A. I. Ryzhov**, S. N. Shevchenko, "Resonant excitations of a single qubit: diabatic and adiabatic regimes", International Advanced Study Conference «Condensed Matter and Low Temperature Physics 2020», (CM<P 2020), 8-14 June, 2020, Kharkiv, Ukraine, Abstracts, p. 175 (2020).
6. **A. I. Ryzhov**, S. N. Shevchenko, Franco Nori, "Resonant interferometry and spectroscopy of a double quantum dot system", XI Conference of Young Scientists "Problems of Theoretical Physics", ("Problems of Theoretical Physics"), 21-23 December, 2020, Kyiv, Ukraine, Online, Abstracts, p. 25 (2020).
7. **A. I. Ryzhov**, S. N. Shevchenko, Franco Nori, "Low-frequency spectroscopy for quantum multilevel systems", American Physics Society March meeting

- 2021 ("APS March meeting"), 15-19 March, 2021, USA, Online, Abstracts, p. C29.00001 (2021).
8. **A. I. Ryzhov**, O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, "Landau-Zener-Stückelberg-Majorana quantum logic gates", II International Advanced Study Conference "Condensed Matter and Low Temperature Physics 2021", (CM<P 2021), 6-12 June, 2021, Kharkiv, Ukraine, Online, Abstracts, p. 211 (2021).
 9. **A. I. Ryzhov**, M. P. Liul, S. N. Shevchenko, M. F. Gonzalez-Zalba, and Franco Nori, "Four regimes of excitations of a double quantum dot", International Symposium on Novel maTerials and quantum Technologies (ISNTT2021), 14-17 December, 2021, Atsugi, Japan, Online, Abstracts, p. 145 (2021).
 10. **A. I. Ryzhov**, O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, "Fast Landau-Zener-Stückelberg-Majorana quantum logic gates", American Physics Society March meeting 2022 ("APS March meeting"), 14-18 March, 2022, Chicago, USA, Online, Abstracts, p. Q38.00011 (2022).
 11. **A. I. Ryzhov**, O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, "Non-resonant quantum logic gates", American Physics Society March meeting 2023 ("APS March meeting"), 20-22 March, 2023, Las Vegas, USA, Online, Abstracts, p. UU05.00009 (2023).
 12. **A. I. Ryzhov**, O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, "Two-qubit nonadiabatic quantum logic gates", III International Conference "Condensed Matter and Low Temperature Physics", (CM<P 2023), 5-11 June, 2023, Kharkiv, Ukraine, Online, Abstracts, p. 197 (2023).
 13. **A. I. Ryzhov**, O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, M. F. Gonzalez-Zalba, and Franco Nori, "Fast quantum logic gates using nonadiabatic Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transitions", American Physics Society March meeting 2024 ("APS March meeting"), 4-8 March, 2024, Minneapolis, USA, Online, Abstracts, p. DD03.00005 (2024).

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ		18
ВСТУП.....		19
РОЗДІЛ 1	Квантові багаторівневі системи: проблеми опису, контролю стану та спектроскопії	25
1.1	Квантові логічні операції.....	25
1.2	Проблеми спектроскопії квантових систем	27
1.3	Керування багаторівневими квантовими системами	28
1.4	Рівняння Ліндблада	30
1.5	Детектор мікрохвильових фотонів на основі потокового кубіта	31
1.5.1	Електрична схема, лагранжіан, стаціонарний гамільтоніан	34
1.6	Принцип роботи фотонного детектора	37
1.6.1	Динаміка етапів захоплення та зчитування.	40
1.6.2	Динаміка етапу перезарядки	43
РОЗДІЛ 2	Альтернативні швидкі квантові логічні операції на основі неадіабатичних переходів Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани.....	48
2.1	Гамільтоніан та базиси	48
2.2	Однокубітні операції.....	50
2.2.1	Базовий набір однокубітних операцій. Фазова операція $R_z(\phi)$	50
2.2.2	Однокубітні операції на основі осциляцій Рабі	52
2.2.3	Однокубітні операції на основі ЛЗШМ переходів	56
2.2.4	Добротність	69
2.3	Двокубітні операції	72
2.3.1	Гамільтоніан та базиси	72
2.3.2	Операція iSWAP	74
2.4	Узагальнені SWAP операції	82
2.4.1	Операції SWAP та iSWAP	82
2.4.2	Операції $\sqrt{\text{SWAP}}$ та $\sqrt{i\text{SWAP}}$	83
2.5	Узагальнені керовані-U операції	84
2.5.1	Операція CNOT	84

2.5.2	Операції CPhase(ϕ), CZ, CS	89
2.6	Висновки	89

РОЗДІЛ 3	Низькочастотна спектроскопія для квантових багаторівневих систем	91
3.1	Чисті та одягнені енергетичні рівні	91
3.2	Одягання	93
3.3	ЛЗШМ для багаторівневої системи	96
3.4	Обговорення: актуальність низькочастотної спектроскопії	99
3.5	Серцеподібні (увігнуті) резонансні лінії	101
3.6	Висновки	103

РОЗДІЛ 4	Використання адіабатично-імпульсної моделі, підходу рівнянь балансу, та ітерферометрії Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани для опису та контролю квантових багаторівневих систем	105
4.1	Гамільтоніан та енергетичні рівні подвійної квантової точки	105
4.2	Рівняння Ліндблада та швидкості релаксації системи	110
4.3	Чотири режими роботи подвійної квантової точки та її динаміка	112
4.3.1	Інтерферограма ЛЗШМ. Квантова ємність.	113
4.3.2	Багатопрохідний режим.....	115
4.3.3	Режим подвійного проходження	117
4.3.4	Шатлінг із заплутаними станами або однопрохідний режим	119
4.3.5	Некогерентний режим.....	121
4.4	Використання адіабатично-імпульсної моделі та підходу рівнянь балансу для опису та контролю багаторівневої квантової системи	123
4.4.1	Квантова система. Рівні енергії.	123
4.4.2	Підхід рівняння Ліндблада	123
4.4.3	Спрощена адіабатично-імпульсна модель без релаксації	124
4.4.4	Підхід на основі рівнянь балансу	125
4.5	Висновки	127

ВИСНОВКИ	129
-----------------------	------------

БІБЛІОГРАФІЯ	133
Додаток А Список публікацій здобувача за темою дисертації	150
Додаток Б Відомості про апробацію результатів дисертації	152

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ЛЗШМ : Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани;
 АІМ: адіабатично-імпульсна модель;
 ПКТ: подвійна квантова точка;
 ДРС : дворівнева система;
 кудіт: квантова багаторівнева система;
 H : гамільтон квантової системи;
 \mathcal{P} : ймовірність збудження;
 Δ : мінімальна відстань між рівнями;
 ε : енергетичний зсув;
 A, ω : амплітуда, частота збуджуючого сигналу;
 δ : параметр адіабатичності;
 Γ : швидкість релаксації
 t : час;
 ϕ_S : фаза Стокса
 Φ_{St} : фаза Штюкельберга
 P_k, ρ_{kk} : ймовірність заселеності енергетичного рівня $|k\rangle$
 ρ : матриця густини;
 \check{L} : супероператор Ліндблада;
 Φ : магнітний потік;
 Φ_0 : квант магнітного потоку.

ВСТУП

Обґрунтування актуальності теми дослідження.

Квантові дворівневі та багаторівневі системи описують багато об'єктів та явищ в природі, науці та техніці. Дворівнева квантова система, або кубіт є базовим елементом квантових комп'ютерів. Як правило кубіт являє собою підсистему квантової багаторівневої системи.

Усі теоретичні методи дослідження, опису та контролю дворівневих та багаторівневих квантових систем, наведені у даному дослідженні, можуть бути застосованими до будь яких фізичних реалізацій таких квантових систем, як мікроскопічних, так і мезоскопічних. Це дослідження є теоретичною роботою, але в усіх розділах вона тісно пов'язана з експериментами, та або теоретично описує проведені експерименти, або розвиває теоретичні методи для реалізації нових експериментів. Деякі з отриманих теоретичних результатів та дослідження були підтвержені порівнянням з експериментальними результатами для певних фізичних систем.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертацію виконано в Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України в рамках тематичного плану ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України за відомчими тематиками:

”Надпровідні і мезоскопічні мікроструктури та прилади сучасної квантової електроніки на їх основі” (реєстраційний номер 0117U002291, термін виконання 2017-2021 рр.),

”Квантові нано-розмірні надпровідні системи: теорія, експеримент, практична реалізація” (реєстраційний номер 0122U001503, термін виконання 2022-2026 рр.).

Частина дисертаційної роботи виконано в лабораторії теоретичної квантової фізики, Інституту фізико-хімічних досліджень (RIKEN), м. Вако, Японія, в рамках проєктів ”Високочастотна квантова інтерферометрія для багаторівневих систем” (International program associate IPA) та ”Неадіабатичні квантові логічні операції” (International program associate IPA).

Частина дисертаційної роботи була виконана за підтримки гранту ARO,

США, в рамках проєкту "Квантові системи під дією збудження: фізика Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани" під керівництвом Шевченка С. М., (реєстраційний номер W911NF2010261, термін виконання 2020-2023 рр.)

Мета і задачі дослідження.

Метою дисертаційної роботи є теоретичний опис динаміки квантових дворівневих та багаторівневих систем, демонстрація та опис застосування інтерферометрії Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани, наближеної аналітичної адіабатично-імпульсної моделі, формалізму рівнянь балансу для опису, моделювання та контролю динамік квантових двох- та багаторівневих систем. Зокрема однією з задач було розвиток альтернативного методу реалізації квантових логічних операцій. Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити наступні завдання:

- Застосувати адіабатично-імпульсну модель до такого збудження кубіту та чотирирівневої квантової системи, що реалізує одно- та двокубітні квантові логічні операції.
- Порівняти параметри отриманих альтернативних квантових логічних операцій на основі ЛЗШМ переходів із параметрами операцій, реалізованих класичним методом за допомогою резонансного збудження.
- Розробити загальний алгоритм визначення параметрів збудження для реалізації довільних квантових логічних операцій.
- Продемонструвати застосування методів та аналітичних результатів інтерферометрії ЛЗШМ для дворівневих квантових систем до багаторівневих квантових систем.
- Продемонструвати застосування адіабатично-імпульсної моделі та формалізму рівнянь балансу для опису динаміки квантової багаторівневої системи.
- На основі експериментальних інтерферограм ЛЗШМ системи подвійної квантової точки за допомогою розв'язання рівняння Ліндблада обчислити та проаналізувати динаміку для різних режимів збудження подвійної квантової точки.

Об'єкт дослідження.

Квантові дворівневі та багаторівневі системи. Можуть бути реалізовані у таких квантових системах, як надпровідні кубіти, трансмони, квантові точки, графенові структури, електронні та ядерні спіни, електрони над рідким гелієм, фотони, атоми, тощо.

Предмет дослідження.

Динаміка, методи опису та контролю динаміки квантових дворівневих та багаторівневих систем.

Методи дослідження.

В основному в цій роботі використовуються чисельне моделювання рівнянь Шредінгера, Блоха, Ліувілля-фон Неймана, Ліндблада, використовуються наближенні аналітичні моделі для обчислення динамік квантових систем, такі як адіабатично-імпульсна модель (також відома як метод матриць переходу), формалізм рівнянь балансу, наближення обертової хвилі. В деяких частинах дисертації результати чисельного модулювання для підтвердження були порівняні із експериментальними результатами.

Наукова новизна отриманих результатів

- *Вперше* продемонстровано як аналітична адіабатично-імпульсна модель може бути застосована для реалізації квантових логічних операцій за допомогою переходів ЛЗШМ. *Вперше* були отримані аналітичні вирази матриць еволюції для найпростіших збуджуючих сигналів з одним, двома, та багатьма проходженнями квазіперетину рівнів. Вони надали змогу отримувати системи рівнянь для параметрів збуджуваного сигналу для реалізації будь-якої потрібної квантової логічної операції. *Вперше* були отримані аналітичні умови для однокубітних операцій X, операції Адамара, двокубітних операцій SWAP, iSWAP, $\sqrt{\text{SWAP}}$, $\sqrt{i\text{SWAP}}$, CNOT, CPhase(ϕ), CZ, CS. Для операції Адамара, X, iSWAP та CNOT були продемонстровані чисельні розрахунки динамік для отриманих параметрів зовнішнього збуджуючого сигналу. *Вперше* був надан загальний алгоритм знаходження параметрів збуджуючого сигналу із довільним числом переходів квазіперетину рівнів кубіту для реалізації довільної однокубітної операції. Була продемонстрована залежність добротності від швидкості квантових логічних операцій для керуючих

сигналів з 2, 4, 6, 8 переходами ЛЗШМ та порівняно з аналогічними залежностями для Рабі-операцій.

- *Вперше* була застосована інтерферометрія ЛЗШМ для одягненої квантової чотирирівневої системи та було продемонстровано як інтерферометрія ЛЗШМ може бути використана для знаходження параметрів системи. Після застосування інтерферометрії ЛЗШМ для одягнутих рівнів *вперше* були теоретично отримані арфо-подібні резонансні смуги для подвійної квантової точки.
- *Вперше* було продемонстровано як можна скомбінувати адіабатично-імпульсну модель з формалізмом рівнянь балансу для опису деяких простих випадків динамік багаторівневих квантових систем із переходами ЛЗШМ та енергетичною релаксацією без використання рівняння Ліндблада та без використання усієї інформації про гамільтоніан системи. Для розглянутої динаміки етапу перезарядки фотонного детектору на основі потокового кубіту було продемонстровано, що отримана динаміка якісно відповідає точній динаміці, отриманій за допомогою вирішення рівняння Ліндблада.

Практичне значення отриманих результатів.

Запропоновані методи реалізацій квантових логічних операцій можуть бути безпосередньо використані для постановки відповідного експерименту. Запропоновані механізми та підходи після деякого доповнення експериментальними методиками можуть бути застосовані для виконання квантових логічних операцій на певних типах реалізацій квантових комп'ютерів. Подальший експериментальний розвиток такої парадигми реалізації квантових операцій може надати переваги порівняно з класичним підходом на основі резонансного збудження.

Продемонстрований метод застосування інтерферометрії ЛЗШМ для одягнених квантових багаторівневих систем може використовуватись для визначення деяких параметрів квантової системи на основі її експериментальних інтерферограм ЛЗШМ, тобто для спектроскопії цієї системи.

Продемонстрований метод застосування адіабатично-імпульсної моделі

з формалізмом рівнянь балансу може використовуватись для деяких типів простих динамік в будь-яких квантових системах для спрощення розрахунків порівняно із рівнянням Ліндблада. Зокрема, для розрахунку та, відповідно, визначення параметрів для етапу перезарядки детектору мікрохвильових фотонів на основі потового кубіту.

Продемонстрований опис та розрахунок динаміки подвійної квантової точки за допомогою розв'язання рівняння Ліндблада може бути використаний для опису та кращого розуміння будь-яких подібних відкритих квантових багаторівневих систем.

Внесок здобувача.

У роботі [1], що написана у співавторстві та включена до дисертації, автором виконано всі аналітичні та чисельні розрахунки. У роботі [2], що написана у співавторстві та включена до дисертації, автором виконано всі аналітичні та чисельні розрахунки для розділу "ЛЗШМ для багаторівневих систем", апендиксів "Двокубітна чотирирівнева система" та "Одягання". У роботі [3], що написана у співавторстві та включена до дисертації, автором виконано всі аналітичні та чисельні розрахунки з використання адіабатично-імпульсної моделі та підходу рівнянь балансу для багаторівневої квантової системи. Автор брав участь в обговоренні результатів і написанні статті або окремих розділів в статтях, де дисертант не є першим автором, для всіх статей. Таким чином, особистий внесок здобувача у розв'язання теоретичних проблем, що розглядаються в дисертації, є визначальним.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати, які містяться в дисертації, були представлені на наступних 10 міжнародних конференціях:

- Студентська конференція з прикладної фізики "Актуальні проблеми сучасної фізики", 24 листопада 2017 р., Харків, Україна.
- Міжнародна наукова конференція "Фізика конденсованих систем і низьких температур 2020", (СМ&ЛТР 2020), 8-14 червня, 2020, Харків, Україна
- XI Конференція молодих вчених "Проблеми теоретичної фізики", ("Проблеми теоретичної фізики"), 21-23 грудня, 2020, Київ, Україна.

- Березнева зустріч Американського фізичного товариства 2021 ("APS March meeting"), 15-19 березня, 2021, США
- 2-на Міжнародна наукова конференція "Фізика конденсованих систем і низьких температур 2021", (SM<P 2021), 6-12 червня, 2021, Харків, Україна
- Міжнародний симпозіум з нових матеріалів та квантових технологій (ISNTT2021), 14-17 грудня, 2021, Ацугі, Японія
- Березнева зустріч Американського фізичного товариства 2022 ("APS March meeting"), 14-18 березня, 2022, Чикаго, США
- Березнева зустріч Американського фізичного товариства 2023 ("APS March meeting"), 20-22 березня, 2023, Лас-Вегас, США
- 3-я Міжнародна наукова конференція "Фізика конденсованих систем і низьких температур 2023", (SM<P 2023), 5-11 червня, 2023, Харків, Україна
- Березнева зустріч Американського фізичного товариства 2024 ("APS March meeting"), 4-8 березня, 2024, Міннеаполіс, США

Публікації.

Дисертація базується на результатах, опублікованих у 3 [1, 2, 3] наукових статтях в наукових журналах квантиля Q1 та 10 тезах доповідей на конференціях.

Структура дисертації.

Дисертація складається з анотації, вступу, трьох оригінальних розділів з рисунками, висновків і списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації становить 158 сторінок. Робота містить 35 рисунків та список використаних джерел з 170 найменувань на 17 сторінках.

РОЗДІЛ 1

Квантові багаторівневі системи: проблеми опису, контролю стану та спектроскопії

Існує багато способів теоретично описати квантову систему. До основних підходів належать рівняння Шредінгера, рівняння Ліувілля-фон Неймана [4], рівняння Блоха [5], Блохо-подібні рівняння [6], рівняння Ліндблада [7, 8], формалізм рівнянь балансу [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18] адіабатично-імпульсна модель (також відома як метод матриць переходу) [19, 20], теорія збурень [21, 22], теорія Флоке [23, 24, 25, 26, 27], рівняння Флоке-Маркова [28, 11, 29], рівняння Борна-Маркова [30, 31]. Один із самих повни

Деякі з них (рівняння Шредінгера, рівняння Ліувілля-фон Неймана, адіабатично-імпульсна модель) описують динаміку закритих квантових систем, без взаємодії з навколишнім середовищем та релаксаційних процесів. Інші (рівняння Блоха, рівняння Ліндблада, формалізм рівнянь балансу) описують відкриті багаторівневі системи з релаксаційними процесами. Деякі (рівняння Шредінгера, рівняння Ліувілля-фон Неймана, рівняння Ліндблада) надають точні результати обчислюваної динаміки, інші - лише наближені результати, але є більша простими в застосуванні або надають аналітичні рішення. Порівняння різних методів та наближень надано в посиланнях [32, 33].

У ході дослідження ми використовуємо рівняння Шредінгера, рівняння Ліувілля-фон Неймана, рівняння Блоха, рівняння Ліндблада, формалізм рівнянь балансу, адіабатично-імпульсну модель.

1.1 Квантові логічні операції

Традиційний спосіб керування станом кубіта реалізується за допомогою резонансного збудження, що призводить до осциляцій Рабі (див., наприклад, [34, 35, 36, 37]). Частота осциляцій Рабі визначається амплітудою керування; таким чином, збільшення амплітуди керування збільшує швидкість квантових операцій. Це створює кілька проблем [38, 39], включаючи витік ймовірності зеселеностей на рівні, які лежать за межами підпростору кубітів, похибки методу наближення обертової хвилі та збільшення шуму

навколишнього середовища. Замість того, щоб обговорювати технологічні складнощі підходу Рабі, розглянемо альтернативний підхід, який базується на іншій парадигмі керування квантовими системами.

Коли квантова система має квазіперетин енергетичних рівнів і знаходиться під дією сильного зовнішнього збуджуючого сигналу, вона може бути описана моделлю, спочатку розробленою в кількох публікаціях у 1932 році та відомою як переходи Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани (ЛЗШМ) (див., наприклад, [40, 41, 42, 43, 44, 18] та посилання в них). Фактично, динаміку за цією моделлю можна розділити на два етапи еволюції: неадіабатичні переходи між енергетичними рівнями поблизу квазіперетину та адіабатичну еволюцію далеко від квазіперетину.

Ймовірності заселеностей енергетичних рівнів, а також відносна фаза між ними можуть бути обрані шляхом змінення параметрів збудження (частоти та амплітуди), що забезпечує альтернативну парадигму керування станом кубіту [41, 45].

ЛЗШМ переходи є альтернативою традиційному методу реалізації квантових логічних операцій на основі резонансного збудження [46, 47]. Наявність квазіперетину енергетичних рівнів одного кубіта або двох зв'язаних кубітів дає змогу контролювано змінювати стани таких систем [48, 49, 50, 51] і реалізовувати одно- та двокубітні логічні операції [39]. Нещодавно було вивчено теоретично [52, 53, 54, 55] та продемонстровано експериментально [56, 57, 39, 58, 59, 60, 61, 62], що модель ЛЗШМ має ряд переваг над звичайними операціями на основі осциляцій Рабі. Ці переваги включають надвисоку швидкість роботи [56, 63], надійність [53], використання імпульсів смуги пропускання (що зменшує потребу в імпульсних мікрохвильових керуючих сигналах) [39] і зменшення впливу шуму навколишнього середовища [58].

В розділі 2 для розв'язання рівняння Ліувілля-фон Неймана та обчислення динаміки квантових систем (залежностей ймовірностей заселеностей енергетичних рівнів від часу) використовувався науковий пакет програм QuTiP [64, 65].

1.2 Проблеми спектроскопії квантових систем

Квантові системи можна надійно готувати, контролювати та досліджувати. "Найпростіша непроста квантова задача" [66], можливо, є керованою дворівневою системою (кубітом), яку можна використати для квантового зондування [67] та області квантової інформації [68]. Завдяки взаємодії неадіабатичних переходів між енергетичними рівнями та накопичення різниці фаз хвильової функції, інтерференційні смуги є зручним і потужним інструментом для контролю і зондування як квантової системи, так і її оточення. Ця техніка, відома як інтерферометрія Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани (ЛЗШМ) [69], повсюдно застосовується до дворівневих квантових систем (декілька експериментальних реалізацій як у надпровідних, так і напівпровідникових системах, наведені, наприклад, у посиланнях [70, 71, 72, 73, 74, 75, 76]). Однак, узагальнення цього підходу на багаторівневі системи залишається здебільшого відкритою та актуальною темою.

Фізика ЛЗШМ може бути застосована до квантових багаторівневих систем, які мають квазіперетин нижчих енергетичних рівнів. Зазвичай багаторівневі системи мають або всі рівні з'єднані між собою, або всі розділені. У першому випадку система містить переходи між всіма енергетичними рівнями та до неї може бути застосована амплітудна спектроскопія [77, 78]. У другому випадку, при значному розділенні енергетичних рівнів, повільне збудження не призведе до неадіабатичних переходів через надзвичайно малі ймовірності тунелювання, що описуються формулою ЛЗШМ. Це може бути виправлено методом "одягнення" системи за допомогою іншого, резонансного, сигналу. Тоді, ці підготовлені рівні можуть бути повільно збуджувати і досліджувати за допомогою фізики ЛЗШМ. Цей підхід було продемонстровано для надпровідних кубітів [79, 80]. Головний висновок полягає в тому, що багаторівнева система має збуджуватись *подвійним сигналом*: сигналом *резонансного одягнення* та *повільним* спектроскопічним сигналом. У різних контекстах квантові системи з подвійним збудженням вивчалися в роботах [81, 82, 83, 84, 85, 86, 87]. Інші приклади керованих багаторівневих систем, де фізика ЛЗШМ є актуальною,

наведені в [88, 75, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97].

Мета розділу 3 - розглянути, як багаторівневу систему можна звести до дворівневої, добре відокремленої від верхніх рівнів, але такої, що несе інформацію про них. Замість того, щоб розглядати загальний випадок, ми зосередимося на прикладі [66], на кремнієвої подвійної квантової точки (ПКТ), яка використовує як орбітальні, так і долинні ступені свободи, що робить її багаторівневою системою [98, 99, 100, 101]. Такі системи надають унікальну можливість використання долинного ступеня свободи, що вивчається в новій галузі валеїтроніки [102].

1.3 Керування багаторівневими квантовими системами

Багаторівневі системи, що знаходяться під дією сильного зовнішнього збудження, являють собою багату парадигму у квантовій фізики. Базовим окремим випадком є дворівнева система (ДРС), кубіт. Фізично кубіт реалізується як два найнижчі стани багаторівневої системи. Можна надати два приклади багаторівневих структур: системи на основі кубіта з урахуванням верхніх рівнів та системи з багатьма кубітами. Прикладами таких систем є надпровідні контури [12, 103, 104], напівпровідникові квантові точки [105, 2, 106], двокубітні системи [107, 108, 109].

Спочатку обговоримо динаміку керованої ДРС, актуальну для операцій з кубітами [39, 58, 51], а потім розглянемо її узагальнення для багаторівневої системи. Розглянемо ДРС, що знаходиться під дією періодичного енергетичного зсуву $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A \sin \omega t$. Ми припускаємо, що ймовірність переходу між станами ДРС є найбільшою в точці максимального зближення рівнів енергій (точці квазіперетину) і асимптотично малою в інших областях. Коли енергетичного зсув проходить через точку квазіперетину, стан системи стає суперпозиційним, частина зселеності тунелює на верхній рівень, і в результаті можна спостерігати інтерференцію між станами системи. Енергетична релаксація та декогеренція ДРС характеризується швидкостями $\Gamma_1 = T_1^{-1}$ і $\Gamma_2 = T_2^{-1}$ відповідно. $\Gamma_2 = \Gamma_1/2 + \Gamma_\phi$, де T_1, T_2 - часи енергетичної релаксації та декогеренції відповідно, Γ_ϕ - швидкість дефазування. Якщо система добре ізольована

від довкілля, так що період зовнішнього сигналу (зовнішнього збудження) $T_d = 2\pi/\omega \ll T_2$, то режим збудження *когерентний*. Енергетичний зсув проходить через точку квазіперетину енергетичних рівнів багато разів. Під час проходження енергетичним зсувом області квазіперетину рівнів енергій відбувається перехід Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани (ЛЗШМ) частини заселеності між енергетичними рівнями. У когерентному режимі когерентність системи зберігається протягом періоду зовнішнього збудження, а отже відбувається квантова інтерференція між переходами ЛЗШМ [110, 111, 40, 112, 41, 113, 114, 1]. У протилежному випадку, коли $T_d \gg T_2$, протягом періоду збудження (і, відповідно протягом часу між проходами області квазіперетину) когерентність не зберігається, і у цьому *некогерентному* режимі інтерференція між переходами ЛЗШМ відсутня. У проміжному режимі, коли $T_d \sim T_2$, інтерференція відбувається лише між двома послідовними проходженнями області квазіперетину енергетичних рівнів, поки зберігається когерентність системи [115, 116]. Цей режим називається режимом *подвійного проходження*.

Перемикання між різними режимами для ДРС можна здійснювати, змінюючи параметри, наприклад, частоти сигналу збудження ω [117]. Альтернативою є поєднання цих режимів у багаторівневій системі, наприклад, з двома квазіперетинами та суттєво різною швидкістю релаксацій поблизу цих квазіперетинів. Розглянемо, наприклад, багаторівневу систему з двома квазіперетинами рівнів, періодами декогеренції навколо першого квазіперетину $T_2^{(1)}$ та навколо другого квазіперетину $T_2^{(2)}$ і періодом зовнішнього сигналу T_d таким, що $T_2^{(1)} \ll T_d = 2\pi/\omega \ll T_2^{(2)}$. Якщо амплітуда A та постійний енергетичний зсув ε_0 сигналу збудження є такими, що відбуваються періодичні проходження лише першого квазіперетину із великою швидкістю декогеренції - режим збудження є некогерентним; якщо проходження тільки другого квазіперетину із малою швидкістю декогеренції - то режим збудження є когерентним. Якщо ж амплітуда A настільки велика, що рух охоплює обидва квазіперетини системи, то когерентність зберігається на протязі двох проходжень другого квазіперетину (з малою релаксацією), і втрачається при кожному проходженні першого квазіперетину (з великою релаксацією). Це формує багаторівневу версію

режиму подвійного проходження [118]. Метою розділу 4 є дослідження цих та подібних режимів збудження для квантових багаторівневих систем, що є корисним для квантового керування.

1.4 Рівняння Ліндблада

Для опису динаміки багаторівневої системи у розділі 4 використовується рівняння Ліндблада [7, 8], яке, порівняно із іншими методами опису відкритих квантових систем є одним із самих точних та повних, та широко використовується для вивчення властивостей різних квантових систем [119, 120, 121]. У цьому підрозділі надані деякі відомості із книги [122] про застосування рівняння Ліндблада для дво- та чотирирівневих відкритих квантових систем, які використовуються у розділі 4.

В діабатичному базисі його можна записати у вигляді:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \sum_{\alpha} \check{L}_{\alpha} [\rho], \quad (1.1)$$

де ρ - матриця густини. Супероператор Ліндблада \check{L}_{α} характеризує релаксацію системи, спричинену взаємодією з навколишнім середовищем,

$$\check{L}_{\alpha} [\rho] = L_{\alpha} \rho L_{\alpha}^{\dagger} - \frac{1}{2} \{L_{\alpha}^{\dagger} L_{\alpha}, \rho\}, \quad (1.2)$$

де $\{a, b\} = ab + ba$ - антикомутатор.

Наприклад, для дворівневої системи можливі два канали релаксації: енергетична релаксація (описується L_{relax}) і дефазування (описується L_{ϕ}). Відповідні оператори можна записати в такому вигляді:

$$L_{\text{relax}} = \sqrt{\Gamma_1} \sigma^{\dagger}, \quad L_{\phi} = \sqrt{\frac{\Gamma_{\phi}}{2}} \sigma_z \quad (1.3)$$

з $\sigma^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, Γ_1 - кубічна релаксація, $\Gamma_2 = \Gamma_1/2 + \Gamma_{\phi}$ - швидкість декогеренції, Γ_{ϕ} - швидкість чистого дефазування.

У випадку чотирирівневої системи існує чотири канали релаксації, які

описуються наступними операторами Ліндблада:

$$L_{\text{relax}(i)} = \sqrt{\Gamma_1^{(i)}} \sigma^{(i)}, \quad L_{\phi(i)} = \sqrt{\frac{\Gamma_\phi^{(i)}}{2}} \sigma_z^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (1.4)$$

Відповідні супероператори Ліндблада можна виразити у вигляді:

$$\begin{aligned} \check{L}_{\text{relax}(i)}[\rho] &= \frac{\Gamma_1^{(i)}}{2} \{2\sigma^{(i)} \rho \sigma^{(i)\dagger} - \sigma^{(i)\dagger} \sigma^{(i)} \rho - \rho \sigma^{(i)\dagger} \sigma^{(i)}\}, \\ \check{L}_{\phi(i)}[\rho] &= \frac{\Gamma_\phi^{(i)}}{4} \{2\sigma_z^{(i)} \rho \sigma_z^{(i)\dagger} - \sigma_z^{(i)\dagger} \sigma_z^{(i)} \rho - \rho \sigma_z^{(i)\dagger} \sigma_z^{(i)}\}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

де

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= \sigma^\dagger \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^{(2)} &= I \otimes \sigma^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Діагональні елементи матриці густини ρ відповідають ймовірностям заселеностей певних станів системи. Наша мета - обчислити ці ймовірності. Для цього необхідно записати гамільтоніан системи та визначити супероператори Ліндблада.

1.5 Детектор мікрохвильових фотонів на основі потокового кубіта

У цьому підрозділі наводиться опис детектору мікрохвильових фотонів на основі потокового кубіта, розробленого в роботі [3], динаміка етапу перезарядки якого була розрахована іншим методом у розділі 4.

В роботі [3] розглянуто напів-класичне наближення, коли електромагнітне поле перебуває в когерентному стані, потоковий кубіт розглянуто як багаторівневу квантову систему (кудіт). Розв'язуючи рівняння

Ліндблада, обчислено динаміку заселеності рівнів кудіта для стадій зчитування та перезарядки. Для використаних наближень форма сигналу не впливає на результати. При розгляді етапу перезарядки часова еволюція описується задачею з проходженням багатьох квазіперетинів енергетичних рівнів, тобто багаторівневою задачею ЛЗШМ.

Виявлення мікрохвильових фотонів використовується в різних галузях фізики, наприклад, для вимірювання надпровідних кубітів [123, 124], сплутування двох віддалених надпровідних кубітів [125], візуалізації за допомогою невеликої кількості фотонів, пошуку аксіонів темної матерії [126]. Різні дослідження пропонують різні рішення для подолання труднощів у виявленні фотонів мікрохвильового діапазону, які пов'язані з малими енергіями цих фотонів, і досі не існує переважаючої технології. Деякі детектори мікрохвильових фотонів базуються на тунелюванні за допомогою фотонів у контурах на основі напівпровідникових подвійних квантових точок [127]. Інший напрям досліджень використовує надпровідні контури з Джозефсонівськими переходами, які є нелінійними індуктивностями та дозволяють створювати надпровідні кубіти [35]. Звичайні детектори фотонів є деструктивними в тому сенсі, що фотон поглинається, спричиняючи перехід кубіта з основного стану у збуджений. Цей перехід викликає «клацання» детектора. Крім того, повідомлялося про квантове неруйнівне детектування мікрохвильових фотонів [128].

Для детектування мікрохвильових фотонів використовують різні типи надпровідних кубітів: фазові кубіти [129, 123], потокові кубіти, трансмони [128]. Фазовий кубіт характеризується потенціалом «пральної дошки», а «клацання» означає, що вимірюється напруга, яка зумовлена тунелюванням зі збудженого стану кубіта в термодинамічний резервуар. Тунелювання з основного стану кубіта через бар'єр також можливе, але швидкість тунелювання для цього процесу зазвичай на два-три порядки менша, ніж для збудженого стану [129]. Однак це тунелювання також слід враховувати, оскільки воно відповідає за приховану швидкість детектування (коли «клацання» відбувається без жодного фотона). Фазовий кубіт, який використовується у схемі детектування, називається фотопомножувачем Джозефсона [130, 131]. Оптимальні характеристики для фазового кубіта,

що використовується у квантових обчисленнях і у фотодетектуванні, відрізняються. Тоді як квантові комп'ютери потребують великого часу декогеренції, для фотодетектування час дефазування має бути достатньо малим, як було показано в роботі [130].

У роботі [129] Джозефсонівський перехід гальванічно пов'язаний з контурами керування і зчитування, а «клацання» детектора - це імпульс напруги. Внаслідок дисипативних процесів у Джозефсонівському переході виділяється Джоулеве тепло. Для охолодження системи потрібен досить тривалий час, під час якого неможливо провести наступне вимірювання. Перевага детектора на основі потокового кубіта полягає в тому, що Джозефсоновський перехід включений в надпровідний контур і ізольований від контурів управління і зчитування.

Для фазового кубіта «робочі» рівні локалізовані в одній ямі. Навпаки, для потокового кубіта ці два рівні належать до різних потенційних ям (тобто вони характеризуються протилежними напрямками магнітного потоку, або, що те саме, протилежним напрямком надструму, що протікає в петлі). Отже, приліт фотона змінює напрямок магнітного потоку, що і вимірюється. Детектор фотонів на основі потокового кубіта вивчався як теоретично [132], так і експериментально. У цих роботах одягнені стани надпровідного кубіта представляли штучну трирівневу систему Λ -типу. Імпульс сигналу перебував у слабкому когерентному стані з середнім числом фотонів порядку 0.1. В експерименті форма імпульсного сигналу була функцією Гаусса (проте автори теоретично підтверджують можливість виявлення сигналів з прямокутною та експоненціально затухаючою формою). Знайдено параметри, які відповідають умові майже ідеального поглинання. При цих значеннях параметрів відбиття вхідного сигналу зменшується.

У статті [3] досліджено детектор мікрохвильових фотонів на основі потокового кубіту у напівкласичному наближенні, що означає, що вхідний сигнал перебуває в когерентному стані. У розгнутій моделі не потрібно додаткових керуючих полів, які використовуються в роботі [132] для створення одягненої системи кубіт-резонатор. На відміну від роботи [132], у статті [3] розглянуто потоковий кубіт як багаторівневу систему. Потенціальна енергія і три рівні, на яких ґрунтується механізм детектування

(див. рис. 1.2 нижче), повинні задовольняти наступним умовам: (i) різниця енергій між двома «робочими» рівнями відповідає частоті зовнішнього мікрохвильового поля; (ii) висота бар'єра дозволяє тунелювання з верхнього «робочого» рівня на нижній і блокує термоактивовані переходи над бар'єром; (iii) ймовірність тунелювання з нижнього «робочого» рівня вкрай мала; (iv) глибинна яма достатньо глибока, щоб зміна магнітного потоку, яка відбувається на стадії зчитування, фіксувалася на довгий час. До розгляду було включено кілька додаткових рівнів, які з'являються в глибокій ямі завдяки цим умовам. Деякі експериментальні дослідження подібного фотонного детектора на основі потокових кубітів наведено в роботах [133, 134] і запропоновано схему слабого неперервного вимірювання для зчитування станів потокових кубітів. За допомогою чисельних розрахунків у роботі [3] було записано стаціонарний гамільтоніан потокового кубіта і чисельно отримано стаціонарні рівні енергії та власні функції, обговорено принцип роботи детектора, розрахована динаміка заселеності рівнів багаторівневої системи для стадій зчитування та перезарядки.

1.5.1 Електрична схема, лагранжіан, стаціонарний гамільтоніан

Надпровідний потоковий кубіт можна описати такою електричною схемою [див. рис. 1.1(a)]: контур, який містить Джозефсонівський перехід та індуктивність L і пронизаний зовнішнім магнітним потоком Φ_e . Повний магнітний потік Φ у контурі та Φ_e пов'язані трансцендентним рівнянням

$$\Phi = \Phi_e - LI_c \sin\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right), \quad (1.7)$$

яке зумовлено існуванням екрануючого струму і є справедливим для радіочастотного СКВІДу; I_c позначає критичний струм, $\Phi_0 = \pi\hbar/e$ - квант магнітного потоку. Енергію, пов'язану з ємністю C , $C\Phi^2/2$, можна вважати кінетичною енергією. Є два члени потенціальної енергії, тобто $(\Phi - \Phi_e)^2/2L$, пов'язані з індуктивністю та енергією Джозефсонівського переходу $E_J[1 - \cos(2\pi\Phi/\Phi_0)]$, з $E_J = \Phi_0 I_c / 2\pi$. Тоді лагранжіан можна записати у

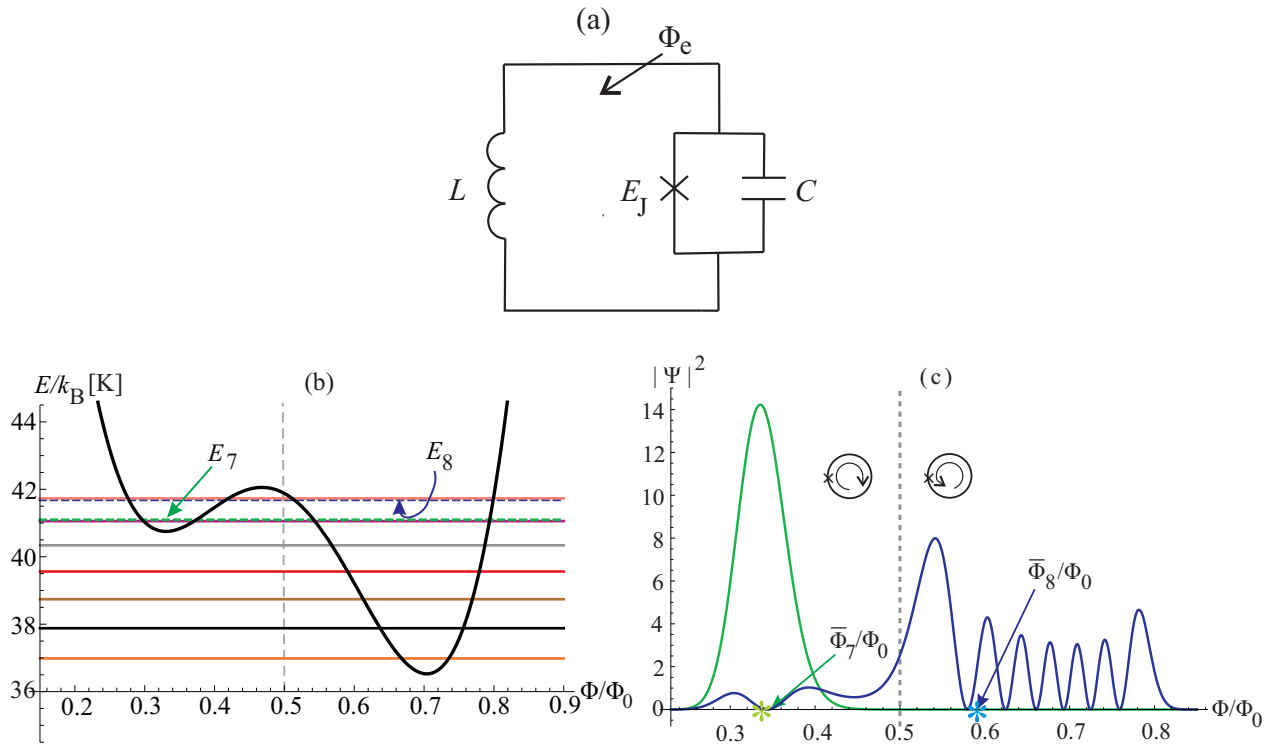


Рис. 1.1: (а) Електрична схема, що описує надпровідний потоковий кубіт. E_J - енергія Джозефсона, L - індуктивність, C - ємність, Φ_e - зовнішній магнітний потік. (б) Залежність потенціальної енергії (1.12) та енергій рівнів кудіта (у кельвінах) від магнітного потоку Φ (нормалізованого до кванта магнітного потоку Φ_0). В одній з двох ям локалізовано дев'ять рівнів. Рівні, які перебувають у резонансі з вхідним мікрохвильовим імпульсом, показано пунктирними лініями (7-й і 8-й рівні). (с) Квадрат абсолютного значення власної функції як функція Φ/Φ_0 для 7-го рівня (зелена крива) і 8-го рівня (синя крива). Зірочки на осі x позначають середні значення повного магнітного потоку для двох рівнів. Стрілки всередині контуру кубіта показують напрямок електричного струму.

вигляді

$$\mathcal{L} = \frac{C\dot{\Phi}^2}{2} - \frac{(\Phi - \Phi_e)^2}{2L} - E_J \left[1 - \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right]. \quad (1.8)$$

Змінна, канонічно спряжена до потоку Φ , визначається як $Q = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi} = C\dot{\Phi}$. Розглядаючи магнітний потік Φ і заряд Q квантово-механічно, оператор заряду можна виразити як $Q = -i\hbar \partial/\partial\Phi$.

Опускаючи постійний член, (стаціонарний) гамільтоніан можна записати як [135]

$$H(\Phi, Q) = \frac{Q^2}{2C} + U(\Phi, \Phi_e), \quad (1.9)$$

де потенціальна енергія задається формулою

$$U(\Phi, \Phi_e) = -E_J \cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) + \frac{(\Phi - \Phi_e)^2}{2L}. \quad (1.10)$$

Стаціонарне рівняння Шредінгера з енергіями, вимірними в кельвінах, має вигляд

$$\left\{-\frac{1}{2M}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right\}\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (1.11)$$

з потенційною енергією

$$U(x) = U_0 \{-\beta_L \cos(2\pi x) + 2\pi^2(x - x_e)^2\}. \quad (1.12)$$

Тут

$$x = \Phi/\Phi_0, \quad x_e = \Phi_e/\Phi_0, \quad (1.13)$$

та

$$U_0 = (\Phi_0/2\pi)^2/k_B L, \quad M = k_B \Phi_0^2 C/\hbar^2, \quad (1.14)$$

де U_0 і M - магнітна енергія та ефективна маса (k_B - стала Больцмана);

$$\beta_L = 2\pi L I_c / \Phi_0, \quad (1.15)$$

є безрозмірна індуктивність.

Параметр β_L є регульованою величиною завдяки керованому критичному струму. (На практиці цю можливість можна реалізувати, замінивши один Джозефсонівський перехід на невелике коло з двома переходами). З аналізу рівняння (1.12) випливає, що $U(x)$ є двоямним потенціалом, якщо виконується подвійна нерівність $1/\pi < \beta_L < 2.48$, і β_L береться з цього інтервалу нижче. Параметри U_0 і M визначаються індуктивністю L і ємністю C відповідно, отже, вони визначаються конструкцією кубіта.

