

ВІДГУК

Відгуки надіслані до ради
17.03.2014
М.В. Івченко



опонента на дисертаційну роботу

Рибалка Яна Владиславовича

«Метод оберненої задачі розсіювання для нелокальних

інтегровних рівнянь»,

представлену на здобуття ступеня доктора філософії

з галузі знань 11 «Математика і статистика»

за спеціальністю 111 «Математика»

У дисертаційній роботі Рибалка Яна Владиславовича започатковано систематичне дослідження початкових задач для нового класу інтегровних нелінійних рівнянь з частинними похідними – нелокальних рівнянь, де нелокальність проявляється у тому, що рівняння пов'язує функції з аргументами (просторовими або часовими) різних знаків.

Базовим (і, мабуть, найпростішим) прикладом таких рівнянь є нелокальне нелінійне рівняння Шредінгера (ННРШ). Це рівняння запровадили Абловіц (один з фундаторів теорії інтегровних систем) та Муслімані у 2013 році як окремий випадок класичної інтегровної системи Абловца-Каупа-Ньюелла-Сегура (АКНС), у якому залежні змінні пов'язані між собою специфічним співвідношенням симетрії. Система рівнянь АКНС є добре відомою ще з середини 1970-х років, але, дещо несподівано, запропонована Абловіцем і Муслімані нелокальна редукція побачила світ та стала об'єктом активних досліджень лише відносно недавно. Вона відразу викликала значний інтерес наукової спільноти через низку цікавих та неочікуваних властивостей. Зокрема, рівняння ННРШ є *PT* (parity-time) симетричною системою, і через це воно тісно пов'язано з теорією таких систем, що є відносно новим та перспективним напрямом в сучасній фізиці. Отже, можна сказати, що дослідження цього рівняння мотивується двома обставинами: (i) воно є інтегровним та (ii) воно є *PT* симетричним.

Той факт, що ННРШ, як інтегровна система, має точні солітонні розв'язки (включаючи розв'язки з різною поведінкою на просторових краях), не є дивним. Певним сюрпризом виявилась властивість цих солітонів вибухати при скінченних значеннях часової змінної, причому у нескінченній кількості значень цієї змінної. Це дуже сильно відрізняє ННРШ від класичних інтегровних моделей, де солітони є нескінченно гладкими класичними розв'язками відповідних нелінійних рівнянь. З

точки зору фізичних застосувань, ННРШ є калібрувально еквівалентним до нетрадиційного парного рівняння Ландау-Ліфшиця, яке має відношення до теорії магнетизму.

В існуючій літературі, яка присвячена нелокальному нелінійному рівнянню Шредінгера та інших нелокальних рівнянь, переважають дослідження класів точних розв'язків, таких як солітони, хвилі-«вбивці», періодичні розв'язки і т.д., які можуть бути отримані за допомогою прямих методів інтегрування. З іншого боку, бракує робіт, присвячених дослідженню загальних початкових та початково-крайових задач для цих рівнянь. Через те, що ННРШ є інтегровним рівнянням, для таких досліджень природно було б застосувати могутній апарат – метод оберненої задачі розсіювання (МОЗР), винахід якого виявився одним з найгучніших досягнень у математичній фізиці другої половини 20-го століття. Цей метод дає можливість звести вихідну нелінійну задачу до розв'язання певного набору лінійних задач, і така «лінеаризація» не тільки дає формальну «явну» формулу для розв'язку, але й може бути ефективно використана для дослідження його важливих якісних властивостей, зокрема, поведінки за великим часом. Факт фактичної відсутності відповідних робіт свідчить про високий рівень нетривіальності у адаптації методу оберненої задачі розсіювання саме до нелокальних задач, і тому досягнення здобувача у цьому напрямку, які відображені у дисертаційній роботі, є, без усякого перебільшення, значним кроком у розвиток теорії інтегровних систем.

