ВІДГУК

на дисертаційну роботу Рибалка Володимира Олександровича "Існування і асимптотична поведінка розв'язків задач математичної фізики", подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика

Актуальність теми дисертації. Сучасні дослідження явищ природи приводять до нелінійних математичних моделей, що вказують на нелінійну картину світу, яка є набагато складнішою та більш багатогранною, ніж лінійна. Більша частина дисертаційної роботи Рибалка В.О. присвячена розробці нових методів дослідження різних типів нелінійних задач математичної фізики.

Один з них – це некомпактні варіаційні задачі для функціонала Гінзбурга-Ландау зі спеціальними крайовими умовами, які пов'язані з теорією фазових переходів у надпровідниках. Вагомий внесок у дослідження таких задач було зроблено в роботах Л. Берлянда, Д. Головатого, Ф. Бетюеля, Х. Брезіса, С. Джафара, Р. Жерара, П.-Л. Ліонса, П. Міронеску, Т. Рів'єра, С. Серфаті, Е. Санд'єра, П. Стернберга, Ф. Хелейна та інших математиків. Характерною особливістю таких задач є існування розв'язків, які локалізуються в околах дискретного набору точок, та залежність асимптотичної поведінки мінімізантів від степеня відображення, яке задається на межі області.

Дослідження задач усереднення в областях складної структури залишається одним з актуальних та інтенсивно розроблювальних напрямків сучасної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Це пов'язано з тим, що загальна поведінка матеріалів контролюється (визначається) їх мікроструктурою, а асимптотичні методи дають можливість знайти ефективні макро-характеристики врахувавши їх мікроструктуру. Історично вперше математичні результати асимптотичного характеру для крайових задач в перфорованих областях були отримані в роботі В.О. Марченка та Є.Я. Хруслова в 1964. Надалі ця тематика інтенсивно розвивалася і зараз можна відмітити, що вагомий внесок у розробці методів теорії усереднення в областях складної структури належить В.А. Марченку, Є.Я. Хруслову, В.В. Жикову, О.А. Олійник, І.В. Скрипнику, Ж.-Л. Ліонсу, Ф. Мюра, Д. Чіоранеску та багатьом іншим фахівцям. Одним з достатньо нових і ще мало розроблених, але безумовно актуальних напрямків в даній теорії є усереднення нелінійних задач у дрібно перфорованих областях. Саме цьому напрямку присвячений другий тип задач дисертаційної роботи.

Характерною рисою сучасних наукових досліджень є широке застосування математичних методів в природничих науках, останнім часом, особливо, в біології та медицині. Це і створення математичних моделей, що описують біологічні процеси, та дослідження існування розв'язків цих моделей. Більшість таких моделей зводиться до задач з вільними (рухомими) межами. Піонерськими роботами в цьому напрямку можна вважати праці Х. Грінсрана, А. Фрідмана, Б.В. Базалія та їх учнів. В дисертації досліджується задача з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті.

Дослідження диференціальних рівнянь з малими параметрами біля похідних (сингулярно збурені рівняння) почалося з робіт академіка А.М. Тіхонова в середині 50-их років минулого століття. Такі рівняння виступають в якості математичних моделей різноманітних процесів у фізиці, хімії, біології, техніці. При дослідженні сингулярно збурених задач були розроблені різні асимптотичні методи, серед яких – метод примежових функцій, або метод Люстерніка-Вішика, метод в'язкісних розв'язків (Л.-К. Еванс, Х. Іші), та інші. Теорія сингулярних збурень залишається предметом активних досліджень і по теперішній час. В дисертаційній роботі вивчається асимптотична поведінка спектральних задач для сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів. Саме несиметричність операторів становить значну складність і інтерес до таких задач.

Таким чином, в дисертаційній роботі Рибалка В.О. проведено актуальні і сучасні дослідження різноманітних важливих задач математичної фізики.

Зміст дисертації. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та 14 додатків.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, наведено зв'язок роботи з науковими темами досліджень, які проводилися у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна, сформульовано мету і завдання дослідження, вказано наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, особистий внесок здобувача, а також зазначено інформацію про апробацію результатів дисертації.

У першому розділі вивчено варіаційні задачі для функціоналів Гінзбурга-Ландау (як спрощений функціонал Гінзбурга-Ландау, так і повний, що враховує магнітні ефекти) у класі комплекснозначних функцій з одиничними абсолютними значеннями і заданими степенями відображення на зв'язних компонентах межі області. В цьому розділі отримано основні результати дисертації , а саме:

✓ Доведено існування скінченного порогового значення κ_1 параметра κ у спрощеному функціоналі Гінзбурга-Ландау

$$E_\kappa[u] = \frac{1}{2}\int_G |\nabla u|^2 dx + \frac{\kappa^2}{4}\int_G (|u|^2-1)^2 dx,$$

більше якого не існує глобальних мінімізантів з заданими одиничними степенями відображення на компонентах межі двозв'язних областей з ємністю меншою за число π, та існування глобальних мінімізантів, якщо $\kappa \in (0, \kappa_1)$.