Рівняння (1.11) має формальну аналогію з рівнянням Шредінгера для квазічастинки з ефективною масою M , що рухається в потенціалі $U(x)$. Власні енергії гамільтоніана (1.9) можна знайти чисельно [135] і для параметрів з рис. 1.1 (близьких до параметрів рис. [135]) існують дев'ять енергетичних рівнів, локалізованих в одній з ям. Ці рівні показано на

рис. 1.1(b). Ми говоримо, що рівень локалізований у ямі, якщо його власна функція $\Psi_n(x)$ локалізована у цій ямі, див. рис. 1.1(c). Рівні, локалізовані в різних ямах, відповідають протилежним напрямкам електричного струму. Дійсно, зовнішній магнітний потік створює в контурі екрануючий струм $I_s = -I_c \sin(2\pi\Phi/\Phi_0)$. Отже, $I_s < 0$ для $\Phi/\Phi_0 < 0.5$ і $I_s > 0$ для $\Phi/\Phi_0 > 0.5$. В обраному масштабі на рис. 1.1(b) 6-й і 7-й рівні практично не розрізняються на око (те ж саме можна сказати і про 8-й і 9-й рівні). Близькість 6-го і 7-го (а також 8-го і 9-го) рівнів пояснюється розщепленням рівнів, спричиненим тунелюванням через бар'єр. Для рис. 1.1(c) параметри моделювання взято близькими до параметрів з роботи [135]: магнітна енергія $U_0 = 32.68$ К, безрозмірна індуктивність $\beta_L = 1.28$, ефективна маса $M = 955$ К⁻¹, зовнішній магнітний потік (в одиницях Φ_0) $x_e = 0.5087$.

1.6 Принцип роботи фотонного детектора

Принцип роботи детектора фотонів на основі потокового кубіта показано на рис. 1.2. Нехай квазічастинка знаходиться на 7-му рівні. Вхідний мікрохвильовий імпульс (який треба детектувати) є резонансним з парою рівнів, а саме з рівнями 7 і 8, які локалізовані в лівій і правій ямах відповідно, як видно з рис. 1.1(b, c). Енергії цих рівнів показано пунктирними лініями на рис. 1.1(b). Електромагнітний імпульс викликає осциляції Рабі між 7-м і 8-м рівнями. Внаслідок дисипації квазічастинка падає на найнижчий рівень у правій ямі, отже, електричний струм у контурі змінює свій напрямок, що відповідає детектуванню сигналу. Необхідно спотворити форму потенціалу (змінивши зовнішній магнітний потік Φ_e), щоб зробити праву яму неглибокою, а квазічастинку - на 7-му рівні, щоб система була готова до реєстрації чергового сигналу.

Коливання Рабі повинні знаходитися між рівнями, які локалізовані в різних ямах, оскільки магнітний потік повинен суттєво змінюватися в процесі детектування (стадія зчитування). Крім того, в процесі детектування квазічастинка повинна переходити з неглибокої ями в глибоку, щоб зафіксувати зміну магнітного потоку. Ці дві умови в нашому випадку (при обраних параметрах) означають, що «робочими» рівнями є 7-й і 8-й.

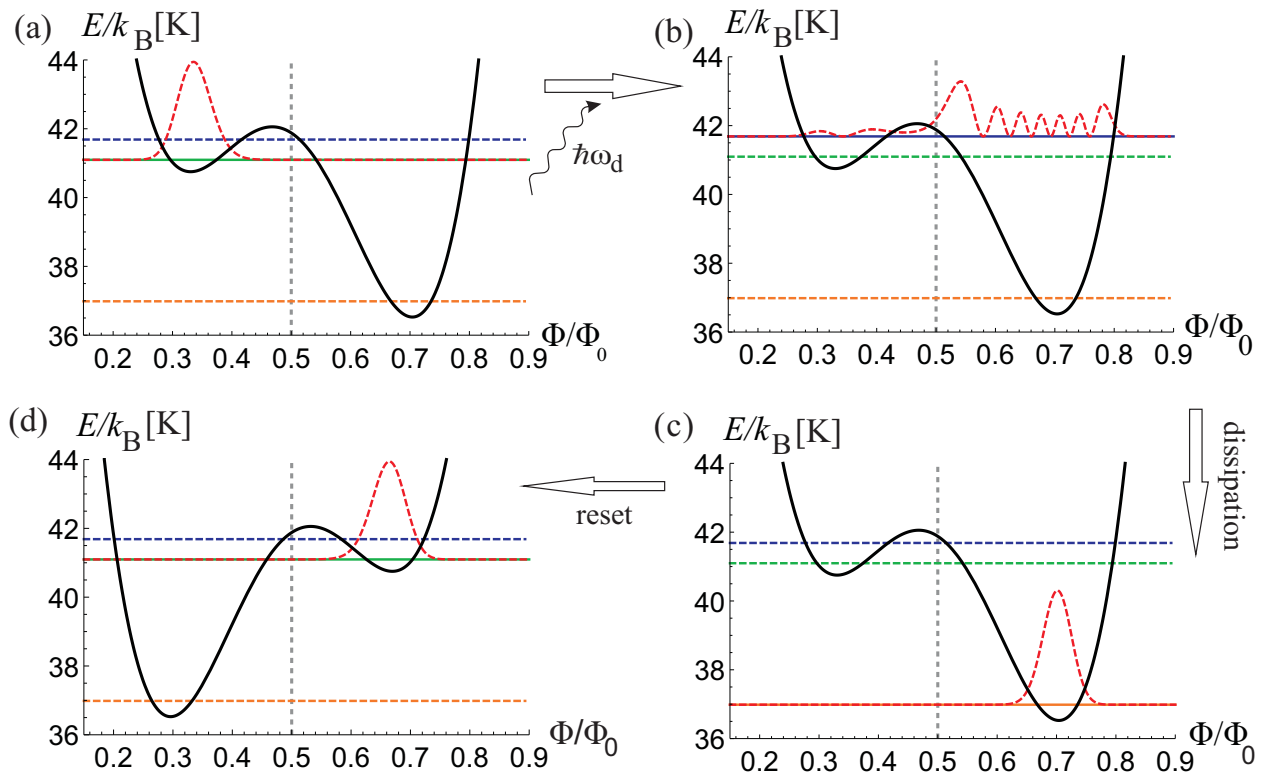


Рис. 1.2: Принцип роботи фотонного детектора. (а) Квазічастинка перебуває на 7-му рівні [показано лише рівні 1, 7 і 8, див. рис. 1.1(b)]. (b) Вхідний сигнал з частотою $\omega_d = (E_8 - E_7)/\hbar$ викликає осциляції Рабі між 7-м і 8-м рівнями (стадія захоплення у детектуванні). (c) Дисипація переводить квазічастинку на найнижчий рівень, отже, можна виміряти зміну напрямку електричного струму (стадія зчитування у детектуванні). (d) Перезавантаження системи здійснюється зміною зовнішнього магнітного потоку Φ_e від значення 0.5087 до 0.4913 [див. також рис. 1.3(a)]. Потенціал $U(x)$ спотворюється і квазічастинка знову опиняється на 7-му рівні.

Залежність енергій рівнів від зовнішнього магнітного потоку Φ_e показано на рис. 1.3(a). Квазіперетин, присутній у всіх парах сусідніх рівнів, проілюстровано для 6-го і 7-го рівнів на рис. 1.3(b). На рис. 1.3(c) показано енергії рівнів як функції одного з параметрів системи, β_L .

Тепер оцінимо швидкість зміни зовнішнього магнітного потоку, яка забезпечує перехід з найнижчого рівня на 7-й рівень під час етапу перезарядки з достатньо високою ймовірністю переходу ($P \approx 0.99$). Цю швидкість v (в енергетичних одиницях) можна оцінити за формулою ЛЗШМ (див., наприклад, посилання на [136, 137, 41]).

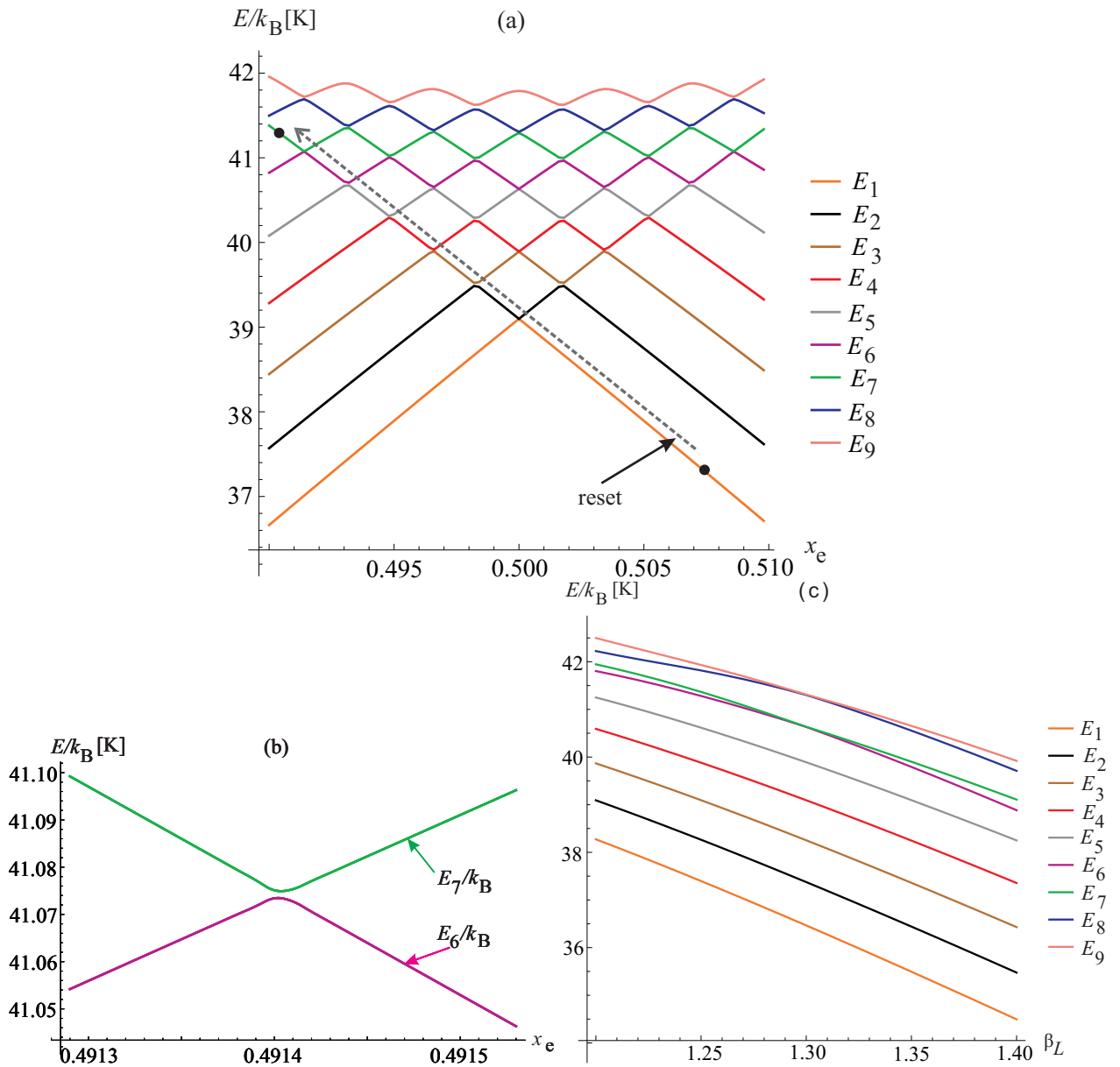


Рис. 1.3: (a) Енергетичні рівні кудіта як функція зовнішнього магнітного потоку x_e . Енергетичні рівні мають квазіперетини, як показано на панелі (b) для 6-го та 7-го рівнів. Параметри моделювання такі самі, як на рис. 1.1. (c) Залежність енергетичних рівнів qudit від безрозмірної індуктивності β_L . Параметри моделювання: $U_0 = (41.67/\beta_L)$ К, $M = 955 \text{ К}^{-1}$, $x_e = 0.5087$.

Ця формула дає ймовірність діабатичного переходу між двома енергетичними станами квантової системи, яка має залежний від часу гамільтоніан з лінійним енергетичним зсувом, тобто

$$H_{\text{LZSM}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} vt & \Delta \\ \Delta & -vt \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Якщо динаміка починається в нескінченному минулому з нижнього енергетичного власного стану, то ймовірність того, що система опиниться у верхньому енергетичному власному стані в нескінченному майбутньому, після проходження області уникнення перетину, є

$$P_{LZSM} = e^{-\frac{\pi\Delta^2}{2\hbar v}}. \quad (1.17)$$

Отже, маємо задачу з фіксованою цільовою P_{LZSM} і декількома значеннями Δ , див. рис. 1.3(a). Тоді мінімальна швидкість v , яка необхідна для досягнення цільової ймовірності переходу, визначається найбільшим квазіперетином рівнів $\Delta_{\max} \approx 3$ мК. Зв'язок між v і швидкістю $d\Phi_e/dt$ зміни зовнішнього магнітного потоку такий: $d\Phi_e/dt = v/2I_p$, де ми беремо постійний струм $I_p \approx \Phi/L \approx 3\mu\text{A}$. Використовуючи цю оцінку і значення v , що відповідає $P_{LZSM} = 0.99$, отримуємо $d\Phi_e/dt \approx 0.5$ nWb/s $\approx 0.25\Phi_0/\mu\text{s}$ (зверніть увагу, що цю оцінку отримано за відсутності дисипації). Це реалістичне значення для ВЧ СКВІДу. Змінюючи Φ_e з такою швидкістю, нам потрібно приблизно $0.1\mu\text{s}$, щоб змінити Φ_e від початкового значення $0.5087\Phi_0$ до кінцевого значення $0.4913\Phi_0$. Порівняємо нашу оцінку часу перезарядки зі значеннями, згаданими в роботах, що вивчають детектори на основі фазового кубіта. В роботі [135] наведене значення 1 ms, та в роботі [138] наведене значення $0.1\mu\text{s}$. Наша оцінка значно менша за відповідне значення в [135] і того ж порядку, що й у [138].

1.6.1 Динаміка етапів захоплення та зчитування.

Повний гамільтоніан і напівкласичне наближення

Запишемо гамільтоніан (1.9) у базисі власних функцій кудіту. Враховуючи також одномодовий резонатор і вхідний мікрохвильовий імпульс, який перебуває в резонансі з 7-м та 8-м рівнями кудіту, гамільтоніан

можна записати так [139]

$$H = \sum_{j=1}^N E_j |E_j\rangle \langle E_j| + \hbar \omega_r a^\dagger a + g(a^\dagger |E_7\rangle \langle E_8| + \text{h.c.}) + A_d f(t)(a^\dagger e^{-i\omega_d t} + \text{h.c.}). \quad (1.18)$$

Це спрощення узагальненого гамільтоніану Джейнса-Каммінгса, $N = 9$ для вибраних параметрів. Під спрощенням ми маємо на увазі, що взаємодія кудіта з електромагнітним полем, яка описується третім членом рівняння (1.18), зв'язує поле лише з 7-м і 8-м рівнями, а всі інші рівні залишаються не зачепленими. Тут a - оператор анігіляції електромагнітного поля, E_j - власна енергія j -го рівня, що відповідає власній функції $|E_j\rangle$ кудіта, ω_r - резонаторна частота, g - енергія взаємодії кудіта з полем, A_d і ω_d - енергія та кутова частота вхідного мікrohвильового імпульсу відповідно. Сигнал може мати практично будь-яку форму $f(t)$, наприклад, Гауссову, квадратичну, експоненціальну [132]. Гамільтоніан потокового кубіта з одним Джозефсонівським переходом, індуктивно зв'язаного з резонатором, має вигляд квантового гамільтоніана Рабі [140, 141], якщо не брати до уваги вищі енергетичні рівні кубіта. Зауважимо також, що енергетичні власні стани системи потоковий кубіт-резонатор з глибоким сильним зв'язком є заплутаними.

Виконуємо унітарне перетворення обертової хвилі,

$$U = \exp[i\omega_d t(a^\dagger a + \sum_j j |E_j\rangle \langle E_j|)] \quad (1.19)$$

(див., наприклад, посилання. [142]), після чого перетворений гамільтоніан, $\tilde{H} = U H U^\dagger + i\hbar \dot{U} U^\dagger$, набуває вигляду

$$\tilde{H} = \sum_{j=1}^N (E_j - \hbar \omega_d j) |E_j\rangle \langle E_j| + \hbar(\omega_r - \omega_d) a^\dagger a + g(a^\dagger |E_7\rangle \langle E_8| + \text{h.c.}) + A_d f(t)(a^\dagger + a). \quad (1.20)$$

Припустимо, що поле перебуває в когерентному стані $|\alpha\rangle$, усереднимо \tilde{H} по

$|\alpha\rangle$ аналогічно до роботи [122], і отримаємо $H_c = \langle \alpha | \tilde{H} | \alpha \rangle$ у вигляді

$$H_c = \sum_{j=1}^N (E_j - \hbar\omega_d j) |E_j\rangle \langle E_j| + \hbar(\omega_r - \omega_d) \langle n \rangle + g(\alpha^* |E_7\rangle \langle E_8| + \text{h.c.}) + A_d f(t)(\alpha^* + \alpha), \quad (1.21)$$

де $\alpha = \sqrt{\langle n \rangle}$ і $\langle n \rangle$ - середнє число фотонів. Припускаючи для простоти, що α є дійсною і опускаючи константи, ми можемо переписати Рівн. (1.21) наступним чином

$$H_c = \sum_{j=1}^N (E_j - \hbar\omega_d j) |E_j\rangle \langle E_j| + g\alpha (|E_7\rangle \langle E_8| + \text{h.c.}) + 2A_d \alpha f(t). \quad (1.22)$$

Рівняння Ліндблада та динаміка заселеностей кудіта

Для стадії захоплення (збудження) і стадії зчитування (релаксації) рівняння Ліндблада для оператора густини $\hat{\rho}$ має вигляд

$$\partial_t \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H_c, \hat{\rho}] + \sum_{n, n' (n > n')} \Gamma_{nn'} D(|n'\rangle \langle n|) \hat{\rho}. \quad (1.23)$$

Тут ми враховуємо релаксацію в кубіті та нехтуємо дисипацією в резонаторі, яку вважаємо малою [138]. Супероператор $D(O)\hat{\rho}$ має стандартний вигляд [122].

$$D(O)\hat{\rho} = O\hat{\rho}O^\dagger - \frac{1}{2}O^\dagger O\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}O^\dagger O, \quad (1.24)$$

а швидкості релаксації задаються як

$$\Gamma_{nn'} = \gamma \frac{E_n - E_{n'}}{\hbar} \left| \left\langle \Psi_{n'}(x) \left| \frac{\partial}{\partial x} \Psi_n(x) \right\rangle \right|^2 \theta(n - n'). \quad (1.25)$$

Тут γ - безрозмірний загальний множник, похідна обумовлена зарядовим оператором \hat{Q} , а θ позначає ступінчасту функцію Гевісайда. Температурну залежність швидкостей релаксації можна врахувати (див., наприклад, посилання [143]), помноживши останній член у правій частині рівняння (1.23) на функцію $\coth[(E_n - E_{n'})/2k_B T]$. Однак цим фактором можна

знехтувати для температур $T \sim 20 \text{ mK}$ [135]. Ми не розглядаємо чистого дефазування, хоча є багато робіт, в яких досліджуються різні джерела і типи шуму, що призводять до дефазування в надпровідних кубітах. Білий шум (із лінійною по температурі спектральною густиною потужності) є малим при низьких температурах, тоді як низькочастотний потоковий шум слід брати до уваги [144]. Кілька експериментальних робіт показують, що потоковий шум $1/f$ є домінуючим джерелом дефазування в поточкових кубітах (див., наприклад, роботу [145]). В роботі [146] на додаток до шуму $1/f$ присутній ще й білий шум.

Диференціальне рівняння для матричного елемента $\rho_{kk'} \equiv \langle E_k | \hat{\rho} | E_{k'} \rangle$ з урахуванням Рівн. (1.23) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{kk'}}{dt} = & -i \left\{ \left(\frac{E_k}{\hbar} - \omega_{dk} \right) \rho_{kk'} - \left(\frac{E_{k'}}{\hbar} - \omega_{dk'} \right) \rho_{kk'} \right. \\ & \left. + \frac{g}{\hbar} \alpha (\rho_{8k'} \delta_{k7} + \rho_{7k'} \delta_{k8} - \rho_{k7} \delta_{k'8} - \rho_{k8} \delta_{k'7}) \right\} \\ & + \sum_{j=1}^8 \left[\Gamma_{jk} \rho_{jj} - \frac{1}{2} (\Gamma_{kj} + \Gamma_{k'j}) \rho_{kk'} \right], \end{aligned} \quad (1.26)$$

де $\delta_{kk'}$ - Символ Кронекера. Форма сигналу $f(t)$ не входить до рівняння (1.26) у напівкласичному наближенні. Систему рівнянь (1.26) для $k, k' = 1, 2, \dots, 8$ розв'язано чисельно.

Еволюцію за часом діагональних елементів ρ_{kk} матриці густини для етапу зчитування показано на рис. 1.4. При $t \rightarrow \infty$ заселеність найнижчого рівня наближається до одиниці, тоді як заселеність усіх інших рівнів зникає. Між рівнями 7 і 8 існують загасаючі осциляції Рабі. Збільшення g (або α) призводить до зростання частоти цих осциляцій і навпаки.

1.6.2 Динаміка етапу перезарядки

Для того, щоб отримати часову еволюцію заселеностей енергетичних рівнів кудіта на стадії перезарядки, необхідно розв'язати рівняння Ліндблада (1.23) з H_c з рівняння (1.22), замінивши його на залежний

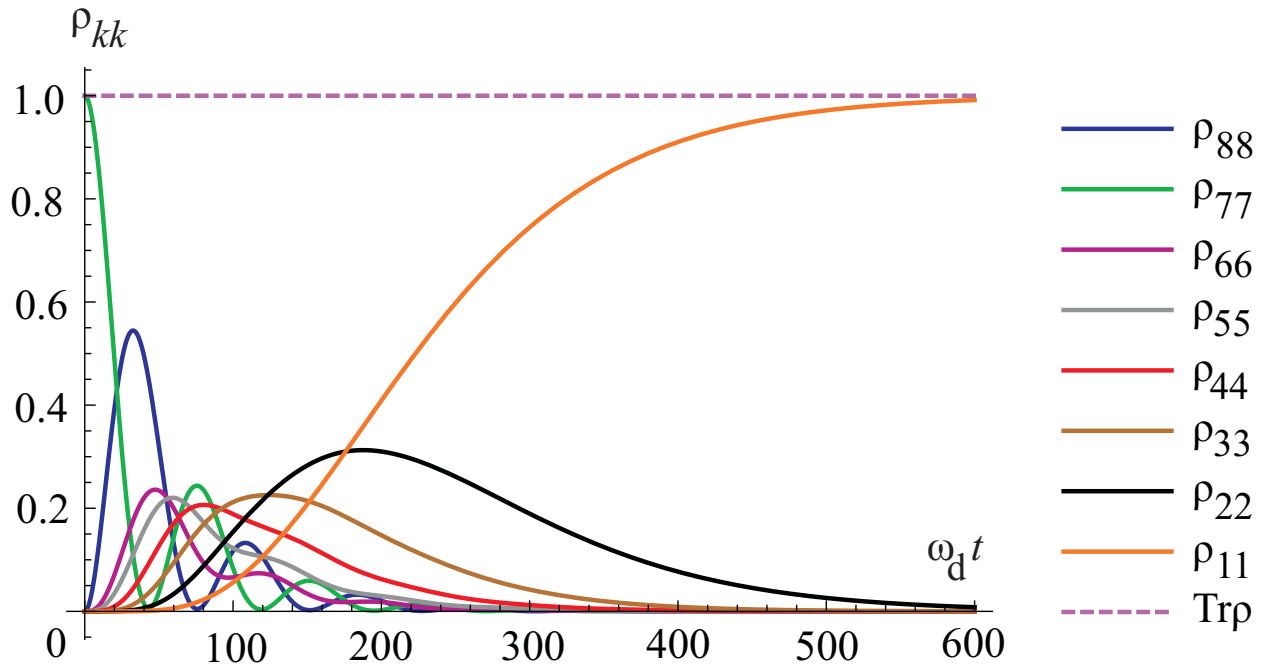


Рис. 1.4: Часова залежність заселеності рівнів кудіта для етапу зчитування. Параметри моделювання: $U_0 = 32.68 \text{ K}$, $\beta_L = 1.28$, $M = 955 \text{ K}^{-1}$, $x_e = 0.5087$, $g = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ K}$, $\alpha = 10$, швидкість дисипації $\gamma = 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}$ (приблизно 0.4 MHz). Частота зовнішнього мікрохвильового імпульсу становить $\omega_d = (E_8 - E_7)/\hbar$.

від часу гамільтоніан.

$$H_r(t) = \sum_{j=1}^N E_j(t) |E_j(t)\rangle \langle E_j(t)|. \quad (1.27)$$

Часова залежність зумовлена зміною зовнішнього магнітного потоку,

$$\Phi_e = \Phi_{e0} - v_e t, \quad (1.28)$$

де $v_e = d\Phi_e/dt$, а $|E_j(t)\rangle$ - власна функція, що відповідає j -му адіабатичному рівню енергії $E_j(t)$. Позначимо через $\hat{A}(t)$ матрицю переходу від базису власних енергій при $t = 0$ до адіабатичного базису, тоді $A_{kk'}(t) = \langle E_{k'}^{(0)} | E_k(t) \rangle$, де $|E_{k'}^{(0)}\rangle = |E_{k'}(t = 0)\rangle$. Зауважимо, що задача перезарядки ϵ , по суті, багаторівневою задачею ЛЗШМ (див. посилання [41]).

Беручи до уваги, що

$$\begin{aligned} \langle E_k(t) | \frac{d\hat{\rho}}{dt} | E_{k'}(t) \rangle &= \frac{d}{dt} \langle E_k(t) | \hat{\rho} | E_{k'}(t) \rangle \\ &- \frac{d\langle E_k(t) | \hat{\rho} | E_{k'}(t) \rangle}{dt} - \langle E_k(t) | \hat{\rho} \frac{d|E_{k'}(t)\rangle}{dt} \end{aligned} \quad (1.29)$$

і нехтуючи дефазіровкою, отримаємо диференціальне рівняння для матричного елемента $\rho_{kk'} \equiv \langle E_k(t) | \hat{\rho} | E_{k'}(t) \rangle$ для стадії перезарядки детектора у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{kk'}}{dt} &= \left(\hat{B}^*(t) \hat{\rho} \right)_{kk'} + \left(\hat{B}(t) \hat{\rho}^* \right)_{k'k} \\ &- \frac{i}{\hbar} \left(E_k(t) - E_{k'}(t) \right) \rho_{kk'} \\ &+ \sum_{j=1}^7 \left[\Gamma_{jk}(t) \rho_{jj} - \frac{1}{2} (\Gamma_{kj}(t) + \Gamma_{k'j}(t)) \rho_{kk'} \right], \end{aligned} \quad (1.30)$$

де $k, k' = 1, 2, \dots, 7$ та

$$\hat{B}(t) = \frac{d\hat{A}(t)}{dt} \hat{A}^{-1}(t). \quad (1.31)$$

Швидкості релаксації $\Gamma_{kk'}$ тепер залежать від часу, оскільки вони включають власні енергії та власні функції [див. Рівн. (1.25)].

Ми побудували залежність заселеностей рівнів кудіта від зовнішнього магнітного потоку x_e для стадії перезарядки на рис. 1.5(а). Зміна x_e відбувається в бік зменшення (що показано стрілками під графіками). Параметри моделювання: $U_0 = 32.68$ К, $\beta_L = 1.28$, $M = 955$ К⁻¹, $\tilde{\nu}_e (= v_e / \Phi_0) = 0.1$ GHz, $\gamma = 3$ GHz. Початкове значення зовнішнього магнітного потоку в Eq. (1.28) обрано таким чином: $\Phi_{e0} = 0.5001\Phi_0$ замість $0.5087\Phi_0$ (див. рис. 1.1), оскільки динаміка для значень зовнішнього магнітного потоку більших за $0.5\Phi_0$ є тривіальною (немає переходів). Зауважте, що швидкість v_e зміни зовнішнього магнітного потоку було обрано набагато більшою, ніж мінімально необхідне значення, яке було отримано як оцінку в розділі 1.6. Для цього існує технічна причина: чим більша швидкість, тим менший час чисельних розрахунків. Завдяки великому значенню v_e характерні ширини переходів малі і змінюються від 10^{-9} (в одиницях кванта магнітного потоку)

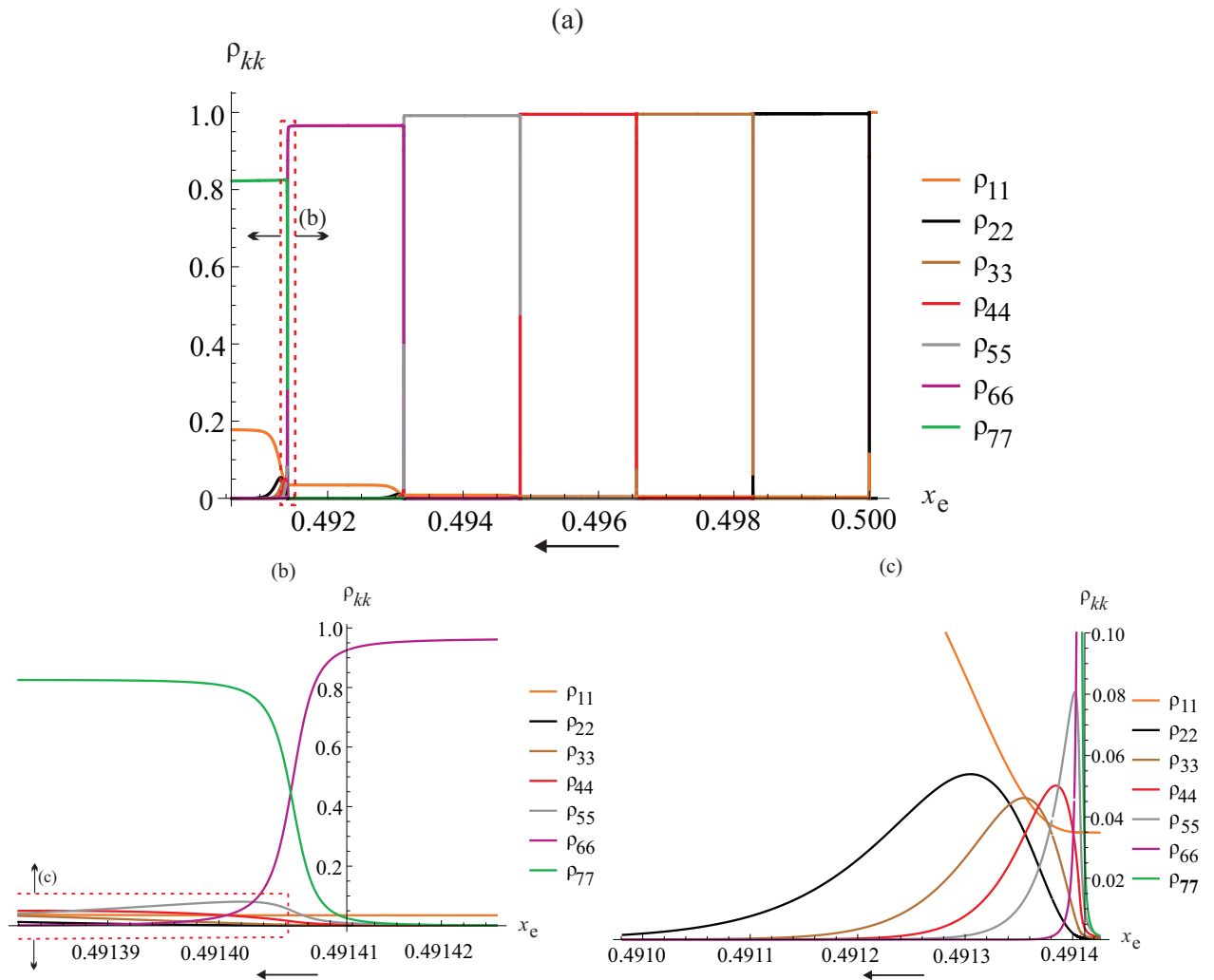


Рис. 1.5: (а) Залежність ймовірностей заселеностей ρ_{kk} рівнів кудіта від безрозмірного зовнішнього магнітного потоку x_e на стадії перезарядки детектора, отримана за допомогою розв'язку рівняння Ліндблада (1.30). (б) Та сама залежність, що й у (а) поблизу точки квазіперетину рівнів 6 (пурпурний) і 7 (зелений). Характерна ширина цього переходу в одиницях магнітного потоку становить близько $10^{-5}\Phi_0$. (с) Та сама залежність, що й у (а), яка показує динаміку заселеностей проміжних рівнів (2-5) по причині дисипації після останньої точки квазіперетину. Зростання ρ_{11} (помаранчева крива), присутнє на (с), не видно на (б) через різні діапазони на осях.

для першого переходу до 10^{-5} для останнього переходу. На рис. 1.5(b) показано частину рис. 1.5(a), що відповідає переходу ЛЗШМ з рівня 6 на рівень 7. Цей рисунок отримано з рис. 1.5(a) шляхом розтягування області, обмеженої червоним пунктирним прямокутником на рис. 1.5(a), вздовж осі абсцис. Ймовірність P_T повернутися на рівень 7 з рівня 1 становить близько 0.83 для вибраної γ [загальний множник у рівнянні (1.25)]. Дисипація

до переходу з рівня 5 на рівень 6 можна знехтувати, також дисипація відбувається лише поблизу точок квазіперетину. Рис. 1.5(с) є частиною рис. 1.5(а), яка показує динаміку заселеностей проміжних рівнів (2-5) внаслідок дисипації після точки квазіперетину між рівнями 6 і 7. Цей рисунок отримано шляхом продовження вліво і розтягування області, обмеженої червоним пунктирним прямокутником на рис. 1.5(б), вздовж осі ординат.

РОЗДІЛ 2

Альтернативні швидкі квантові логічні операції на основі неадіабатичних переходів Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани

2.1 Гамільтоніан та базиси

Розглянемо типовий гамільтоніан для керованої квантової дворівневої системи

$$H(t) = \frac{\Delta}{2}\sigma_x + \frac{\varepsilon(t)}{2}\sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon(t) & \Delta \\ \Delta & -\varepsilon(t) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

де $\varepsilon(t)$ - керуючий сигнал, а Δ - мінімальна енергетична щілина між двома рівнями. Тут ми розглядаємо гармонічний керуючий сигнал

$$\varepsilon(t) = A \sin \omega t. \quad (2.2)$$

Хвильова функція являє собою суперпозицію двох станів квантової дворівневої системи:

$$|\psi\rangle = \alpha(t) |0\rangle + \beta(t) |1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Два основні базиси: *діабатичний* з діабатичними рівнями енергії $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, де гамільтоніан діагональний при $\Delta = 0$, і *адіабатичний* базис $|E_{\pm}\rangle$, що представляє власні значення повного гамільтоніана, див. рис. 2.1. Зв'язок між цими базисами задається співвідношенням

$$|E_{\pm}(t)\rangle = \gamma_{\mp} |0\rangle \mp \gamma_{\pm} |1\rangle, \quad (2.4)$$

де

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \frac{\varepsilon(t)}{\Delta E(t)}}. \quad (2.5)$$

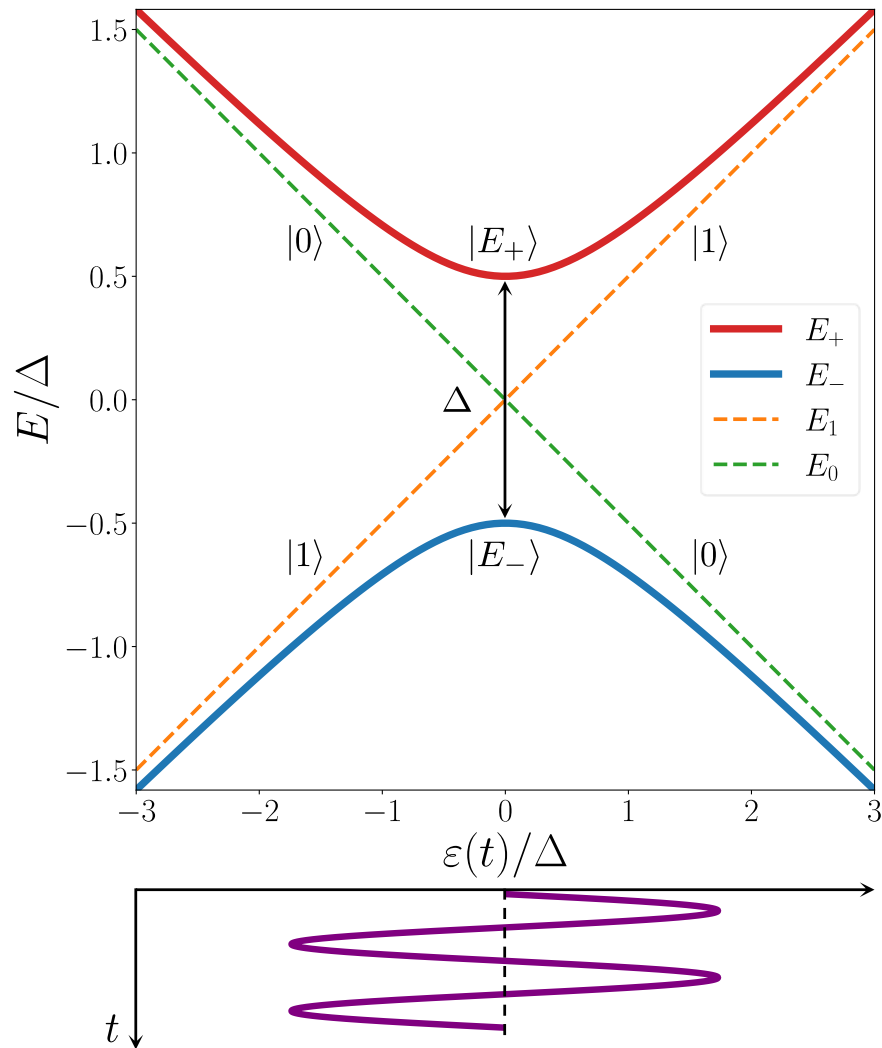


Рис. 2.1: Енергетична діаграма квантової дворівневої системи під дією періодичного збудження $\varepsilon(t)$. Структура енергетичних рівнів з двома перехрещеними діабатичними рівнями $|0\rangle$, $|1\rangle$ і двома адіабатичними рівнями $|E_{\pm}\rangle$ з квазіперетиною як функцією енергетичного зсуву $\varepsilon(t)$.

Надалі у цьому розділі всі матриці квантових логічних операцій, обертань $R_{x,y,z}$, матриці адіабатичної еволюції U та діабатичного переходу N подано в адіабатичному базисі, тоді як гамільтоніани подано в діабатичному базисі. Зокрема, в розділах 2.1 та 2.2 гамільтоніан одного кубіта визначено в діабатичному базисі $\{|1\rangle, |0\rangle\}$, а матриці подано в адіабатичному базисі $\{|E_{+}\rangle, |E_{-}\rangle\}$ з енергіями в порядку зменшення. У розділах 2.3, 2.4 та 2.5, гамільтоніан двох кубітів визначено у діабатичному базисі $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, а матриці подано в адіабатичному базисі $\{|E_0\rangle, |E_1\rangle, |E_2\rangle, |E_3\rangle\}$ з енергіями у порядку зростання. Порядок векторів

базису є важливим, оскільки він визначає матричне представлення заданого оператора в цьому базисі.

Динаміку квантової системи з релаксацією та дефазуванням можна описати рівнянням Ліндблада. Для простоти ми розглядаємо динаміку без релаксації та дефазування, яка описується рівнянням Ліувілля-фон Неймана

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho], \quad (2.6)$$

що збігається з рівняннями Блоха у випадку дворівневої системи.

2.2 Однокубітні операції

Ми опишемо базовий набір однокубітних операцій (Розділ 2.2.1), а потім пояснимо, як їх можна реалізувати за допомогою підходу Рабі (Розділ 2.2.2) та підходу ЛЗШМ (Розділ 2.2.3).

2.2.1 Базовий набір однокубітних операцій. Фазова операція $R_z(\phi)$

Розглянемо різні операції [147]: операції X, Y, Z , фазову операцію $R_z(\phi)$ та операцію Адамара H :

$$X = \sigma_x = R_x(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$Y = \sigma_y = R_y(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow R_z(\pi)R_x(\pi), \quad (2.8)$$

$$Z = \sigma_z = R_z(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$P(\phi) \equiv R_z(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$H = R_y(\pi/2)R_z(\pi) = \sqrt{Y}Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

де $R_{x,y,z}$ описує обертання навколо відповідних осей:

$$\begin{aligned} R_{x,y,z}(\phi) &= \exp\left(-i\sigma_{x,y,z}\frac{\phi}{2}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)I + i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)X, Y, Z. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Оскільки глобальна фаза матриці густини ρ не має значення і динаміка інваріантна відносно множення матриці густини ρ на будь-яке комплексне число з одиничного кола $e^{i\varphi}$, оператор $e^{i\varphi}G$ еквівалентний оператору G , який ми позначимо як

$$e^{i\varphi}G \Leftrightarrow G. \quad (2.13)$$

Першою операцією, яку ми розглядаємо, є фазова операція $R_z(\phi)$ у рівнянні (2.10), яка відповідає обертанню навколо осі z на кут ϕ . Подібно до того, як спіні обертається в магнітному полі (прецесія Лармора з частотою Ω_L), існує вільне обертання вектора Блоха навколо осі z . Частота цього вільного обертання пропорційна відстані між енергетичними рівнями

$$\hbar\Omega_L = \Delta E = \sqrt{\varepsilon(t)^2 + \Delta^2}. \quad (2.14)$$

Через деякий час

$$t_{R_z}(\phi) = \frac{\phi}{\Omega_L}. \quad (2.15)$$

вектор Блоха повертається на кут ϕ , і фактично кубіт виконує фазову операцію $R_z(\phi)$. Для цього не потрібен збуджуючий сигнал: $\varepsilon = \text{const}$.

У підході, заснованому на Рабі, енергетичний зсув кубіта під час фазової операції є на рівні квазіперетину $\varepsilon = 0$. Тоді як у підході, заснованому на ЛЗШМ, вона може бути далеко від квазіперетину. Отже, час фазової операції у підході на основі ЛЗШМ може бути зменшений. Ця різниця у тривалості фазових операцій показана на рис. 2.2(a) та рис. 2.3(a).

2.2.2 Однокубітні операції на основі осциляцій Рабі

Прямокутні імпульси

Щоб реалізувати будь-яку квантову логічну операцію зі змінною ймовірністю заселеності рівнів, кубіт слід збуджувати залежним від часу енергетичним зсувом $\varepsilon(t)$. Традиційним способом досягнення цього є осциляції Рабі з малою амплітудою $A \ll \Delta$ і з резонансною частотою кубіта ($\hbar\omega = \Delta$), які ми будемо порівнювати з ЛЗШМ переходами з великою амплітудою $A > \Delta$ і нерезонансною частотою керування ω .

Тут ми опишемо, як реалізуються однокубітні операції за допомогою осциляцій Рабі і продемонструємо динаміку координат сфери Блоха для декількох логічних операцій на рис. 2.2. Осциляції Рабі виникають під час резонансного руху при $\delta\omega = \omega - \omega_q \ll \omega$ (де $\omega_q = \Delta E/\hbar \approx \Delta/\hbar$ - резонансна частота кубіту) з малою амплітудою $A \ll \Delta$, і гармонічним керуючим сигналом, Рівн. (2.2).

Осциляції Рабі призводять до періодичної зміни заселеності рівня з частотою Рабі

$$\Omega_R = \frac{A\Delta}{2\hbar\Delta E} \approx \frac{A}{2\hbar}. \quad (2.16)$$

Це відрізняється від звичайного значення для частоти Рабі $\Omega_R \approx A/\hbar$ (див. посилання. [148, 40]). Під час коливань z -компонента вектора Блоха змінюється як $z(t) = \cos \Omega_R t$, коли початковим станом є основний стан $|E_- \rangle$. При зміні ймовірності заселення відбувається також зміна фази з частотою

$$\hbar\Omega_L \approx \Delta. \quad (2.17)$$

Ми визначаємо еволюцію осциляцій Рабі як комбінацію двох обертань

$$U_{\text{Rabi}}(t) = R_z(\Omega_L t) R_x(\Omega_R t). \quad (2.18)$$

Використовуючи рівняння (2.16), ми можемо переписати її як

$$U_{\text{Rabi}}(t) = R_z(\Omega_L t) R_x\left(\frac{A}{2\hbar} t\right) = R_z(\Omega_L t) R_x\left(\frac{S}{2\hbar}\right), \quad (2.19)$$

що показує, що кут повороту навколо осі x пропорційний площі $S = At$ під огинаючою імпульсу Рабі.

За відсутності різниці фаз між обернуттями $\Omega_L t = \Omega_R t + 2\pi n$, отримаємо

$$U_{\text{Rabi}}(t) = R_z(\Omega_L t) R_x(\Omega_R t) = R_y(\Omega_R t), \quad (2.20)$$

а еволюція Рабі призводить до обернуття навколо осі y .

Щоб виконати операцію X , ми рухаємо систему імпульсами Рабі протягом часу T_R , так що площа під огинаючою дорівнює

$$S = AT_R = 2\pi\hbar. \quad (2.21)$$

Для того, щоб рух закінчився з нульовою амплітудою, беремо ціле число періодів синусоїди.

