Відгук надійшов до ради
17.03.2021 (Щербина М.В.)

Відгук

опонента, директора Інституту прикладної математики і механіки НАН України, доктора фізико-математичних наук, член-кореспондента НАН України, доцента Скрипніка Ігоря Ігоровича, на дисертацію Рибалка Яна Владиславовича «Метод оберненої задачі розсіювання для нелокальних інтегровних рівнянь», подану на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика і статистика» за спеціальністю 111 «Математика»

Солітонні рівняння зустрічаються при описі різноманітних природних явищ та відіграють важливу роль у нелінійній фізиці. Вперше солітони (локалізовані хвилі, які пружно взаємодіють одна з одною) помітили Забужскі та Краскал у 1960-х роках при виконанні числових експериментів із періодичною задачею для рівняння Кортевега-де Фріза (КдФ). Натхненні їхніми результатами, Гарднер, Грін, Крускал та Міура, Лакс, та Захаров і Шабат визначили поняття інтегровних (солітонних) рівнянь та розвинули загальний систематичний підхід до розв'язання початкових задач для інтегровних систем.

Інтегровність є фундаментальним фізичним поняттям, тому не дивно, що крім класичних інтегровних систем (таких як рівняння Кортевега-де Фріза, нелінійне рівняння Шредінгера, рівняння синус-Ґордона та ін.), все нові і нові, фізично цікаві інтегровні моделі постійно з'являються у полі зору дослідників – як фізиків, так і математиків. Зокрема, у 2013 році М. Абловіц та З. Мусслімані запропонували *нелокальне* нелінійне рівняння Шредінгера (ННРШ). Це рівняння було впроваджено як нова, нелокальна редукція класичної системи АКНС (системи Шредінгера), де нелокальність виникає завдяки накладеному зв'язку між значеннями окремих компонент системи в різних точках простору, позначених як x та $-x$. ННРШ має низку цікавих фізичних та математичних властивостей. Зокрема, воно є PT симетричною (PT symmetric) системою, і тому пов'язано з сучасною фізичною теорією таких систем, започаткованою Бендером та Боатчером наприкінці 1990-х років. Також ННРШ є окремим випадком систем типу Аліси і Боба (Alice-Bob systems), які описують різні фізичні явища, що одночасно відбуваються у двох (або більше) різних місцях, певним чином пов'язаних між собою. Нарешті, нещодавно було показано, що нелокальне нелінійне рівняння

Шредінгера тісно пов'язане з нетрадиційним парним рівнянням Ландау-Ліфшиця, і тому має відношення до теорії магнетизму.

Дисертаційна робота присвячена аналізу низки початкових задач (задач Коші, де даними є значення розв'язку на всій просторовій прямій) для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера. Дисертація складається з чотирьох розділів. У першому розділі зроблено огляд літератури, у якому, зокрема, наведені основні результати, отримані на сьогоднішній день у теорії нелокальних інтегровних рівнянь. У розділах 2–4 наведені основні результати дисертаційної роботи: у другому розділі розглядається задача Коші для ННРШ на нульовому фоні, а у розділах 3,4 автор розглядає задачі Коші з початковими даними типу «сходинки», тобто такими, які по-різному ведуть себе, коли просторова змінна прямує до одної та іншої нескінченності.

Для аналізу всіх задач, застосовується метод оберненої задачі розсіювання у формі задачі аналітичної факторизації типу Рімана-Гільберта. Цей метод виявився максимально ефективним при дослідженні локальних інтегровних рівнянь, зокрема (що, мабуть, є найважливішим), при дослідженні поведінки розв'язків задач з загальними початковими умовами (з певних функціональних класів) за великим часом. Тому не дивно, що рано чи пізно повинні були з'явитися спроби адаптувати цей метод до дослідження нелокальних нелінійних інтегровних рівнянь. Але виявилося (зокрема, у роботах здобувача), що така адаптація не є автоматичною, але потребує значних зусиль у подоланні численних аналітичних труднощів на її шляху. І головна заслуга здобувача полягає у тому, що йому вперше вдалося знайти правильний підхід до цієї (глобальної) задачі та отримати цілу низку оригінальних результатів (перш за все, асимптотичних), які не мають аналогів у теорії локальних рівнянь.

Для задачі на нульовому фоні, автором вперше запропонована та досліджена відповідна вихідна задача Рімана-Гільберта та отримані нові симетрії розв'язку цієї задачі. Для дослідження асимптотики за великим часом, було адаптовано нелінійний метод перевалу (метод Дейфта-Жу) до цієї задачі Рімана-Гільберта. Реалізація цього методу зажадала суттєвих змін, порівняно з локальними задачами, зокрема, з відповідною задачею для класичного (локального) нелінійного рівняння Шредінгера. Так, через відсутність низки симетрій, певна спектральна функція (яка відіграє важливу роль у побудові трансформацій задачі Рімана-Гільберта, у дусі нелінійного методу перевалу) не є, взагалі кажучи, дійснозначною (як це має місце у випадку локального рівняння) і, як наслідок, вона має «накрутку аргументу», коли її незалежна змінна пробігає дійсну вісь (у комплексній площині спектрального параметра). Ця обставина суттєво впливає як на процес асимптотичного аналізу, так і на його результат: виявляється, що розв'язок задачі Коші прямує до нуля зі швидкістю, яка залежить від напрямку, вздовж якого ми обчислюємо асимптотику. Такий асимптотичний режим є новим; у контексті інтегровних рівнянь, раніше він не спостерігався.