✓ Доведено існування локальних мінімізантів з нулями (вихорами) функціонала Гінзбурга-Ландау (як спрощеного так і повного) у двозв'язних областях з заданими степенями відображень на межі. Ці локальні мінімізанти будуються як розв'язки спеціальної допоміжної задачі мінімізації, яка дає можливість виявити взаємозв'язок обмежень у цій задачі із заданими степенями відображень на межі у вихідній задачі. Крім того, вивчено асимптотичну поведінку цих локальних мінімізантів у границі Лондонів та показано, що вихорі наближаються до межі та в їх околах концентруються скінченні квантовані енергії.

✓ Розв'язано питання існування/неіснування глобальних мінімізантів повного функціонала Гінзбурга-Ландау з заданими степенями відображень на межі. Встановлено і вивчено сингулярну поведінку мінімізантів у двозв'язних областях при

$\kappa \to 1/\sqrt{2} - 0$; доведено існування вихорів біля межі та описано їх граничні положення.

✓ Досліджено структуру послідовностей Пале-Смейла пов'язаних з варіаційной задачею для спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау з заданими степенями відображень на межі. Описано механізм втрати компактності цих послідовностей і квантування відповідних енергій. За допомогою цих результатів встановлено існування критичних точок немінімізаційного характеру.

Зазначу, що дисертантом запропоновано спеціальну процедуру послідовної ідентифікації невідомих, що дозволило отримати оцінки для енергії достатньої точності щоб встановити граничні положення вихорів. Слід також зауважити, що через сингулярну поведінку мінімізантів методи лінеаризації для цієї задачі не працюють і наведений аналіз є суттєво нелінійним (це відноситься до всіх результатів першого розділу).

У другому розділі досліджено асимптотичні поведінки перших власних значень і відповідних власних функцій трьох різних спектральних задач для сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів.

Основна ідея цих досліджень грунтується на теоремі Крейна-Рутмана, яка стверджує, що перше власне значення λ_ε є дійсним числом та має кратність 1, а відповідна власна функція зберігає знак; тут $\varepsilon > 0$ – малий параметр задачі. Тому підстановкою $u_\varepsilon = e^{-W_\varepsilon/\varepsilon}$ задача зводиться до крайової задачі для сингулярно збуреного рівняння Гамільтона-Якобі. Для дослідження останньої задачі розвинуто асимптотичні методи, що базуються на принципі максимуму і понятті *в'язкісних розв'язків*.

У Підрозділі 2.1 вивчено задачу Діріхле для сингулярно збуреного несиметричного оператора з локально періодичними коефіцієнтами

$$\mathcal{L}_\varepsilon u = \varepsilon^2 a^{ij}(x, x/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon b^j(x, x/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x, x/\varepsilon^\alpha)u \tag{1}$$

в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, де α є фіксованим додатнім параметром.

Знайдено відповідну граничну спектральну задачу, коли $\varepsilon \to 0$, яка залежить від параметра α $\big(\alpha > 1,\ \alpha = 1,\ \alpha \in (0,1)\big)$, яка має рівно одне власне значення, до якого збігається послідовність $\{\lambda_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$.

Для уточнення границі послідовності $\{\lambda_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ та знаходження границі відповідних власних функцій розглядається така спектральна задача:

$$\varepsilon a^{ij}(x, x/\varepsilon)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + b^j(x, x/\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} + c(x, x/\varepsilon)u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon. \tag{2}$$

Існування і єдиність/неєдиність розв'язків граничної задачі визначається структурою так званої *множини Обрі*, яка відіграє роль прихованої межі. Дисертантом розглянуто типову ситуацію, коли множина Обрі складається із скінченного числа гіперболічних нерухомих точок і граничних циклів $\dot{\eta} = -\bar{b}(\eta)$, які цілком належать Ω.

Також детально вивчено поведінку власних функцій u_ε на масштабі $\sqrt{\varepsilon}$ в околі компоненти множини Обрі, де відбувається локалізація u_ε. При цьому у випадку граничного циклу використано усереднення у штучно введених рухомих координатах, що веде до параболічної задачі на власні значення. Як для нерухомих точок, так і граничних циклів основною проблемою, яку було успішно вирішено, є ідентифікація умов на нескінченності для знайдених граничних задач.