Після цього нам потрібно змінити фазу, щоб отримати операцію X з обернуття Y , тому ми виконуємо обернуття R_z , не змінюючи енергетичний зсув протягом часу T_I з умовою

$$\Omega_L(T_I + T_R) = 2\pi n, \quad (2.22)$$

Нарешті операція X реалізуються як

$$\begin{aligned} R_z(\Omega_L T_I) U_{\text{Rabi}}(T_R) &= \\ &= R_z(\Omega_L T_I) R_z(\Omega_L T_R) R_x(\Omega_R T_R) = R_x(\pi) = X, \end{aligned} \quad (2.23)$$

див. рис. 2.2(с). Для реалізації операції Адамара нам потрібно подати імпульс Рабі з тривалістю удвічі меншою, ніж для операції X , $T_R = \pi/\Omega_R$, з умовою на час незмінного енергетичного зсуву T_I :

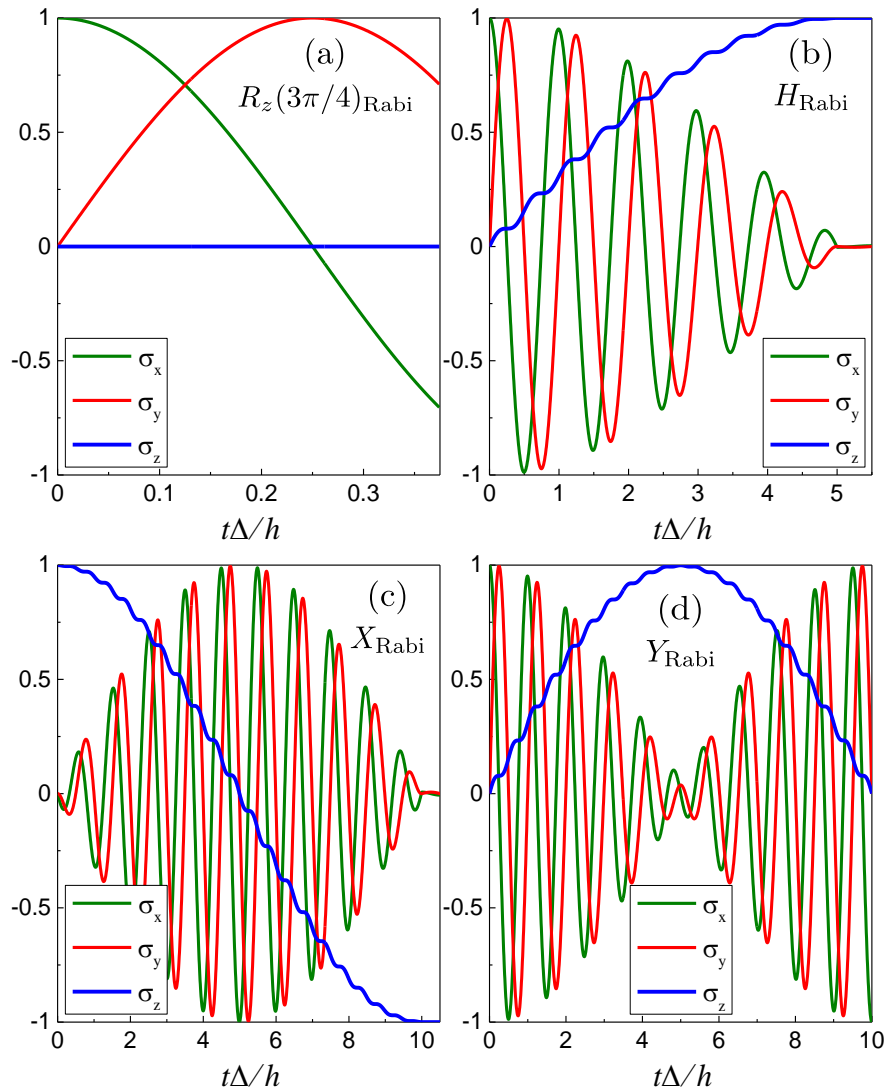


Рис. 2.2: Однокубітні операції на основі осциляцій Рабі. Динаміка компонент вектора Блоха в адіабатичному базисі, отримана шляхом розв'язання рівняння Ліувілля-фон Неймана (2.6). (a) Фазова операція $R_z(3\pi/4)$ з суперпозиційним початковим станом $\psi(t=0) = (|E_-\rangle + |E_+\rangle)/\sqrt{2}$. (b) Операція Адамара H з тим самим суперпозиційним початковим станом. (c) Операція X з незбудженим початковим станом. (d) Операція Y з суперпозиційним початковим станом. Для (b,c,d) частота збуджуючого сигналу є резонансною $\hbar\omega = \Delta$, амплітуда мала $A = 0.1\Delta$. Для (b) кількість періодів резонансного збудження дорівнює $N_e = 5$, для (c,d) $N_e = 10$. Амплітуда визначається кількістю періодів зовнішнього збудження, для (b) $A = \Delta/2N_e$, для (c,d) $A = \Delta/N_e$.

$$\Omega_L(T_I + T_R) = \pi + 2\pi n. \quad (2.24)$$

В результаті отримуємо операцію Адамара у вигляді

$$\begin{aligned} R_z(\Omega_L T_I) U_{\text{Rabi}}(T_R) &= \\ &= R_z(\Omega_L T_I) R_z(\Omega_L T_R) R_x(\Omega_R T_R) = \\ &= R_z(\pi) R_x(\pi/2) = H, \end{aligned} \quad (2.25)$$

що показано на рис. 2.2(b).

Оптимізовані Гауссівські імпульси

Оскільки модель осциляцій Рабі передбачає малі амплітуди керуючого сигналу, для підвищення точності реалізацій операцій слід використовувати малу амплітуду в початковій і кінцевій точках. Для досягнення високої швидкості операцій слід використовувати велику амплітуду керуючого сигналу A між цими точками. Отже, щоб збільшити швидкість операцій, тепер ми використовуємо Гауссівську огинаючу $A(t)$ для керуючого сигналу

$$\varepsilon(t) = A(t) \sin \omega t. \quad (2.26)$$

Розглянемо імпульс Рабі тривалістю T_R з огинаючою у вигляді

$$A(t) = \begin{cases} A_0 \exp \left[-\frac{(t-\tau)^2}{2\sigma_G^2} \right], & t < T_R \\ 0, & t > T_R \end{cases} \quad (2.27)$$

з кінцями Гауссівського розподілу, усіченими на деякій відстані G від піка, нормалізований до середньоквадратичного відхилення σ_G ,

$$G = \frac{T_R}{2\sigma_G} \quad (2.28)$$

і піком розподілу в момент часу

$$\tau = \frac{T_R}{2}. \quad (2.29)$$

Кут повороту навколо осі x в Рівн. (2.19) визначається площею під огинаючою імпульсу Рабі. Для операції X вона задається рівнянням (2.21).

Отже, площа під усіченим Гауссівським розподілом має бути такою ж, як і для вихідного сигналу з постійною амплітудою і прямокутною формою імпульсу. Ця умова визначає амплітуду розподілу як

$$A_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma_G S_G}}, \quad (2.30)$$

де S_G - нормована площа усіченого Гауссівського розподілу

$$S_G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-G}^G e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (2.31)$$

2.2.3 Однокубітні операції на основі ЛЗШМ переходів

Тут описано, як реалізувати однокубітні операції на основі ЛЗШМ переходів за допомогою адіабатично-імпульсної моделі (АІМ), також відомої як метод матриці переходу. Ми демонструємо динаміку координат сфери Блоха для кількох логічних операцій на рис. 2.3, яку можна порівняти з динамікою цих же операцій, реалізованих за допомогою осциляцій Рабі на рис. 2.2. Для діабатичних ЛЗШМ переходів, потрібні такі наближення: $A > \Delta$ і $2\pi/\omega < t_{\text{trans}}$, де t_{trans} - час переходу. Після цього часу результат адіабатично-імпульсної моделі асимптотично збігатиметься з точною динамікою [149, 41].

Адіабатично-імпульсна модель. Збудження з одним перетином області квазіперетину рівнів.

В адіабатично-імпульсній моделі часова еволюція розглядається як комбінація адіабатичної (неперехідної) та діабатичної (перехідної) еволюцій. Адіабатична еволюція описується адіабатичним оператором часової еволюції, який в адіабатичному базисі $\{|E_+\rangle, |E_-\rangle\}$ представлено матрицею

$$U(t_i, t_j) = \begin{pmatrix} e^{-i\zeta(t_i, t_j)} & 0 \\ 0 & e^{i\zeta(t_i, t_j)} \end{pmatrix} = e^{-i\zeta\sigma_z} = R_z(2\zeta), \quad (2.32)$$

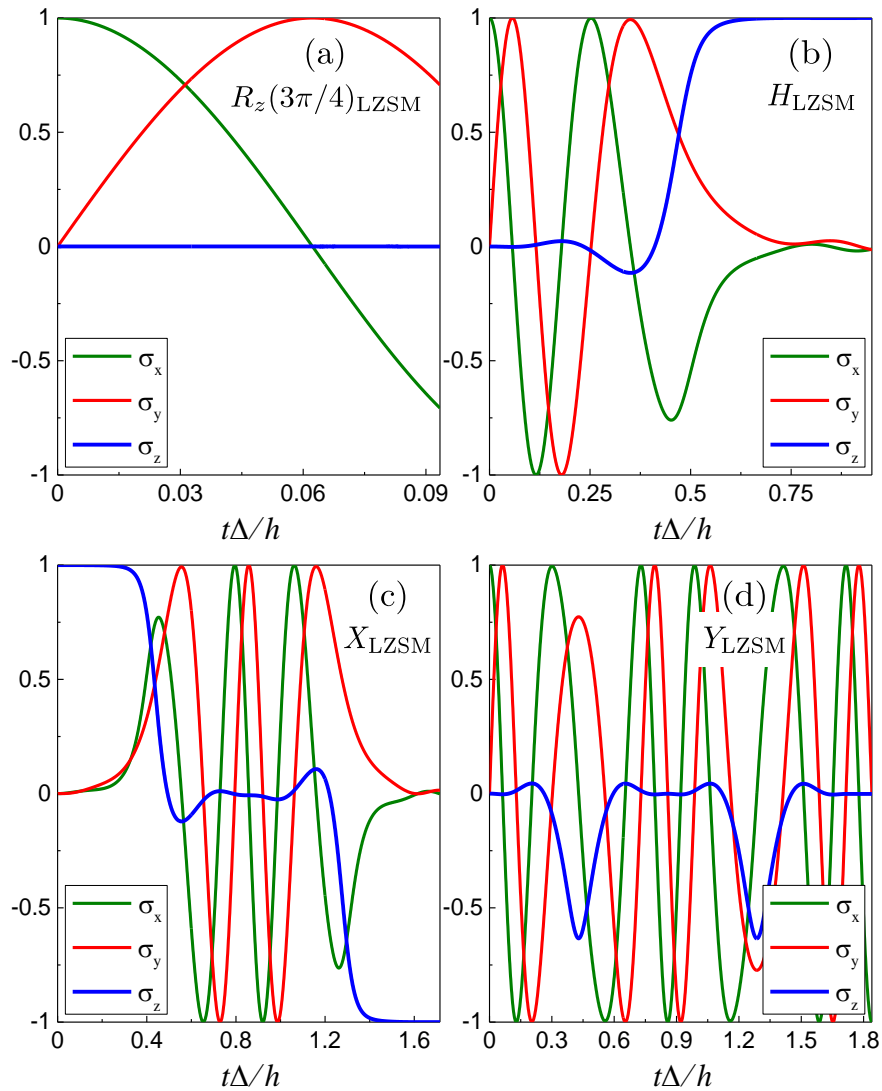


Рис. 2.3: Однокубітні операції на основі ЛЗШМ переходів. Динаміка компонент вектора Блоха в адиабатичному базисі, отримана шляхом розв'язання рівняння Ліувілля-фон Неймана (2.6). (а) Фазова операція $R_z(3\pi/4)$ з суперпозиційним початковим станом $\psi(t = 0) = (|E_- \rangle + |E_+ \rangle)/\sqrt{2}$ та енергетичним зсувом $\varepsilon = 3.8872\Delta$. (b) Операція Адамара H з незбудженим початковим станом. (c) Операція X з незбудженим початковим станом. (d) Операція Y з суперпозиційним початковим станом. Для (b,c,d) параметри вибрано так, щоб $\mathcal{P} = 0.5$. Для (b) амплітуда $A = 4.31\Delta$, для (c) і (d) $A = 3.8872\Delta$. Порівняно з відповідними операціями на основі осциляцій Рабі, рис. 2.2, операції на основі ЛЗШМ виконуються значно швидше.

де $\zeta(t_i, t_j)$ - фаза, накопичена за час адиабатичної еволюції

$$\zeta(t_i, t_j) = \frac{1}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_j} \Delta E(t) dt = \frac{1}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_j} \sqrt{\varepsilon(t)^2 + \Delta^2} dt, \quad (2.33)$$

і $\Delta E(t) = E_+(t) - E_-(t)$. Тоді оператор *діабатичної* еволюції (переходу)

для переходу в напрямку збільшення енергетичного зсуву $\varepsilon(t)$, представлено матрицею

$$\begin{aligned} N &= \begin{pmatrix} Re^{-i\phi_s} & -T \\ T & Re^{i\phi_s} \end{pmatrix} = \\ &= R_z(\phi_s) R_x(\theta) R_z(\phi_s), \end{aligned} \quad (2.34)$$

де

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\mathcal{P}}, \\ R &= \sqrt{1 - \mathcal{P}} \end{aligned} \quad (2.35)$$

коефіцієнти переходу та відбиття,

$$\mathcal{P} = \exp(-2\pi\delta) \quad (2.36)$$

ЛЗШМ ймовірність збудження кубіта з одним переходом з основного стану $|E_-\rangle$, $\delta = \Delta^2/4v$ - параметр адіабатичності, $v = \varepsilon'(0)$ - швидкість проходження квазіперетину рівнів енергій та

$$\phi_s = \frac{\pi}{4} + \delta(\ln \delta - 1) + \text{Arg}[\Gamma(1 - i\delta)] \quad (2.37)$$

є фазою Стокса [41]. Кут θ можна знайти з рівняння

$$\sin^2(\theta/2) = \mathcal{P}. \quad (2.38)$$

Матрицю переходу для проходження квазіперетину рівнів у напрямку, коли енергетичний зсув $\varepsilon(t)$ зменшується, можна записати як

$$\begin{aligned} N^{\text{inv}} = N^\top &= \begin{pmatrix} Re^{-i\phi_s} & T \\ -T & Re^{i\phi_s} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} Re^{-i(\phi_s - \pi)} & -T \\ T & Re^{i(\phi_s - \pi)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Матриця еволюції одного переходу в загальному випадку з матрицею

адіабатичної еволюції до переходу U_1 і після переходу U_2 має вигляд

$$U_{\text{LZSM}} = U_2 N_1 U_1 = \begin{pmatrix} U'_{11} & U'_{12} \\ -U'^*_{12} & U'^*_{11} \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

де

$$\begin{aligned} U'_{11} &= R_1 \exp[-i(\phi_{S1} + \zeta_1 + \zeta_2)], \\ U'_{12} &= -T_1 \exp[i(\zeta_1 - \zeta_2)], \\ \zeta_1 &= \zeta(0, t_{N1}), \\ \zeta_2 &= \zeta(t_{N1}, t_{\text{final}}). \end{aligned}$$

Тут t_{N1} - час проходження квазіперетину рівня, t_{final} - час закінчення руху.

Далі ми розглядаємо однакову адіабатичну еволюцію до і після переходу $\zeta = 2\zeta_1 = 2\zeta_2$. У такому разі операцію, реалізовану за допомогою одного ЛЗШМ переходу квазіперетину рівнів можна представити [150, 151] як комбінацію обертань

$$\begin{aligned} U_{\text{LZSM}}(\mathcal{P}, \phi_{\text{total}}) &= R_z(\phi_{\text{total}}) R_x(\theta) R_z(\phi_{\text{total}}), \\ U_{\text{LZSM}}^{\text{inv}}(\mathcal{P}, \phi_{\text{total}}) &= U_{\text{LZSM}}(\mathcal{P}, \phi_{\text{total}} - \pi), \end{aligned} \quad (2.41)$$

де $\phi_{\text{total}} = \phi_S + \zeta$, а $U_{\text{LZSM}}^{\text{inv}}$ відповідає зворотному переходу. Використовуючи цю ЛЗШМ операцію, ми можемо визначити базовий набір квантових логічних операцій.

Для операції X дворівнева система повинна здійснити перехід з ймовірністю $\mathcal{P} = \exp(-2\pi\delta) = 1$; це означає, що параметр адіабатичності $\delta = \Delta^2/4v \rightarrow 0$, що вимагає нескінченної швидкості проходження квазіперетину енергетичних рівнів $v = \varepsilon'(0) \rightarrow \infty$ або нульового розщеплення енергії Δ . Отже, важко реалізувати операцію X з високою точністю за допомогою лише одного переходу. Тому для реалізації операції X з достатньою точністю потрібно принаймні два переходи.

Для ЛЗШМ переходу нам потрібно почати та закінчити еволюцію далеко від області квазіперетину. Тому зараз ми розглянемо гармонічний керуючий

сигнал $\varepsilon(t) = -A \cos(\omega t)$. Цей сигнал є лінійним в області квазіперетину

$$\left. \frac{d\varepsilon}{dt} \right|_{\varepsilon \approx 0} \approx A\omega = \text{const.} \quad (2.42)$$

Отримано співвідношення між амплітудою A і частотою ω для певної ймовірності ЛЗШМ \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \exp \left[-2\pi \frac{\Delta^2}{4A\omega\hbar} \right] \rightarrow \omega = \frac{-\pi\Delta^2}{2A\hbar \ln \mathcal{P}}. \quad (2.43)$$

Потім знаходимо амплітуду, яка задовольняє деяким значенням ϕ_{total} та \mathcal{P} ,

$$\begin{aligned} \phi_{\text{total}} = & \frac{\pi}{4} + \delta(\ln \delta - 1) + \text{Arg}[\Gamma(1 - i\delta)] + \\ & + \frac{1}{2\hbar} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sqrt{\varepsilon(t)^2 + \Delta^2} dt, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\delta = -\frac{\ln \mathcal{P}}{2\pi}, \quad (2.45)$$

де ми використали, що гармонічне керування задовольняє початкові умови далеко від області квазіперетину $\varepsilon(t) = -A \cos \omega t$.

Використання одного ЛЗШМ переходу є зручним для реалізації поворотів на будь-який кут $\theta < \pi$, наприклад $\theta = \pi/2$, що потрібно для операції Адамара. Згідно з рівнянням (2.38), кут $\theta = \pi/2$ відповідає цільовій ймовірності одного ЛЗШМ переходу

$$\mathcal{P} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}. \quad (2.46)$$

Цей ЛЗШМ перехід є *не миттєвим*: ймовірність коливається протягом деякого часу після переходу, і значення заселеності верхнього рівня, отримане з формул, не може бути точно досягнуте до кінця коливань [149]. Параметри для реалізації операції Адамара можна знайти з рівняння (2.40),

прирівнявши U_{LZSM} до матриці операції (2.11), і розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{1}{2} \rightarrow T = R = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \zeta_1 - \zeta_2 &= \frac{\pi}{2} + \pi n_1, \\ \phi_s + \zeta_1 + \zeta_2 &= \frac{\pi}{2} + \pi n_2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

З цієї системи отримуємо повну фазу

$$\phi_{\text{total}} = \pi n, \quad (2.48)$$

таким чином, операцію Адамара можна представити як

$$\begin{aligned} H &= R_y(\pi/2)R_z(\pi) = U_{\text{LZSM}}(1/2, 2\pi n) R_z(\pi) = \\ &= R_z(\pi)U_{\text{LZSM}}(1/2, \pi + 2\pi n), \end{aligned} \quad (2.49)$$

де n - ціле число. Динаміка операції Адамара показана на рис. 2.3(b).

Як знайти керуючу амплітуду A і частоту ω , необхідні для певних \mathcal{P} і ϕ_{total} , описано в розділі 2.2.3. Після завершення переходу, щоб виконати деякий оберт навколо осі z (фазова операція), нам потрібно подати постійний сигнал з тим же самим енергетичним зсувом ε , який ми мали після завершення попередньої операції.

Альтернативно, ЛЗШМ операції можна також реалізувати з положенням енергетичного зсуву до і після операції на позиції квазіперетину $\varepsilon = 0$ [39].

Збудження з двома перетинами області квазіперетину рівнів.

Розглянемо тепер довільне зовнішнє збудження $\varepsilon(t)$ з двома проходами через квазіперетин енергетичних рівнів, лінійний в області квазіперетину. Адіабатичні енергетичні рівні як функція часу показано на рис. 2.4(a).

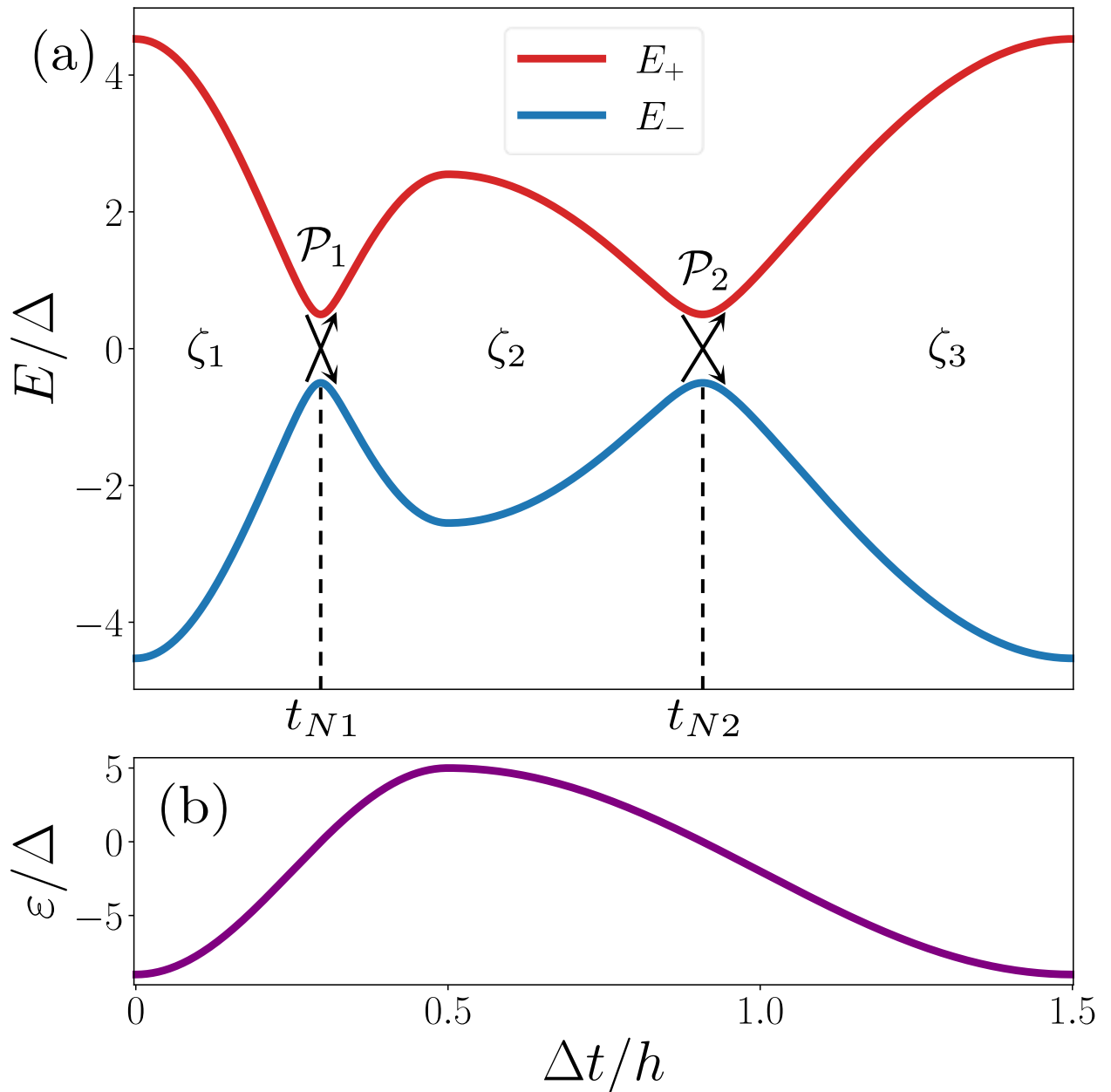


Рис. 2.4: Динаміка енергетичних рівнів для збудження з двома проходами квазіперетину рівнів. (a) Адіабатичні рівні енергії в залежності від часу. (b) Енергетичний зсув ε в залежності від часу. \mathcal{P}_i - значення ЛЗШМ ймовірності діабатичного переходу N_i під час проходження квазіперетину рівнів у момент часу $t_{N(i)}$. ζ_i - накопичення фази, отримане за відповідний інтервал адіабатичної еволюції.

У загальному випадку отримуємо матрицю еволюції подвійного переходу:

$$\Xi = U_3 N_2 U_2 N_1^{\text{inv}} U_1 = U_{\text{LZSM}(1)}^{\text{inv}} U_{\text{LZSM}(2)} = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ -\Xi_{12}^* & \Xi_{11}^* \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

де

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= (R_1 R_2 e^{-i(\phi_{S1} + \phi_{S2} + 2\zeta_2)} + T_1 T_2) e^{i(\zeta_2 - \zeta_1 - \zeta_3)}, \\ \Xi_{12} &= (R_1 T_2 - T_1 R_2 e^{-i(\phi_{S1} + \phi_{S2} + 2\zeta_2)}) e^{i(\phi_{S1} + \zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3)}, \\ \zeta_1 &= \zeta(0, t_{N1}), \\ \zeta_2 &= \zeta(t_{N1}, t_{N2}), \\ \zeta_3 &= \zeta(t_{N2}, t_{\text{final}}) \end{aligned}$$

Тут t_{N1} і t_{N2} - час першого і другого проходження квазіперетину енергетичних рівнів відповідно, t_{final} - час закінчення руху, див. рис. 2.4.

Прирівнявши цю матрицю еволюції до матриці потрібної квантової операції, можна знайти параметри керуючого сигналу, який реалізує цю операцію. Наприклад, для операції X керуючий сигнал повинен задовольняти умовам

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 &= 1 \rightarrow T_1 = R_2, \\ \phi_{S1} + \phi_{S2} + 2\zeta_2 &= \pi + 2\pi n_1, \\ \phi_{S2} - \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 &= \pi/2 + 2\pi n_2. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Щоб спростити результат, ми розглядаємо періодичний рух з однаковим нахилом в області квазіперетину під час кожного переходу $\varepsilon(0) \approx vt$, що означає $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = 1/2$, $T_1 = T_2 = R_1 = R_2 = 1/\sqrt{2}$, і з однаковою адіабатичною еволюцією між переходами $\zeta = \zeta_1 = \zeta_2/2 = \zeta_3$. Після такого спрощення отримуємо матрицю подвійних переходів лише з двома параметрами [41]: адіабатичним фазовим набігом ζ та ймовірністю збудження \mathcal{P} , з

$$\Xi \equiv \sqrt{U_2} N^{\text{inv}} U_1 N \sqrt{U_2} = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ -\Xi_{12}^* & \Xi_{11}^* \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

де

$$\Xi_{11} = -R^2 e^{-2i\Phi_{\text{St}}} - T^2, \quad (2.53)$$

$$\Xi_{12} = -\Xi_{12}^* = -2iRT \sin(\Phi_{\text{St}}), \quad (2.54)$$

$$\Phi_{\text{St}} \equiv \phi_S + \zeta, \quad (2.55)$$

і Φ_{St} - це фаза Штюкельберга. Для симетричного збудження з $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ і $\zeta = \zeta_1 = \zeta_2/2 = \zeta_3$, $\Phi_{\text{St}} = \phi_{\text{total}}$. Для операції X , показаної на рис. 2.3(с), ми використали два ЛЗШМ переходи з ЛЗШМ ймовірністю $\mathcal{P} = 1/2$ і повною фазою для кожного переходу

$$\phi_{\text{total}} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad (2.56)$$

що є умовою конструктивної інтерференції (див., наприклад, посилання [41]). Справді, використовуючи рівняння (2.41),

$$U_{\text{LZSM}}^{\text{inv}}(\pi/2 + \pi n, 1/2) U_{\text{LZSM}}(\pi/2 + \pi n, 1/2) = R_x(\pi) = X. \quad (2.57)$$

В принципі, збуджуючий сигнал з двома ЛЗШМ переходами у поєднанні з обертанням навколо осі z може реалізувати будь-яку однокубітну квантову логічну операцію.

Для операції Адамара, реалізованої двома ЛЗШМ переходами з однаковим нахилом в області квазіперетину під час кожного переходу ($\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$), керуючий сигнал повинен задовольняти умовам

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}, \\ \phi_S + \zeta_2 &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n_1, \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n_2, \\ \zeta_1 - \zeta_3 &= 2\pi n_3. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Оптимізація для пришвидшення операцій: збудження з багаторазовим проходженням

Для зменшення часу операцій можна використовувати кілька ЛЗШМ переходів. Розглянемо найпростіший керуючий сигнал

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} -A, & 0 < t < t_{\text{pre}}, \\ -A \cos \omega t, & t_{\text{pre}} < t < t_{\text{pre}} + \frac{2\pi k}{\omega}, \\ -A, & t_{\text{pre}} + \frac{2\pi k}{\omega} < t < t_{\text{pre}} + \frac{2\pi k}{\omega} + t_{\text{after}}, \end{cases} \quad (2.59)$$

з парним числом $2k$ послідовних ЛЗШМ переходів з однаковою ймовірністю ЛЗШМ переходу \mathcal{P} , фазою Штюкельберга Φ_{St} та періодами незмінного енергетичного зсуву ε з накопиченням фази на початку і в кінці руху тривалістю t_{pre} і t_{after} , відповідно. Тут $k = 1, 2, \dots$ - кількість періодів косинусоїди.

Для випадку чотирьох ЛЗШМ переходів матрицю еволюції гармонічної частини керуючого сигналу $\varepsilon(t) = -A \cos \omega t$ можна знайти як добуток двох матриць еволюції для подвійного переходу (2.52):

$$\Xi_{\text{Q}} = \Xi^2 = \begin{pmatrix} \Xi_{\text{Q11}} & \Xi_{\text{Q12}} \\ -\Xi_{\text{Q12}}^* & \Xi_{\text{Q11}}^* \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

де

$$\Xi_{\text{Q11}} = R^4 e^{-4i\Phi_{\text{St}}} + T^4 + 2R^2 T^2 [e^{-2i\Phi_{\text{St}}} - 2 \sin^2(\Phi_{\text{St}})], \quad (2.61)$$

$$\Xi_{\text{Q12}} = 4iRT \sin(\Phi_{\text{St}}) [R^2 \cos(2\Phi_{\text{St}}) + T^2]. \quad (2.62)$$

Оскільки $T = \sqrt{\mathcal{P}}$ і $R = \sqrt{1 - \mathcal{P}}$, матриця еволюції залежить від двох параметрів збудження: ймовірності одного LZSM переходу \mathcal{P} і фази Штюкельберга Φ_{St} . Періоди постійного енергетичного зсуву до і після основної частини сигналу призводять до фазових операцій $R_z(\phi_{\text{pre}})$ і $R_z(\phi_{\text{after}})$, відповідно [див. Eq. (2.10)].

Параметри сигналу знаходяться шляхом прирівнювання повної матриці

еволюції керованого кубіта до матриці необхідної операції, помноженої на множник $e^{i\varphi}$ з довільним φ , оскільки це не впливає на динаміку системи [див. Eq. (2.13)]:

$$R_z(\phi_{\text{pre}})\Xi_Q R_z(\phi_{\text{after}}) = e^{i\varphi} H. \quad (2.63)$$

Тут описано алгоритм пошуку оптимальних параметрів (\mathcal{P} , Φ_{St} , A , ω , t_{pre} , t_{after}) збуджуючого сигналу з чотирма ЛЗШМ переходами, що реалізує операцію Адамара H .

Заселеність верхнього енергетичного рівня кубіта $|E_+\rangle$ після застосування збуджуючого сигналу з чотирма ЛЗШМ переходами до кубіта в основному стані $|E_-\rangle$ визначається формулою

$$P_{\text{final}} = |\Xi_{Q12}|^2. \quad (2.64)$$

- Спочатку знайдемо можливі значення ймовірності одного переходу ЛЗШМ \mathcal{P} , які забезпечують цільову кінцеву ймовірність заселеності верхнього енергетичного рівня після чотирьох переходів $P_{\text{final}} = P_{\text{target}}$. Їх можна знайти як перетин червоної кривої та помаранчевої горизонтальної лінії на рис. 2.5. Червона крива показує максимально можливу кінцеву заселеність верхнього енергетичного рівня після чотирьох ЛЗШМ переходів P_{final} , після перебору всіх можливих значень $\Phi_{\text{St}} \in [0, \pi]$ за допомогою рівнянь (2.62) і (2.64). Помаранчева горизонтальна лінія показує $P_{\text{final}} = P_{\text{target}}$. Для операції H цільове кінцеве заповнення верхнього енергетичного рівня кубіта $P_{\text{target}} = 1/2$.

Більші значення \mathcal{P} забезпечують меншу тривалість переходів і меншу тривалість операції, тому вибирається найбільше можливе значення \mathcal{P} . Для операції H , що реалізується чотирма ЛЗШМ переходами, найбільше можливе значення $\mathcal{P}^* \approx 0.962$. Для операції X з чотирма ЛЗШМ переходами $\mathcal{P}^* = (2 + \sqrt{2})/4$ збігається з ймовірністю ЛЗШМ переходу для операції H , реалізованої двома ЛЗШМ переходами, див. Рівн. (2.58).

- На другому кроці знайдемо фазу Штюкельберга Φ_{St} , яка забезпечує цільову кінцеву ймовірність переходу $P_{\text{final}} = P_{\text{target}}$ за отриманим значенням \mathcal{P} за допомогою синьої кривої на рис. 2.5. Для операції H розв'язок має вигляд

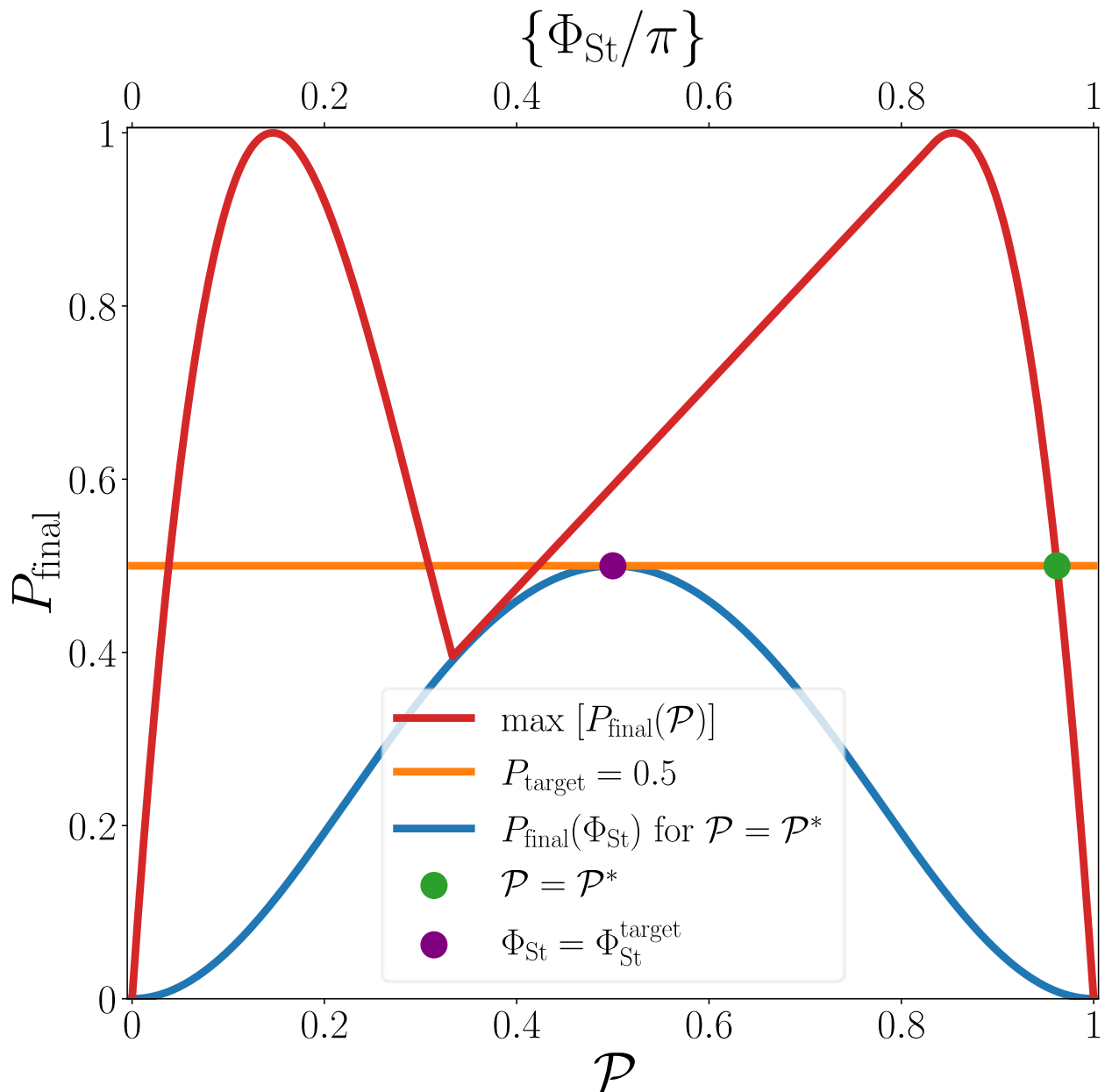


Рис. 2.5: Графічна демонстрація знаходження значень ймовірностей одного ЛЗШМ переходу \mathcal{P} і фази Штюкельберга Φ_{St} , для реалізації операції Адамара H з чотирма ЛЗШМ переходами. Червона крива: максимально можлива кінцева ймовірність заселеності після чотирьох переходів P_{final} в залежності від \mathcal{P} . Синя крива: залежність кінцевої ймовірності заселеності після чотирьох переходів P_{final} від набору фази Штюкельберга під час одного переходу Φ_{St} . Помаранчева горизонтальна лінія показує $P_{\text{final}} = P_{\text{target}}$.

$$\Phi_{\text{St}} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad (2.65)$$

де n - ціле число. Це також є умовою конструктивної інтерференції між переходами ЛЗШМ.

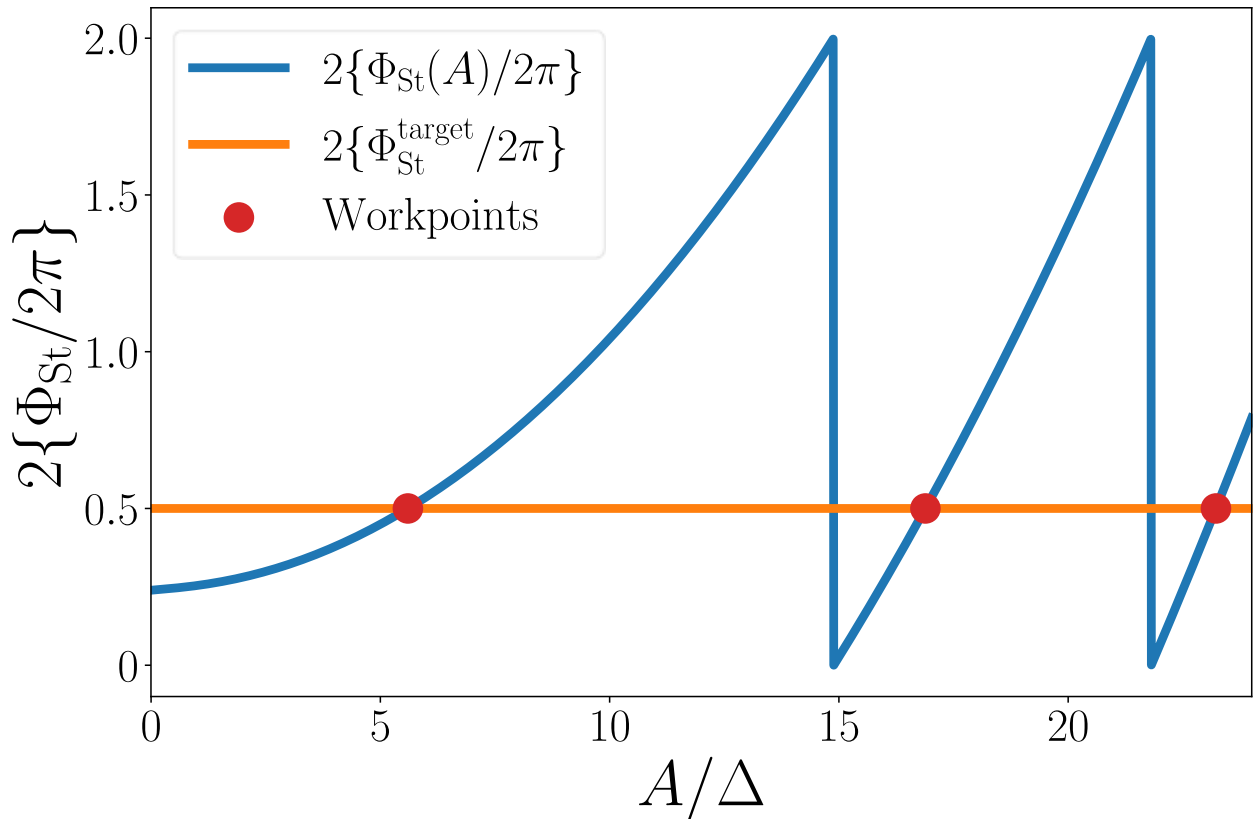


Рис. 2.6: Графічна процедура знаходження можливих значень амплітуди A керуючого сигналу з чотирма ЛЗШМ переходами для реалізації операції Адамара H . Залежність $2\{\Phi_{St}/2\pi\}$ від амплітуди A керуючого сигналу для $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$. Тут Φ_{St} - це фаза Штюкельберга для заданого значення амплітуди A ; тоді як $\Phi_{St}^{\text{target}}$ - це необхідне значення фази Штюкельберга керуючого сигналу, знайдене на попередньому кроці, а $\{\}$ - дробова частина. Червоними крапками показано можливі значення амплітуди A керуючого сигналу з чотирма ЛЗШМ переходами, які реалізують операцію Адамара H .

- Після знаходження \mathcal{P} і Φ_{St} , на третьому кроці знаходимо амплітуду A і частоту ω сигналу (2.59). Рівняння (2.43) визначає зв'язок між частотою ω та амплітудою A для певного \mathcal{P} . Використовуючи рівняння (2.43), (2.55), (2.37), (2.45) і (2.33), отримуємо рис. 2.6 і знаходимо можливі значення амплітуди A сигналу, що забезпечує потрібне значення фази Штюкельберга $\Phi_{St}^{\text{target}}$, знайдене на попередньому кроці для раніше знайденого $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$.

- Нарешті, на четвертому кроці визначаємо необхідні тривалості періодів простою (періодів незмінного енергетичного зсуву ε) до і після основної частини керуючого сигналу з ЛЗШМ переходами, t_{pre} і t_{after} . Підстановка отриманої матриці еволюції основної частини сигналу Ξ_Q до рівняння (2.63) дозволяє знайти необхідні накопичені фази ϕ_{pre} і ϕ_{after} . Потім за допомогою

рівнянь (2.14) та (2.15) визначаємо тривалості t_{pre} та t_{after} . У розглянутому прикладі накопичені фази $\phi_{\text{pre}} = \phi_{\text{after}} = \pi/2$, а тривалості t_{pre} і t_{after} залежать від вибору амплітуди A на попередньому кроці алгоритму.

Цей алгоритм знаходження параметрів керуючого сигналу (2.59) з парною кількістю ЛЗШМ переходів для реалізації довільної однокубітної операції можна узагальнити наступним чином:

- Знайти ймовірність одного переходу ЛЗШМ \mathcal{P} , який забезпечує бажану кінцеву ймовірність заселеності верхнього рівня $P_{\text{final}} = P_{\text{target}}$. Див. червону криву, що перетинає помаранчеву горизонтальну лінію на рис. 2.5.
- Знайти необхідну фазу Штюкельберга Φ_{St} . Див. синю криву на рис. 2.5.
- Знайти комбінацію амплітуди A і частоти ω , яка забезпечує необхідні значення \mathcal{P} і Φ_{St} . Див. рис. 2.6.
- Визначити часи незмінного енергетичного зсуву ε до і після основної частини збуджуючого сигналу з ЛЗШМ переходами, t_{pre} і t_{after} .

Цей алгоритм дозволяє знайти оптимальні параметри керуючого сигналу з довільною парною кількістю ЛЗШМ переходів. Тут ми розглядаємо лише дворівневу квантову систему, але реальні квантові системи зазвичай є багаторівневими. ЛЗШМ переходи при проходженні наступних найближчих квазіперетинів енергетичних рівнів впливатимуть на динаміку, тому важливо обмежити амплітуду руху, щоб не досягти наступних найближчих квазіперетинів рівнів енергій.