У розділі 3 розглядається задача Коші для фокусуючого ННРШ з початковими даними типу «сходинки». Відзначу, що задача саме з такими асиметричними крайовими умовами розглядається у літературі вперше, тому і запропонований та детально розроблений здобувачем метод її дослідження (знову ідейно пов'язаний з методом оберненої задачі розсіювання у формі задачі Рімана-Гільберта) виявився абсолютно оригінальним. Зокрема, вихідна задача Рімана-Гільберта має незвичну умову на сингулярність на контурі задачі, що ускладнює її подальший асимптотичний аналіз. Незважаючи на це, здобувач успішно подолав аналітичні труднощі, пов'язані з цією особливістю, та отримав асимптотику за великим часом розв'язку вихідної початкової задачі. Окрема, було показано, що розв'язок має якісно різну асимптотичну поведінку у двох секторах у x,t площині, причому межі цих секторів – прямі лінії, які виходять з точки 0 та можуть наближатися до прямої $x=0$ як завгодно близько: знайдений опис асимптотичної поведінки залишається вірним для будь-якої прямої, вздовж якої досліджується асимптотика, але оцінка залишку залежить від того, наскільки близькою є межа сектору до прямої $x=0$. Зокрема, показано, що у секторі з $x<0$ розв'язок прямує до нуля, а у секторі з $x>0$ він прямує до константи, яка залежить як від початкового даного, так і від напрямку в x,t площині. Особливістю отриманого асимптотичного режиму (у порівнянні з випадком локально рівняння) є те, що між цими секторами немає місця для перехідного сектору з прямолінійними межами, і тому перехід між секторами повинен існувати у тісних просторових рамках. Зазначу, що у випадку задач з даними типу сходинки для локального фокусуючого НУШ, такий сектор завжди існує, і асимптотика у цьому секторі зображується у термінах складних функцій, що осцилюють (зокрема, у термінах еліптичних функцій).

Нарешті, у четвертому розділі дисертаційної роботи вперше для нелокальних інтегровних рівнянь розглядається задача з початковим даним типу зміщеної сходинки. Можна сказати, що в цьому розділі яскраво показана особливість нелокального рівняння як системи, у якій відсутня трансляційна інваріантність. Це зроблено на прикладі задач з початковими даними, які у випадку локального рівняння мали б ідентичну асимптотику. Зокрема, виявлено, як асимптотика розв'язку задачі Коші для ННРШ кількісно залежить від величини зсуву початкової сходинки. Тут дуже несподіваними виявився результат про те, що чим більшим є зміщення, тим більше виникає зон (секторів) у площині x,t з якісно різною асимптотичною поведінкою розв'язку задачі Коші. Також автор зробив аналіз певних перехідних зон, де асимптотики у сусідніх секторах пов'язуються одна з одною за допомогою солітонів типу кінка.

До тексту можна зробити наступні зауваження:

1. У теоремах 2.3 та 4.2 можна було б розрахувати константи у випадку, коли коефіцієнти відбиття дорівнюють нулю, як це зроблено у теоремі 3.1.
2. Для наочності, на малюнку 4.3 можна було б зобразити більше точок омега, зокрема ті, які є сусідніми до точки ксі.
3. У розділі 4 можна було б більш детально пояснити, чим задача з початковим даним у вигляді сходинки зі зміщенням вправо, відрізняється від відповідної задачі з початковим даним у вигляді сходинки, яка зміщена вліво і чому розглядаються початкові дані саме першого типу.

Ці зауваження, безумовно, не впливають на загальне, цілком позитивне, враження від роботи. Вважаю, що дисертаційна робота «Метод оберненої задачі розсіювання для нелокальних інтегровних рівнянь» задовольняє всім вимогам, що передбачені наказом Міністерства науки і освіти України від 12.01.2017 № 40 «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації», а її автор, Рибалко Ян Владиславович, безумовно заслуговує на присудження ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика і статистика» за спеціальністю 111 «Математика».

Опонент
директор Інституту прикладної
математики і механіки НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
член-кореспондент НАН України, доцент І.І. Скрипнік

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ
ВІДДІЛ КАДРІВ
КОД 05420675
60

Підпис Скрипніка засвідчую:
Ст. інспектор з кадрів Дубовик Р.А.