У Підрозділі 2.2 досліджується асимптотична поведінка основних станів сингулярно збуреної спектральної задачі для рівняння

$$\varepsilon a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + b^j(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} + c(x)u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon \tag{3}$$

в гладкій обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ з крайовою умовою Неймана. Знайдено границю послідовності $\{\lambda_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, а функції $W_\varepsilon = -\varepsilon \log u_\varepsilon$ рівномірно збігаються (з точністю до підпослідовності) до в'язкісного розв'язку задачі

$$\begin{cases} H(\nabla W(x), x) = 0 & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial W}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

де $H(p,x) = a^{ij}(x)p_i p_j - b^i(x)p_i$.

У Підрозділі 2.3 досліджуються спектральна задача для оператора

$$\varepsilon^2 a^{ij}(x_1, x/\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon b^j(x_1, x/\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x_1, x/\varepsilon)u \tag{5}$$

в тонкому циліндрі $(0, L) \times \varepsilon\omega$, де ω – гладка обмежена область в $\mathbb{R}^{N-1}$, з крайовою умовою Неймана на бічній поверхні та крайовими умовами Фур'є на основах.

Для опису примежової асимптотики біля основ циліндра вивчено відповідні спектральні задачі Стеклова у напівобмеженому циліндрі, які потім використано для виведення одновимірної граничної ефективної задачі, що описує асимптотичну поведінку основних станів. За певної структурної умови для ефективної задачі знайдено також двочленні асимптотичні формули для першого і наступних власних значень.

Третій розділ присвячений усередненню нелінійних задач у дрібно перфорованих областях. У Підрозділі 3.1, використовуючи теорію Γ-збіжності функціоналів, конструкції подібні мірам Янга та елементи методів опуклого аналізу, знайдено усереднений функціонал, до мінімізанта якого збігаються узагальнені функції складенні із степенів мінімізанта функціонала Гінзбурга-Ландау на межі порожнин (кругів) перфорованої області Ω_ε. При цьому, припускається, що значення параметра κ у функціоналі Гінзбурга-Ландау є достатньо великим, витримуються певні масштабні співвідношення між зовнішнім магнітним полем і діаметром кругів, та діаметр цих кругів є експоненціально малий відносно періоду перфорації ε.

У Підрозділі 3.2 вивчається асимтотична поведінка розв'язку крайової задачі

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(\nabla u_\varepsilon, x/\varepsilon) + \lambda u_\varepsilon = f \text{ в } \Omega_\varepsilon \\ a(\nabla u_\varepsilon, x/\varepsilon) \cdot \nu = 0 \text{ на } \partial\Omega \\ a(\nabla u_\varepsilon, x/\varepsilon) \cdot \nu = g(u_\varepsilon, x/\varepsilon) \text{ на } S_\varepsilon, \end{cases} \tag{6}$$

де область Ω_ε – обмежена та ε-періодично перфорована порожнинами, діаметр яких має порядок співрозмірний з ε. За умов, що вектор-функція $a = (a_1, \ldots, a_N)$ є строго монотонна та функція $g(u, y)$, яка є 1-періодичною відносно y, має нульове середнє значення

$$\int_{S\cap Y} g(u, y) d\sigma_y = 0 \quad (\forall u \in \mathbb{R}) \tag{7}$$

по межі порожнини в одиничному кубі, отримано відповідну усереднену задачу та доведено різні збіжності розв'язку u_ε (при $\varepsilon \to 0$ з точністю до підпослідовності) до розв'язку усередненої задачі. Аналогічні результати отримані для параболічної задачі.

У четвертому розділі основним об'єктом дослідження є двовимірна задача з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті. Вивчено питання існування найважливіших простих розв'язків, а саме: стаціонарних розв'язків і розв'язків типу біжучих хвиль. Для таких розв'язків вихідну задачу зведено до задачі з вільною межею для рівняння з експоненціальною нелінійністю (рівняння типу Ліувілля):

$$-\Delta S + S = \Lambda e^{S - xV} \quad \text{в } \Omega, \tag{8}$$

з крайовими умовами

$$S = 0 \;\text{ і }\; V\nu_x = \frac{\partial S}{\partial \nu} - \beta\kappa + \lambda \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{9}$$

де невідомими є область Ω, функція S, а також сталі $\Lambda \geq 0$ і λ. Встановлено існування континууму радіально симетричних нерухомих ($V = 0$) розв'язків задачі (8)–(9), та їх біфуркацію до біжучих хвиль.

Зауваження до змісту дисертації і автореферату.