2.2.4 Добротність

Релаксація та дефазування в цій роботі не розглядаються. Таким чином, похибки операцій виникають через те, що теорії адіабатично-імпульсної моделі та наближення обертової хвилі, які використовуються для отримання параметрів керуючих сигналів, є наближеними. Похибки, зумовлені похибками чисельного розв'язку, є незначними порівняно з похибками, зумовленими апроксимаціями в теоріях.

Точність знаходять за допомогою квантової томографії [152], яка полягає в застосуванні операцій для багатьох різних початкових станів, які охоплюють гільбертовий простір, а потім обчисленні середньої точності між отриманими станами та цільовим станом за допомогою [153]

$$F(\rho, \rho_t) = \left(\text{tr} \sqrt{\sqrt{\rho} \rho_t \sqrt{\rho}} \right)^2. \quad (2.66)$$

Тут ρ - матриця густини, отримана за допомогою чисельного моделювання динаміки кубіта шляхом розв'язання рівняння Ліувілля-фон Неймана Рівн. (2.6), а $\rho_t = U \rho_{\text{in}} U^\dagger$ - цільовий стан, отриманий шляхом застосування оператора U до початкової матриці густини ρ_{in} . Далі ми обчислюємо усереднену точність для різних рівновіддалених початкових умов на сфері Блоха $\bar{F} = \sum_{n=1}^N F(\rho_n, \rho_{t_n}) / N$. Щоб краще порівняти різницю між підходами Рабі та ЛЗШМ, використаємо похибку $D = 1 - \bar{F}$.

Формула ймовірності ЛЗШМ $\mathcal{P} = \exp(-2\pi\delta)$ отримана для лінійного керуючого сигналу з нескінченним часом, $\varepsilon(t) = vt$, $t \in (-\infty, \infty)$, що приводить до нескінченної амплітуди керуючого сигналу. Таким чином, для розглянутого нелінійного збудження $\varepsilon(t) = -A \cos(\omega t)$ зі скінченною амплітудою A , точність операції ЛЗШМ зростає зі збільшенням амплітуди збудження A . Враховуючи рівняння (2.43), амплітуда руху пропорційна до тривалості операції, $A \sim 1/\omega \sim T$. Таким чином, точність ЛЗШМ операції зростає з її тривалістю, похибка операції D зменшується, і слід знаходити задовільний баланс між точністю і швидкістю операції. Рисунок 2.7 ілюструє, що похибка операцій D при використанні ЛЗШМ зменшується з часом набагато швидше, ніж при використанні звичайного підходу Рабі.

Для довільного нелінійного керуючого сигналу точність формули ЛЗШМ (2.36), а отже, і точність операцій зростає з лінійністю збуджуючого сигналу в області квазіперетину і збільшується з відстанню між областю квазіперетину і початковою та кінцевою енергетичними зсувами ε керуючого сигналу.

Альтернативним методом визначення точності операцій є рандомізований бенчмаркінг [37], який розглядає, як точність зменшується зі збільшенням кількості застосованих операцій. Тут ми використовували лише метод квантової томографії, як простіший для чисельних розрахунків.

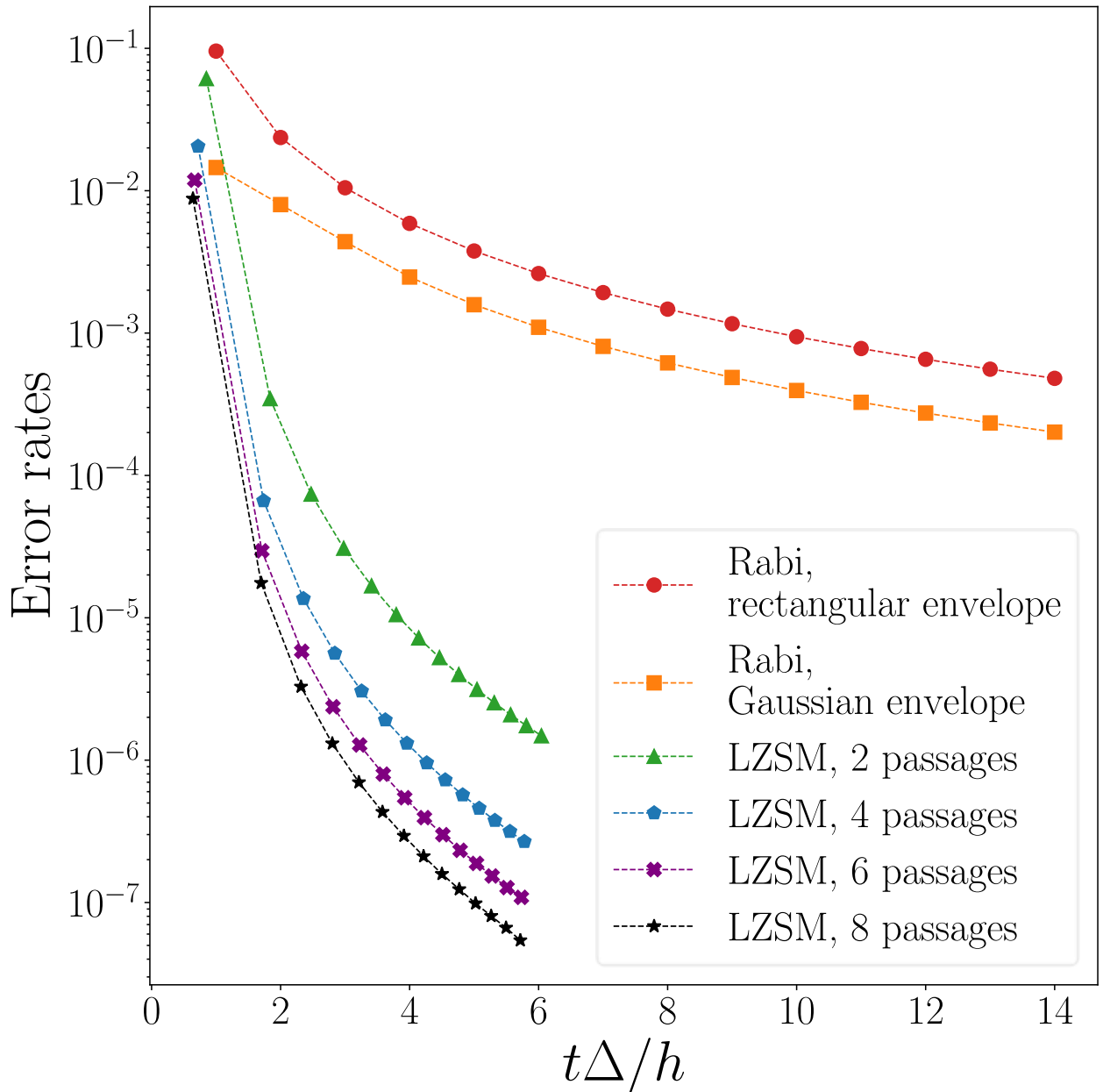


Рис. 2.7: Порівняння частоти помилок для підходів Рабі та ЛЗШМ для реалізації однокубітних операцій. Похибки $(1 - \bar{F})$ для підходів Рабі та ЛЗШМ для реалізації однокубітної операції Y , розраховані для різних тривалостей операцій $t\Delta/h$. Для реалізації операцій підходом Рабі осциляцій тривалість операції дорівнює цілій кількості періодів резонансного руху (від 1 до 14). Гауссову огинаючу обрізано при $G = 2.7$, див. Рівн. (2.28). Для ЛЗШМ реалізації тривалості операцій побудовано для різних робочих точок за допомогою рис. 2.6 та аналогічних рисунків, побудованих для більшої кількості ЛЗШМ переходів. Зі збільшенням тривалості операцій похибка для підходу ЛЗШМ зменшується набагато швидше, ніж для підходу Рабі.

В експериментах існують методи покращення точності операцій на основі петлі зворотного зв'язку, також відомі як квантове керування або

робастне керування, наприклад, градієнтне сходження або метод Кротова [154, 155, 156, 157].

2.3 Двокубітні операції

2.3.1 Гамільтоніан та базиси

Тепер розглянемо гамільтоніан двох пов'язаних кубітів [34]

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (\Delta_i \sigma_x^{(i)} + \varepsilon_i(t) \sigma_z^{(i)}) - \frac{g}{4} (\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)}) - \frac{J}{4} \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)}, \quad (2.67)$$

із зовнішнім збудженням другого кубіта, що призводить до зміни енергетичного зсуву $\varepsilon_2(t)$. Енергетичні рівні цього гамільтоніану, нормалізовані до сили зв'язку g , показано на рис. 2.8(a).

Хоча можливі й інші варіанти для частини гамільтоніана з взаємодією, зараз ми розглядатимемо поперечний зв'язок з $X\bar{Y}$ -взаємодією

$$H_{\text{int}}^{XY} = -\frac{g}{4} (\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)}), \quad (2.68)$$

який призводить до розщеплення між адіабатичними рівнями енергії E_1 і E_2 на величину g на перетині $|01\rangle$ і $|10\rangle$ діабатичних рівнів енергії та повздовжню взаємодією з ZZ -частиною взаємодії

$$H_{\text{int}}^{ZZ} = -\frac{J}{4} \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)}, \quad (2.69)$$

що призводить до зсуву між квазіперетинами адіабатичних рівнів енергій $(E_0 - E_1)$ та $(E_2 - E_3)$ на величину J [див. рис. 2.8(a)]. JJ -взаємодія, або взаємодія Гейзенберга, є окремим випадком, коли обидва члени присутні і $J = g$.

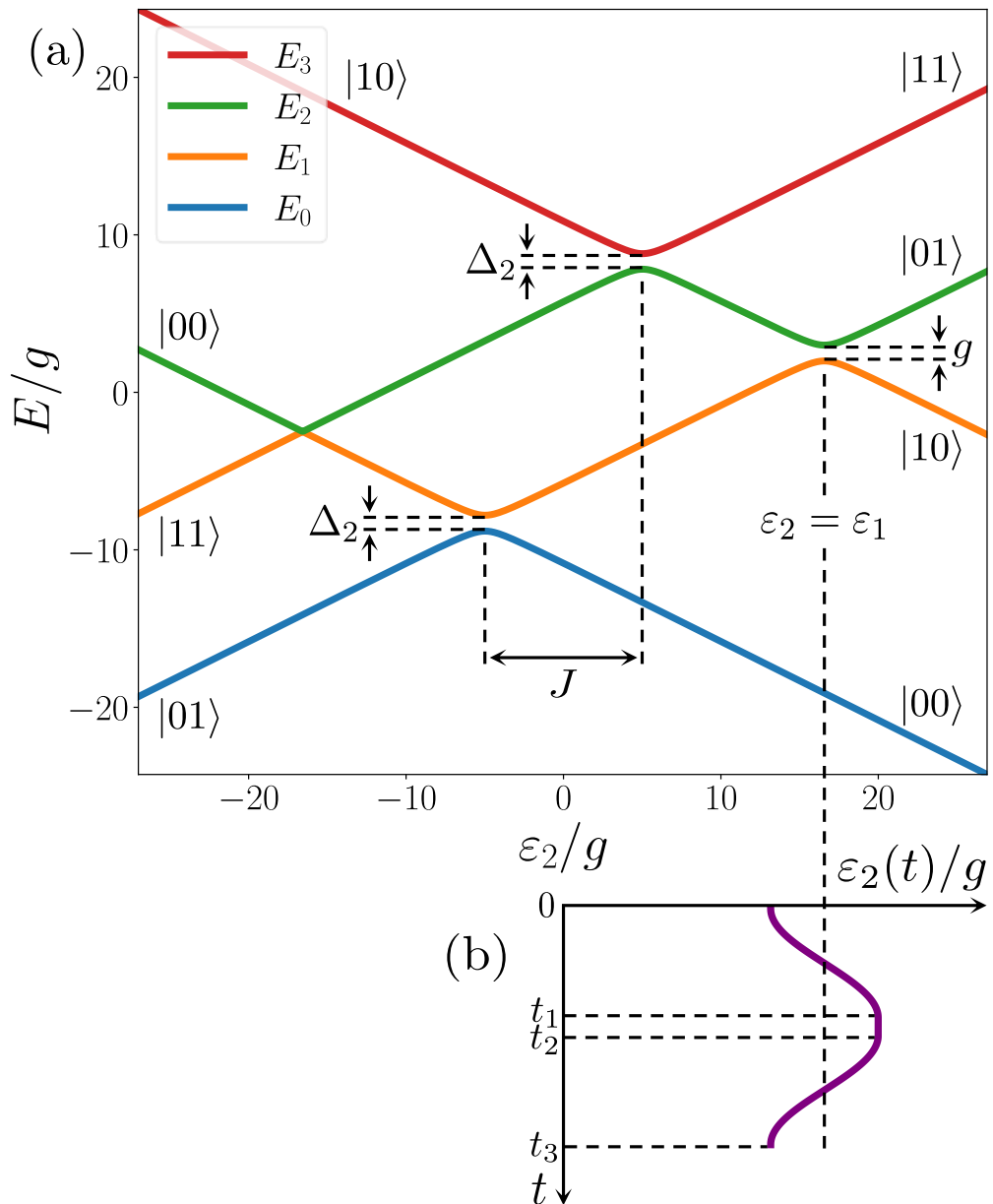


Рис. 2.8: (а) Адиабатичні енергетичні рівні двокубітної системи з гамільтоніаном (2.67) як функція енергетичного зсуву ε_2 . В областях, далеких від квазіперетинів рівнів, енергії адиабатичних рівнів $|E_i\rangle$ асимптотично збігаються з енергіями діабатычних рівнів $|mn\rangle$. Параметри гамільтоніана, які тут використано, такі: $\Delta_1/g = 0.3$, $\Delta_2/g = 1$, $\varepsilon_1/g = 16.6$ і $J/g = 10$. (б) Залежність енергетичного зсуву $\varepsilon_2(t)$ від часу для реалізації операції iSWAP.

Складність генерування конкретної операції залежить від наявних умов зв'язку. З іншого боку, для кожного типу зв'язку існують двокубітні операції, які можна реалізувати у простий спосіб [158].

Матриця переходу S між *діабатичним* базисом $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ та *адиабатичним* $\{|E_0\rangle, |E_1\rangle, |E_2\rangle, |E_3\rangle\}$ для чотирирівневої квантової

системи побудовано як композицію власних векторів гамільтоніана в діабатичному базисі (2.67), так що гамільтоніан в адіабатичному базисі $H^{(adb)}$ є діагональним з адіабатичними рівнями енергії (власних значень гамільтоніана в діабатичному базисі) у порядку зростання:

$$S^\dagger HS = H^{(adb)} = \text{diag}\{E_0, E_1, E_2, E_3\}. \quad (2.70)$$

У цьому розділі чисельно розраховано матрицю переходу S та адіабатичні рівні енергії E_i .

2.3.2 Операція iSWAP

Однією з найпростіших двокубітних операцій, коли присутній зв'язок типу XY , є операція iSWAP

$$\text{iSWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Його ЛЗШМ-реалізація має включати проходження квазіперетину між адіабатичними рівнями E_1 і E_2 , розташованими на $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$. Для простоти тут продемонстровано ЛЗШМ-реалізацію операції iSWAP для гамільтоніана (2.67) з одним членом взаємодії XY , коли $J = 0$ і квазіперетини ($E_0 - E_1$) та ($E_2 - E_3$) розташовані при $\varepsilon_2 = 0$ [див. рис. 2.8(a)].

Як і у випадку операції X , неможливо реалізувати ЛЗШМ перехід з довільним \mathcal{P} з високою точністю лише за один прохід, тому потрібно принаймні два проходи. Таким чином, ми розглядаємо енергетичний зсув $\varepsilon_2(t)$ наступного вигляду [див. рис. 2.8(b) та 2.9(b)]:

$$\varepsilon_2(t) = \begin{cases} \varepsilon_1 - A \cos \omega t, & 0 < t < t_1, \\ \varepsilon_1 + A, & t_1 < t < t_2, \\ \varepsilon_1 + A \cos \omega(t - t_2), & t_2 < t < t_3, \end{cases} \quad (2.72)$$

де

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{T_c}{2}, \\ t_2 &= \frac{T_c}{2} + T_1, \\ t_3 &= T_c + T_1. \end{aligned}$$

Він складається з двох півперіодів косинусоїди з періодом $T_c = 2\pi/\omega$ і амплітудою A , розділених посередині періодом незмінного енергетичного зсуву ε_2 з часом T_1 . Для простішої форми сигналу без періоду незмінного енергетичного зсуву ε_2 ми б отримали систему з трьох рівнянь для параметрів сигналу, в якій присутні лише два параметри, A і T_c . Отже, потрібен був би додатковий ступінь свободи, наприклад, час T_1 періоду незмінного енергетичного зсуву ε_2 .

Як і у випадку одного кубіта, побудуємо залежність адіабатичних енергетичних рівнів від часу на рис. 2.9(а), введемо всі значення ймовірностей переходів \mathcal{P}_i для кожного діабатичного переходу N_i і визначимо акумульовані різниці фаз $\zeta_k^{(ij)}$ між адіабатичними рівнями E_i та E_j для різних періодів адіабатичної еволюції як

$$\zeta_k^{(ij)} = \frac{1}{2\hbar} \int_{t_{N(k-1)}}^{t_{N(k)}} [E_j(t) - E_i(t)] dt, \quad (2.73)$$

де $t_{N0} = 0$, і $t_{N3} = t_3$.

У загальному випадку для багаторівневої квантової системи оператор діабатичного (ЛЗШМ) переходу між адіабатичними енергетичними рівнями $|E_i\rangle$ і $|E_j\rangle$ ($j = i + 1$) з ЛЗШМ ймовірністю \mathcal{P} в адіабатичному базисі визначено як

$$\begin{aligned} N &= Re^{i\phi_S} |E_i\rangle \langle E_i| + Re^{-i\phi_S} |E_j\rangle \langle E_j| + \\ &+ \alpha T |E_i\rangle \langle E_j| - \alpha T |E_j\rangle \langle E_i| + \sum_{k \neq i,j} |E_k\rangle \langle E_k|, \end{aligned} \quad (2.74)$$

де коефіцієнти переходу і відбиття T і R та фаза Стокса ϕ_S визначаються ймовірністю ЛЗШМ \mathcal{P} , див. рівняння (2.35) і (2.37).

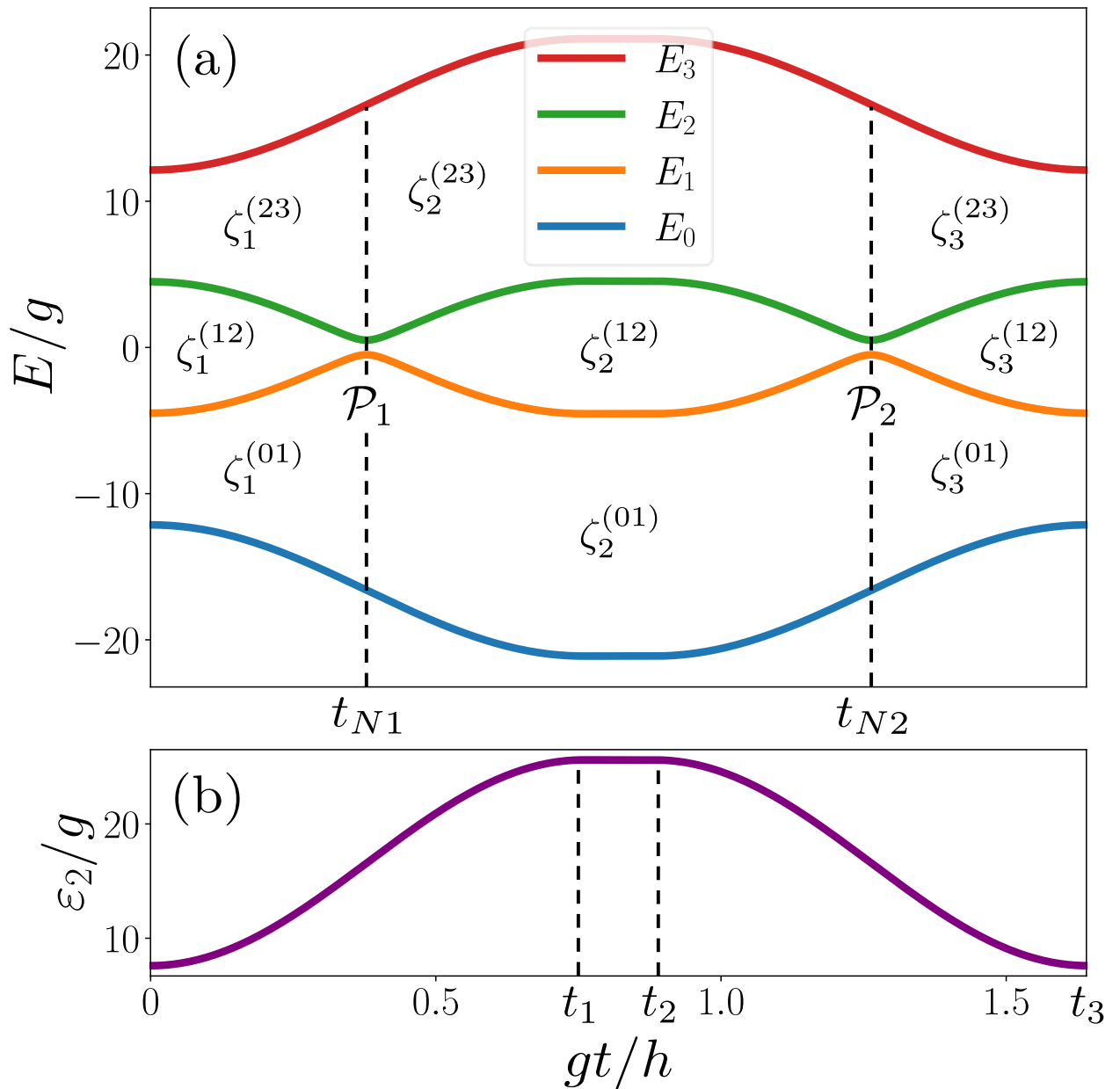


Рис. 2.9: Залежність адиабатичних енергетичних рівнів E_i , (а), та керуючого параметра, енергетичного зсуву ϵ_2 , (б), від часу для керуючого сигналу (2.72) для реалізації операції iSWAP. Для кожного діабатичного переходу N_i під час перетину квазіперетинів рівнів у момент часу $t_{N(i)}$ введено значення ймовірності ЛЗШМ \mathcal{P}_i . Для кожного інтервалу адиабатичної еволюції акумульовані різниці фаз $\zeta_k^{(ij)}$ між різними адиабатичними рівнями E_i та E_j можна представити як площі між рівнями.

Знак $\alpha = \pm 1$ залежить від напрямку проходження квазіперетину адиабатичних енергетичних рівнів. Далеко від області квазіперетину енергії адиабатичних станів $|E_i\rangle$ і $|E_j\rangle$ асимптотично наближаються до енергій деяких діабатичних станів $|D_m\rangle$ і $|D_n\rangle$, де $m < n$. Тут ми

припускаємо, що діабатичний базис $\{\dots, |D_m\rangle, \dots, |D_n\rangle, \dots\}$ є таким, у якому визначено гамільтоніан. Якщо перед проходженням квазіперетину адіабатичних енергетичних рівнів енергія нижнього адіабатичного рівня $|E_i\rangle$ асимптотично близька до енергії діабатичного рівня з меншим порядковим номером $|D_m\rangle$, то $\alpha = 1$; якщо перед проходженням $|E_i\rangle$ асимптотично близька до $|D_n\rangle$, то $\alpha = -1$.

Для розглянутого гамільтоніана (2.67), визначеного в діабатичному базисі $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, та керуючого сигналу (2.72), оператори діабатичних переходів в адіабатичному базисі $\{|E_0\rangle, |E_1\rangle, |E_2\rangle, |E_3\rangle\}$ представлені матрицями

$$N_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_k e^{i\phi_{S(k)}} & \alpha_k T_k & 0 \\ 0 & -\alpha_k T_k & R_k e^{-i\phi_{S(k)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.75)$$

де $k = 1, 2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$. Тут T_i , R_i , $\phi_{S(i)}$ - коефіцієнт проходження, коефіцієнт відбиття та фаза Стокса для діабатичного переходу N_i , які визначаються відповідною ймовірністю переходу \mathcal{P}_i [див. рівняння (2.35), (2.36) та (2.37)].

Для квантової системи рівня N оператор адіабатичної еволюції в адіабатичному базисі є діагональним і має вигляд

$$U = \sum_{k=0}^{N-1} \exp \left\{ i \sum_{j=0}^{N-2} \beta_{jk} \zeta^{(j,j+1)} \right\} |E_k\rangle \langle E_k|, \quad (2.76)$$

$$\beta_{jk} = 2\theta(j-k) - 1,$$

де $k = 0, 1, \dots, N-1$, а θ - степенева функція Гевісайда. Правило визначення знака $\beta_{jk} = \pm 1$ можна сформулювати так: якщо область накопичення фази, що відповідає доданку $\zeta^{(j,j+1)}$, лежить нижче адіабатичного рівня енергії E_k , то $\beta_{jk} = -1$; якщо вище, то $\beta_{jk} = 1$.

Для чотирирівневої квантової системи оператор адіабатичної еволюції U_n для інтервалу еволюції $n = 1, 2, 3$ в адіабатичному базисі $\{|E_0\rangle, |E_1\rangle, |E_2\rangle, |E_3\rangle\}$ представлено діагональною матрицею з

КОМПОНЕНТАМИ

$$\begin{aligned}
 U_{(n)00} &= \exp \left[i(\zeta_n^{(01)} + \zeta_n^{(12)} + \zeta_n^{(23)}) \right], \\
 U_{(n)11} &= \exp \left[i(-\zeta_n^{(01)} + \zeta_n^{(12)} + \zeta_n^{(23)}) \right], \\
 U_{(n)22} &= \exp \left[i(-\zeta_n^{(01)} - \zeta_n^{(12)} + \zeta_n^{(23)}) \right], \\
 U_{(n)33} &= \exp \left[-i(\zeta_n^{(01)} + \zeta_n^{(12)} + \zeta_n^{(23)}) \right].
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Враховуючи різний порядок базисних векторів для дворівневої квантової системи з $|D_0\rangle = |1\rangle$ і $|D_1\rangle = |0\rangle$ (див. розділ 2.1), оператори діабатичного переходу (2.74) та адіабатичної еволюції (2.76) також узгоджуються з матрицями діабатичних переходів (2.34), (2.39) та адіабатичної еволюції (2.32) для одного кубіта.

Матриця еволюції для всього керуючого сигналу дорівнює

$$\Xi = U_3 N_2 U_2 N_1 U_1. \tag{2.78}$$

Після спрощення за допомогою

$$\begin{aligned}
 \zeta^{(01)} &= \zeta_1^{(01)} + \zeta_2^{(01)} + \zeta_3^{(01)}, \\
 \zeta^{(23)} &= \zeta_1^{(23)} + \zeta_2^{(23)} + \zeta_3^{(23)},
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

вилучивши з матриці спільну фазу $e^{i\varphi}$ і знехтувавши нею [див. Рівн. (2.13)], отримаємо матрицю еволюції

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{11} & u_{12} & 0 \\ 0 & u_{21} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi_3} \end{pmatrix}, \tag{2.80}$$

яка залежить від значень \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , $\zeta^{(01)}$, $\zeta_i^{(12)}$, $\zeta^{(23)}$. Прирівнявши її до матриці потрібної двокубітної операції iSWAP, можна визначити параметри

зовнішнього керуючого сигналу, який реалізує цю операцію:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 &= 1, \\
 \phi_{S1} + \phi_{S2} + 2\zeta_2^{(12)} &= \pi + 2\pi n_1, \\
 \phi_{S1} + 2(\zeta^{(01)} + \zeta_1^{(12)} + \zeta_2^{(12)}) &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n_2, \\
 \phi_{S2} + 2(\zeta^{(01)} + \zeta_2^{(12)} + \zeta_3^{(12)}) &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n_3.
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Для розглянутого сигналу (2.72) з $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}$, що дає $\zeta_1^{(12)} = \zeta_3^{(12)}$, та у випадку, коли присутня лише ХУ-взаємодія ($J = 0$), внаслідок чого $\zeta^{(01)} = \zeta^{(23)}$, умови спрощуються до

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= \frac{1}{2}, \\
 \phi_S + \zeta_2^{(12)} &= \frac{\pi}{2} + \pi n_1, \\
 \phi_S + 2(\zeta^{(01)} + \zeta_1^{(12)} + \zeta_2^{(12)}) &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n_2.
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

Перше рівняння дає лінійну залежність між A і T_c :

$$A = \frac{g^2}{4\hbar \ln 2} T_c. \tag{2.83}$$

Далі чисельно розв'язуємо два інші рівняння для двох параметрів сигналу T_c і T_1 . На рис. 2.10 показано динаміку операції iSWAP для конкретного розв'язку з $gT_c/h = 1.517$, $gT_1/h = 0.125$ і $A/g = 3.438$ для гамільтоніана (2.67), з параметрами $\Delta_1/g = 0.3$, $\Delta_2/g = 1$, $\varepsilon_1/g = 16.6$, $J = 0$; і порівняно наблизений розв'язок, отриманий за допомогою адіабатично-імпульсної моделі, з чисельним розв'язком рівняння Шредінгера. Для рис. 2.9 використано ті самі параметри гамільтоніана та керуючого сигналу, що й для рис. 2.9, за винятком більшої амплітуди $A/g = 9$.

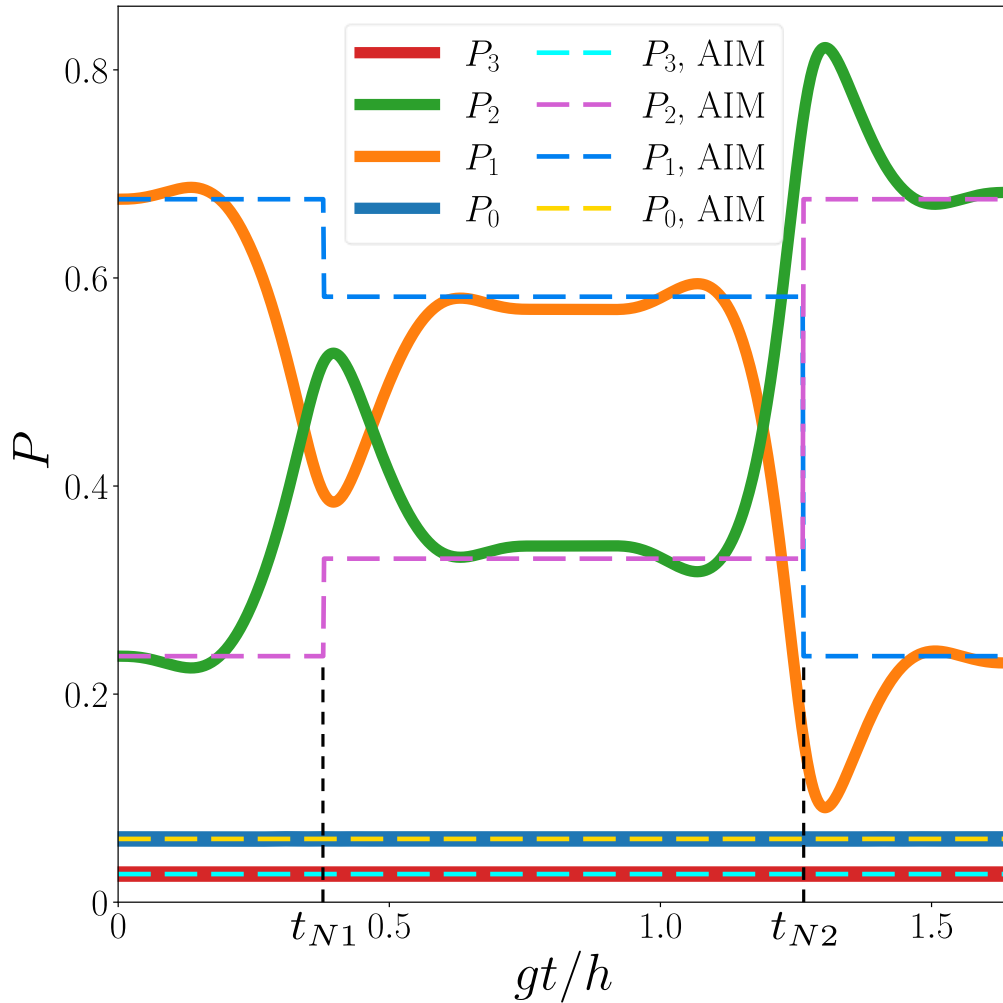


Рис. 2.10: Розглянуто динаміку операції iSWAP, реалізованої з двома ЛЗШМ переходами. Ймовірності заселеностей P_i кожного адиабатичного рівня E_i як функції часу отримано двома методами: чисельним розв'язанням рівняння Ліувілля-фон Неймана, показаним суцільними лініями, та адиабатично-імпульсною моделлю, позначеною пунктирними лініями. Кінцеві ймовірності заселеностей, знайдені за допомогою адиабатично-імпульсної моделі, представляють очікувані ймовірності заселеностей квантової системи. В результаті виконання операції iSWAP відбувається обмін ймовірностями заселеностей між адиабатичними енергетичними рівнями E_1 і E_2 .

Критерії добротності для однокубітної операції, описані в розділі 2.2.4, можна поширити на багаторівневі квантові системи з кількома квазіперетинами енергетичних рівнів. По-перше, точність операції зростає з лінійністю зовнішнього керуючого сигналу $\varepsilon_i(t)$ i -го кубіта у всіх областях перетину квазіперетинів адиабатичних рівнів, які проходяться під час збудження. По-друге, вона зростає зі збільшенням відстаней між початковим

і кінцевим енергетичними зсувами ε_i до найближчої проходимої області квазіперетину енергетичних рівнів, враховуючи, що початковий і кінцевий енергетичні зсуви все ще далекі від інших квазіперетинів, які не проходяться. Детальні умови залежать від точної часової залежності збудження $\varepsilon_i(t)$. Для розглянутого сигналу (2.72) вірність операції iSWAP зростає з амплітудою сигналу A , доки початковий і кінцевий енергетичні зсуви ε_2 не наближаються до області квазіперетину рівнів E_2 і E_3 [див. рис. 2.8].

Враховуючи рівняння (2.83), тривалість операції також зростає зі збільшенням амплітуди керуючого сигналу A , тому, як і в однокубітному випадку, вірність операції iSWAP зростає зі збільшенням їхньої тривалості, і слід знаходити задовільний баланс між вірністю і швидкістю операції.

Зауважимо, що система рівнянь для реалізації необхідної одно- або двокубітної операції [наприклад, (2.47), (2.51), (2.58), (2.81), (2.82), системи рівнянь для інших двокубітних операцій у розділах 2.4 та 2.5] не залежить від конкретного аналітичного визначення зовнішнього керуючого сигналу $\varepsilon_2(t)$ [напр. (2.72)] і є справедливим для будь-якого керуючого сигналу з аналогічною формою, який має ідентичну комбінацію проходжень квазіперетинів адіабатичних рівнів, що забезпечує топологічно подібну часову залежність адіабатичних енергетичних рівнів (див., наприклад, рис. 2.9).

Взагалі, для квантової системи с N рівнями, якщо квантові логічні операції розглядати в адіабатичному базисі, збуджуючий сигнал з переходами квазіперетину адіабатичних енергетичних рівнів E_i та E_j

(де $j = i + 1$) дозволяє реалізувати операції з узагальненою матрицею

$$\begin{aligned} \Xi &= u_{ii} |E_i\rangle \langle E_i| + u_{ij} |E_i\rangle \langle E_j| + u_{ji} |E_j\rangle \langle E_i| + \\ &+ u_{jj} |E_j\rangle \langle E_j| + \sum_{k \neq i,j} e^{i\phi_k} |E_k\rangle \langle E_k| = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\phi_0} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & u_{ii} & u_{ij} & & \vdots \\ \vdots & & u_{ji} & u_{jj} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & e^{i\phi_{N-1}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

яка представляє оператор еволюції для цього збудження в адіабатичному базисі.

2.4 Узагальнені SWAP операції

Проходження квазіперетинів між адіабатичними енергетичними рівнями E_1 та E_2 при $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ [див. рис. 2.8(а)] дозволяють реалізувати узагальнені двокубітні операції SWAP з матрицею (2.80), зокрема SWAP, $\sqrt{\text{SWAP}}$, $\sqrt{i\text{SWAP}}$, SWAP^α , операції ферміонних симуляцій $U_{\text{fSim}}(\theta, \phi)$. У цьому додатку змінні \mathcal{P}_i , $\phi_{S(i)}$, $\zeta_k^{(ij)}$ відсилають до розділу 2.3.2 та рис. 2.9(а).

2.4.1 Операції SWAP та iSWAP

Система рівнянь (2.81), записана для операції SWAP, є несумісною. Таким чином, операція SWAP не може бути реалізована лише двома проходками квазіперетину адіабатичних енергій ($E_1 - E_2$) для гамільтоніана (2.67) з лише XY-зв'язком. Вона, однак, може бути реалізована, коли $\zeta^{(01)} \neq \zeta^{(23)}$, якщо присутні як XY-, так і ZZ-взаємодії, як на рис. 2.8(а). Відповідні умови

записуються як

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 &= 1, \\
\phi_{S1} + \phi_{S2} + 2\zeta_2^{(12)} &= \pi + 2\pi n_1, \\
\phi_{S1} + 2(\zeta^{(01)} + \zeta_1^{(12)} + \zeta_2^{(12)}) &= (1 + \lambda)\frac{\pi}{2} + 2\pi n_2, \\
\phi_{S2} + 2(\zeta^{(01)} + \zeta_2^{(12)} + \zeta_3^{(12)}) &= (1 + \lambda)\frac{\pi}{2} + 2\pi n_3, \\
\zeta^{(01)} + \zeta_1^{(12)} + \zeta_2^{(12)} + \zeta_3^{(12)} + \zeta^{(23)} &= \pi n_4,
\end{aligned} \tag{2.85}$$

де $\lambda = 1$ для операції SWAP і $\lambda = 0$ для операції iSWAP.

2.4.2 Операції $\sqrt{\text{SWAP}}$ та $\sqrt{\text{iSWAP}}$

Операції $\sqrt{\text{SWAP}}$ і $\sqrt{\text{iSWAP}}$ не забезпечують повного обміну ймовірностей заселеностей між адіабатичними енергетичними рівнями E_1 і E_2 при $\mathcal{P} = 1$; тому їх також можна реалізувати одним проходом квазіперетину рівнів ($E_1 - E_2$). Для найпростішого збудження $\varepsilon_2(t)$ з одним проходженням квазіперетину рівнів ($E_1 - E_2$) при $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ [див. рис. 2.8(a)] в напрямі збільшення енергичного зсуву ε_2 , матриця еволюції має вигляд

$$\Xi = U_2 N_1 U_1, \tag{2.86}$$

де матриці діабатичного переходу N_1 та адіабатичної еволюції U_k визначаються через (2.75) та (2.77). Після спрощення (2.79), вилучивши з матриці спільну фазу $e^{i\varphi}$ і знехтувавши нею [див. рівняння (2.13)], прирівнявши матрицю еволюції до матриці шуканого квантової логічної операції, отримаємо умови для керуючого сигналу, який реалізує цю

операцію:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1 &= \frac{1}{2}, \\
\zeta_1^{(01)} + \zeta_2^{(01)} &= -\frac{1 + \lambda \pi}{2} \frac{\pi}{8} + \frac{\phi_{S1}}{2} + \pi n_1, \\
\zeta_1^{(12)} &= \lambda \frac{\pi}{4} - \frac{\phi_{S1}}{2} + \pi n_2, \\
\zeta_2^{(12)} &= -\lambda \frac{\pi}{4} - \frac{\phi_{S1}}{2} + \pi n_3, \\
\zeta_1^{(23)} + \zeta_2^{(23)} &= \frac{\phi_{S1}}{2} + \pi n_4,
\end{aligned} \tag{2.87}$$

де $\lambda = 1$ для операції $\sqrt{\text{SWAP}}$ і $\lambda = -1$ для операції $\sqrt{i\text{SWAP}}$.

2.5 Узагальнені керовані-U операції

За наявності ZZ-зв'язку проходження квазіперетину між адіабатичними енергетичними рівнями E_2 та E_3 при $\varepsilon_2 = J/2$ [див. рис. 2.8(а)] дозволяють реалізувати двокубітні операції з матрицею

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}, \tag{2.88}$$

зокрема, керовані-U операції, коли $u_{11} = e^{i\phi_1} = 1$. До них належать операції CNOT, CPhase(ϕ), CZ, CS тощо.

2.5.1 Операція CNOT

Тут ми демонструємо реалізацію операції CNOT ЛЗШМ підходом для гамільтоніана (2.67) як з XY-, так і з ZZ-зв'язками, хоча потрібен лише ZZ-зв'язок. Як і для операції X, неможливо реалізувати ЛЗШМ перехід з довільним \mathcal{P} з високою точністю лише за один прохід; тому потрібно щонайменше два проходи. Розглянемо тепер збудження $\varepsilon_2(t)$ у такому

вигляді [див. рис. 2.11(b)].

$$\varepsilon_2(t) = \begin{cases} J/2 - A, & 0 < t < t_1, \\ J/2 - A \cos \omega(t - t_1), & t_1 < t < t_2, \\ J/2 + A, & t_2 < t < t_3, \\ J/2 + A \cos \omega(t - t_3), & t_3 < t < t_4, \\ J/2 - A, & t_4 < t < t_5, \end{cases} \quad (2.89)$$

де

$$\begin{aligned} t_1 &= T_1, \\ t_2 &= T_1 + \frac{T_c}{2}, \\ t_3 &= T_1 + \frac{T_c}{2} + T_2, \\ t_4 &= T_1 + T_c + T_2, \\ t_5 &= 2T_1 + T_c + T_2. \end{aligned}$$

Як і у випадку однокубітних операцій та операції iSWAP, обчислюємо часові залежності адіабатичних енергетичних рівнів [див. рис. 2.11(a)], вводимо значення ймовірностей переходу \mathcal{P}_i для кожного діабатичного переходу N_i і визначаємо акумульовані різниці фаз $\zeta_k^{(ij)}$ (2.73) між адіабатичними рівнями E_i та E_j для різних періодів адіабатичної еволюції.

Оператори діабатичних переходів (2.74) представлені матрицями

$$N_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k e^{i\phi_{sk}} & -\alpha_k T_k \\ 0 & 0 & \alpha_k T_k & R_k e^{-i\phi_{sk}} \end{pmatrix}, \quad (2.90)$$

де $k = 1, 2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$. Матриця адіабатичної еволюції задається рівнянням (2.77). Матрицю еволюції для всього збудження можна знайти як (2.78).

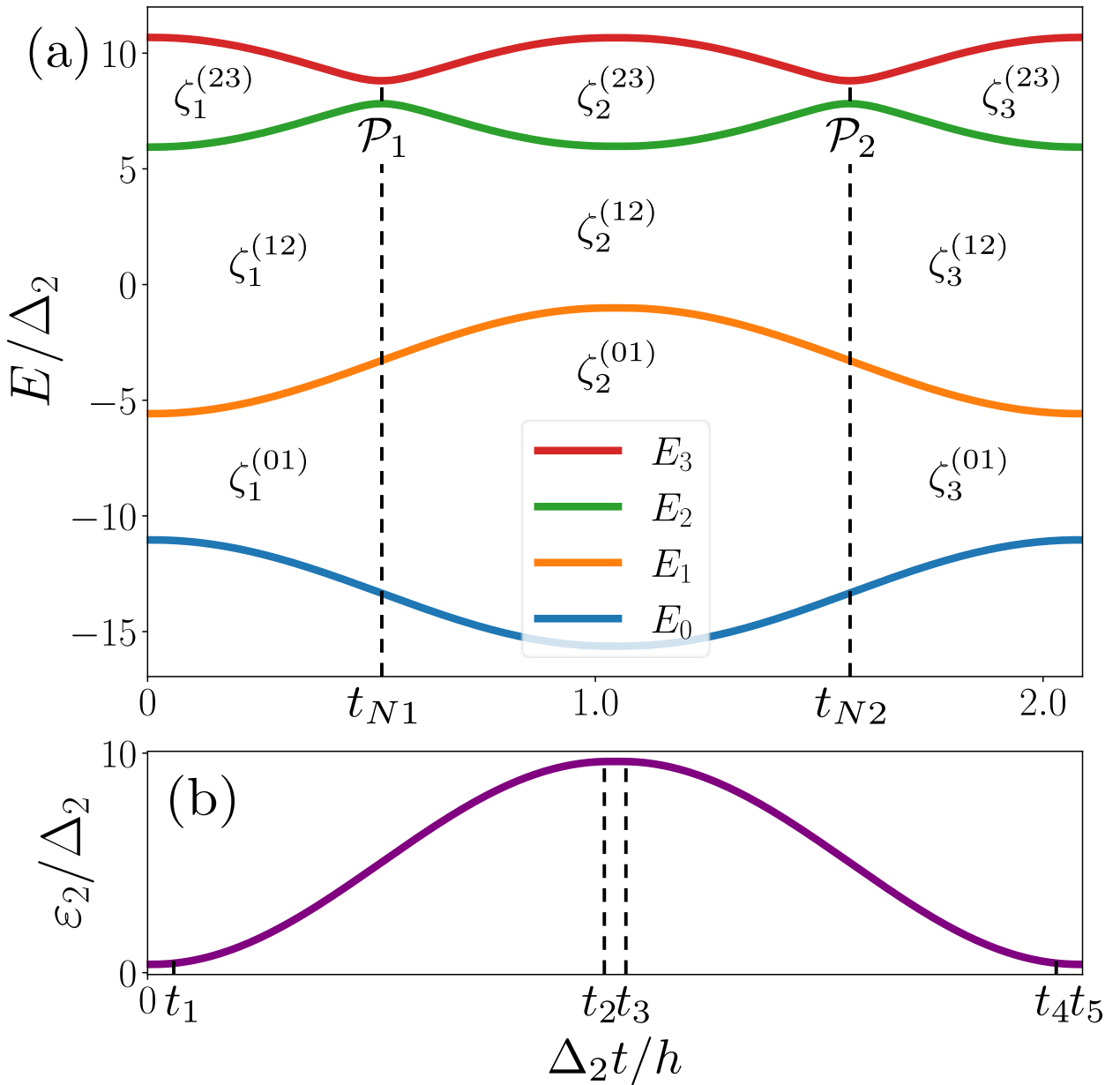


Рис. 2.11: Залежність адиабатичних енергетичних рівнів E_i , (а), та керуючого параметра, енергетичного зсуву ε_2 , (б), від часу для керуючого сигналу (2.89) для реалізації CNOT операції. Для кожного діабатичного переходу N_i під час квазіперетину рівнів у момент часу $t_{N(i)}$ введено значення ймовірності ЛЗШМ \mathcal{P}_i . Для кожного інтервалу адиабатичної еволюції визначено прирости фази $\zeta_k^{(ij)}$ між різними адиабатичними рівнями E_i та E_j , які представлено у вигляді площ між рівнями.