1. Статтю

   Amaziane, B., Pankratov, L., Rybalko, V.: On the homogenization of some double porosity models with periodic thin structures. Applicable Analysis **88**(10-11), 1469–1492 (2009),

   яка включена до списку основних публікацій здобувача за темою дисертації під номером [4] (в дисертації, с. 11) та під номером [13] (в авторефераті, с. 27), потрібно виключити із списку основних праць, оскільки про задачу, яка розглядається в цій статті немає жодного слова в докторській дисертації.

2. Стаття

   Berlyand, L., Potomkin, M., Rybalko, V.: Phase-field model of cell motility: Traveling waves and sharp interface. C.R. Math. **354**(10), 986–992 (2016)

   яка включена до списку основних публікацій здобувача за темою дисертації під номером [16] (в дисертації, с. 12) та під номером [8] (в авторефераті, с. 26), це замітка в доповідях Французької Академії Наук, в якій формулюються результати без доведень. Крім того, результати цієї статті включаються в роботу

   Berlyand, L., Potomkin, M., Rybalko, V.: Sharp interface limit in a phase field model of cell motility. Netw. Heterog. Media **12**(4), 551–590 (2017), яка включена до списку основних публікацій здобувача за темою дисертації під номером [18] (в дисертації, с. 13) та під номером [9] (в авторефераті, с. 27) і в якій наведені повні доведення.

Таким чином, статтю [16], згідно вимог оформлення дисертацій (постанова президії ВАК України № 1-02/2 від 09.02.2000), також потрібно виключити із списку основних праць та перенести до другого списку, в якому наведено публікації, що додатково висвітлюють тему та результати дисертації.

3. В одному з пунктів новизни одержаних результатів дисертант зазначає: "*Знайдено новий колективний ефект від неоднорідностей в задачі усереднення монотонних операторів у перфорованих областях з умовою Фур'є на межі дірок.*"

   Однак, цей ефект був отриманий в працях інших математиків. Так, в статті

   D. Cioranescu, A. Damlamian, P. Donato, G. Griso, R. Zaki, "The periodic unfolding method in domains with holes" // SIAM J. Math. Anal. Vol. 44, No. 2 (2012)

   показано, що для лінійної задачі Неймана з неоднорідними умовами на межах порожнин, причому розглядається і випадок, коли не виконується припущення (7), в границі при $\varepsilon \to 0$ появляється неоднорідна умова Неймана на зовнішній межі $\partial\Omega$ в усередненій задачі.

   На жаль, дисертант не зробив критичного та порівняльного аналізу літератури по цій тематиці, і не процитував цієї роботи, як і інших робіт, наприклад,

   B. Cabarrubiasa, P. Donato, "Homogenization of a quasilinear elliptic problem with nonlinear Robin boundary conditions" // Applicable Analysis (2011),

   де вивчалися нелінійні задачі Фур'є в перфорованих областях.

   Вважаю, що цей пункт новизни одержаних результатів потрібно зняти.

4. В підрозділі 3.1 (с. 280) дисертант обгрунтовує заміну члена

$$\frac{\kappa^2}{4}\int_{\Omega_\varepsilon}(1-|u|^2)^2 dx$$

   у функціоналі Гінзбурга-Ландау поточковою умовою $|u| = 1$ таким чином:

   "*Цей перехід обгрунтовано в [32] у випадку фіксованого числа малих дірок, можна очікувати, що аналогічний результат є справедливим і у випадку великого числа дірок, проте доведення є складнішим*"

   і дальше без доведення переходить до дослідженя асимптотичної поведінки розв'язків спрощеної задачі мінімізації. Вважаю, що цей перехід є необгрунтованим.

5. Формулювання твердження теореми 3.2.2 в авторефераті не відповідає твердженню цієї теореми в дисертації. Так, в дисертації стверджується, що

   розв'язки u_ε задачі (3.2.1) і їх градієнти ∇u_ε двохмасштабно збігаються при $\varepsilon \to 0$ (з точністю до підпослідовності) до ...

і далі виписується двохмасштабна границя, яка є розв'язком двохмасштабної усередненої задачі;

а в авторефераті стверджується, що розв'язки u_ε збігаються у сенсі $\|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ по всій послідовності до розв'язку усередненої задачі.

6. При доведенні теореми 3.2.6 в додатку J дисертант обгрунтовує існування та єдиність розв'язку параболічної задачі з крайовими умовами Неймана та Фур'є, посилаючись на статтю

   J. Serrin, "The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables". // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A264, 413–496 (1969),

   де розглядається задача Діріхле для квазілінійних еліптичних крайових задач.

7. Дивно, що дисертант не досліджує єдиність розв'язків усереднених задач отриманих в підрозділі 3.2, хоча єдиність вихідної параболічної задачі (3.2.2) чомусь доводиться (див. попереднє зауваження).

   Маючи єдиність розв'язку усередненої задачі, можна посилити твердження теорем 3.2.2 та 3.2.6 і отримати збіжність розв'язків по всій послідовності при $\varepsilon \to 0$.

8. Згідно з вимогами до оформлення дисертацій, у висновках до кожного розділу, крім стислого викладення наведених у розділі наукових результатів, вказуються наукові проблеми, для розв'язання яких можуть бути застосовані результати дослідження, а також можливі напрямки продовження досліджень.

   Дисертант у своїх висновках до розділів тільки перераховує теореми, які були доведенні в розділі.

9. Як в у вступі дисертації (с. 24), так і в авторефераті (с. 5) зазначено: "*Важливий крок в дослідженні задач з вільною межею в біологічних моделях було зроблено А. Фрідманом і його співавторами [91], [92].*" Вважаю, що тут потрібно було згадати роботи українського математика Б.В. Базалія, зокрема, його статті

   B.V. Bazaliy, A. Friedman, "A free boundary problem for an elliptic-parabolic system: Application to a model of tumor growth", Communications in PDE, 28 (2003) 517-560;

   B.V. Bazaliy, A. Friedman, "Global existence and stability for an elliptic-parabolic free boundary problem; An application to a model of tumor growth", Indiana University Math. J., 52 (2003) 1265-1304,

   які також мають великий вплив на дослідження математичних моделей в біології та медицині.

10. Для однозначного трактування твердження теореми 1.1.1 потрібно у формулюванні теореми замість $\kappa < \kappa_1$ писати $\kappa \in (0, \kappa_1)$.

11. У підрозділі 2.1 були отримані цікаві загальні результати про поведінку першого власного значення в припущені, що множина Обрі має певну структуру. Потрібно

було б навести приклади конкретних диференціальних рівнянь і знайти множини Обрі відповідних гамільтоніанів, підтвердивши тим самим обгрунтованість вищезгаданого припущення.

12. В підрозділі 3.1 не чітко описано перфоровану область Ω_ε, зокрема, немає обмежень на гладкість межі перфорованої області. Якщо межа $\partial\Omega_\varepsilon$ не є ліпшіцевою, то деякі твердження цього підрозділу – некоректні.

13. В дисертаційній роботі багато описок і граматичних помилок, наприклад, в додатку J (с. 416) пропущено посилання на підрозділ; в зауваженні 3.1.4 (с. 284) використовується написання англійською мовою.

Зроблені зауваження не впливають на загальне враження від роботи і її позитивну оцінку.

В дисертаційній роботі Рибалка В.О. отримано низку цікавих результатів, які є новими та актуальними. Дослідження проведені в дисертації дуже громіздкі і трудомісткі. Тому багато додаткових доведень дисертант переніс в 14 додатків до дисертації.

Основні результати дисертації строго і повністю доведені та опубліковані в 18 статтях в міжнародних журналах високого рівня, переважна більшість яких належить до першого і другого квартилів (Q1 і Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank або Journal Citation Reports, зокрема, до квартилю (Q1) належить 9 публікацій ([5], [6], [7], [11], [12], [13], [14], [19], [20], нумерація згідно першого списку в дисертації, с. 11-13), до квартилю (Q2) належить 5 публікацій ([3], [9], [10], [17], [18]), і до квартилю (Q3) – 3 публікації ([1], [2], [15]). Тут враховано зауваження 1 та 2.

Результати роботи пройшли апробацію на чисельних семінарах і наукових конференціях. Автореферат в цілому відповідає змісту дисертації, за виключенням зауваження 5.

З огляду на сказане вище, вважаю, що дисертація Рибалка В.О. "Існування і асимптотична поведінка розв'язків задач математичної фізики", за обсягом проведених досліджень, їх актуальністю і науковим рівнем, новизною результатів та кількістю публікацій задовольняє вимогам пп. 9, 10, 12-14 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабінету міністрів України №567 від 24.07.2013 зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з постановами КМУ №659 від 19.08.2015, №1159 від 30.12.2015, №567 від 27.07.2016, та наказами МОН України №40 від 12.01.2017 і №1220 від 23.09.2019) щодо докторських дисертацій, а її автор, Рибалко Володимир Олександрович, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика.

Професор кафедри математичної фізики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка,
доктор фізико-математичних наук, професор Т. А. Мельник

Підпис за[свідчую]
Вчений се[кретар]
Караульна Н.[В.]
16.12.20[..]