Після спрощення за допомогою

$$\begin{aligned}\zeta^{(01)} &= \zeta_1^{(01)} + \zeta_2^{(01)} + \zeta_3^{(01)}, \\ \zeta^{(12)} &= \zeta_1^{(12)} + \zeta_2^{(12)} + \zeta_3^{(12)},\end{aligned}\tag{2.91}$$

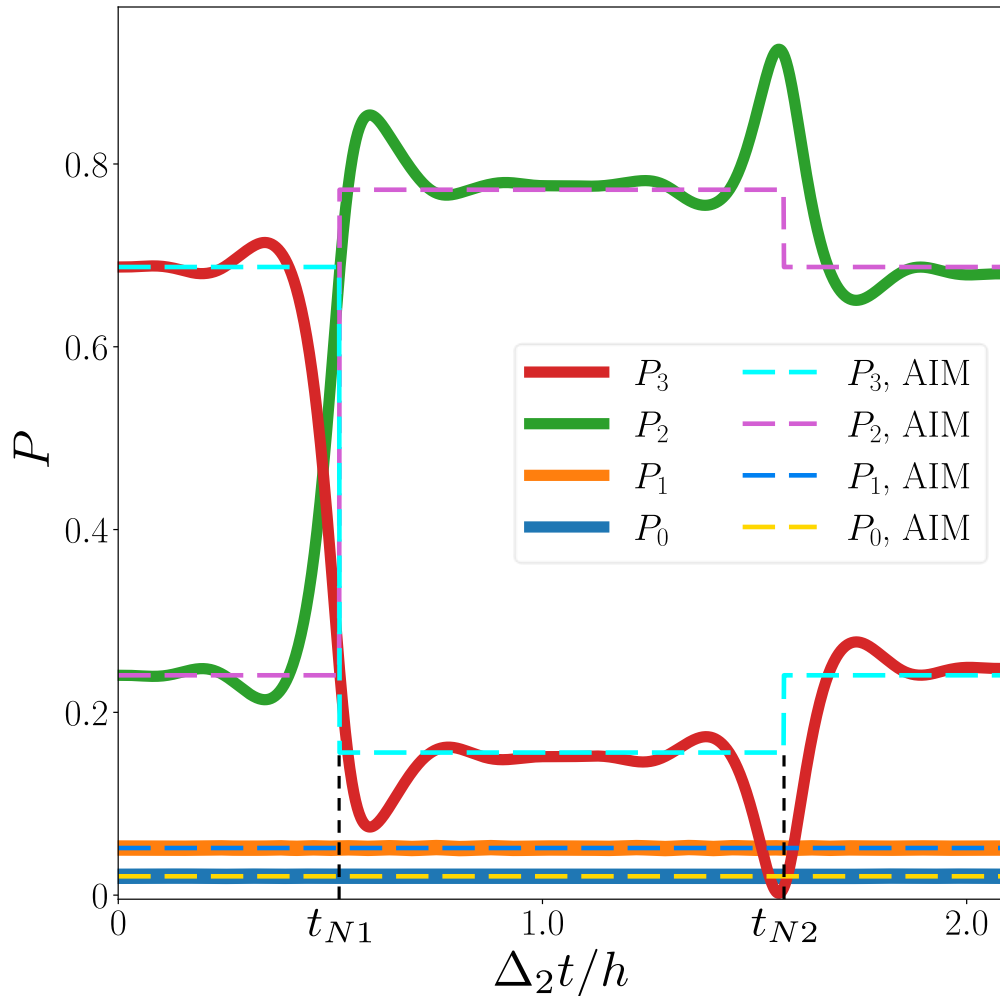


Рис. 2.12: Розглянуто динаміку операції CNOT, реалізованої з двома ЛЗШМ переходами. Ймовірності заселеностей P_i кожного адиабатичного рівня E_i як функції часу отримано двома методами: чисельним розв'язанням рівняння Ліувілля-фон Неймана, показаним суцільними лініями, та адиабатично-імпульсною моделлю, показаною пунктирними лініями. Кінцеві ймовірності заселеностей, знайдені за допомогою адиабатично-імпульсної моделі, представляють очікувані ймовірності заселеностей квантової системи. Операція CNOT призводить до обміну ймовірностями заселеностей між адиабатичними енергетичними рівнями E_2 і E_3 .

вилучивши з матриці спільну фазу $e^{i\varphi}$ і знехтувавши нею [див. Рівн. (2.13)], отримаємо матрицю еволюції у вигляді (2.88), яка залежить від значень \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , $\zeta^{(01)}$, $\zeta^{(02)}$, $\zeta_i^{(23)}$. Прирівняння її до матриці шуканої

двокубітної операції CNOT

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

дозволяє визначити параметри зовнішнього керуючого сигналу, які реалізують цю операцію:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 &= 1, \\ \zeta^{(01)} &= \pi n_1, \\ \phi_{S1} + \phi_{S2} + 2\zeta_2^{(23)} &= \pi + 2\pi n_2, \\ \phi_{S1} + 2\zeta^{(12)} + 2\zeta_1^{(23)} + 2\zeta_2^{(23)} &= 2\pi n_3, \\ \phi_{S2} + 2\zeta^{(12)} + 2\zeta_2^{(23)} + 2\zeta_3^{(23)} &= 2\pi n_4. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Для розглянутого сигналу (2.89) з $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}$ і $\zeta_1^{(23)} = \zeta_3^{(23)}$ умови спрощуються до

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{1}{2}, \\ \zeta^{(01)} &= \pi n_1, \\ \phi_S + \zeta_2^{(23)} &= \frac{\pi}{2} + \pi n_2, \\ \phi_S + 2\zeta^{(12)} + 2\zeta_1^{(23)} + 2\zeta_2^{(23)} &= 2\pi n_3. \end{aligned} \quad (2.94)$$

На рис. 2.12 ми ілюструємо динаміку операції CNOT для конкретного розв'язку з $\Delta_2 T_c / h = 2.0394$, $\Delta_2 T_1 / h = 0.0109$, $\Delta_2 T_2 / h = 0.0288$, $A / \Delta_2 = 4.6217$ для гамільтоніана (2.67) з параметрами $\Delta_1 / g = 0.3$, $\Delta_2 / g = 1$, $\varepsilon_1 / g = 16.6$, $J / g = 10$ і порівнюємо наблизений розв'язок, отриманий за допомогою адіабатично-імпульсної моделі, з числовим розв'язком рівняння Ліувілля-фон Неймана. Ті самі параметри гамільтоніана та збудження використано для рис. 2.11.

2.5.2 Операції CPhase(ϕ), CZ, CS

Прирівнювання матриці еволюції (2.88) для зовнішнього керуючого сигналу $\varepsilon_2(t)$ з формою (2.89) до матриці операції CPhase(ϕ)

$$\text{CPhase}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

надає вимоги для зовнішнього збуджуючого сигналу, який реалізує цю операцію:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}, \\ \zeta^{(01)} &= \pi n_1, \\ \phi_S + \zeta_2^{(23)} &= \pi n_2, \\ \zeta^{(12)} + \zeta_2^{(23)} &= \pi n_3 \\ \zeta^{(12)} + \zeta_1^{(23)} + \zeta_3^{(23)} &= -\frac{\phi}{2} + \pi n_4. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Тут змінні \mathcal{P}_i , ϕ_S , $\zeta_k^{(ij)}$ відсилаються до розділу 2.5.1 та до рис. 2.11(a).

Окремими випадками операції CPhase(ϕ) є операції CZ ($\phi = \pi$) та CS ($\phi = \pi/2$).

2.6 Висновки

Ми досліджували динаміку одно- та двокубітних систем під дією зовнішнього збудження, чисельно розв'язуючи рівняння Ліувілля-фон Неймана.

Ми розвинули парадигму альтернативних квантових логічних операцій на основі ЛЗШМ переходів. Ми показуємо, як адіабатично-імпульсна модель може бути використана для реалізації однокубітних та двокубітних квантових логічних операцій, таких як операцій X, Y, Адамара, iSWAP та CNOT, продемонстрували, як збільшити швидкість виконання операцій, а також методику пошуку компромісу та балансу між швидкістю та точністю

операцій. Ми також продемонстрували порівняння теоретичних похибок для звичайних операцій на основі Рабі та альтернативних ЛЗШМ операцій для різних тривалостей квантових логічних операцій.

Адіабатично-імпульсна модель застосовна для будь-яких квантових багаторівневих систем за двох умов. По-перше, вона добре працює при великій амплітуді сигналу, $A > \Delta$. З точки зору вимог до квантової системи це означає, що для розглянутого квазіперетину рівнів її мінімальне розщеплення енергії Δ має бути набагато меншим, ніж відстань до найближчих квазіперетинів рівнів. По-друге, час між переходами ЛЗШМ має бути більшим, ніж час, необхідний для процесу переходу. Ця умова обмежує максимальну частоту керуючого сигналу в багатопрхідній реалізації та мінімальну тривалість операції, відповідно.

Розглянутий загальний метод реалізації квантових логічних операцій з ЛЗШМ переходами з використанням адіабатично-імпульсної моделі застосовний до великої кількості багаторівневих квантових систем. Цей метод полягає в наступному: вибирають форму керуючого сигналу таким чином, щоб він проходив необхідні для даної операції квазіперетини рівнів. Для розглянутого сигналу обчислити залежність адіабатичних енергетичних рівнів системи від часу. Ввести ймовірності переходів \mathcal{P}_i для кожного діабатичного переходу та фазові прирости $\zeta_k^{(ij)}$ між усіма парами послідовних адіабатичних рівнів E_i та E_j для кожного періоду адіабатичної еволюції. Використовуючи їх, складаємо всі матриці діабатичного переходу N_i та адіабатичної еволюції U_i , перемножуємо їх і отримуємо сумарну матрицю еволюції. Прирівнюємо її до матриці шуканої квантової логічної операції помноженою на довільний фазовий множник $e^{i\varphi}$, дозволяє визначити необхідні параметри керуючого сигналу, який реалізує цю логічну операцію.

РОЗДІЛ 3

Низькочастотна спектроскопія для квантових багаторівневих систем

3.1 Чисті та одягнені енергетичні рівні

Розглянемо чотирирівневий гамільтоніан для кремнієвої долино-орбітальної подвійної квантової точки (ПКТ) [99]:

$$H(t) = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon(t)}{2} + E_L & 0 & t_d & t_v \\ 0 & \frac{\epsilon(t)}{2} & -t_v & t_d \\ t_d & -t_v & -\frac{\epsilon(t)}{2} + E_R & 0 \\ t_v & t_d & 0 & -\frac{\epsilon(t)}{2} \end{pmatrix} = H_0 + V_d(t) \quad (3.1)$$

з

$$V_d(t) = \frac{1}{2} A_d \sin \omega_d t \sigma_z^{(1)}, \quad (3.2)$$

де $\sigma_k^{(1)} = \sigma_k \otimes \sigma_0$, а σ_k позначають матриці Паулі. $E_{L,R}$ - це долинне розбиття лівої та правої точок, t_d і t_v - це міжточкові та міждолинні тунельні зв'язки, відповідно. Енергетичне зсув вибрано як

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 + A \sin \omega t + A_d \sin \omega_d t \equiv \epsilon + A_d \sin \omega_d t, \quad \omega \ll \omega_d, \quad (3.3)$$

який містить як резонансний збуджуючий сигнал одягання з частотою ω_d , так і повільний збуджуючий спектроскопічний сигнал $\epsilon = \epsilon_0 + A \sin \omega t$ з частотою $\omega \ll \omega_d$. Наш підхід складається з двох кроків. На першому кроці ("одягання"), ми ігноруватимемо повільний сигнал і вважатимемо ϵ незалежною від часу величиною. Ми продемонструємо, як звести цю систему до дворівневої. (Для інших подібних випадків, коли багаторівнева структура зводиться до дворівневої системи, див. [159, 160]). Після включення цього швидкого збуджуючого сигналу для одягнення, ми додамо повільну часову залежність, що міститься у змінній ϵ .

Розглянемо спочатку енергетичні рівні нашої чотирирівневої системи. Це власні стани гамільтоніана H_0 . За відсутності тунелювання $t_d = t_v = 0$, вони задаються діагональними елементами матриці у рівнянні (3.1).

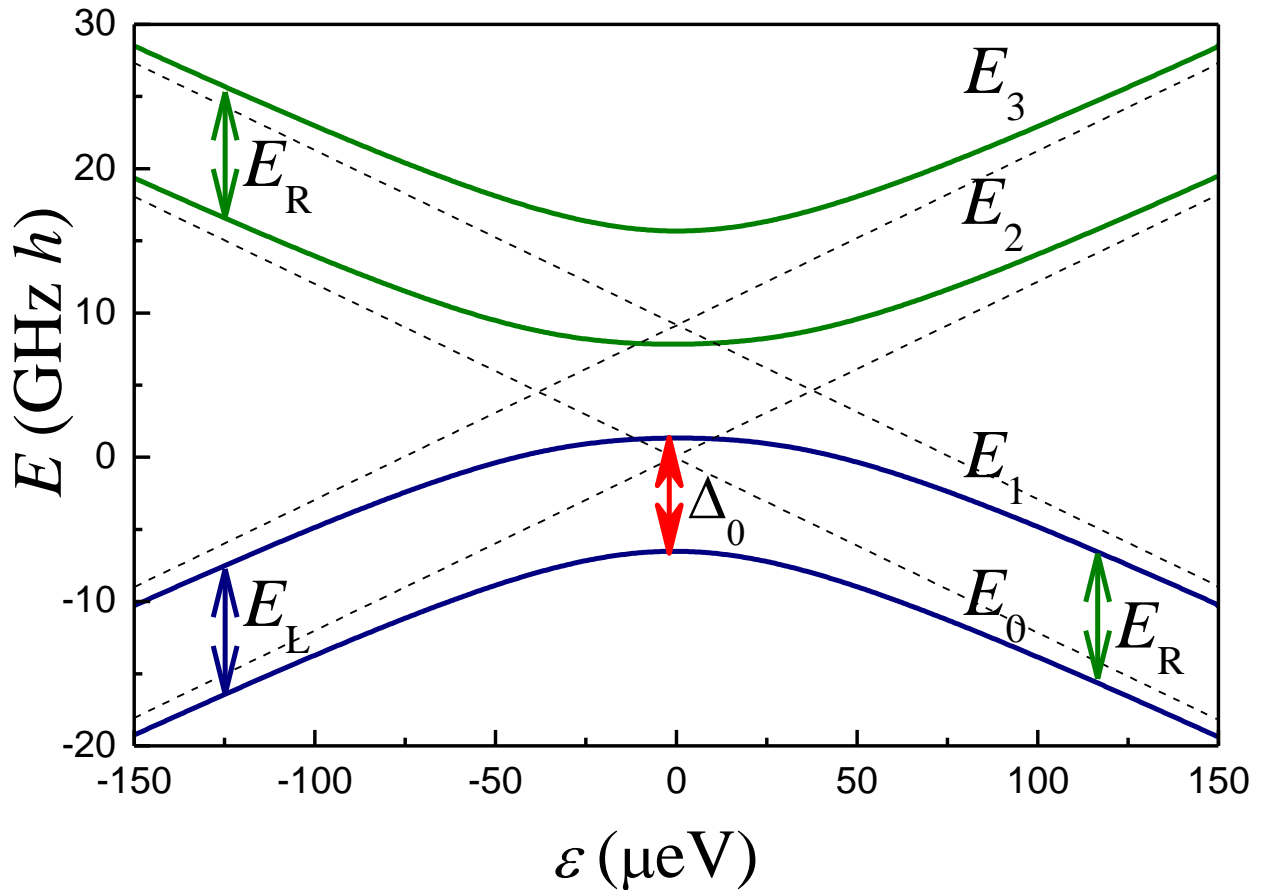


Рис. 3.1: Чотирирівнева система: енергетичні рівні долинно-орбітальної ПКТ. Чотири енергетичні рівні за відсутності тунелювання, $t_d = t_v = 0$, показані пунктирними лініями, мають чотири перехрестя. У загальному випадку, показаному суцільними лініями, виродження знімається. Чотири енергетичні рівні E_i побудовано для параметрів, описаних у тексті.

Це чотири прямі лінії, що перетинаються на рис. 3.1. Ненульове тунелювання знімає виродження. Для розрахунків у цій роботі ми вибрали параметри для кремнієвої долинно-орбітальної ПКТ з [101]: $E_L = 37.5 \mu\text{eV}$, $E_R = 38.3 \mu\text{eV}$, $t_d = 25.4 \mu\text{eV}$, $t_v = 11.8 \mu\text{eV}$. Спектр з цими параметрами показано на рис. 3.1. Вибрані параметри, які входять до гамільтоніана (3.1), призводять до мінімальної відстані між енергіями $\Delta_0 = (E_1 - E_0)_{\min} = 7.845 \text{ GHz}\cdot h$, і це відбувається при дуже малому зсуві, $\varepsilon = \varepsilon^* = -4 \cdot 10^{-3} \text{ GHz}$. (Оскільки ми використовуємо як енергетичні, так і частотні одиниці, для зручності зазначимо, що $1 \mu\text{eV} = 0.2418 \text{ GHz}\cdot h$). Таке велике розщеплення Δ_0 не дозволяє проводити низькочастотну спектроскопію, оскільки, згідно з адіабатичній теоремі та формулі ЛЗШМ, для низькочастотного руху не буде збудження. Отже, ми

спочатку ”одягнемо” ”голий” спектр на рис. 3.1. Відповідно, розглянемо тепер резонансне збудження з $\epsilon(t) = \epsilon + A_d \sin \omega_d t$ та $\hbar\omega_d \sim \Delta_0$.

3.2 Одягання

У цьому розділі ми розглянемо, як резонансно збуджувана чотирирівнева ПКТ може бути зведена до одягненої дворівневої системи. Почнемо з залежного від часу гамільтоніана, Рівн. (3.1) з $\epsilon(t) = \epsilon + A_d \sin \omega_d t$, де ϵ припускається тут не залежить від часу, H_0 відповідає $\epsilon(t) \rightarrow \epsilon$, і

$$V_d(t) = \frac{1}{2}A_d \cos(\omega_d t) \sigma_z^{(1)} \quad (3.4)$$

з $\sigma_z^{(1)} = \sigma_z \otimes \sigma_0$. Стаціонарний гамільтоніан H_0 діагоналізується матрицею S (яку можна знайти чисельно):

$$S^\dagger H_0 S = H'_0 = \text{diag}(E_0, E_1, E_2, E_3). \quad (3.5)$$

Потім таку саму процедуру слід виконати з $V_d(t)$; позначимо матрицю $V = S^\dagger \sigma_z^{(1)} S$. А потім, аналогічно до того, як це робиться для кубітів, наприклад, у [161], ми виконуємо унітарне перетворення $U = \exp(i\omega_d t \sigma_z^{(2)} / 2)$ і робимо наближення обертової хвилі, тобто опускаємо швидкообертові члени. Отримано гамільтоніан одягненої ПКТ:

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \begin{pmatrix} E_0 + \frac{\hbar\omega_d}{2} & & & 0 \\ & E_1 - \frac{\hbar\omega_d}{2} & & \\ & & E_2 + \frac{\hbar\omega_d}{2} & \\ 0 & & & E_3 - \frac{\hbar\omega_d}{2} \end{pmatrix} \\ & + \frac{A_d}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & V_{02} & V_{03} \\ 0 & 0 & V_{12} & V_{13} \\ V_{20} & V_{21} & 0 & 0 \\ V_{30} & V_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тут V_{ij} - елементи матриці V .

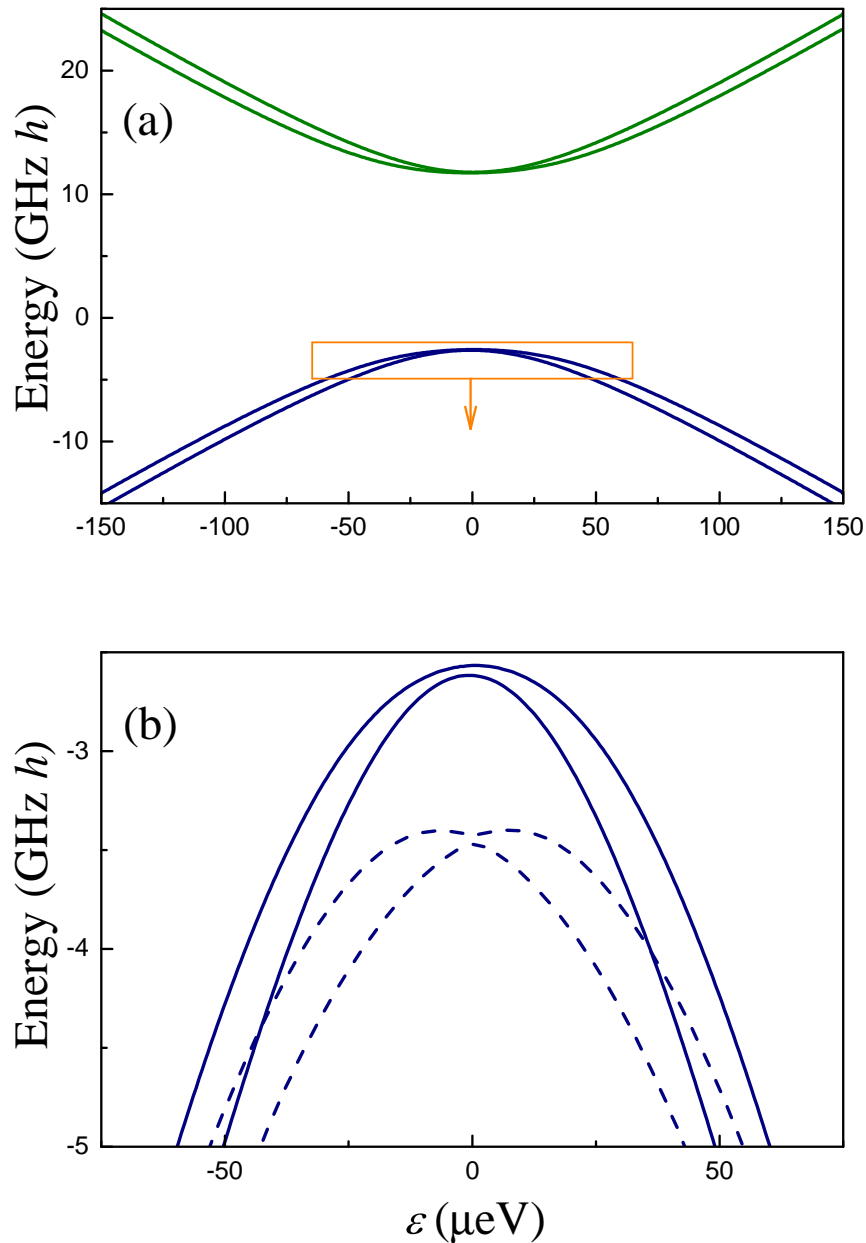


Рис. 3.2: Рівні енергії одягненої ПКТ. (а) При малому зовнішньому збудженні, $A_d \rightarrow 0$, вони визначаються як $E_i \pm \hbar\omega_d/2$, див. рівняння (3.6). (б) Зближення двох найнижчих одягнених енергетичних рівнів. Суцільні лінії такі самі, як і в (а), для малої амплітуди збудження. Тут показано мінімальну відстань між енергетичними рівнями на енергетичному зсуві $\varepsilon_0 = 0$, яка визначається за формулою $\Delta = (E_1 - E_0)_{\min} - \hbar\omega_d$. Пунктирні лінії показують, як збудження змінює одягнені енергетичні рівні; вони побудовані для $A_d/\Delta = 2$.

Якщо знехтувати амплітудою збудження, $A_d \rightarrow 0$, то одягнені енергетичні рівні є зсунутими голими рівнями: $\tilde{E}_i = E_i \pm \hbar\omega_d$. Їх зображено на рисунку 3.2(a). Ефект збудження, для ненульових A_d , показано на

рис. 3.2(b) для двох найнижчих рівнів і $A_d/\Delta = 2$.

Рисунок 3.2(a) демонструє, що два найнижчих одягнених стани добре ізольовані від верхніх. Це дозволяє обмежити опис нашої системи лише двома рівнями,

$$\tilde{E}_{0,1} = E_{0,1} \pm \frac{\hbar\omega_d}{2}. \quad (3.7)$$

Що важливо для низькочастотної еволюції -це те, що відстань між цими значущими енергетичними рівнями становить

$$\Delta\tilde{E} = \Delta E - \hbar\omega_d, \quad (3.8)$$

де $\Delta\tilde{E} = \tilde{E}_1 - \tilde{E}_0$ і $\Delta E = E_1 - E_0$. Таким чином, ми відобразили багаторівневу систему у дворівневу одягнену систему.

Для кращого порівняння з кубітами, корисно побудувати графік еквівалентних енергетичних рівнів (з дзеркальним відбиттям), $\pm\Delta\tilde{E}/2$, з тією самою відстанню $\Delta\tilde{E}$, замість $\tilde{E}_{0,1}$. Частоту слід брати близькою до Δ_0 . При $\omega_d/2\pi = 7.796$ GHz з [101], маємо мінімальну відстань між двома одягненими рівнями $\Delta = \Delta_0 - \hbar\omega_d = 0.049$ GHz·h. Залежність одягнутих енергетичних рівнів з квазіперетином від енергетичного зсуву ε показана на рис. 3.3.

Поблизу області квазіперетину рівнів ми можемо розкласти $(\Delta E)^2$ в ряд за ε і отримати $\Delta\tilde{E} = \sqrt{\Delta_0^2 + 0.16\varepsilon^2} - \hbar\omega_d$. Відповідні криві показано пунктирними лініями на рис. 3.3. Ця формула корисна для опису динаміки при $\varepsilon < E_{L,R}$.

Тут і далі повільний сигнал, що рухає кубіт, буде взято з $\omega \sim \Delta$, щоб мати нетривіальну ЛЗШМ ймовірність, $P_{LZ} \sim 1$. Тоді $\varepsilon = \varepsilon_0 + A \sin \omega t$ описує низькочастотну параметричну часову залежність енергетичних рівнів. Уявімо, що ми починаємо з $\varepsilon = \varepsilon_0$ з, скажімо, $\varepsilon_0 = 50$ μeV на рис. 3.3. Тоді динаміка відповідає спочатку збільшенню зміщення ε до $\varepsilon = \varepsilon_0 + A$, а потім зменшенню його до $\varepsilon = \varepsilon_0 - A$. Відповідно, енергетичні рівні $\pm\frac{1}{2}\Delta\tilde{E}(\varepsilon)$ змінюватимуться, як показано на рис. 3.4.

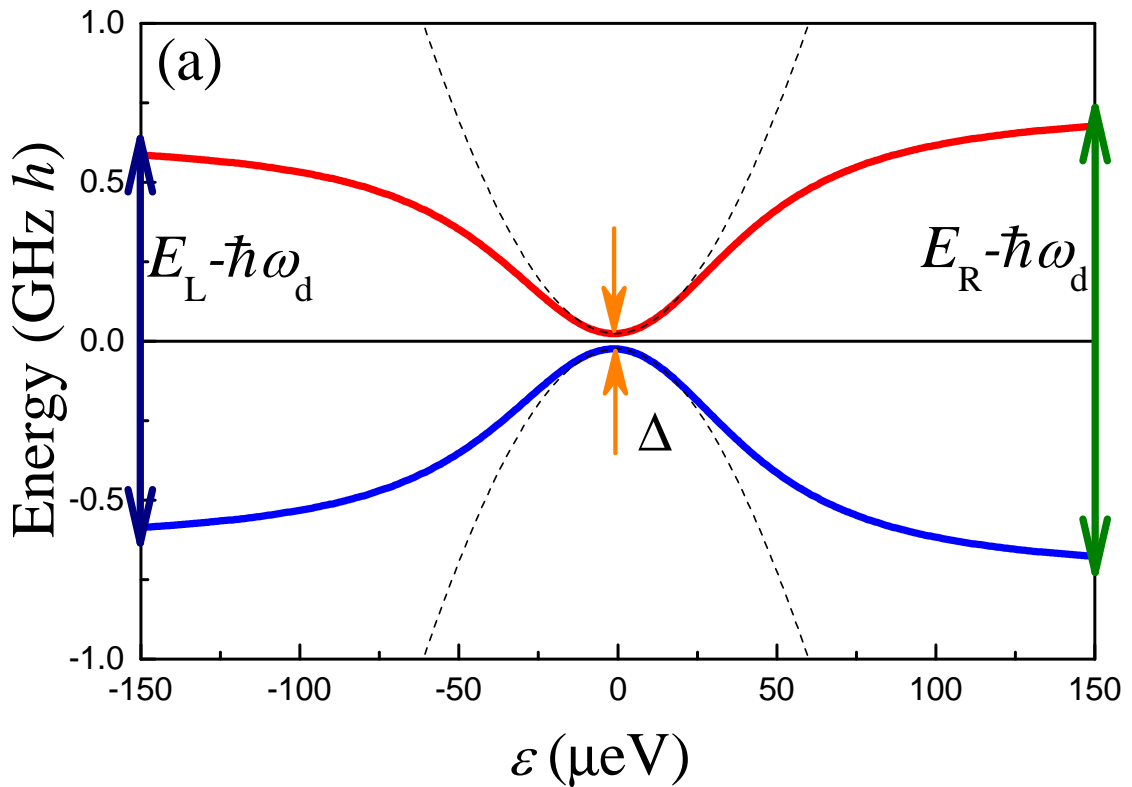


Рис. 3.3: Одягнуті енергетичні рівні. Два найнижчі одягнені рівні енергій показано графіком залежності $\pm\Delta\tilde{E}/2$ від ε , де $\Delta\tilde{E} = \Delta E - \hbar\omega_d$ і $\Delta E = E_1 - E_0$. Відстань між вдягненими енергетичними рівнями показує квазіперетин Δ близько до $\varepsilon = 0$ і наближається до $E_{L,R} - \hbar\omega_d$ ліворуч та праворуч, відповідно. Штрихові параболи відповідають кубітоподібному спектру при малих ε .

Кожного разу, коли система проходить через $\varepsilon = 0$ на рис. 3.3, ми маємо прохід квазіперетину рівнів на рис. 3.4. Така динаміка описується так званою *адиабатично-імпульсною* моделлю, як це детально описано в посиланнях [162, 69] та посиланнях на них. Ця модель поєднує в собі як інтуїтивну ясність, так і кількісну точність. Отже, ми присвячуємо наступний розділ саме їй.

3.3 ЛЗШМ для багаторівневої системи

Тепер ми хотіли б обчислити ймовірності заселеностей рівнів для дворівневої системи з енергетичними рівнями $\pm\frac{1}{2}\Delta\tilde{E}(\varepsilon)$, зображеної на рис. 3.3.

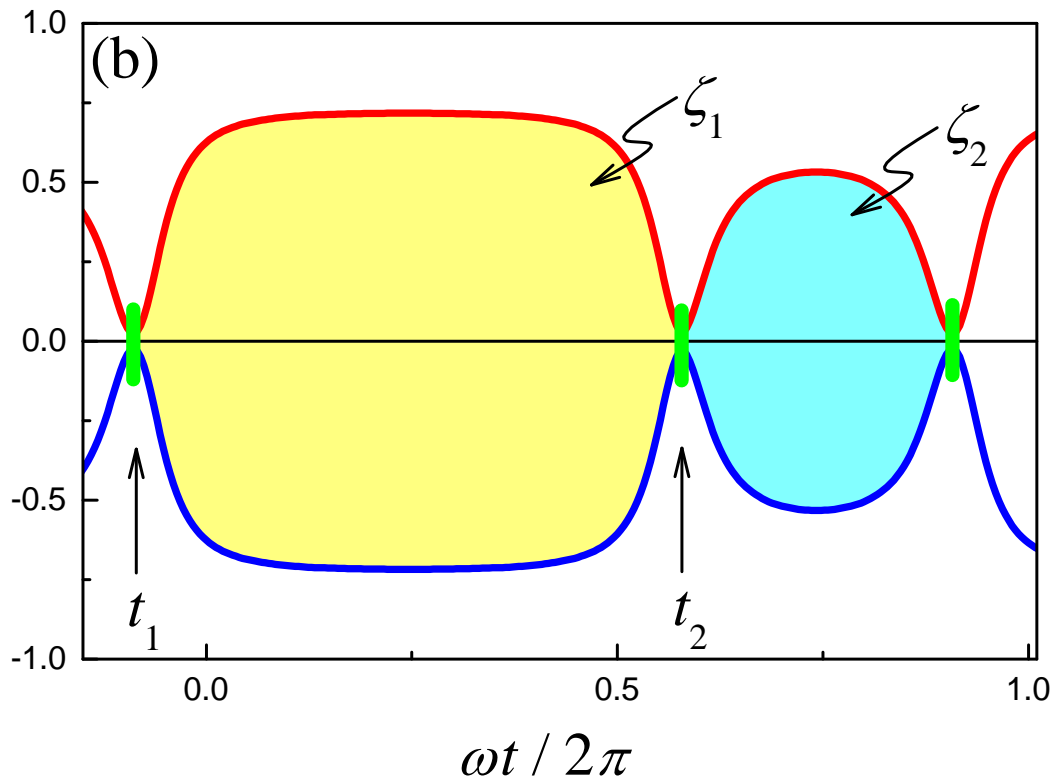


Рис. 3.4: Залежність одягнутих енергетичні рівнів від часу. Одягнені енергетичні рівні з рис. 3.3 показано в залежності від часу для $\varepsilon = \varepsilon_0 + A \sin \omega t$, при $\varepsilon_0 = 50 \mu\text{eV}$ і $A = 100 \mu\text{eV}$. Декілька перетинів областей квазіперетинів рівнів відбуваються при $t = t_1, t_2$ та $t_2 + 2\pi/\omega$. Ймовірнісні ЛЗШМ переходи показано у цих точках товстими вертикальними зеленими штрихами. Між цими квазіперетинами рівнів накопичуються фази хвильової функції $\zeta_{1,2}$. Ці фази, що дорівнюють площам під кривими енергетичних рівнів, призводять до спостережуваних інтерференційних смуг.

Адіабатично-імпульсна модель розглядає динаміку як адіабатичну далеко від області квазіперетину рівнів, з неадіабатичними переходами в точках мінімальних енергетичних відстаней. Перші стадії описуються накопиченням фаз хвильової функції, тоді як останні характеризуються формулою ЛЗШМ для ЛЗШМ переходу. Завдяки цьому ми можемо узагальнити формули для випадку повільного проходження з [69, 163], що дають усереднену за часом ймовірність заселеності верхнього рівня

$$P_+ = \frac{P_{\text{LZSM}}(1 + \cos \zeta_+ \cos \zeta_-)}{\sin^2 \zeta_+ + 2P_{\text{LZSM}}(1 + \cos \zeta_+ \cos \zeta_-)}, \quad (3.9)$$

де

$$\begin{aligned}
\zeta_+ &= \zeta_1 + \zeta_2 + \varphi, \quad \zeta_- = \zeta_1 - \zeta_2, & (3.10) \\
\zeta_1 &= \frac{1}{2\hbar} \int_{t_1}^{t_2} \Delta \tilde{E}(t) dt, \quad \zeta_2 = \frac{1}{2\hbar} \int_{t_2}^{t_1+2\pi/\omega} \Delta \tilde{E}(t) dt, \\
\Delta \tilde{E} &= E_1 - E_0 - \hbar\omega_d, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + A \sin \omega t, \\
\omega t_1 &= \arcsin\left(-\frac{\varepsilon_0}{A}\right), \quad \omega t_2 = \pi - \omega t_1, \\
\varphi &= -\frac{\pi}{2} + 2\delta(\ln \delta - 1) + 2 \arg \Gamma(1 - i\delta), \\
\delta &= \frac{\Delta^2}{4v}, \quad v = A\hbar\omega \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_0}{A}\right)^2}.
\end{aligned}$$

А ймовірність неадіабатичного переходу на верхній адіабатичний рівень при проходженні квазіперетину рівнів задається формулою ЛЗШМ $P_{LZSM} = \exp(-2\pi\delta)$. Тут Γ позначає гамма-функцію. Зауважимо, що для достатньо малих частот ($\delta \gg 1$) можна було б припустити, що $\varphi \approx -\pi$, хоча у наведеному вище рівнянні ми зберігаємо повну форму фази, задля загальності.

Формула (3.9) визначає лінії (дуги), вздовж яких розташовані резонанси:

$$\zeta_+ = k\pi. \quad (3.11)$$

За цієї умови ймовірність заселеності верхнього рівня стає максимально можливою, $P_+ = 1/2$. Ширина резонансних ліній визначається чисельником у рівнянні (3.9), який прямує до нуля при

$$\zeta_1 = \frac{\pi}{2} + l\pi \quad \text{and} \quad \zeta_2 = \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad (3.12)$$

де l і m - цілі числа. Зауважимо, що вони перетинаються у точці $\zeta_1 + \zeta_2 = (l + m + 1)\pi \equiv k\pi$, що означає, що вершини розташовані на резонансних лініях, які визначаються рівнянням (3.11). Ці лінії зображено на рис. 3.5 для $\omega/2\pi = 50$ МГц. Резонансну лінію з $k = 20$ на рис. 3.5 виділено жирніше, щоб показати, що це арфоподібні резонансні лінії з опуклою формою. Такі арфоподібні резонанси були нещодавно описані в роботі [101].

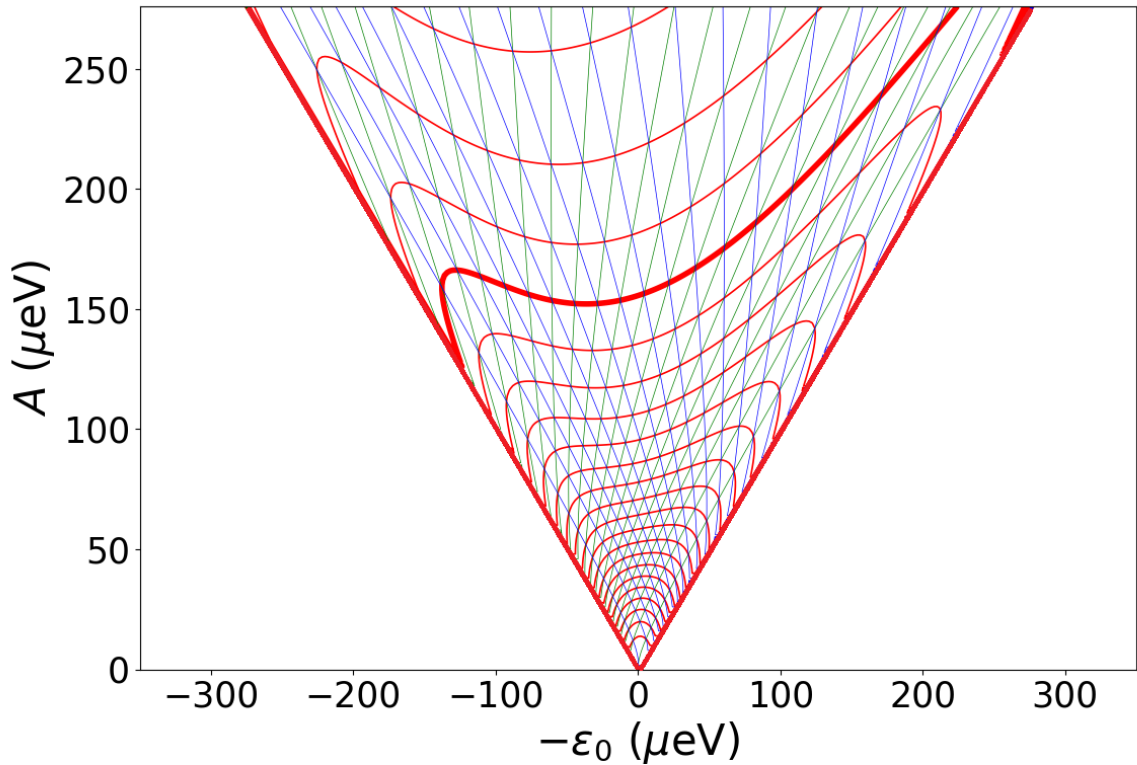


Рис. 3.5: Арфоподібні резонансні смуги та вузли. Положення резонансів показано червоним кольором резонансів показано червоним кольором для різних значень k , Рівн. (3.11). Ці криві є рівновіддаленими дугами для малих k 's і арфоподібні лінії зі збільшенням відстані для більших k 's. Коли обидві фази $\zeta_{1,2}/\pi$ дорівнюють напівцілим числам [Рівн. (3.12)], резонанси придушуються, і їх положення задано перетином зеленої та синьої ліній.

3.4 Обговорення: актуальність низькочастотної спектроскопії

Положення резонансів на рис. 3.5 несуть інформацію про початковий чотирирівневий гамільтоніан. Таким чином, ці спостереження можна використати для визначення параметрів системи, тобто для спектроскопії багаторівневої системи. Підсумуємо тепер кілька особливостей, які можуть бути корисними для цього типу спектроскопії.

- Резонанси обмежені похилими лініями, в області $A > |\varepsilon_0 - \varepsilon^*|$. Тому що інакше не буде досягтися квазіперетин рівнів, і не відбудуватиметься переходи з основного стану у збуджений. Нахил цих ліній може бути корисним для калібрування потужності.

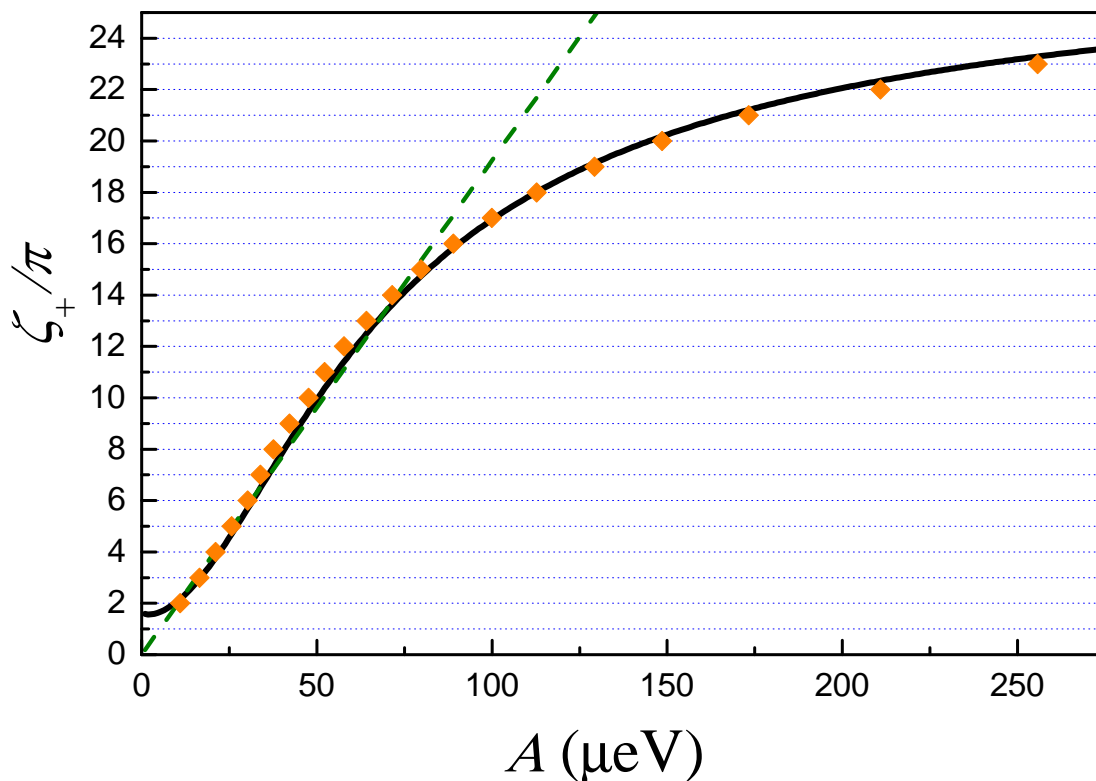


Рис. 3.6: Залежність потужності резонансів при нульовому зсуві, $\varepsilon_0 = 0$. Суцільна чорна крива задається ζ_+ . Положення резонансів визначається рівнянням $\zeta_+ = k\pi$ і відповідає цілим частинам ζ_+/π , які позначено горизонтальними лініями сітки. При малих зміщеннях, тобто для $k \leq 15$, вони можуть бути апроксимовані зеленою пунктирною лінією з постійним нахилом. Це означає, що резонансні дуги приблизно рівновіддалені. При збільшенні амплітуди збудження A відстань між резонансами монотонно збільшується. Помаранчеві ромбики відповідають резонансам з експериментальних даних на рис. 2(а) з [101].

- Для малих амплітуд керування, $A < E_{L,R}$, маємо кубітоподібний спектр, і, відповідно, дуги є рівновіддаленими та симетричними.
- Зі збільшенням амплітуди керування, починаючи з $A \sim E_{L,R}$, резонанси стають несиметричними.
- При подальшому збільшенні амплітуди коливань форма резонансних ліній змінюється з опуклої на увігнуту, утворюючи арфоподібні криві. Це відбувається тому, що відстань між енергетичними рівнями змінюється від ліній, що збільшуються до постійних, див. рис. 3.3. У симетричному випадку, з $E_L = E_R$, криві симетричні, і цей випадок проаналізовано у

розділі 3.5.

- При великому збуджуваному сигналі резонансні лінії все більше розходяться. Це зручно вивчати вздовж лінії $\varepsilon_0 = 0$ на рис. 3.5. Це зроблено на рис. 3.6. Там можна побачити положення еквідистантного резонансу при меншій амплітуді збудження A , як описано похилою пунктирною лінією, і зростання відстані між резонансами при зростанні A .

Наші розрахунки пов'язані з експериментальними параметрами з роботи [101]. Зокрема, зверніть увагу на хороше узгодження, продемонстроване на рис. 3.6. Крім того, наш загальний підхід можна застосувати до *будь-яких* інших *багаторівневих* систем. Наше загальне формулювання дозволяє гнучке застосування до інших систем, легкі чисельні розрахунки, а також аналіз у різних граничних випадках. Він неможливий за допомогою прямого чисельного розв'язку, без нашого більш аналітичного підходу.

3.5 Серцеподібні (увігнуті) резонансні лінії

Розглянемо симетричну ПКТ, яка є такою ж самою долинно-орбітальною ПКТ, що описується Рівн. (3.1), з єдиною відмінністю, яку ми зараз припустимо

$$E_L = E_R. \quad (3.13)$$

За допомогою цього спрощення ми можемо отримати вирази для чотирьох енергетичних рівнів

$$E_{0,1,2,3} = \frac{E_R}{2} \pm \left\{ \left[\frac{E_R}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t_d^2} \right]^2 + t_v^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.14)$$

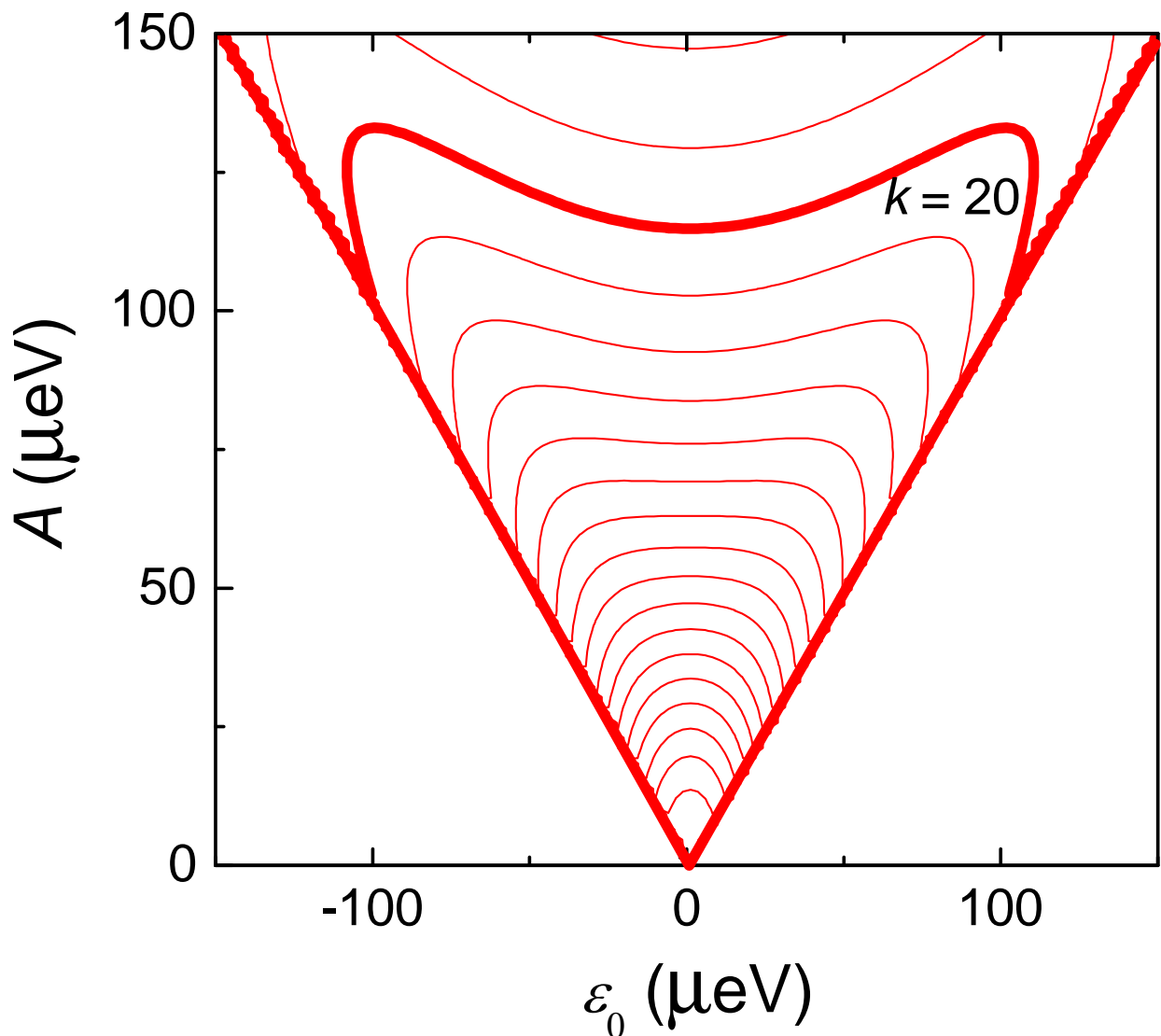


Рис. 3.7: Резонанси для симетричної ПКТ. Вони обчислюються аналогічно до резонансів, показаних на рис. 3.5 з єдиною відмінністю, що $E_L = E_R = 38.3 \mu\text{eV}$. Показано резонанси з k від 4 до 22. Жирним виділено резонансну лінію з $k = 20$, щоб показати, що це серцеподібні резонансні лінії з опуклою формою при $\varepsilon_0 = 0$.

Замінивши перший знак \pm на $-$, отримаємо вирази для двох найнижчих рівнів, $E_{0,1}$. Різниця між цими енергетичними рівнями при $\varepsilon = 0$ є мінімальним розщепленням:

$$\Delta_0 = \sqrt{\left[\frac{E_R}{2} + t_d\right]^2 + t_v^2} - \sqrt{\left[\frac{E_R}{2} - t_d\right]^2 + t_v^2}. \quad (3.15)$$

Враховуючи це, для малих ε ми можемо розкласти $\Delta E^2 = (E_1 - E_0)^2$ у ряд і

отримати спектр

$$E_1 - E_0 \approx \sqrt{\Delta_0^2 + 0.16\varepsilon^2}. \quad (3.16)$$

Зауважимо, що це схоже на спектр кубіта $\sqrt{\Delta_0^2 + \varepsilon^2}$, але відрізняється на числовий множник. На рис. 3.3(а) видно, що кубітоподібний спектр, Рівн. (3.16), є достатнім для опису одягнених енергетичних рівнів при малих значеннях зсуву.

Симетричні серцеподібні резонанси показано на рис. 3.7. Зауважимо що зі збільшенням амплітуди збудження резонансні лінії змінюються від *опуклих* на *увігнуті*.

Для несиметричного випадку, коли $E_L \neq E_R$, ми можемо узагальнити рівняння (3.14), припускаючи

$$E_{0/1} = \theta(\varepsilon) \left\{ \frac{E_R}{2} - \left(\left[\frac{E_R}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t_d^2} \right]^2 + t_v^2 \right)^{1/2} \right\} \quad (3.17)$$

$$+ \theta(-\varepsilon) \left\{ \frac{E_L}{2} - \left(\left[\frac{E_L}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t_d^2} \right]^2 + t_v^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

Для великих значень зміщення $\varepsilon \rightarrow \infty$, рівняння (3.17) дає

$$E_1 - E_0 \approx \theta(\varepsilon)E_R - \theta(-\varepsilon)E_L, \quad (3.18)$$

що правильно описує спектр, показаний на рис. 3.3. Рівняння (3.17) може бути корисним для аналітичних досліджень.

3.6 Висновки

Ми продемонстрували, як багаторівневу систему можна звести до дворівневої, застосувавши резонансний збуджуваний сигнал. Цей процес називається одяганням. Два нижчих енергетичних рівня одягнутої квантової системи знаходяться на великій відстані від двох верхніх, вірогідність збудження на верхні рівні мала, тому можна розглядати

лише два нижчих енергетичних рівня. Отримана дворівнева система помітно відрізняється від кубіта, оскільки при більшому зсуві енергетичні рівні стають рівновіддаленими. Далі ми застосовуємо результати ЛЗШМ інтерферометрії для двохрівневої системи. Резонансні смуги мають вигляд арфоподібних ліній. Оскільки два одягнених рівня несуть інформацію про початкову багаторівневу систему, то властивості таких інтерферометричних ліній можуть бути використані для визначення параметрів багаторівневої системи, тобто для її спектроскопії.

РОЗДІЛ 4

Використання адіабатично-імпульсної моделі, підходу рівнянь балансу, та інтерферометрії Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани для опису та контролю квантових багаторівневих систем

Розглядається чотирирівнева квантова система, що описує подвійну квантову точку з роботи [105]. Розгляд цієї системи дозволяє описати кілька різних можливих динамічних режимів в одній системі. Ця особливість дозволяє перемикатися між різними режимами, варіюючи параметри керування, додаючи нову функціональність до квантового інструментарію.

4.1 Гамільтоніан та енергетичні рівні подвійної квантової точки

У цьому підрозділі отримано гамільтоніан і структуру енергетичних рівнів подвійної квантової точки із роботи [105]. Її електричну схему було взято з додаткових матеріалів названої роботи та подано на рис. 4.1. Електростатичну енергію системи можна записати у вигляді (докладніше див. [17]):

$$\begin{aligned} \frac{E_{N_1, N_2}}{E_C} = & \frac{1}{2}N_1^2 + \frac{1}{2}N_2^2 + \frac{N_1N_2}{m} - n_t \left[N_1 + \frac{N_2}{m} + (1+a) \left(N_2 + \frac{N_1}{m} \right) \right] \\ & - n_b \left[N_1 + \frac{N_2}{m} + (1-a) \left(N_2 + \frac{N_1}{m} \right) \right] + n_t^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+a)^2 + \frac{1+a}{m} \right] \\ & + n_b^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-a)^2 + \frac{1-a}{m} \right] + n_t n_b \left[2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) - a^2 \right], \end{aligned} \quad (4.1)$$

де a позначає коефіцієнт асиметрії затворних зв'язків, N_1 і N_2 - кількість електронів у кожній точці, а $E_C = E_{C_1} = E_{C_2} = mE_{C_M} = e^2 \frac{C_1}{C_1^2 - C_M^2}$. Приведені напруги на верхньому затворі n_t і на нижньому затворі n_b визначаються наступним чином:

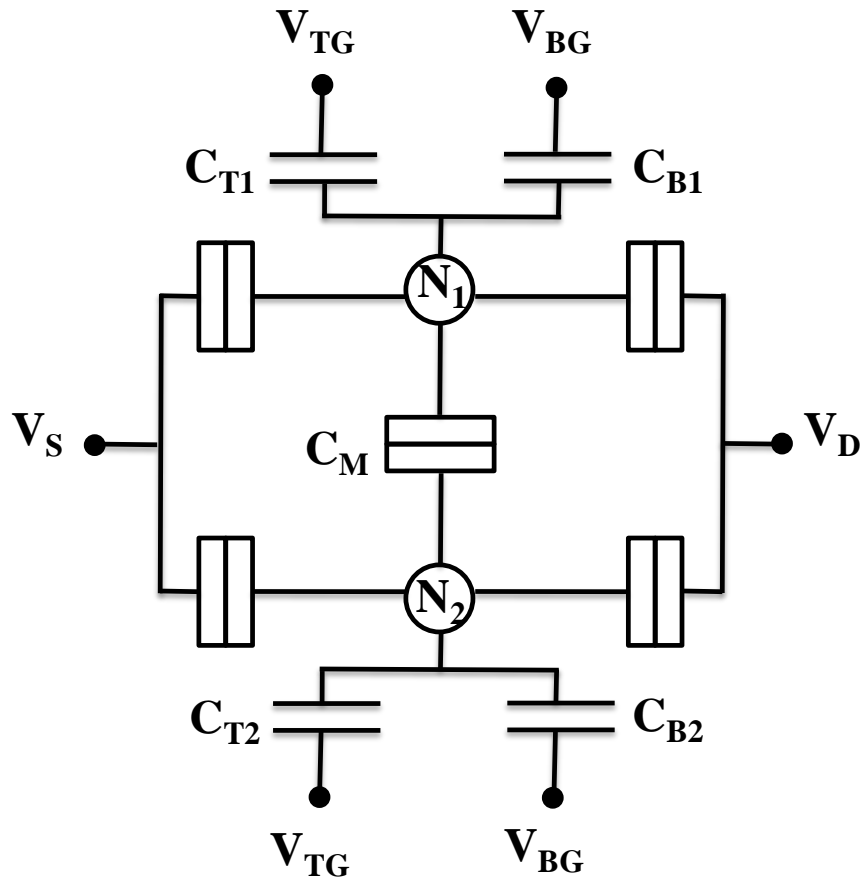


Рис. 4.1: Електрична схема досліджуваної ПКТ, де N_1 і N_2 - кількість електронів у кожній точці, C і V з індексами відповідають відповідним ємностям і прикладеним напругам.

$$n_t = \frac{C_{T1} V_{TG}}{|e|} = \frac{1}{1+a} \frac{C_{T2} V_{TG}}{|e|}, \quad (4.2)$$

$$n_b = \frac{C_{B1} V_{BG}}{|e|} = \frac{1}{1-a} \frac{C_{B2} V_{BG}}{|e|}. \quad (4.3)$$

Під час виведення припускалося, що $C_1 = C_2 = mC_M$ і $V_S = V_D = 0$.

Перетворення $n_t = n_b + \frac{m}{a(m-1)} \frac{\varepsilon_0}{E_C}$, де ε_0 - стала частина збудження $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A \sin \omega t$, дає

$$\begin{aligned}
\frac{E_{N_1, N_2}}{E_C} &= \frac{\varepsilon_0^2}{E_C^2} \frac{1}{a^2(m-1)^2} \left[\frac{1}{2} a^2 m^2 + m(a+1)(m+1) \right] \\
&+ \frac{\varepsilon_0}{E_C} \frac{1}{a(m-1)} \left[2n_b(a+2)(m+1) - (N_1 + N_2)(m+1) \right] \\
&\quad - \frac{\varepsilon_0}{E_C} \frac{1}{a(m-1)} \left[a(N_1 + mN_2) \right] \\
&+ \left[\frac{1}{2} N_1^2 + \frac{1}{2} N_2^2 + \frac{N_1 N_2}{m} + 2n_b(2n_b - N_1 - N_2) \left(1 + \frac{1}{m} \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Для експерименту в роботі [105] приведена напруга на затворі $n_b = 1/4$. Таким чином, після підстановки цього значення в рівняння (4.4), електростатичну енергію ПКТ можна переписати як:

$$\begin{aligned}
\frac{E_{N_1, N_2}}{E_C} &= F \frac{\varepsilon_0^2}{E_C^2} + B_{N_1, N_2} \frac{\varepsilon_0}{E_C} + A_{N_1, N_2}, \\
B_{00} &= \frac{B}{2}, \quad B_{01} = -\frac{1}{2}, \quad B_{10} = \frac{1}{2}, \quad B_{11} = -\frac{B}{2}, \\
A_{00} &= A_{11} = A_0, \quad A_{01} = A_{10} = A_1,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

де F , B , A_0 , A_1 визначено наступним чином:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{m}{a^2(m-1)^2} \left[\frac{1}{2} a^2 m + (a+1)(m+1) \right], \\
B &= \frac{1}{a(m-1)} (a+2)(m+1), \\
A_0 &= (1/4)(1 + 1/m), \\
A_1 &= (1/4)(1 - 1/m).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Ці діабатичні енергетичні рівні показані на рис. 4.2.

Тепер побудуємо гамільтоніан, розклавши енергії E_{N_1, N_2} по діагональних елементах. Розглянемо діабатичні стани $|mn\rangle$, яким відповідають стани подвійної квантової точки з кількістю електронів у лівій квантовій точці m , та кількістю електронів у лівій квантовій точці n . Введемо розщеплення енергії Δ_C між діабатичними станами $|01\rangle$ та $|10\rangle$, Δ_L між $|00\rangle$ і $|10\rangle$ та між $|01\rangle$ і $|11\rangle$, Δ_R між $|00\rangle$ і $|01\rangle$ та між $|10\rangle$ і $|11\rangle$. Розщеплення енергії Δ між діабатичними станами $|ij\rangle$ та $|mn\rangle$ визначається доданком

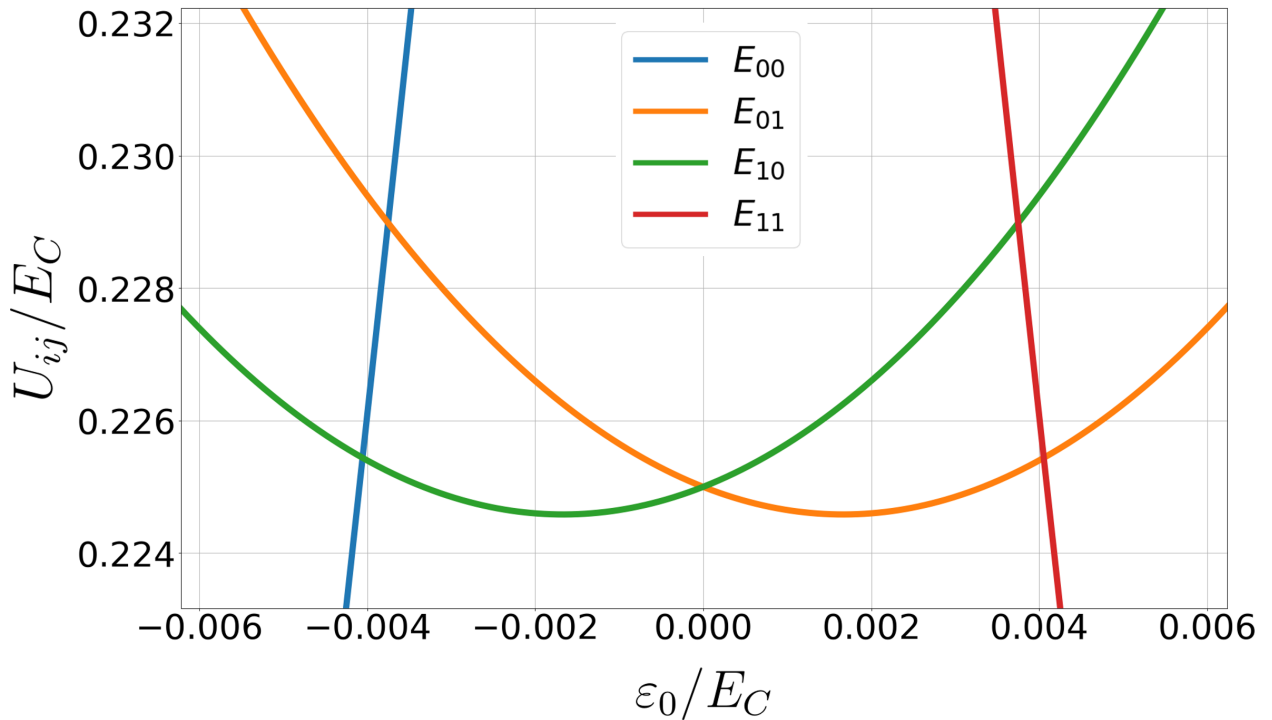


Рис. 4.2: Діабатичні енергетичні рівні як функція ε_0 . Для стану $|mn\rangle$, m і n - кількість електронів на лівій і правій квантовій точці відповідно.

$$-\frac{\Delta}{2} \left(|ij\rangle \langle mn| + |mn\rangle \langle ij| \right). \quad (4.7)$$

тому гамільтоніан із розщепленнями рівнів має вигляд

$$H = \begin{pmatrix} E_{00} & -\frac{\Delta_R}{2} & -\frac{\Delta_L}{2} & 0 \\ -\frac{\Delta_R}{2} & E_{01} & -\frac{\Delta_C}{2} & -\frac{\Delta_L}{2} \\ -\frac{\Delta_L}{2} & -\frac{\Delta_C}{2} & E_{10} & -\frac{\Delta_R}{2} \\ 0 & -\frac{\Delta_L}{2} & -\frac{\Delta_R}{2} & E_{11} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Адіабатичні енергетичні рівні цього гамільтоніана (з квазіперетинами рівнів), які є власними значеннями гамільтоніану, показано на рис. 4.3 та 4.5. Зазначимо, що адіабатичні енергії є також діагональними елементами діагоналізованого гамільтоніану (в адіабатичному базисі):

$$U^\dagger(t)H(t)U(t) = \text{diag}(E_0(t), E_1(t), E_2(t), E_3(t)). \quad (4.9)$$

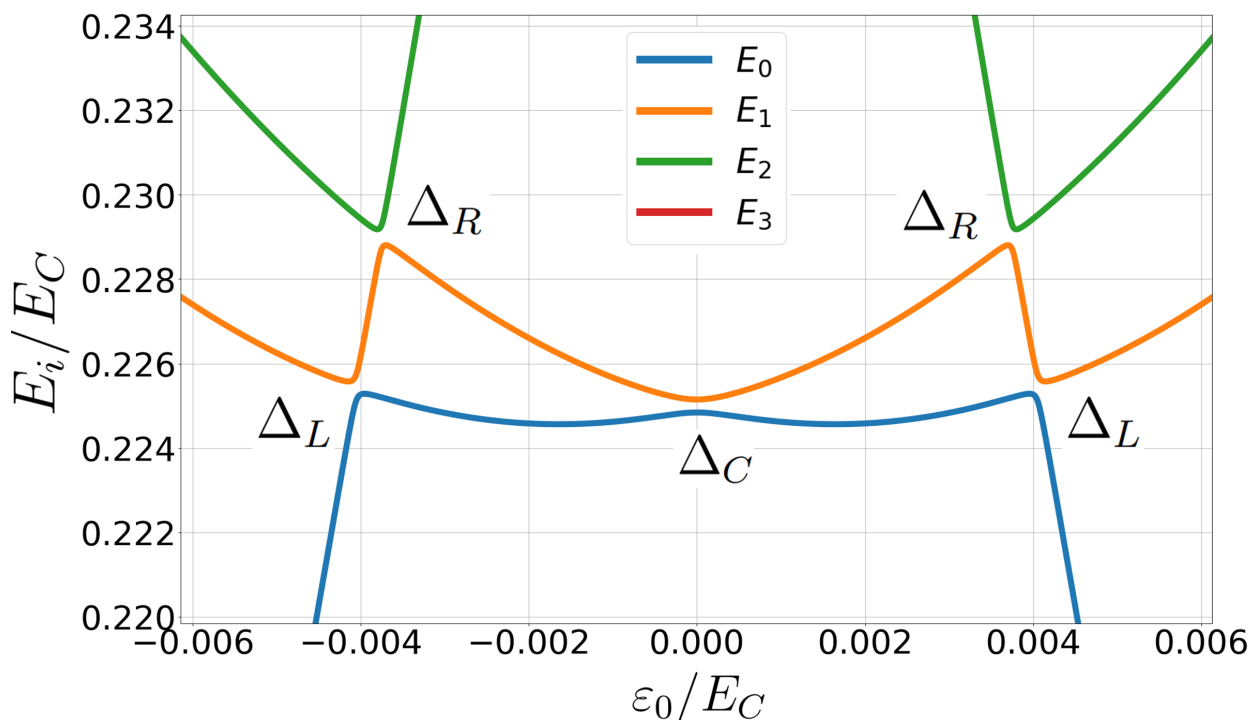


Рис. 4.3: Адиабатичні рівні енергії як функція енергетичного зсуву ε_0 .

Додавання до гамільтоніана доданку, пропорційного одичній матриці, не впливає на комутатор із рівняння Ліндблада, яке буде використовуватись у подальшому для обчислення динаміки,

$$\begin{aligned} [U^\dagger(H(t) + \lambda(t)E)U, \rho] &= [U^\dagger H(t)U + \lambda(t)E, \rho] = \\ &= [U^\dagger H(t)U, \rho] + \lambda(t)[E, \rho] = [U^\dagger H(t)U, \rho], \end{aligned} \quad (4.10)$$

а отже додавання такого доданка не впливає на динаміку квантової системи.

Таким чином, ми можемо спростити гамільтоніан, виключивши член $F \frac{\varepsilon_0^2}{E_C^2} + E_C A_1$ з діагональних елементів:

$$H = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -B\varepsilon_0 - \frac{E_C}{m} & \Delta_R & \Delta_L & 0 \\ \Delta_R & \varepsilon_0 & \Delta_C & \Delta_L \\ \Delta_L & \Delta_C & -\varepsilon_0 & \Delta_R \\ 0 & \Delta_L & \Delta_R & B\varepsilon_0 - \frac{E_C}{m} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Цей ефективний гамільтоніан показан на рис. 4.4, має ті самі відстані між рівнями, і ту саму динаміку, що і гамільтоніан 4.8.

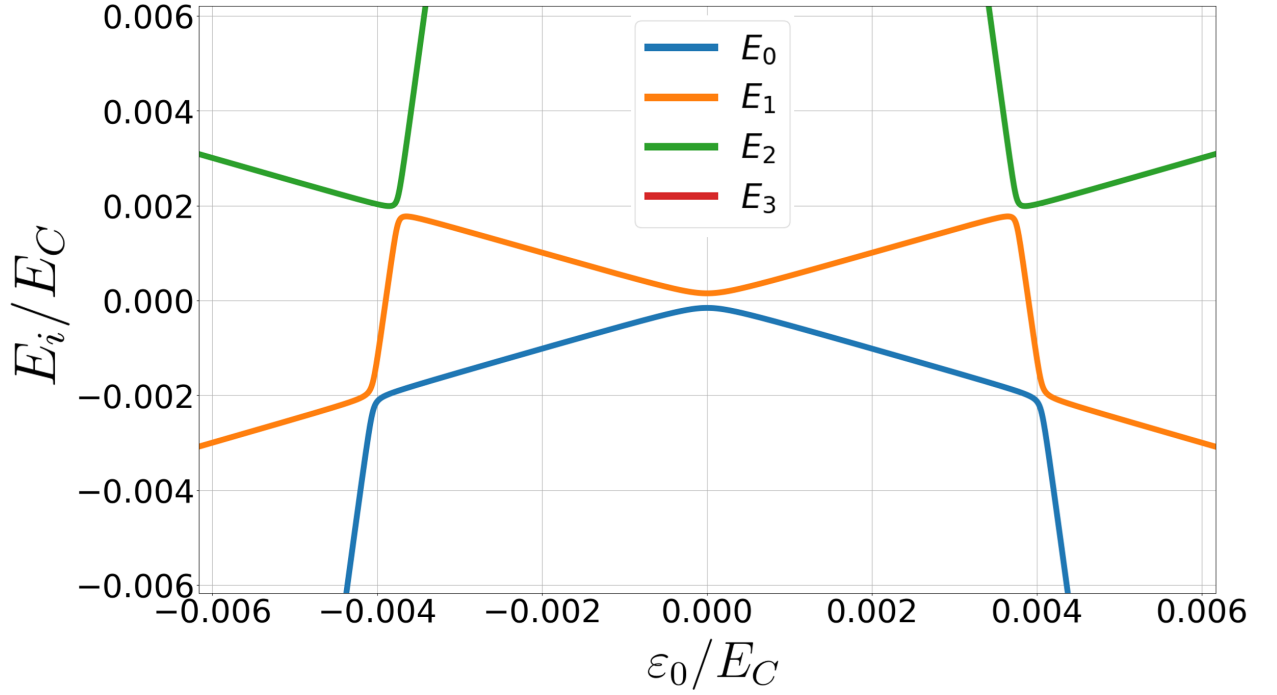


Рис. 4.4: Ефективні адіабатичні енергетичні рівні як функція енергетичного зсуву ε_0 .

4.2 Рівняння Ліндблада та швидкості релаксації системи

Для обчислення динаміки ми розв'язуємо Рівняння Ліндблада, розглянуте в розділі 1.4 з операторами Ліндблада, заданими в миттєвій базисі власних станів, який є синонімом адіабатичного базису.

Гамільтоніан переводиться миттєвий базис власних станів, і рівняння Ліндблада в адіабатичному базисі набирає вигляд

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [U^\dagger(t)H(t)U(t) - i\hbar U^\dagger(t)\frac{\partial U}{\partial t}, \rho] + \sum_{\alpha} \check{L}_{\alpha}[\rho]. \quad (4.12)$$

Оператори Ліндблада визначено в адіабатичному базисі, а швидкості релаксації залежать від часу:

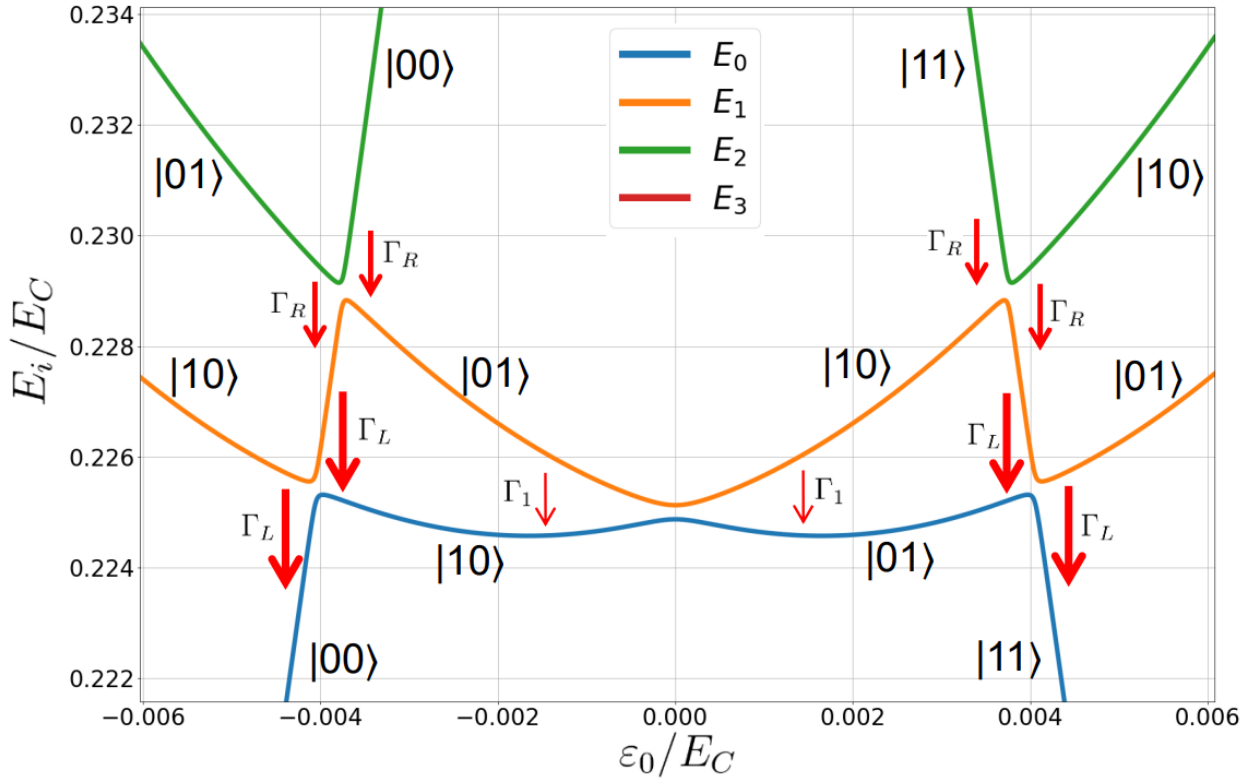


Рис. 4.5: Адіабатичні енергетичні рівні як функції енергетичного зсуву ε_0 . Для діабатычного стану $|mn\rangle$, де m і n - кількість електронів на лівій і правій квантових точках відповідно.

$$L_1^{(ij)} = \sqrt{\Gamma_1^{(ij)}(t)} |E_i(t)\rangle \langle E_j(t)|, \quad (4.13)$$

$$L_\phi^{(ij)} = \sqrt{\frac{\Gamma_\phi^{(ij)}(t)}{2}} \left(|E_i(t)\rangle \langle E_i(t)| - |E_j(t)\rangle \langle E_j(t)| \right).$$

Графік енергетичних рівнів на рис. 4.5 має п'ять квазіперетинів рівнів при $\varepsilon_0 = 0, \pm\varepsilon_L^*$ (нижні бокові квазіперетини), та $\pm\varepsilon_R^*$ (верхні бокові квазіперетини). Графік енергетичних рівнів був розбит на шість інтервалів між п'ятьма квазіперетинами адіабатичних енергетичних рівнів. У межах кожного інтервалу релаксація в адіабатичному базисі (між кожною парою миттєвих власних станів) виражається через значення релаксації між діабатычними енергетичними рівнями. Наприклад, для правого інтервалу

значення коефіцієнтів релаксації $\Gamma_1^{(ij)}$ і $\Gamma_\phi^{(ij)}$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^{(01)}(\varepsilon_0) &= \Gamma_1^L, & \Gamma_\phi^{(01)}(\varepsilon_0) &= \Gamma_\phi^L, \\
\Gamma_1^{(02)}(\varepsilon_0) &= \Gamma_1^R, & \Gamma_\phi^{(02)}(\varepsilon_0) &= \Gamma_\phi^R, \\
\Gamma_1^{(03)}(\varepsilon_0) &= 0, & \Gamma_\phi^{(03)}(\varepsilon_0) &= 0, \\
\Gamma_1^{(12)}(\varepsilon_0) &= \Gamma_1, & \Gamma_\phi^{(12)}(\varepsilon_0) &= \Gamma_\phi, \\
\Gamma_1^{(13)}(\varepsilon_0) &= \Gamma_1^R, & \Gamma_\phi^{(13)}(\varepsilon_0) &= \Gamma_\phi^R, \\
\Gamma_1^{(23)}(\varepsilon_0) &= \Gamma_1^L, & \Gamma_\phi^{(23)}(\varepsilon_0) &= \Gamma_\phi^L.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^{(01)}(\varepsilon_0) &= \Gamma_1^L \theta(|\varepsilon_0| - \varepsilon_R) + \Gamma_1 \theta(\varepsilon_R - |\varepsilon_0|), \\
\Gamma_\phi^{(01)}(\varepsilon_0) &= \Gamma_\phi^L \theta(|\varepsilon_0| - \varepsilon_R) + \Gamma_\phi \theta(\varepsilon_R - |\varepsilon_0|).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Це наближення малих розщеплень енергії Δ_α . Точніше, у випадку великих Δ_α замість тета-функцій слід використовувати функції

$$\begin{aligned}
\gamma_\pm^L(\varepsilon_0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \frac{|\varepsilon_0| - \varepsilon_L^*}{\Delta E}}, \\
\gamma_\pm^R(\varepsilon_0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \frac{|\varepsilon_0| - \varepsilon_R^*}{\Delta E}}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Ймовірності заселеностей P_{N_1, N_2} є діагональними елементами матриці густини ρ . Тоді, розв'язуючи залежне від часу рівняння Ліндблада (4.12), отримаємо $P_{N_1, N_2} = P_{N_1, N_2}(t, \varepsilon_0, A)$, де N_1, N_2 - кількість електронів у кожній точці, а P_{N_1, N_2} - ймовірність того, що система перебуває у стані $|N_1 N_2\rangle$. У нашому дослідженні ми припускаємо, що N_1, N_2 дорівнюють 0 або 1 і, як наслідок, систему можна розглядати у чотирирівневому наближенні.

4.3 Чотири режими роботи подвійної квантової точки та її динаміка

У цьому розділі представлено результати наших теоретичних розрахунків. Зокрема, обчислено й проаналізовано динаміку для всіх режимів роботи.

4.3.1 Інтерферограма ЛЗШМ. Квантова ємність.

Фізична величина, що спостерігається в експерименті [105] - це квантова ємність C_Q [164, 165, 166, 167, 168]. Квантова ємність є похідною від середнього заряду на квантових точках по відношенню до прикладеної напруги. Цей заряд пов'язаний із заповненістю квантових точок, де похідна, особливо під час руху, демонструє зміну знаку. З експериментальної точки зору квантову ємність C_Q можна визначити як:

$$C_Q \approx -e \frac{d}{dV_{TG}} (\alpha_L \langle n_L \rangle + \alpha_R \langle n_R \rangle), \quad (4.17)$$

де $\langle n_{L(R)} \rangle$ показує середню кількість електронів на лівій (правій) квантовій точці, $\alpha_{L(R)}$ - зв'язок між лівою (правою) квантовою точкою і верхнім затвором [169]. З теоретичної точки зору ця величина може бути пов'язана з ймовірностями заселеностей P_{N_1, N_2} виразом:

$$\frac{C_Q}{C_{Q0}} = \frac{d}{d(\varepsilon_0/\Delta_c)} \{P_{01} - P_{10} + a(P_{00} - P_{11})\}, \quad (4.18)$$

де a - параметр асиметрії, який для експерименту дорівнює $a = 0.1$ [105].

Результуюча інтерферограма експериментальної роботи [105] представлена на рис. 4.6(a). Для чисельних розрахунків використано такі параметри: $\omega_d = 21 \text{ GHz} \cdot 2\pi$, $\Delta_c = \Delta_L = \Delta_R = 8.25 \text{ GHz} \cdot h$, $T_1 = 1.25 \text{ ns}$, $T_2 = 0.25 \text{ ns}$, $\Gamma_L \sim 50 \text{ GHz}$, $\Gamma_R \sim 12 \text{ GHz}$, $\Gamma_1 \sim 0.9 \text{ GHz}$. Можна спостерігати чотири різні режими: однопрохідний ЛЗШМ (жовта область), некогерентний (синя область), двопрохідний ЛЗШМ (зелена область), багатопрохідний ЛЗШМ (червона область). На рис. 4.6(b) показано діаграму енергетичних рівнів, яка має спільну вісь ε_0 з рис. 4.6(a).

Розглянемо механізми виникнення всіх режимів. На початку важливо зазначити, що $\Gamma_L \gg \Gamma_R \gg \Gamma_1$. Це означає, що динаміка з великою ймовірністю некогерентна навколо точки квазіперетину при $\varepsilon = \varepsilon_L$, в той же час, якщо задіян лише квазіперетин при $\varepsilon = 0$, то динаміка може залишатися когерентною протягом кількох періодів збудження. Цей факт має вирішальне значення для пояснення отриманих ЛЗШМ картин.

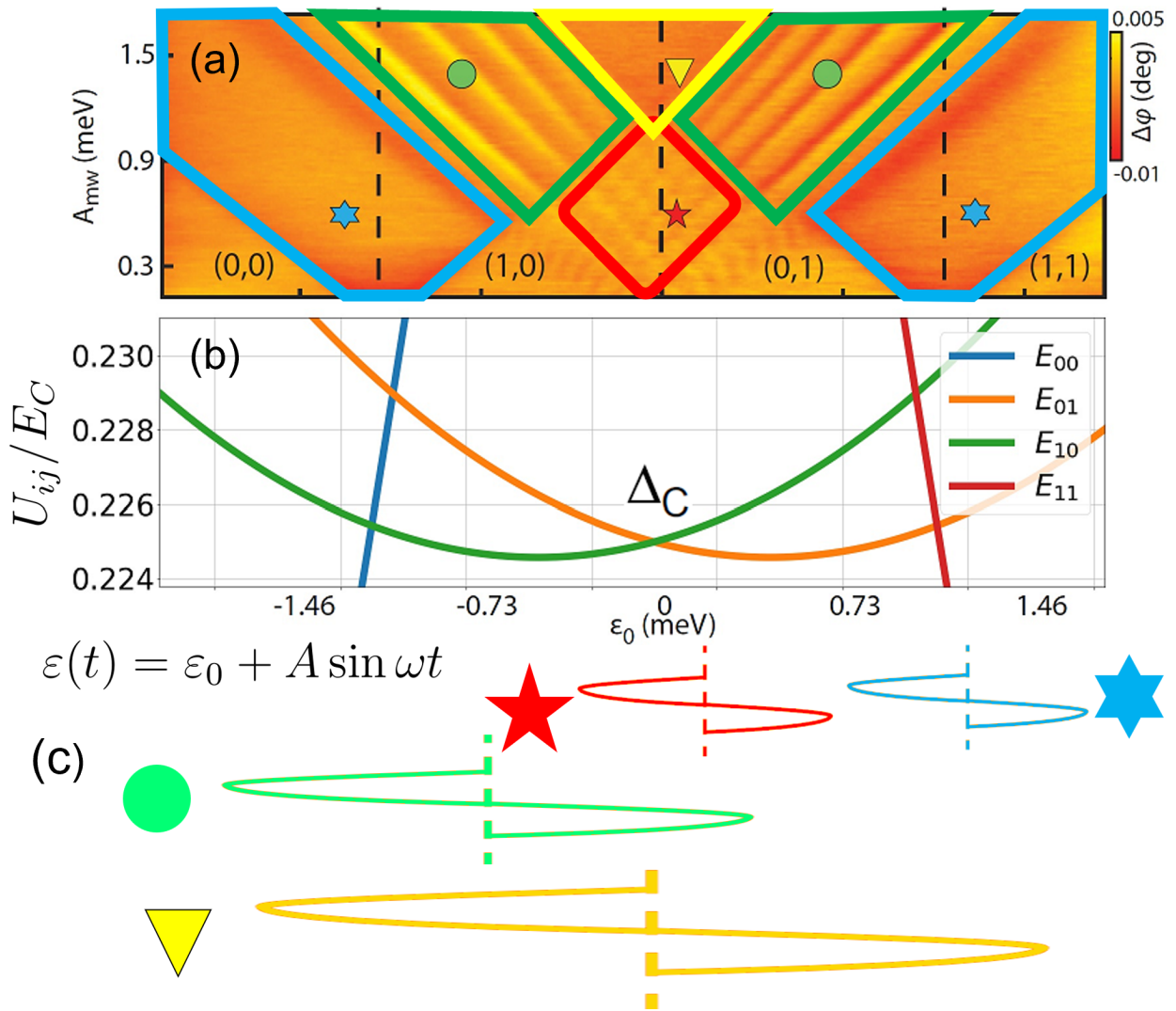


Рис. 4.6: (a) Експериментальна квантова ємність як функція енергетичного зсуву ε_0 та амплітуди A збуджуваного сигналу із роботи [105]. (b) Діабатичні енергетичні рівні як функція енергетичного зсуву ε_0 . На панелі (c) показано приклади профілів сигналу збудження $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A \sin \omega t$ для чотирьох режимів роботи. Червона крива (малий енергетичний зсув ε_0 і мала амплітуда збудження A) показує профіль для багатопрхідного режиму; синя крива (великі значення енергетичного зсуву ε_0) - форму збудження для некогерентного режиму; зелена синусоїда (середнє значення енергетичного зсуву ε_0 і велика амплітуда збудження A) - сигнал збудження для двопрхідного режиму, а жовта крива (малі значення енергетичного зсуву ε_0 і велика амплітуда збудження A) - профіль сигналу збудження для однопрхідного режиму.

На рис. 4.6(c) наведено приклади профілів сигналу збудження $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A \sin \omega t$ для чотирьох режимів роботи. Червона крива показує приклад

профілю для багатопрохідного режиму. Для цього режиму енергетичний зсув ε_0 малий і амплітуда збудження A також має мале значення. Це означає, що система може проходити через квазіперетин при $\varepsilon = 0$ багато разів без втрати когерентності, оскільки швидкість декогеренції Γ_2 менша за частоту збудження ω , $\omega \gg \Gamma_2$. Синя крива показує приклад профілю сигналу збудження для некогерентного режиму. Така картина виникає, якщо сигнал такий, що енергетичний зсув періодично досягає точки квазіперетину при $\varepsilon = \pm\varepsilon_L$, але не досягає точки квазіперетину при $\varepsilon = 0$. Поблизу точок квазіперетинів при $\varepsilon = \pm\varepsilon_L$ система швидко релаксує, бо значення Γ_L набагато більше порівняно з частотою збудження ω , $\omega \ll \Gamma_L$. Приклад зовнішнього збудження для цього режиму показано на рис. 4.6(с) синєю кривою: енергетичний зсув ε_0 великий (біля квазіперетину при $\varepsilon = \varepsilon_L$), а амплітуда збудження A мала.

Зелена синусоїда на рис. 4.6(с) представляє приклад сигналу збудження для режиму подвійного проходження. Для цього випадку мають досягатися обидва квазіперетини рівнів при $\varepsilon = \pm\varepsilon_L$ і $\varepsilon = 0$.

Приклад сигналу збудження для однопрохідного режиму показано жовтим кольором на рис. 4.6(с). Ця ЛЗШМ картина має місце для малих значень енергетичного зсуву ε_0 і великих значень амплітуди збудження A . У цьому випадку система проходить через точку квазіперетину при $\varepsilon = 0$ без втрати когерентності, а потім при досягненні точок $\varepsilon = \pm\varepsilon_L$ відбувається декогеренція.

Для детальнішого аналізу властивостей системи ми розглянемо динаміку для всіх цих режимів у наступних підрозділах.

4.3.2 Багатопрохідний режим

Розглянемо спочатку багатопрохідний режим (червона область). Система не досягає інших точок квазіперетину, крім центрального квазіперетину $\varepsilon = 0$. У цьому випадку в динаміці беруть участь лише рівні $|01\rangle$ та $|10\rangle$, і тому $P_{00} = P_{11} = 0$. Вважається, що час декогеренції T_2 набагато більший за період збудження T_d .

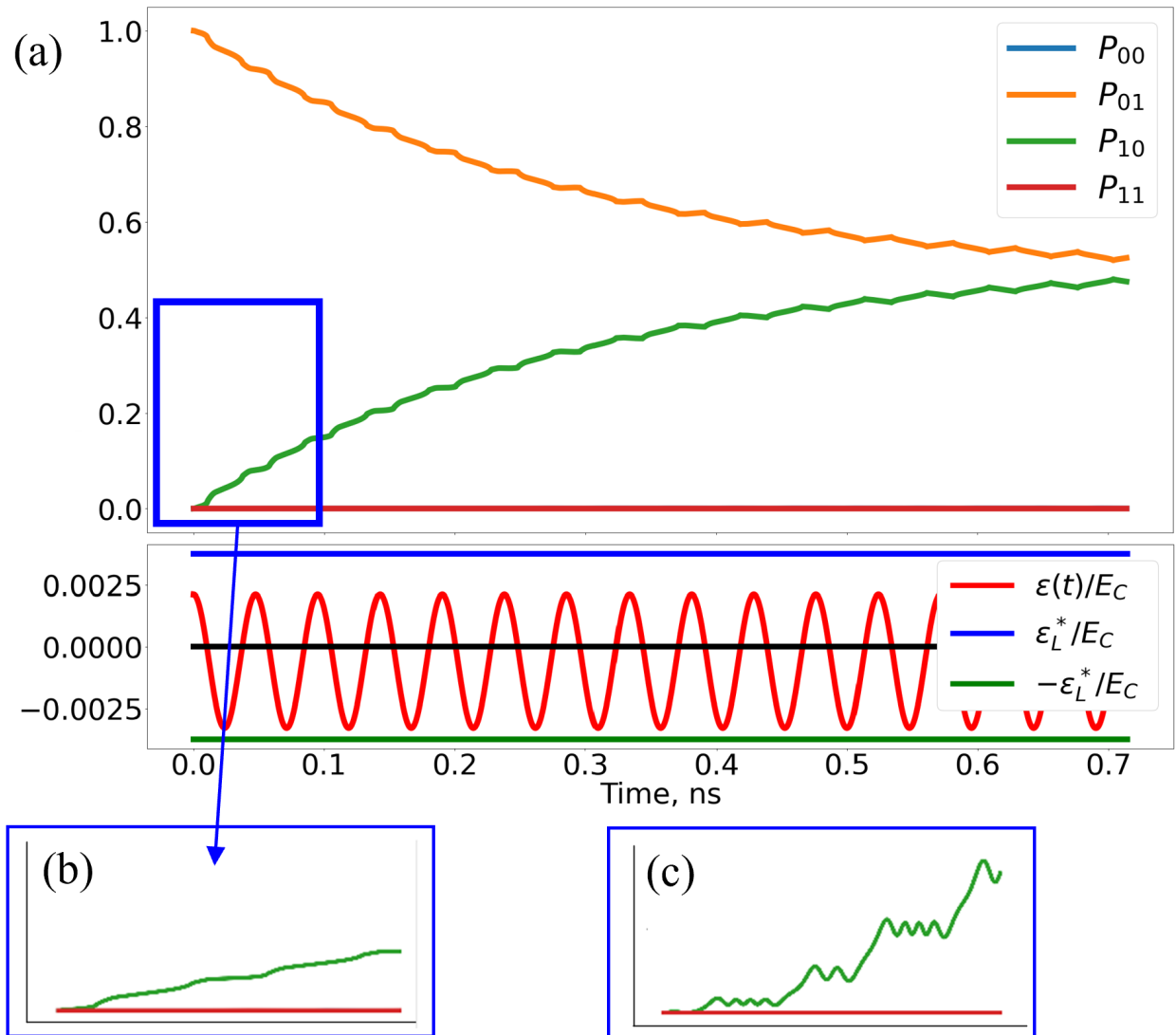


Рис. 4.7: Динаміка когерентного режиму. (а) Ймовірності заселеностей діабаптичних енергетичних рівнів P_{N_1, N_2} як функції часу t . На панелі (b) показано залежність енергетичного зсуву $\varepsilon(t)$ від часу (червона крива) та його положення відповідно до точок квазіперетину при $\varepsilon = \pm \varepsilon_L$ (синя та зелена криві). (c) Динаміка ймовірностей P_{10} і P_{11} протягом перших $t = 0.1$ нс збудження. (d) Динаміка ймовірностей P_{10} і P_{11} протягом перших $t = 0.1$ нс для випадку без релаксації.

Когерентність системи зберігається протягом багатьох періодів збудження (багатьох переходів квазіперетинів рівнів), при цьому спостерігається конструктивна та деструктивна інтерференція ЛЗШМ.

Динаміка для цього режиму показана на рис. 4.7(a). Стационарний режим (процес, коли ймовірності P_{N_1, N_2} суттєво не змінюються з часом t) спостерігається після $t > 0.7$ нс. Стационарні значення ймовірностей

$P_{00} = P_{11} = 0$, $P_{01} \approx P_{10} \approx 1/2$. На рисунку 4.7(b) показано форму сигналу збудження $\varepsilon(t)$ та його положення відповідно до точок $\varepsilon = \pm\varepsilon_L^*$. Система не досягає точок квазіперетину при $\varepsilon = \pm\varepsilon_L^*$ і може залишатися когерентною протягом кількох періодів збудження. Оскільки ймовірності P_{N_1, N_2} на рис. 4.7(a) мають ступінчасту поведінку, було проведено глибший аналіз. Було розглянуто динаміку P_{10} і P_{11} протягом перших $t = 0.1$ нс процесу. Результати цього розрахунку показано на рис. 4.7(c). Оскільки ступінчаста поведінка не є яскраво вираженою, був розглянутий випадок без релаксації, показаний на рис. 4.7(d). На цьому графіку тепер можна чітко бачити ЛЗШМ переходи.

4.3.3 Режим подвійного проходження

У цьому підрозділі розглянуто режим подвійного проходження. Він спостерігається, якщо система двічі проходить через точку квазіперетину при $\varepsilon = 0$ (точки A і B на рис. 4.8(b)), а потім втрачає когерентність, проходячи поблизу точки квазіперетину при $\varepsilon = \pm\varepsilon_L^*$. Оскільки $T_2 \gg T_d$ система зберігає когерентність після досягнення центральних квазіперетинів рівнів, але при $\varepsilon = \pm\varepsilon_L^*$ відбувається декогеренція через сильний зв'язок обох квантових точок з джерелом і стоком. Іншими словами, когерентність зберігається протягом лише двох проходів центрального квазіперетину рівнів енергій, тобто лише протягом одного періоду руху.

Залежність ймовірностей P_{N_1, N_2} від часу для цього режиму зображено на рисунку 4.8(a). На рисунку 4.8(b) показано енергетичний зсув $\varepsilon(t)$ (червона лінія) та його положення відповідно до точок квазіперетинів при $\varepsilon = \pm\varepsilon_L^*$ (синя та зелена лінії) і $\varepsilon = 0$ (чорна лінія) як функція часу t . З цього графіка видно, що система двічі перетинає чорну лінію, перш ніж перетне зелену. Квазіперетин при $\varepsilon = \varepsilon_L^*$ не досягається і в результаті ймовірність $P_{11} = 0$. Пунктирні лінії відображають відповідність між стадіями збудження і динамікою ймовірностей P_{N_1, N_2} .

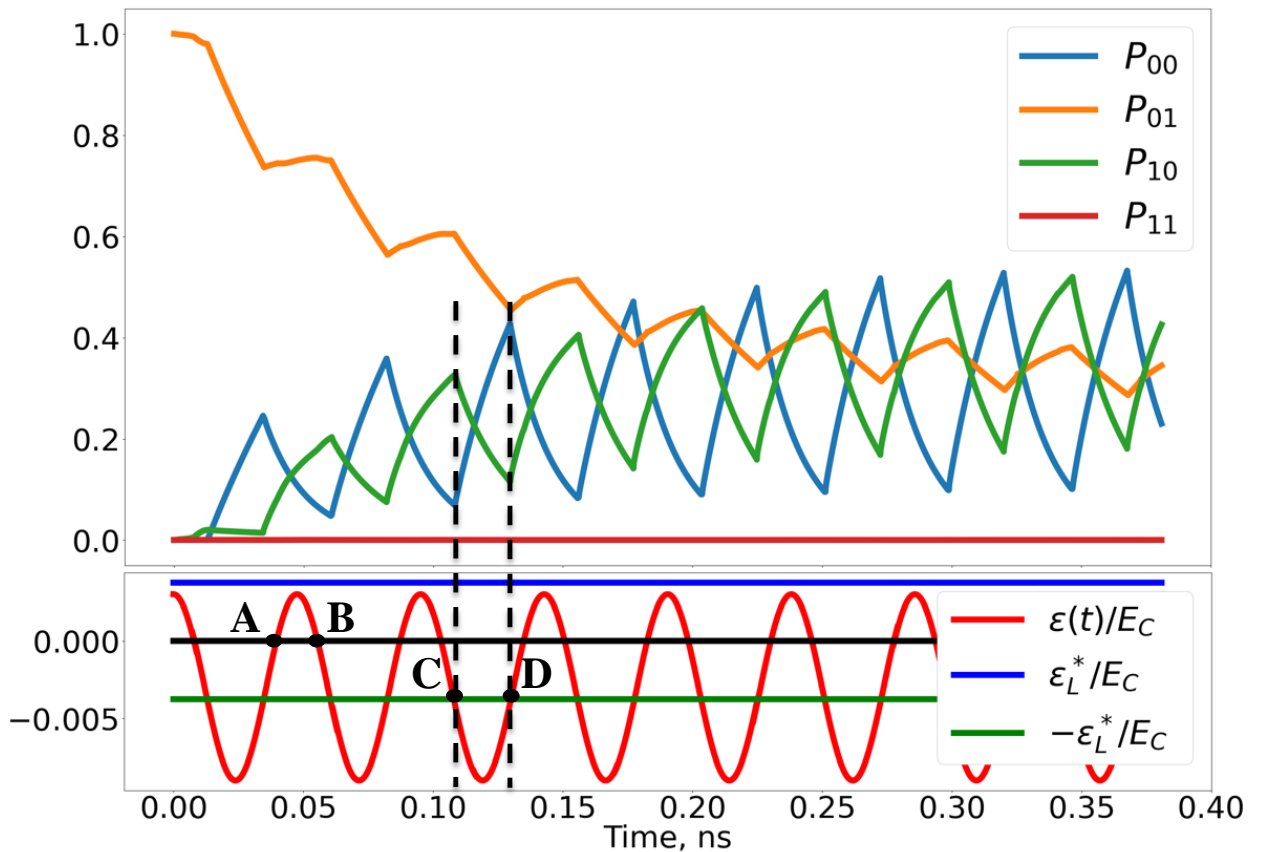


Рис. 4.8: Динаміка режиму подвійного проходження. (а) Ймовірності заселеностей діаباتичних енергетичних рівнів P_{N_1, N_2} як функція часу t . (б) Залежність енергетичного зсуву $\varepsilon(t)$ (червона лінія) та його положення відповідно до точок квазіперетину при $\varepsilon = \pm\varepsilon_L^*$ (синя та зелена лінії) і $\varepsilon = 0$ (чорна лінія) від часу t . Пунктирні лінії допомагають встановити відповідність між стадіями збуджуваного сигналу та динамікою ймовірностей P_{N_1, N_2} .

Цікаво розглянути взаємодію між ймовірностями заселеностей P_{10} та P_{00} . У точці С, перед досягненням точки квазіперетину при $\varepsilon = -\varepsilon_L^*$ ймовірність P_{10} досягає максимуму. Після перетину точки С значення P_{10} починає зменшуватись через релаксацію до P_{00} , і можна спостерігати зростання P_{00} . Цей процес продовжується до досягнення квазіперетину вдруге (точка D). У цій точці P_{00} має максимальне значення, а P_{10} - мінімальне. Після проходження точки D спостерігається зростання P_{10} , оскільки відбувається релаксація зі стану $|00\rangle$ до $|10\rangle$ зі швидкістю Γ_L . Цей процес триває до наступного перетину точки $\varepsilon = -\varepsilon_L^*$. Одночасно з цією взаємодією можна спостерігати зменшення заселеності стану $|01\rangle$ через велику величину

релаксації Γ_R .

4.3.4 Шатлінг із заплутаними станами або однопрохідний режим

У цьому розділі описано однопрохідний режим або режим шатлінгу (електронів) із заплутаними станами. У цьому випадку амплітуда збудження є великою, та енергетичний зсув періодично перетинає області усіх квазіперетинів енергетичних рівнів. В результаті система досягає точки $\varepsilon = 0$ лише один раз, а потім відбувається декогеренція а області точок $\varepsilon = \pm\varepsilon_L^*$. Отже, режим можна назвати «однопрохідним».

Динаміка ймовірностей P_{N_1, N_2} для цього випадку представлена на рис. 4.9(a). На рисунку 4.9(b) показано осциляції ймовірностей заселеностей $P_{00} + P_{01}$ (ймовірність відсутності електрона на лівій квантовій точці) та $P_{10} + P_{11}$ (ймовірність наявності одного електрона на лівій точці). На рисунку 4.9(c) показана динаміка енергетичного зсуву $\varepsilon(t)$ (червона лінія) та його положення відносно до точок квазіперетину при $\varepsilon = \pm\varepsilon_L^*$ (синя та зелена лінії) і $\varepsilon = 0$ (чорна лінія).

На графіку 4.9(b) добре відображаються періодичні коливаннями ймовірностей заселеностей $P_{00} + P_{01}$ і $P_{10} + P_{11}$. Можна зробити висновок, що фактично, за один період руху електрон перекидається з істока до лівої квантової точки і далі до стоку, одночасно будучі квантово заплутаним із електроном на правій квантовій точці. Таким чином, цей режим можна назвати «шатлінг із заплутаними станами».

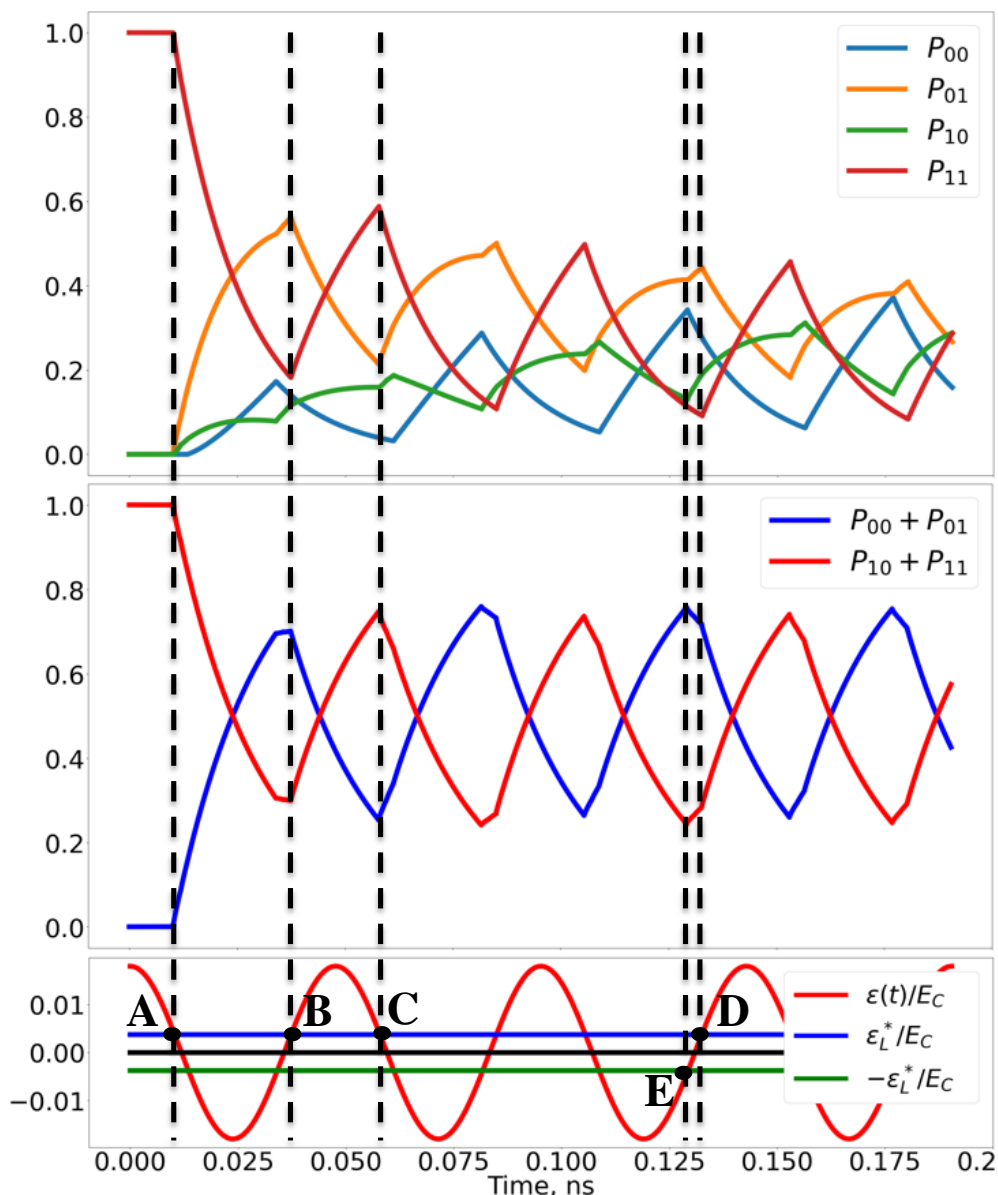


Рис. 4.9: Динаміка режиму шатлінгу з заплутаними станами. (а) Ймовірності заселеностей діабаптичних енергетичних рівнів P_{N_1, N_2} як функція часу. (б) Залежність сум ймовірностей заселеностей $P_{00} + P_{01}$ і $P_{10} + P_{11}$ від часу. $P_{00} + P_{01}$ - ймовірність відсутності електрону на лівій квантовій точці. $P_{10} + P_{11}$ - ймовірність наявності одного електрона на лівій квантовій точці. (с) Залежність енергетичного зсуву $\varepsilon(t)$ (червона лінія) та його положення відносно точок квазіперетину при $\varepsilon = \pm\varepsilon_L^*$ (синя та зелена лінії) і $\varepsilon = 0$ (чорна лінія) від часу t . Пунктирні лінії допомагають встановити відповідність між стадіями збудження та динамікою ймовірностей P_{N_1, N_2} .

Розглянемо динаміку процесу більш детально. Спочатку стан $|11\rangle$ заселено з ймовірністю $P_{11} = 1$, тоді як ймовірності заселеностей інших станів дорівнюють нулю $P_{00} = P_{01} = P_{10} = 0$. Після перетину

першої точки квазіперетину при $\varepsilon = \varepsilon_L^*$ (точка A) ймовірність заселеності P_{11} починає зменшуватись, тоді як інші ймовірності заселеностей починають зростати. Падіння ймовірності заселеності P_{11} продовжується до досягнення точки квазіперетину $\varepsilon = \varepsilon_L^*$ (точка B) вдруге. Зростання зупиняється в точці C , де квазіперетин при $\varepsilon = \varepsilon_L^*$ досягається ще один раз. Можна помітити, що на початку динаміки, протягом перших двох періодів зовнішнього збудження стани $|01\rangle$ і початково заселений стан $|11\rangle$ мають найбільші ймовірності заселеностей через високу швидкість релаксації Γ_L між ними. Але з часом через релаксаційні процеси інші стани також стають заселеними. Можна також помітити, що на відрізку ED (між точками квазіперетину $\varepsilon = -\varepsilon_L^*$ і $\varepsilon = \varepsilon_L^*$) ймовірність заселеності P_{01} змінює поведінку. Аналогічна ситуація спостерігається для ймовірності заселеності P_{10} на тому ж відрізку (між точками квазіперетину $\varepsilon = \varepsilon_L^*$ і $\varepsilon = -\varepsilon_L^*$), але на іншому етапі динаміки.

На завершення аналізу розглянемо осциляції $P_{00} + P_{01}$ і $P_{10} + P_{11}$. Максимуми і мінімуми $P_{00} + P_{01}$ і $P_{10} + P_{11}$ розташовані в точці квазіперетину $\varepsilon = \varepsilon_L^*$. На відрізку ED (між точками квазіперетину $\varepsilon = -\varepsilon_L^*$ і $\varepsilon = \varepsilon_L^*$) також спостерігається зміна поведінки функцій. З рис. 4.9(a) та 4.9(b) можна зробити висновок, що проходження через квазіперетини при $\varepsilon = \pm\varepsilon_L^*$ має значний вплив на заселеність системи, і пояснюється зміною у цій точці квазіперетину напрямку найбільшої релаксації Γ_L між рівнями $|00\rangle$ і $|10\rangle$; та між рівнями $|01\rangle$ і $|11\rangle$

4.3.5 Некогерентний режим

Некогерентний режим виникає, якщо рух енергетичного зсуву охоплює лише одну з точок квазіперетинів $\varepsilon = \pm\varepsilon_L^*$. У цьому випадку когерентність станів швидко втрачається через велику релаксацію у цих діапазонах енергетичного зсуву.

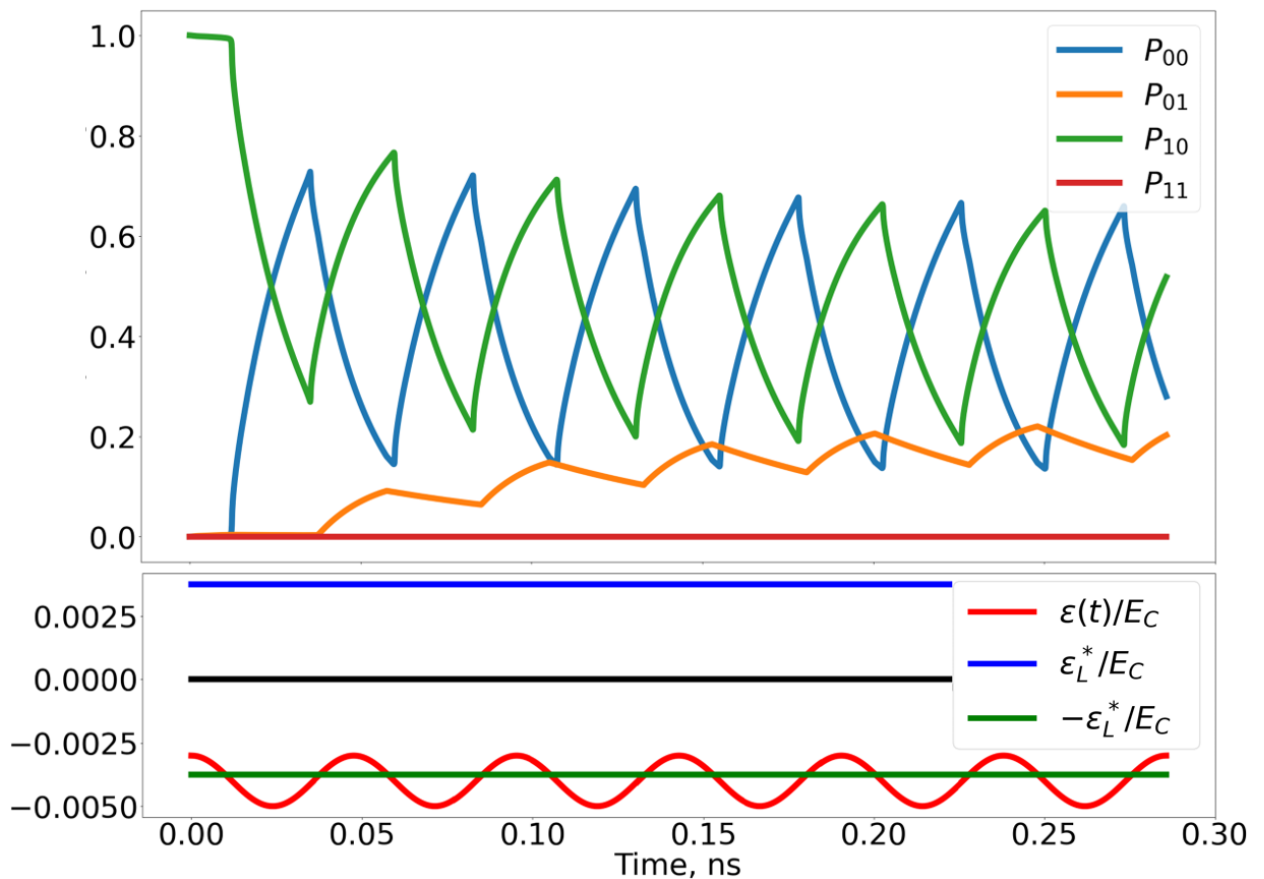


Рис. 4.10: Динаміка некогерентного режиму. (а) Залежність ймовірностей заселеностей діабатычних енергетичних рівнів P_{N_1, N_2} від часу. (б) Залежність енергетичного зсуву $\varepsilon(t)$ (червона лінія) та його положення відносно точок квазіперетинів при $\varepsilon = \pm\varepsilon_L^*$ (синя та зелена лінії) і $\varepsilon = 0$ (чорна лінія) від часу t .

Динаміка для некогерентного режиму показана на рис. 4.10(a). На рис. 4.10(b) показано енергетичний зсув $\varepsilon(t)$ (червона лінія) та його положення відповідно до точок квазіперетину при $\varepsilon = \pm\varepsilon_L^*$ (синя та зелена лінії) і $\varepsilon = 0$ (чорна лінія) як функція часу t . Енергетичний зсув осцилює з малою амплітудою лише навколо квазіперетину при $\varepsilon = -\varepsilon_L^*$, тому визначальною в динаміці є релаксація заселеностей станів між рівнями $|10\rangle$ та $|00\rangle$. Заселеність стану $|01\rangle$ змінюється по причині релаксації з стану $|00\rangle$ зі швидкістю Γ_R при $\varepsilon > -\varepsilon_R^*$.

4.4 Використання адіабатично-імпульсної моделі та підходу рівнянь балансу для опису та контролю багаторівневої квантової системи

4.4.1 Квантова система. Рівні енергії.

Розглянемо етап перезарядки детектора мікрохвильових фотонів на основі потокового кубіта, розробленого у роботі [3]. Детальний опис принципу роботи, властивостей, динаміки етапів захоплення, зчитування, перезарядки детектора мікрохвильових фотонів, отриманих в роботі [3], було наведено в розділі 1.5.

Залежність енергетичних рівнів цієї квантової 9-тирівневої системи від зовнішнього магнітного потоку x_e для стадії перезарядки детектора показано на рис. 1.3, де x та x_e визначені в Рівн. 1.13. Квазіперетин 6-го і 7-го рівнів продемонстрований у наближенні на рис. 1.3(b).

Етап перезарядки детектору описується лінійною зміною зовнішнього магнітного потоку Φ_e [див. Рівн. (1.28)], та відображено на рис. 1.3(a) пунктирною стрілкою. Початковий стан системи - не збуджений, з ймовірністю заселеності найнижчого енергетичного рівня $\rho_{11} = 1$, інших $\rho_{nn} = 0$, $n = 2, \dots, 9$.

4.4.2 Підхід рівняння Ліндблада

Для того, щоб отримати часову еволюцію ймовірностей заселеностей енергетичних рівнів системи на стадії перезарядки детектора, в роботі [3] було розв'язано рівняння Ліндблада (1.23) з гамільтоніаном H_c з рівняння (1.22), замінивши його на залежний від часу гамільтоніан. В кінцевому вигляді диференціальне рівняння для матричного елемента $\rho_{kk'} \equiv \langle E_k(t) | \hat{\rho} | E_{k'}(t) \rangle$ для етапу перезарядки детектора записується як (1.30).

Динаміка, отримана чисельним розв'язком цього рівняння, продемонстрована на рис. 1.5. На рис. 1.5(a) показано залежність заселеностей рівнів системи ρ_{kk} від зовнішнього магнітного потоку x_e

для стадії перезарядки детектора. На рис. 1.5(b) показано частину рис. 1.5(a), що відповідає переходу ЛЗШМ з рівня 6 на рівень 7. Цей рисунок отримано з рис. 1.5(a) шляхом розтягування області, обмеженої червоним пунктирним прямокутником на рис. 1.5(a) вздовж осі абсцис. Рис. 1.5(c) є частиною рис. 1.5(a), яка показує динаміку ймовірностей заселеностей проміжних рівнів (рівні 2-5) внаслідок дисипації після точки проходження квазіперетину між рівнями 6 і 7. Цей рисунок отримано шляхом продовження вліво і розтягування області, обмеженої червоним пунктирним прямокутником на рис. 1.5(b) вздовж осі ординат. Зауважимо, що релаксацією можна майже знехтувати до переходу з рівня 5 на рівень 6, і що енергетична релаксація відбувається лише в околицях точок квазіперетинів.

4.4.3 Спрощена адіабатично-імпульсна модель без релаксації

За відсутності релаксації динаміку стадії перезарядки детектора, проілюстровану на рис. 1.5(a), можна також отримати наближеним аналітичним методом - адіабатично-імпульсною моделлю (див. [1, 41]).

У цій моделі вся динаміка розглядається як серія періодів адіабатичної еволюції коли заселеності енергетичних рівнів постійні, і діабатичних переходів, що відбуваються при проходженні квазіперетинів енергетичних рівнів зі зміною заселеності рівнів. У загальному випадку в адіабатично-імпульсній моделі обчислюють матриці цих діабатичних переходів і матриці адіабатичної еволюції, а матрицю еволюції для всієї динаміки обчислюють як їхній добуток.

Ми розглядаємо окремий випадок, а саме: (i) енергетичні рівні такі, як на рис. 1.3(a), (ii) зовнішній магнітний потік Φ_e лінійно залежить від часу [див. рівняння (1.28)], (iii) в початковому стані заселений тільки найнижчий енергетичний рівень. У цьому випадку проходження квазіперетинів рівнів відбуваються один за одним [див. пунктирну стрілку на рис. 1.3(a)] без інтерференції, і ймовірності заселеностей адіабатичних енергетичних рівнів під час перезарядки детектора також можна знайти за допомогою наступного простого міркування. Заселеності енергетичних рівнів є постійними під час динаміки, далекої від квазіперетинів рівнів. Під час проходження n -го

квазіперетину по шляху, показаному пунктирною стрілкою на рис. 1.3(a) з мінімальним розщепленням Δ_n між адіабатичними енергетичними рівнями E_n і E_{n+1} , ймовірність тунелювання на верхній енергетичний рівень E_{n+1} дорівнює

$$\mathcal{P}_n = \exp[-\pi\Delta_n^2/2\hbar v], \quad (4.19)$$

а ймовірність залишитися на тому самому енергетичному рівні E_n дорівнює $1 - \mathcal{P}_n$. Це дозволяє знайти ймовірності заселеностей всіх енергетичних рівнів для всіх інтервалів адіабатичної еволюції під час процесу перезарядки детектора. Зокрема, для кінцевого стану ймовірності заселеностей рівнів мають вигляд (див. також посилання [170]):

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= 1 - \mathcal{P}_1, \\ \rho_{22} &= \mathcal{P}_1(1 - \mathcal{P}_2), \\ \rho_{kk} &= \prod_{n=1}^{k-1} \mathcal{P}_n(1 - \mathcal{P}_k), \quad k = 3, \dots, 6, \\ \rho_{77} &= \prod_{n=1}^6 \mathcal{P}_n. \end{aligned} \quad (4.20)$$

4.4.4 Підхід на основі рівнянь балансу

За наявності релаксації розглянуту спрощену адіабатично-імпульсну модель можна поєднати з підходом на основі рівнянь балансу (див. посилання [17]).

Для кожного інтервалу адіабатичної еволюції можна записати систему рівнянь швидкості

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{11}}{dt} &= \gamma_2\rho_{22}, \\ \frac{d\rho_{nn}}{dt} &= \gamma_{n+1}\rho_{n+1,n+1} - \gamma_n\rho_{nn}, \quad n = 2, \dots, 6, \\ \frac{d\rho_{77}}{dt} &= -\gamma_7\rho_{77}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

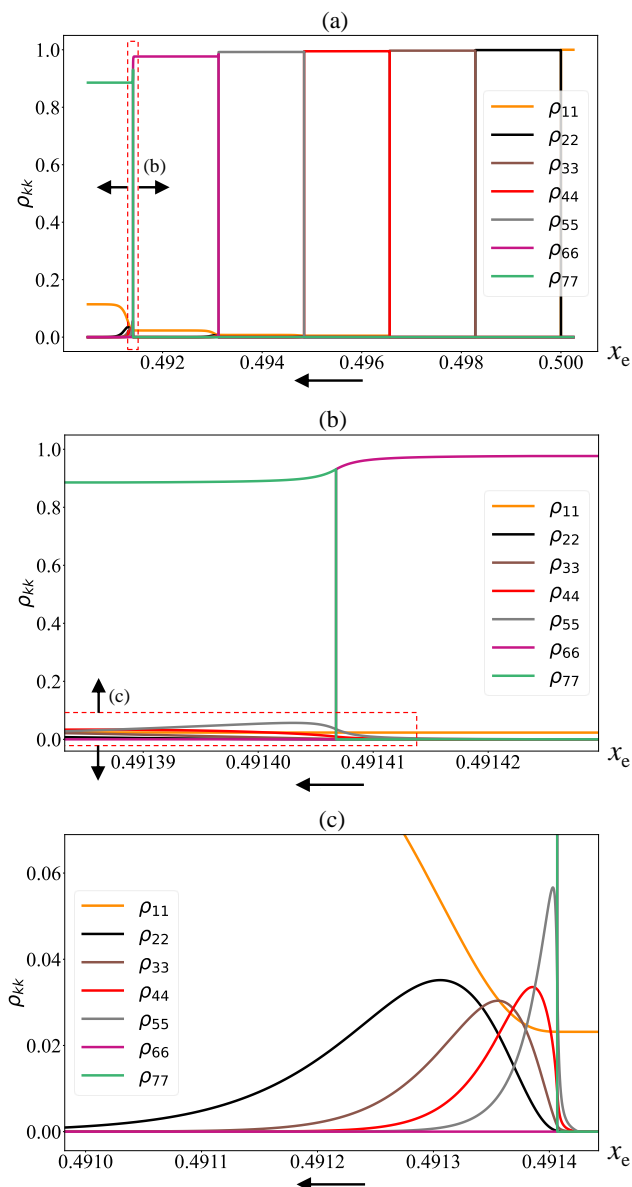


Рис. 4.11: Залежність імовірностей заселеностей ρ_{kk} рівнів кудіту від безрозмірного зовнішнього магнітного потоку x_e на стадії перезарядки детектора, отримана з використанням адіабатично-імпульсної моделі та підходу рівнянь балансу. Розщеплення енергій на квазіперетинах, отримані шляхом чисельного розв'язання рівняння Шредінгера (1.11), мають такі значення: $\Delta_1 = 3 \times 10^{-8}$ К, $\Delta_2 = 7 \times 10^{-5}$ К, $\Delta_3 = 4 \times 10^{-4}$ К, $\Delta_4 = 0.001$ К, $\Delta_5 = 0.002$ К, $\Delta_6 = 0.003$ К. Всі параметри перезарядки такі самі, як на рис. 1.5.

де $\gamma_n = \gamma$ - швидкість релаксації енергії з рівня E_n на рівень E_{n-1} . Початкова умова в точці $t_0 = 0$, що відповідає $\Phi_e = \Phi_{e0}$ (див. рівняння (1.28) і підпис до рис. 1.5(a)) має вигляд $\rho_{11}(0) = 1$, $\rho_{nn}(0) = 0$ для $n = 2, \dots, 7$. Початкову умову в точці t_{12} , яка відповідає першій точці квазіперетину $\Phi_e = \Phi_0/2$, отримано з урахуванням розв'язку системи (4.21) в точці $t_{12} = 0$, тобто

$\rho_{11}(t_{12} - 0) = 1$, $\rho_{nn}(t_{12} - 0) = 0$ ($n = 2, \dots, 7$), і того, що в точці t_{12} відбувається перехід з рівня E_1 на рівень E_2 з імовірністю \mathcal{P}_1 (див. рівняння (4.19)). Отже, початкова умова в точці t_{12} має вигляд $\rho_{11}(t_{12}) = 1 - \mathcal{P}_1$, $\rho_{22}(t_{12}) = \mathcal{P}_1$, $\rho_{nn}(t_{12}) = 0$ ($n = 3, \dots, 7$). Розв'язок системи (4.21) на проміжку $(t_{12} + 0, t_{23} - 0)$ має вигляд

$$\begin{aligned}\rho_{11}(t) &= 1 - \mathcal{P}_1 e^{-\gamma(t-t_{12})}, \\ \rho_{22}(t) &= \mathcal{P}_1 e^{-\gamma(t-t_{12})}, \\ \rho_{nn}(t) &\equiv 0, \quad n = 3, \dots, 7,\end{aligned}\tag{4.22}$$

де t_{23} відповідає точці квазіперетину між 2-м і 3-м рівнями. Система рівнянь (4.21) розв'язується на всіх наступних інтервалах аналогічно.

Для стадії перезарядки детектора залежність заселеності рівнів від безрозмірного зовнішнього магнітного потоку, отримана наближеним методом рівнянь балансу, показана на рис. 4.11, і вона досить добре узгоджується із залежністю на рис. 1.5, отриманою при розв'язанні системи рівнянь (1.30) для матричних елементів оператора густини. Підхід з використанням рівнянь балансу дає остаточне заповнення 7-го енергетичного рівня наступним чином

$$\rho_{77} = \prod_{n=1}^6 \mathcal{P}_n e^{-\gamma(t-t_{12})},\tag{4.23}$$

де $t_{67} < t < t_{78}$, t_{78} відповідає точці квазіперетину між 7-м та 8-м рівнями.

4.5 Висновки

Ми вивели енергетичні рівні та гамільтоніан подвійної квантової точки, використовуючи електричну схему, наведену в роботі [105]. Потім ми чисельно змодельовали динаміку системи, розв'язавши рівняння Ліндблада, і продемонстрували і проаналізували динаміку для кожного з чотирьох режимів збудження ЛЗШМ (багатопрохідного, однопрохідного, двопробірного та некогерентного).

Залежність ймовірностей заселеності ρ_{kk} рівнів детектору

мікрохвильових фотонів на основі потового кубіта від зовнішнього магнітного потоку x_e можна наближено обчислити: (i) за допомогою адіабатично-імпульсної моделі при відсутності дисипації та (ii) за допомогою комбінації адіабатично-імпульсної моделі та формалізму рівнянь балансу при наявності дисипації. Використання адіабатично-імпульсної моделі та формалізму рівнянь балансу дає залежність ρ_{kk} від x_e , яка для вибраних параметрів досить добре узгоджується (за винятком околиць точок квазіперетину) з результатами, отриманими при чисельному розв'язку рівнянь Ліндблада (1.30) і показаними на рис. 1.5, незважаючи на те, що це наближення не враховує специфіки задачі, наприклад, вигляд потенціалу $U(x)$ у рівнянні (1.12), та не потребує повної інформації про гамільтоніан системи.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено динаміку квантових дворівневих і багаторівневих систем та запропоновано нові методи її опису та контролю з використанням рівняння Ліндблада, інтерферометрії Ландау-Зінера-Штюкельберга-Майорани, адіабатично- імпульсної моделі та рівнянь балансу. Основні результати полягають у наступному:

1. Розвинуто парадигму альтернативних квантових логічних операцій на основі ЛЗШМ переходів. Ми продемонстрували, як адіабатично-імпульсна модель та інтерференція між переходами ЛЗШМ може бути використана для контролю динаміки дворівневих, чотирирівневих та багаторівневих квантових систем та для реалізації одно- та двокубітних квантових логічних операцій альтернативним методом, зокрема операцій X, Y, Адамара, iSWAP та CNOT. Аналітичне значення вірогідності переходу ЛЗШМ та застосування адіабатично-імпульсної моделі надає можливість визначення параметрів зовнішнього сигналу, необхідного для реалізації потрібної квантової логічної операції.

Довільна однокубітна квантова логічна операція може бути виконана двома ЛЗШМ переходами. Однак розглянутий варіант реалізації операцій з декількома ЛЗШМ переходами забезпечує краще поєднання швидкості та добротності операцій. Продемонстровано як збільшити швидкість операцій, продемонстрували техніку реалізації довільної однокубітної квантової логічної операції з довільною кількістю ЛЗШМ переходів, продемонстрували методику пошуку балансу між швидкістю та точністю операцій. Також було продемонстровано порівняння залежності теоретичних похибок від часу операції для звичайних операцій на основі Рабі осциляцій та для альтернативних ЛЗШМ операцій для збуджуваного сигналу з 2, 4, 6, та 8 ЛЗШМ перетинами.

Розглянутий підхід ЛЗШМ для реалізації довільних квантових логічних вентилів може бути застосований до широкого спектру квантових багаторівневих систем і зовнішнього збудження.

2. Продемонстровано, як багаторівневу систему можна звести до дворівневої, застосувавши резонансний збуджуючий сигнал. Отримана

дворівнева система помітно відрізняється від кубіта, оскільки при більшому зсуві енергетичні рівні стають рівновіддаленими, а не безкінечно віддаленими. Ця відмінність призводить до того, що резонансні смуги на інтерферограмах ЛЗШМ мають вигляд арфоподібних ліній. Теоретичні інтерферограми ЛЗШМ підтверджуються та добре відповідають експериментальним результатам, наведеним в роботі [101]. Оскільки одягнені два рівні несуть інформацію про початкову багаторівневу систему, то властивості таких резонансних смуг можуть бути використані для визначення її параметрів, тобто спектроскопії цієї системи.

3. Отримано вирази енергетичних рівнів та гамільтоніану подвійної квантової точки, використовуючи електричну схему, наведену в роботі [105].

Методом розв'язку рівняння Ліндблада для отриманого гамільтоніану було чисельно змодельовано динаміку системи (ймовірності заселеностей кожного енергетичного рівня системи від часу) для кожного з чотирьох режимів збудження ЛЗШМ (багатопрохідного, однопрохідного, двопрхідного та некогерентного). Проведено аналіз та інтерпретацію отриманої динаміки.

Вперше розрахована динаміка етапу перезарядки детектора мікрохвильових фотонів на основі потокового кубіту, що являє собою квантову багаторівневу систему, за допомогою використання наближеної адіабатично-імпульсної моделі та формалізму рівнянь балансу. Отримана динаміка добре узгоджується із точною динамікою, отриманою за допомогою розв'язку рівняння Ліндблада. Показано, що за певних умов на квантову систему та її початкові стани цей наближений підхід може використовуватися для обчислення динаміки з достатньою точністю та має ряд переваг. Зокрема, запропонований підхід є простішим за підхід рівняння Ліндблада, у тому числі з обчислювальної точки зору, особливо для багаторівневих систем з великою кількістю рівнів, та не потребує повної інформації про гамільтоніан системи.

4. Таким чином, дисертаційна робота має як прикладне значення для

удосконалення та розвитку пристроїв для квантових обчислень, так і фундаментальне значення для розвитку розуміння та методів опису та контролю динаміки складних квантових систем. Запропоновані методи реалізацій квантових логічних операцій можуть бути безпосередньо використані в новітніх експериментах. Розвинуті в роботі механізми та підходи, після доповнення експериментальними методиками, можуть бути застосовані для виконання квантових логічних операцій на певних типах квантових комп'ютерів. Продемонстрований метод зведення багаторівневої квантової системи до дворівневої та застосування інтерферометрії ЛЗШМ для отриманої дворівневої системи може використовуватись для визначення низки параметрів квантової системи використовуючи її експериментальну інтерферограму ЛЗШМ, тобто для її спектроскопії. Наведений у дисертаційній роботі метод застосування адіабатично-імпульсної моделі з підходом рівнянь балансу може за певних умов використовуватись для визначення низки параметрів на етапі перезарядки детектору мікрохвильових фотонів на основі потового кубіту. Наведений у роботі метод розрахунку динаміки подвійної квантової точки за допомогою розв'язання рівняння Ліндблада може бути використаний для опису, аналізу, контролю подібних відкритих багаторівневих квантових систем.

Подяки

Дисертант глибоко вдячний Сергію Миколайовичу Шевченку за чудове керівництво науковою роботою.

Крім того, дисертант вдячний за підтримку відділу надпровідних і мезоскопічних структур, та вченому секретарю, канд. ф.-м. наук О.М. Калиненко, Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Веркіна НАН України (м. Харків, Україна). а також проф. Франко Норі та лабораторії теоретичної квантової фізики під його керівництвом в інституті RIKEN (Вако, Японія).

Також здобувач від чистого серця висловлює глибоку подяку Олегу Івахненку, Максиму Люлю, Олі Ільїнській, Олі Багровій та Поліні Кофман за

плідні обговорення, співпрацю та корисні і практичні поради.

БІБЛІОГРАФІЯ

- [1] A. I. Ryzhov, O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, M. F. Gonzalez-Zalba, and F. Nori, Alternative fast quantum logic gates using nonadiabatic Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transitions, *Phys. Rev. Res.* **6**, 033340 (2024).
- [2] S. N. Shevchenko, A. I. Ryzhov, and F. Nori, Low-frequency spectroscopy for quantum multilevel systems, *Phys. Rev. B* **98**, 195434 (2018).
- [3] O. A. Ilinskaya, A. I. Ryzhov, and S. N. Shevchenko, Flux qubit based detector of microwave photons, *Phys. Rev. B* **110**, 155414 (2024).
- [4] M. B. Kenmoe, A. B. Tchabda, and L. C. Fai, SU(3) Landau-Zener interferometry with a transverse periodic drive, *Phys. Rev. B* **96**, 125126 (2017).
- [5] M. Frimmer and L. Novotny, The classical Bloch equations, *Am. J. Phys.* **82**, 947–954 (2014).
- [6] Z.-Z. Li and M. Leijnse, Quantum interference in transport through almost symmetric double quantum dots, *Phys. Rev. B* **99**, 125406 (2019).
- [7] G. Lindblad, On the generators of quantum dynamical semigroups, *Commun. Math. Phys.* **48**, 119 – 130 (1976).
- [8] J. Thingna, M. Esposito, and F. Barra, Landau-Zener Lindblad equation and work extraction from coherences, *Phys. Rev. E* **99**, 042142 (2019).
- [9] A. Ferrón, D. Domínguez, and M. J. Sánchez, Large-amplitude harmonic driving of highly coherent flux qubits, *Phys. Rev. B* **82**, 134522 (2010).
- [10] A. Ferrón, D. Domínguez, and M. J. Sánchez, Tailoring population inversion in Landau-Zener-Stückelberg interferometry of flux qubits, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 237005 (2012).
- [11] A. Ferrón, D. Domínguez, and M. J. Sánchez, Dynamic transition in Landau-Zener-Stückelberg interferometry of dissipative systems: The case of the flux qubit, *Phys. Rev. B* **93**, 064521 (2016).
- [12] D. M. Berns, M. S. Rudner, S. O. Valenzuela, K. K. Berggren, W. D. Oliver, L. S. Levitov, and T. P. Orlando, Amplitude spectroscopy of a solid-state artificial atom, *Nature* **455**, 51–57 (2008).

- [13] X. Wen and Y. Yu, Landau-Zener interference in multilevel superconducting flux qubits driven by large-amplitude fields, *Phys. Rev. B* **79**, 094529 (2009).
- [14] Y. Wang, S. Cong, X. Wen, C. Pan, G. Sun, J. Chen, L. Kang, W. Xu, Y. Yu, and P. Wu, Quantum interference induced by multiple Landau-Zener transitions in a strongly driven rf-SQUID qubit, *Phys. Rev. B* **81**, 144505 (2010).
- [15] M. Karami, A. Javdani, and K. Karami, Modeling the level structure of a double quantum dot in the two-electron regime, *J. Phys. B: At., Mol. Opt. Phys.* **52**, 025504 (2019).
- [16] M. P. Liul and S. N. Shevchenko, Rate-equation approach for multi-level quantum systems, *Low Temp. Phys.* **49**, 102–108 (2023).
- [17] M. P. Liul, A. I. Ryzhov, and S. N. Shevchenko, Interferometry of multi-level systems: rate-equation approach for a charge qubit, *Eur. Phys. J.: Spec. Top.* **232**, 3227–3235 (2023).
- [18] J. G. Russo and M. Tierz, Landau-Zener transition rates of superconducting qubits and the absorption spectrum in quantum dots, *Phys. Rev. A* **109**, 033702 (2024).
- [19] B. Damski and W. H. Zurek, Adiabatic-impulse approximation for avoided level crossings: from phase-transition dynamics to Landau-Zener evolutions and back again, *Phys. Rev. A* **73**, 063405 (2006).
- [20] M. Tomka, L. C. Venuti, and P. Zanardi, Accuracy of the adiabatic-impulse approximation for closed and open quantum systems, *Phys. Rev. A* **97**, 032121 (2018).
- [21] V. P. Krašnov, Theory of resonance multiphoton transitions in a three-level system under the influence of a strong electromagnetic field, *JETP* **43**, 622 (1976).
- [22] V. P. Krainov and V. P. Yakovlev, Quasienergy states of a two-level atom in a strong low-frequency electromagnetic field, *JETP* **78**, 2204 (1980).
- [23] M. Rodriguez-Vega, M. Lentz, and B. Seradjeh, Floquet perturbation theory:

- formalism and application to low-frequency limit, *New J. Phys.* **20**, 093022 (2018).
- [24] S.-I. Chu and D. A. Telnov, Beyond the Floquet theorem: generalized Floquet formalisms and quasienergy methods for atomic and molecular multiphoton processes in intense laser fields, *Phys. Rep.* **390**, 1–131 (2004).
- [25] S.-K. Son, S. Han, and S.-I. Chu, Floquet formulation for the investigation of multiphoton quantum interference in a superconducting qubit driven by a strong ac field, *Phys. Rev. A* **79**, 032301 (2009).
- [26] M. Grifoni and P. Hänggi, Driven quantum tunneling, *Phys. Rep.* **304**, 229–354 (1998).
- [27] A. Sen, D. Sen, and K. Sengupta, Analytic approaches to periodically driven closed quantum systems: methods and applications, *J. Phys.: Condens. Matter* **33**, 443003 (2021).
- [28] F. Forster, G. Petersen, S. Manus, P. Hänggi, D. Schuh, W. Wegscheider, S. Kohler, and S. Ludwig, Characterization of qubit dephasing by Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 116803 (2014).
- [29] M. P. Silveri, J. A. Tuorila, E. V. Thuneberg, and G. S. Paraoanu, Quantum systems under frequency modulation, *Rep. Prog. Phys.* **80**, 056002 (2017).
- [30] G. Giavaras, Transport through a quantum dot spin-orbit coupled to an impurity site, *J. Appl. Phys.* **120**, 114301 (2016).
- [31] G. Giavaras, Double quantum dot spin resonances with a time-dependent spin-orbit coupling, *Low Temp. Phys.* **50**, 146–151 (2024).
- [32] G. Shavit, B. Horovitz, and M. Goldstein, Bridging between laboratory and rotating-frame master equations for open quantum systems, *Phys. Rev. B* **100**, 195436 (2019).
- [33] V. Vadimov, J. Tuorila, T. Orell, J. Stockburger, T. Ala-Nissila, J. Ankerhold, and M. Möttönen, Validity of Born-Markov master equations for single- and two-qubit systems, *Phys. Rev. B* **103**, 214308 (2021).

- [34] P. Krantz, M. Kjaergaard, F. Yan, T. P. Orlando, S. Gustavsson, and W. D. Oliver, A quantum engineer's guide to superconducting qubits, *Appl. Phys. Rev.* **6**, 021318 (2019).
- [35] X. Gu, A. F. Kockum, A. Miranowicz, Y.-X. Liu, and F. Nori, Microwave photonics with superconducting quantum circuits, *Phys. Rep.* **718-719**, 1–102 (2017).
- [36] A. F. Kockum, A. Miranowicz, S. D. Liberato, S. Savasta, and F. Nori, Ultrastrong coupling between light and matter, *Nat. Rev. Phys.* **1**, 19–40 (2019).
- [37] T. Jones, K. Steven, X. Poncini, M. Rose, and A. Fedorov, Approximations in transmon simulation, *Phys. Rev. Appl.* **16**, 054039 (2021).
- [38] Y.-C. Yang, S. N. Coppersmith, and M. Friesen, Achieving high-fidelity single-qubit gates in a strongly driven silicon-quantum-dot hybrid qubit, *Phys. Rev. A* **95**, 062321 (2017).
- [39] D. L. Campbell, Y.-P. Shim, B. Kannan, R. Winik, D. K. Kim, A. Melville, B. M. Niedzielski, J. L. Yoder, C. Tahan, S. Gustavsson, and W. D. Oliver, Universal nonadiabatic control of small-gap superconducting qubits, *Phys. Rev. X* **10**, 041051 (2020).
- [40] S. N. Shevchenko, S. Ashhab, and F. Nori, Landau–Zener–Stückelberg interferometry, *Phys. Rep.* **492**, 1–30 (2010).
- [41] O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and F. Nori, Nonadiabatic Landau–Zener–Stückelberg–Majorana transitions, dynamics, and interference, *Phys. Rep.* **995**, 1–89 (2023).
- [42] J. He, D. Pan, M. Liu, Z. Lyu, Z. Jia, G. Yang, S. Zhu, G. Liu, J. Shen, S. N. Shevchenko, F. Nori, J. Zhao, L. Lu, and F. Qu, Quantifying quantum coherence of multiple-charge states in tunable Josephson junctions, *npj Quantum Information* **10**, 1 (2024).
- [43] E. P. Glasbrenner and W. P. Schleich, The Landau-Zener formula made simple, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **56**, 104001 (2023).

- [44] T. Weitz, C. Heide, and P. Hommelhoff, Strong-Field Bloch Electron Interferometry for Band-Structure Retrieval, *Phys. Rev. Lett.* **132**, 206901 (2024).
- [45] M.-Y. Chen, C. Zhang, and Z.-Y. Xue, Fast high-fidelity geometric gates for singlet-triplet qubits, *Phys. Rev. A* **105**, 022620 (2022).
- [46] S. Kwon, A. Tomonaga, G. L. Bhai, S. J. Devitt, and J.-S. Tsai, Gate-based superconducting quantum computing, *J. Appl. Phys.* **129**, 041102 (2021).
- [47] A. F. Kockum and F. Nori, Quantum bits with josephson junctions, in *Springer Series in Materials Science* (Springer International Publishing, 2019) pp. 703–741.
- [48] C. M. Quintana, K. D. Petersson, L. W. McFaul, S. J. Srinivasan, A. A. Houck, and J. R. Petta, Cavity-mediated entanglement generation via Landau-Zener interferometry, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 173603 (2013).
- [49] Z. Li, D. Li, M. Li, X. Yang, S. Song, Z. Han, Z. Yang, J. Chu, X. Tan, D. Lan, H. Yu, and Y. Yu, Quantum state transfer via multi-passage Landau–Zener–Stückelberg interferometry in a three-qubit system, *Phys. Status Solidi B* **257**, 1900459 (2019).
- [50] Z.-T. Zhang and Y. Yu, Processing quantum information in a hybrid topological qubit and superconducting flux qubit system, *Phys. Rev. A* **87**, 032327 (2013).
- [51] A. Migliore and A. Messina, Controlling the charge-transfer dynamics of two-level systems around avoided crossings, *J. Chem. Phys.* **160**, 084112 (2024).
- [52] V. Benza and G. Strini, A single qubit Landau-Zener gate, *Fortschr. Phys.* **51**, 14–21 (2003).
- [53] C. Hicke, L. F. Santos, and M. I. Dykman, Fault-tolerant Landau-Zener quantum gates, *Phys. Rev. A* **73**, 012342 (2006).
- [54] L. F. Wei, J. R. Johansson, L. X. Cen, S. Ashhab, and F. Nori, Controllable coherent population transfers in superconducting qubits for quantum computing, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 113601 (2008).

- [55] J. J. Cáceres, D. Domínguez, and M. J. Sánchez, Fast quantum gates based on Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transitions, *Phys. Rev. A* **108**, 052619 (2023).
- [56] G. Cao, H.-O. Li, T. Tu, L. Wang, C. Zhou, M. Xiao, G.-C. Guo, H.-W. Jiang, and G.-P. Guo, Ultrafast universal quantum control of a quantum-dot charge qubit using Landau–Zener–Stückelberg interference, *Nat. Commun.* **4**, 1401 (2013).
- [57] L. Wang, T. Tu, B. Gong, C. Zhou, and G.-C. Guo, Experimental realization of non-adiabatic universal quantum gates using geometric Landau-Zener-Stückelberg interferometry, *Sci. Rep.* **6**, 19048 (2016).
- [58] H. Zhang, S. Chakram, T. Roy, N. Earnest, Y. Lu, Z. Huang, D. K. Weiss, J. Koch, and D. I. Schuster, Universal fast-flux control of a coherent, low-frequency qubit, *Phys. Rev. X* **11**, 011010 (2021).
- [59] K. M. Abadir, Expansions for some confluent hypergeometric functions, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26**, 4059–4066 (1993).
- [60] C. Heide, T. Boolakee, T. Higuchi, H. B. Weber, and P. Hommelhoff, Interaction of carrier envelope phase-stable laser pulses with graphene: the transition from the weak-field to the strong-field regime, *New J. Phys.* **21**, 045003 (2019).
- [61] C. Heide, T. Boolakee, T. Higuchi, and P. Hommelhoff, Sub-cycle temporal evolution of light-induced electron dynamics in hexagonal 2D materials, *J. Phys. Phot.* **2**, 024004 (2020).
- [62] C. Heide, T. Boolakee, T. Higuchi, and P. Hommelhoff, Adiabaticity parameters for the categorization of light-matter interaction: From weak to strong driving, *Phys. Rev. A* **104**, 023103 (2021).
- [63] S. Cong, M.-Y. Gao, G. Cao, G.-C. Guo, and G.-P. Guo, Ultrafast manipulation of a double quantum-dot charge qubit using Lyapunov-based control method, *IEEE J. of Quantum Electron.* **51**, 1–8 (2015).
- [64] J. R. Johansson, P. D. Nation, and F. Nori, QuTiP: An open-source Python framework for the dynamics of open quantum systems, *Comput. Phys. Commun.* **183**, 1760–1772 (2012).

- [65] J. R. Johansson, P. D. Nation, and F. Nori, QuTiP 2: A Python framework for the dynamics of open quantum systems, *Comput. Phys. Commun.* **184**, 1234 – 1240 (2013).
- [66] M. Berry, Two-state quantum asymptotics, *Annals of the New York Academy of Sciences* **755**, 303–317 (1995).
- [67] C. L. Degen, F. Reinhard, and P. Cappellaro, Quantum sensing, *Rev. Mod. Phys.* **89**, 035002 (2017).
- [68] I. Buluta, S. Ashhab, and F. Nori, Natural and artificial atoms for quantum computation, *Rep. Prog. Phys.* **74**, 104401 (2011).
- [69] S. N. Shevchenko, S. Ashhab, and F. Nori, Landau-Zener-Stückelberg interferometry, *Phys. Rep.* **492**, 1–30 (2010).
- [70] W. D. Oliver, Y. Yu, J. C. Lee, K. K. Berggren, L. S. Levitov, and T. P. Orlando, Mach-Zehnder interferometry in a strongly driven superconducting qubit, *Science* **310**, 1653–1657 (2005).
- [71] M. Sillanpää, T. Lehtinen, A. Paila, Y. Makhlin, and P. Hakonen, Continuous-time monitoring of Landau-Zener interference in a Cooper-pair box, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 187002 (2006).
- [72] C. M. Wilson, T. Duty, F. Persson, M. Sandberg, G. Johansson, and P. Delsing, Coherence times of dressed states of a superconducting qubit under extreme driving, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 257003 (2007).
- [73] A. Izmalkov, S. H. W. van der Ploeg, S. N. Shevchenko, M. Grajcar, E. Il'ichev, U. Hübner, A. N. Omelyanchouk, and H.-G. Meyer, Consistency of ground state and spectroscopic measurements on flux qubits, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 017003 (2008).
- [74] G. Sun, X. Wen, Y. Wang, S. Cong, J. Chen, L. Kang, W. Xu, Y. Yu, S. Han, and P. Wu, Population inversion induced by Landau-Zener transition in a strongly driven rf superconducting quantum interference device, *Appl. Phys. Lett.* **94**, 102502 (2009).
- [75] J. Stehlik, Y. Dovzhenko, J. R. Petta, J. R. Johansson, F. Nori, H. Lu,

- and A. C. Gossard, Landau-Zener-Stückelberg interferometry of a single electron charge qubit, *Phys. Rev. B* **86**, 121303 (2012).
- [76] M. F. Gonzalez-Zalba, S. N. Shevchenko, S. Barraud, J. R. Johansson, A. J. Ferguson, F. Nori, and A. C. Betz, Gate-sensing coherent charge oscillations in a silicon field-effect transistor, *Nano Lett.* **16**, 1614–1619 (2016).
- [77] D. M. Berns, M. S. Rudner, S. O. Valenzuela, K. K. Berggren, W. D. Oliver, L. S. Levitov, and T. P. Orlando, Amplitude spectroscopy of a solid-state artificial atom, *Nature* **455**, 51 (2008).
- [78] A. M. Satanin, M. V. Denisenko, S. Ashhab, and F. Nori, Amplitude spectroscopy of two coupled qubits, *Phys. Rev. B* **85**, 184524 (2012).
- [79] G. Sun, X. Wen, B. Mao, Y. Yu, J. Chen, W. Xu, L. Kang, P. Wu, and S. Han, Landau-Zener-Stückelberg interference of microwave-dressed states of a superconducting phase qubit, *Phys. Rev. B* **83**, 180507 (2011).
- [80] M. Gong, Y. Zhou, D. Lan, Y. Fan, J. Pan, H. Yu, J. Chen, G. Sun, Y. Yu, S. Han, and P. Wu, Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interference in a 3D transmon driven by a chirped microwave, *Appl. Phys. Lett.* **108**, 112602 (2016).
- [81] Y. S. Greenberg, Low-frequency Rabi spectroscopy of dissipative two-level systems: Dressed-state approach, *Phys. Rev. B* **76**, 104520 (2007).
- [82] Y. S. Greenberg and E. Il'ichev, Quantum theory of the low-frequency linear susceptibility of interferometer-type superconducting qubits, *Phys. Rev. B* **77**, 094513 (2008).
- [83] A. E. Mefed, Spectrometer for studying NMR and relaxation in the doubly rotating frame, *Applied Magnetic Resonance* **16**, 411–426 (1999).
- [84] J. Tuorila, M. Silveri, M. Sillanpää, E. Thuneberg, Y. Makhlin, and P. Hakonen, Stark effect and generalized Bloch-Siegert shift in a strongly driven two-level system, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 257003 (2010).
- [85] M. Silveri, J. Tuorila, M. Kemppainen, and E. Thuneberg, Probe spectroscopy of quasienergy states, *Phys. Rev. B* **87**, 134505 (2013).

- [86] A. P. Saiko, R. Fedaruk, and S. A. Markevich, Relaxation, decoherence, and steady-state population inversion in qubits doubly dressed by microwave and radiofrequency fields, *J. Phys. B* **47**, 155502 (2014).
- [87] P. Neilinger, S. N. Shevchenko, J. Bogár, M. Reháč, G. Oelsner, D. S. Karpov, U. Hübner, O. Astafiev, M. Grajcar, and E. Il'ichev, Landau-Zener-Stückelberg-Majorana lasing in circuit quantum electrodynamics, *Phys. Rev. B* **94**, 094519 (2016).
- [88] C. Jin-Dan, W. Xue-Da, S. Guo-Zhu, and Y. Yang, Landau-Zener-Stückelberg interference in a multi-anticrossing system, *Chinese Phys. B* **20**, 088501 (2011).
- [89] M. B. Kenmoe, H. N. Phien, M. N. Kiselev, and L. C. Fai, Effects of colored noise on Landau-Zener transitions: Two- and three-level systems, *Phys. Rev. B* **87**, 224301 (2013).
- [90] S. Ashhab, Landau-Zener transitions in an open multilevel quantum system, *Phys. Rev. A* **94**, 042109 (2016).
- [91] J. Stehlik, M. Z. Maialle, M. H. Degani, and J. R. Petta, Role of multilevel Landau-Zener interference in extreme harmonic generation, *Phys. Rev. B* **94**, 075307 (2016).
- [92] N. A. Sinitsyn and V. Y. Chernyak, The quest for solvable multistate Landau-Zener models, *J. Phys. A: Math. Theor.* **50**, 255203 (2017).
- [93] A. Chatterjee, S. N. Shevchenko, S. Barraud, R. M. Otxoa, F. Nori, J. J. L. Morton, and M. F. Gonzalez-Zalba, A silicon-based single-electron interferometer coupled to a fermionic sea, *Phys. Rev. B* **97**, 045405 (2018).
- [94] A. Bogan, S. Studenikin, M. Korkusinski, L. Gaudreau, P. Zawadzki, A. S. Sachrajda, L. Tracy, J. Reno, and T. Hargett, Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry of a single hole, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 207701 (2018).
- [95] J. V. Koski, A. J. Landig, A. Palyi, P. Scarlino, C. Reichl, W. Wegscheider, G. Burkard, A. Wallraff, K. Ensslin, and T. Ihn, Floquet spectroscopy of a strongly driven quantum dot charge qubit with a microwave resonator, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 043603 (2018).

- [96] A. L. Gramajo, D. Dominguez, and M. J. Sanchez, Amplitude tuning of steady state entanglement in strongly driven coupled qubits, *Phys. Rev. A* **98**, 042337 (2018).
- [97] A. V. Parafilo and M. N. Kiselev, Landau-Zener transitions and Rabi oscillations in a Cooper-pair box: Beyond two-level models, *Low Temperature Physics* **44**, 1325–1330 (2018), https://pubs.aip.org/aip/ltp/article-pdf/44/12/1325/15622278/1325_1_online.pdf.
- [98] C. H. Yang, A. Rossi, R. Ruskov, N. S. Lai, F. A. Mohiyaddin, S. Lee, C. Tahan, G. Klimeck, A. Morello, and A. S. Dzurak, Spin-valley lifetimes in a silicon quantum dot with tunable valley splitting, *Nature Comm.* **4**, 2069 (2013).
- [99] G. Burkard and J. R. Petta, Dispersive readout of valley splittings in cavity-coupled silicon quantum dots, *Phys. Rev. B* **94**, 195305 (2016).
- [100] X. Zhao and X. Hu, Coherent electron transport in silicon quantum dots, *arXiv:1803.00749* (2018).
- [101] X. Mi, S. Kohler, and J. R. Petta, Landau-zener interferometry of valley-orbit states in si/sige double quantum dots, *Phys. Rev. B* **98**, 161404 (2018).
- [102] A. V. Rozhkov, A. L. Rakhmanov, A. O. Sboychakov, K. I. Kugel, and F. Nori, Spin-valley half-metal as a prospective material for spin valleytronics, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 107601 (2017).
- [103] J.-D. Chen, X.-D. Wen, G.-Z. Sun, and Y. Yu, Landau—Zener—Stückelberg interference in a multi-anticrossing system, *Chin. Phys. B* **20**, 088501 (2011).
- [104] S. E. de Graaf, J. Leppäkangas, A. Adamyan, A. V. Danilov, T. Lindström, M. Fogelström, T. Bauch, G. Johansson, and S. E. Kubatkin, Charge qubit coupled to an intense microwave electromagnetic field in a superconducting Nb device: evidence for photon-assisted quasiparticle tunneling, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 137002 (2013).

- [105] A. Chatterjee, S. N. Shevchenko, S. Barraud, R. M. Otxoa, F. Nori, J. J. L. Morton, and M. F. Gonzalez-Zalba, A silicon-based single-electron interferometer coupled to a fermionic sea, *Phys. Rev. B* **97**, 045405 (2018).
- [106] S. Moriyama, T. Mori, and K. Ono, Resonant tunneling and quantum interference of a two-spin system in silicon tunnel fets, *Appl. Phys. Express* **16**, 114001 (2023).
- [107] A. M. Satanin, M. V. Denisenko, A. I. Gelman, and F. Nori, Amplitude and phase effects in Josephson qubits driven by a biharmonic electromagnetic field, *Phys. Rev. B* **90**, 104516 (2014).
- [108] V. O. Munyaev and M. V. Bastrakova, Control of spectroscopic features of multiphoton transitions in two coupled qubits by driving fields, *Phys. Rev. A* **104**, 012613 (2021).
- [109] A. L. Gramajo, D. Domínguez, and M. J. Sánchez, Efficient steady-state-entanglement generation in strongly driven coupled qubits, *Phys. Rev. A* **104**, 032410 (2021).
- [110] W. D. Oliver, Y. Yu, J. C. Lee, K. K. Berggren, L. S. Levitov, and T. P. Orlando, Mach-Zehnder interferometry in a strongly driven superconducting qubit, *Science* **310**, 1653–1657 (2005).
- [111] M. Sillanpää, T. Lehtinen, A. Paila, Y. Makhlin, and P. Hakonen, Continuous-time monitoring of Landau-Zener interference in a Cooper-pair box, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 187002 (2006).
- [112] M. B. Kenmoe and L. C. Fai, Periodically driven three-level systems, *Phys. Rev. B* **94**, 125101 (2016).
- [113] D. V. Khomitsky and S. A. Studenikin, Single-spin Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry of Zeeman-split states with strong spin-orbit interaction in a double quantum dot, *Phys. Rev. B* **106**, 195414 (2022).
- [114] D. V. Khomitsky, M. V. Bastrakova, V. O. Munyaev, N. A. Zaprudnov, and S. A. Studenikin, Controllable single-spin evolution at subharmonics of electric dipole spin resonance enhanced by four-level Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interference, *Phys. Rev. B* **108**, 205404 (2023).

- [115] D. M. Berns, W. D. Oliver, S. O. Valenzuela, A. V. Shytov, K. K. Berggren, L. S. Levitov, and T. P. Orlando, Coherent quasiclassical dynamics of a persistent current qubit, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 150502 (2006).
- [116] M. S. Rudner, A. V. Shytov, L. S. Levitov, D. M. Berns, W. D. Oliver, S. O. Valenzuela, and T. P. Orlando, Quantum phase tomography of a strongly driven qubit, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 190502 (2008).
- [117] E. Dupont-Ferrier, B. Roche, B. Voisin, X. Jehl, R. Wacquez, M. Vinet, M. Sanquer, and S. De Franceschi, Coherent coupling of two dopants in a silicon nanowire probed by Landau-Zener-Stückelberg interferometry, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 136802 (2013).
- [118] R. M. Otxoa, A. Chatterjee, S. N. Shevchenko, S. Barraud, F. Nori, and M. F. Gonzalez-Zalba, Quantum interference capacitor based on double-passage Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry, *Phys. Rev. B* **100**, 205425 (2019).
- [119] A. Bogan, S. Studenikin, M. Korkusinski, L. Gaudreau, P. Zawadzki, A. S. Sachrajda, L. Tracy, J. Reno, and T. Hargett, Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry of a single hole, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 207701 (2018).
- [120] F. Ginzler, A. R. Mills, J. R. Petta, and G. Burkard, Spin shuttling in a silicon double quantum dot, *Phys. Rev. B* **102**, 195418 (2020).
- [121] M. P. Liul, C.-H. Chien, C.-Y. Chen, P. Y. Wen, J. C. Chen, Y.-H. Lin, S. N. Shevchenko, F. Nori, and I.-C. Hoi, Coherent dynamics of a photon-dressed qubit, *Phys. Rev. B* **107**, 195441 (2023).
- [122] S. N. Shevchenko, *Mesoscopic Physics meets Quantum Engineering* (World Scientific Pub Co Inc, 2019).
- [123] A. Opremcak, I. V. Pechenezhskiy, C. Howington, B. G. Christensen, M. A. Beck, E. Leonard, J. Suttle, C. Wilen, K. N. Nesterov, G. J. Ribeill, T. Thorbeck, F. Schlenker, M. G. Vavilov, B. L. T. Plourde, and R. McDermott, Measurement of a superconducting qubit with a microwave photon counter, *Science* **361**, 1239–1242 (2018), <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.aat4625> .

- [124] A. Opremcak, C. H. Liu, C. Wilen, K. Okubo, B. G. Christensen, D. Sank, T. C. White, A. Vainsencher, M. Giustina, A. Megrant, B. Burkett, B. L. T. Plourde, and R. McDermott, High-fidelity measurement of a superconducting qubit using an on-chip microwave photon counter, *Phys. Rev. X* **11**, 011027 (2021).
- [125] P. Campagne-Ibarcq, E. Zalys-Geller, A. Narla, S. Shankar, P. Reinhold, L. Burkhardt, C. Axline, W. Pfaff, L. Frunzio, R. J. Schoelkopf, and M. H. Devoret, Deterministic remote entanglement of superconducting circuits through microwave two-photon transitions, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 200501 (2018).
- [126] I. G. Irastorza and J. Redondo, New experimental approaches in the search for axion-like particles, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **102**, 89–159 (2018).
- [127] A. Ghirri, S. Cornia, and M. Affronte, Microwave photon detectors based on semiconducting double quantum dots, *Sensors* **20**, 10.3390/s20144010 (2020).
- [128] J.-C. Besse, S. Gasparinetti, M. C. Collodo, T. Walter, P. Kurpiers, M. Pechal, C. Eichler, and A. Wallraff, Single-shot quantum nondemolition detection of individual itinerant microwave photons, *Phys. Rev. X* **8**, 021003 (2018).
- [129] Y.-F. Chen, D. Hover, S. Sendelbach, L. Maurer, S. T. Merkel, E. J. Pritchett, F. K. Wilhelm, and R. McDermott, Microwave photon counter based on josephson junctions, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 217401 (2011).
- [130] L. C. G. Govia, E. J. Pritchett, S. T. Merkel, D. Pineau, and F. K. Wilhelm, Theory of josephson photomultipliers: Optimal working conditions and back action, *Phys. Rev. A* **86**, 032311 (2012).
- [131] E. V. Stolyarov, O. V. Kliushnichenko, V. S. Kovtoniuk, and A. A. Semenov, Photon-number resolution with microwave josephson photomultipliers, *Phys. Rev. A* **108**, 063710 (2023).
- [132] K. Koshino, K. Inomata, Z. Lin, Y. Nakamura, and T. Yamamoto, Theory of microwave single-photon detection using an impedance-matched Λ system, *Phys. Rev. A* **91**, 043805 (2015).

- [133] A. P. Shapovalov, V. E. Shaternik, O. G. Turutanov, V. Y. Lyakhno, and V. I. Shnyrkov, On the possibility of faster detection of magnetic flux changes in a single-photon counter by RF SQUID with MoRe–Si(W)–MoRe junction, *Low Temperature Physics* **45**, 776–784 (2019), https://pubs.aip.org/aip/ltp/article-pdf/45/7/776/13610981/776_1_online.pdf.
- [134] V. Y. Lyakhno, O. G. Turutanov, A. P. Boichenko, A. P. Shapovalov, A. A. Kalenyuk, and V. I. Shnyrkov, Hybrid shield for microwave single-photon counter based on a flux qubit, *Low Temperature Physics* **48**, 228–231 (2022), https://pubs.aip.org/aip/ltp/article-pdf/48/3/228/19820751/228_1_online.pdf.
- [135] V. I. Shnyrkov, W. Yangcao, A. A. Soroka, O. G. Turutanov, and V. Y. Lyakhno, Frequency-tuned microwave photon counter based on a superconductive quantum interferometer, *Low Temperature Physics* **44**, 213–220 (2018), https://pubs.aip.org/aip/ltp/article-pdf/44/3/213/15668516/213_1_online.pdf.
- [136] S. Ashhab, O. A. Ilinskaya, and S. N. Shevchenko, Nonlinear Landau-Zener-Stückelberg-Majorana problem, *Phys. Rev. A* **106**, 062613 (2022).
- [137] P. O. Kofman, S. N. Shevchenko, and F. Nori, Tuning the initial phase to control the final state of a driven qubit, *Phys. Rev. A* **109**, 022409 (2024).
- [138] L. C. G. Govia, E. J. Pritchett, C. Xu, B. L. T. Plourde, M. G. Vavilov, F. K. Wilhelm, and R. McDermott, High-fidelity qubit measurement with a microwave-photon counter, *Phys. Rev. A* **90**, 062307 (2014).
- [139] P. Brookes, G. Tancredi, A. D. Patterson, J. Rahamim, M. Esposito, T. K. Mavrogordatos, P. J. Leek, E. Ginossar, and M. H. Szymanska, Critical slowing down in circuit quantum electrodynamics, *Science Advances* **7**, eabe9492 (2021), <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/sciadv.abe9492>.
- [140] I. I. Rabi, Space quantization in a gyrating magnetic field, *Phys. Rev.* **51**, 652–654 (1937).

- [141] E. Jaynes and F. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, *Proceedings of the IEEE* **51**, 89–109 (1963).
- [142] B. Baker, A. C. Y. Li, N. Irons, N. Earnest, and J. Koch, Adaptive rotating-wave approximation for driven open quantum systems, *Phys. Rev. A* **98**, 052111 (2018).
- [143] Y. Makhlin, G. Schön, and A. Shnirman, Quantum-state engineering with Josephson-junction devices, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 357–400 (2001).
- [144] P. Kumar, S. Sendelbach, M. A. Beck, J. W. Freeland, Z. Wang, H. Wang, C. C. Yu, R. Q. Wu, D. P. Pappas, and R. McDermott, Origin and reduction of $1/f$ magnetic flux noise in superconducting devices, *Phys. Rev. Appl.* **6**, 041001 (2016).
- [145] F. Yoshihara, K. Harrabi, A. O. Niskanen, Y. Nakamura, and J. S. Tsai, Decoherence of flux qubits due to $1/f$ flux noise, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 167001 (2006).
- [146] D. A. Rower, L. Ateshian, L. H. Li, M. Hays, D. Bluvstein, L. Ding, B. Kannan, A. Almanakly, J. Braumüller, D. K. Kim, A. Melville, B. M. Niedzielski, M. E. Schwartz, J. L. Yoder, T. P. Orlando, J. I.-J. Wang, S. Gustavsson, J. A. Grover, K. Serniak, R. Comin, and W. D. Oliver, Evolution of $1/f$ flux noise in superconducting qubits with weak magnetic fields, *Phys. Rev. Lett.* **130**, 220602 (2023).
- [147] P. Kaye, R. Laflamme, and M. Mosca, *An Introduction to Quantum Computing* (Oxford University Press, 2006).
- [148] S. Ashhab, J. R. Johansson, A. M. Zagoskin, and F. Nori, Two-level systems driven by large-amplitude fields, *Phys. Rev. A* **75**, 063414 (2007).
- [149] N. V. Vitanov and K. A. Suominen, Nonlinear level-crossing models, *Phys. Rev. A* **59**, 4580–4588 (1999).
- [150] M. Sillanpää, T. Lehtinen, A. Paila, Y. Makhlin, and P. Hakonen, Continuous-time monitoring of Landau-Zener interference in a Cooper-pair box, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 187002 (2006).

- [151] M. Sillanpää, T. Lehtinen, A. Paila, Y. Makhlin, and P. J. Hakonen, Landau–Zener interferometry in a Cooper-pair box, *J. Low Temp. Phys.* **146**, 253–262 (2007).
- [152] N. V. Vitanov, Relations between single and repeated qubit gates: coherent error amplification for high-fidelity quantum-gate tomography, *New J. Phys.* **22**, 023015 (2020).
- [153] R. Jozsa, Fidelity for mixed quantum states, *J. Modern Opt.* **41**, 2315–2323 (1994).
- [154] M. Kuzmanović, I. Björkman, J. J. McCord, S. Dogra, and G. S. Paraoanu, High-fidelity robust qubit control by phase-modulated pulses, *Phys. Rev. Res.* **6**, 013188 (2024).
- [155] T. Araki, F. Nori, and C. Gneiting, Robust quantum control with disorder-dressed evolution, *Phys. Rev. A* **107**, 032609 (2023).
- [156] S.-Y. Huang and H.-S. Goan, Optimal control for fast and high-fidelity quantum gates in coupled superconducting flux qubits, *Phys. Rev. A* **90**, 012318 (2014).
- [157] B. Li, S. Ahmed, S. Saraogi, N. Lambert, F. Nori, A. Pitchford, and N. Shammah, Pulse-level noisy quantum circuits with QuTiP, *Quantum* **6**, 630 (2022).
- [158] N. Schuch and J. Siewert, Natural two-qubit gate for quantum computation using the XY interaction, *Phys. Rev. A* **67**, 032301 (2003).
- [159] Z. Qi, X. Wu, D. R. Ward, J. R. Prance, D. Kim, J. K. Gamble, R. T. Mohr, Z. Shi, D. E. Savage, M. G. Lagally, M. A. Eriksson, M. Friesen, S. N. Coppersmith, and M. G. Vavilov, Effects of charge noise on a pulse-gated singlet-triplet qubit, *Phys. Rev. B* **96**, 115305 (2017).
- [160] I. Pietikäinen, S. Danilin, K. S. Kumar, J. Tuorila, and G. S. Paraoanu, Multilevel effects in a driven generalized Rabi model, *J. Low. Temp. Phys.* **191**, 354 (2018).
- [161] S. N. Shevchenko, G. Oelsner, Y. S. Greenberg, P. Macha, D. S. Karpov, M. Grajcar, U. Hübner, A. N. Omelyanchouk, and E. Il’ichev, Amplification

- and attenuation of a probe signal by doubly dressed states, *Phys. Rev. B* **89**, 184504 (2014).
- [162] S. Ashhab, J. R. Johansson, A. M. Zagoskin, and F. Nori, Two-level systems driven by large-amplitude fields, *Phys. Rev. A* **75**, 063414 (2007).
- [163] S. N. Shevchenko, S. Ashhab, and F. Nori, Inverse Landau-Zener-Stückelberg problem for qubit-resonator systems, *Phys. Rev. B* **85**, 094502 (2012).
- [164] T. Duty, G. Johansson, K. Bladh, D. Gunnarsson, C. Wilson, and P. Delsing, Observation of quantum capacitance in the Cooper-pair transistor, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 206807 (2005).
- [165] M. A. Sillanpää, T. Lehtinen, A. Paila, Y. Makhlin, L. Roschier, and P. J. Hakonen, Direct observation of Josephson capacitance, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 206806 (2005).
- [166] S. N. Shevchenko, S. Ashhab, and F. Nori, Inverse Landau-Zener-Stückelberg problem for qubit-resonator systems, *Phys. Rev. B* **85**, 094502 (2012).
- [167] S. N. Shevchenko, D. G. Rubanov, and F. Nori, Delayed-response quantum back action in nanoelectromechanical systems, *Phys. Rev. B* **91**, 165422 (2015).
- [168] R. Mizuta, R. M. Otxoa, A. C. Betz, and M. F. Gonzalez-Zalba, Quantum and tunneling capacitance in charge and spin qubits, *Phys. Rev. B* **95**, 045414 (2017).
- [169] M. F. Gonzalez-Zalba, S. N. Shevchenko, S. Barraud, J. R. Johansson, A. J. Ferguson, F. Nori, and A. C. Betz, Gate-sensing coherent charge oscillations in a silicon field-effect transistor, *Nano Lett.* **16**, 1614–1619 (2016).
- [170] S. Ashhab, T. Fuse, F. Yoshihara, S. Kim, and K. Semba, Controlling qubit-oscillator systems using linear parameter sweeps, *New J. Phys.* **25**, 093011 (2023).

Додаток А.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. S. N. Shevchenko **A. I. Ryzhov**, and Franco Nori, "Low-frequency spectroscopy for quantum multilevel systems", *Physical Review B* **98**, 195434 (2018), DOI: 10.1103/PhysRevB.98.195434, Q1
2. **A. I. Ryzhov**, O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, M. F. Gonzalez-Zalba, Franco Nori, "Alternative fast quantum logic gates using nonadiabatic Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transitions", *Physical Review Research* **6**, 033340 (2024), DOI: 10.1103/PhysRevResearch.6.033340, Q1
3. O. A. Ilinskaya, **A. I. Ryzhov**, and S. N. Shevchenko, "Flux qubit based detector of microwave photons", *Physical Review B* **110**, 155414 (2024), DOI: 10.1103/PhysRevB.110.155414, Q1
4. **A. I. Ryzhov**, S. N. Shevchenko, "Modeling and study of the evolution of a four-level quantum system", Student conference on Applied Physics "Actual problems of modern physics", 24 Nov, 2017, Kharkiv, Ukraine, Abstracts, p. 55 (2017).
5. **A. I. Ryzhov**, S. N. Shevchenko, "Resonant excitations of a single qubit: diabatic and adiabatic regimes", International Advanced Study Conference «Condensed Matter and Low Temperature Physics 2020», (CM<P 2020), 8-14 June, 2020, Kharkiv, Ukraine, Abstracts, p. 175 (2020).
6. **A. I. Ryzhov**, S. N. Shevchenko, Franco Nori, "Resonant interferometry and spectroscopy of a double quantum dot system", XI Conference of Young Scientists "Problems of Theoretical Physics", ("Problems of Theoretical Physics"), 21-23 December, 2020, Kyiv, Ukraine, Online, Abstracts, p. 25 (2020).
7. **A. I. Ryzhov**, S. N. Shevchenko, Franco Nori, "Low-frequency spectroscopy for quantum multilevel systems", American Physics Society March meeting 2021 ("APS March meeting"), 15-19 March, 2021, USA, Online, Abstracts, p. C29.00001 (2021).

8. **A. I. Ryzhov**, O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, "Landau-Zener-Stückelberg-Majorana quantum logic gates", II International Advanced Study Conference "Condensed Matter and Low Temperature Physics 2021", (CM<P 2021), 6-12 June, 2021, Kharkiv, Ukraine, Online, Abstracts, p. 211 (2021).
9. **A. I. Ryzhov**, M. P. Liul, S. N. Shevchenko, M. F. Gonzalez-Zalba, and Franco Nori, "Four regimes of excitations of a double quantum dot", International Symposium on Novel maTerials and quantum Technologies (ISNTT2021), 14-17 December, 2021, Atsugi, Japan, Online, Abstracts, p. 145 (2021).
10. **A. I. Ryzhov**, O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, "Fast Landau-Zener-Stückelberg-Majorana quantum logic gates", American Physics Society March meeting 2022 ("APS March meeting"), 14-18 March, 2022, Chicago, USA, Online, Abstracts, p. Q38.00011 (2022).
11. **A. I. Ryzhov**, O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, "Non-resonant quantum logic gates", American Physics Society March meeting 2023 ("APS March meeting"), 20-22 March, 2023, Las Vegas, USA, Online, Abstracts, p. UU05.00009 (2023).
12. **A. I. Ryzhov**, O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, "Two-qubit nonadiabatic quantum logic gates", III International Conference "Condensed Matter and Low Temperature Physics", (CM<P 2023), 5-11 June, 2023, Kharkiv, Ukraine, Online, Abstracts, p. 197 (2023).
13. **A. I. Ryzhov**, O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, M. F. Gonzalez-Zalba, and Franco Nori, "Fast quantum logic gates using nonadiabatic Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transitions", American Physics Society March meeting 2024 ("APS March meeting"), 4-8 March, 2024, Minneapolis, USA, Online, Abstracts, p. DD03.00005 (2024).

Додаток Б.

Відомості про апробацію результатів дисертації

- Студентська конференція з прикладної фізики "Актуальні проблеми сучасної фізики", 24 листопада 2017 р., Харків, Україна.
- Міжнародна наукова конференція "Фізика конденсованих систем і низьких температур 2020", (CM<P 2020), 8-14 червня, 2020, Харків, Україна
- XI Конференція молодих вчених "Проблеми теоретичної фізики", ("Проблеми теоретичної фізики"), 21-23 грудня, 2020, Київ, Україна.
- Березнева зустріч Американського фізичного товариства 2021 ("APS March meeting"), 15-19 березня, 2021, США
- 2-на Міжнародна наукова конференція "Фізика конденсованих систем і низьких температур 2021", (CM<P 2021), 6-12 червня, 2021, Харків, Україна
- Міжнародний симпозіум з нових матеріалів та квантових технологій (ISNTT2021), 14-17 грудня, 2021, Ацугі, Японія
- Березнева зустріч Американського фізичного товариства 2022 ("APS March meeting"), 14-18 березня, 2022, Чикаго, США
- Березнева зустріч Американського фізичного товариства 2023 ("APS March meeting"), 20-22 березня, 2023, Лас-Вегас, США
- 3-я Міжнародна наукова конференція "Фізика конденсованих систем і низьких температур 2023", (CM<P 2023), 5-11 червня, 2023, Харків, Україна
- Березнева зустріч Американського фізичного товариства 2024 ("APS March meeting"), 4-8 березня, 2024, Міннеаполіс, США