У дисертаційній роботі розглядаються початкові задачі для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера на нульовому та ступінчастому фоні. Задача на нульовому фоні розглядалася раніше Абловіцем та Мусслімані у 2016 році, де був розроблений метод оберненої задачі розсіювання та знайдені точні солітонні розв'язки. У Розділі 2 дисертаційної роботи, запропоновано та розвинуто такий формалізм МОЗР (у вигляді задачі факторизації типу Рімана-Гільберта), який дозволяє не тільки отримати певне зображення розв'язку початкової задачі, але й розробити, на його основі, метод аналізу розв'язку за великим часом, адаптуючи та застосовуючи відповідний варіант нелінійного методу перевалу (метод Дефта-Жу). Подолавши значні аналітичні труднощі, які, зокрема, пов'язані з відсутністю певних симетрій спектральних функцій, здобувач отримав асимптотику розв'язку вихідної початкової задачі як для фокусуєчого, так і для дефокусуєчого варіантів ННРШ. Зазначу, що виявлений асимптотичний режим є якісно новим у теорії інтегровних задач: у ньому порядок прямування до нуля розв'язку залежить,

взагалі кажучи, від напрямку, вздовж якого розглядається асимптотика (у випадку класичного (локального) нелінійного рівняння Шредінгера, де цей порядок завжди дорівнює $\frac{1}{2}$).

Розділ 3 присвячений суттєво відмінному класу початкових задач для фокусуєчого ННРШ, де початкові дані характеризуються різною асимптотичною поведінкою як функції просторової змінної – так звані *початкові дані типу сходинки*. Такі задачі для нелокальних рівнянь взагалі розглядаються вперше. Для них у дисертаційній роботі були реалізовані усі основні етапи застосування методу оберненої задачі розсіювання: запропоновано формалізм задачі Рімана-Гільберта, що відповідає специфіці задачі, та отримано асимптотику розв'язку початкових задач. Зазначу, що застосування методу Дейфта-Жу у цьому випадку стикнулося з труднощами, пов'язаними зі специфічними конструктивними особливостями задачі Рімана-Гільберта, зокрема, зі специфічною сингулярністю на контурі цієї задачі. У результаті проведеного асимптотичного аналізу, показано, що розв'язок прямує до нуля при $x < 0$ (що відповідає крайовим умовам), та до «модульованих констант» (тобто сталих значень, які є різними для різних значень x/t , за умови, що ці значення зафіксовані, коли t зростає) при $x > 0$, які також узгоджені з крайовими умовами.

Нарешті, у Розділі 4 дисертації розглянута задача Коші з початковим даним типу «зміщеної сходинки». І тут знову треба відзначити, що така постановка задачі для нелокальних інтегрованих рівнянь з'явилася у роботах здобувача вперше в світовій літературі. Розроблений здобувачем відповідний формалізм задачі Рімана-Гільберта виявився ще більш оригінальним: у ньому виявилися пов'язаними позиції точок, у яких ставляться умови на лишки, та локації певних точок на контурі задачі, у яких має місце набуття критичних значень аргументом відповідної спектральної функції. При цьому обидві множини точок виявилися такими, що визначають межі секторів у площині простір-час, у яких асимптотика розв'язку має якісно різний характер. Зважаючи на те, що кількість згаданих точок залежить не тільки від форми початкової функції, але й від «розташування» її вздовж просторової осі (що відбиває властивість відсутності трансляційної інваріантності у нелокальних задачах), можна констатувати, що отримана асимптотична картина є унікальною у теорії інтегрованих систем.

У якості зауважень та побажань, відзначу наступне:

1. Роблячи посилання на книгу (зокрема, перед Твердженням 3.6), краще робити його більш повним, вказуючи конкретну главу та розділ.
2. Опис достатніх умов, яким повинні задовольняти початкові дані у Теоремах 2.1, 3.1 та 4.1, де сформульовано основні результати, можна було б зробити більш уніфіковано (зокрема, всюди припускати, що початкові дані прямують до крайових умов з експоненціальною швидкістю).
3. У дисертації, системи рівнянь іноді пишуться з фігурною скобкою, а іноді без неї. Оформлення систем рівнянь краще було б зробити універсальним.

Втім, ці зауваження не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

Робота має теоретичний характер, у якій започатковано нову область досліджень у теорії інтегровних систем. Усі результати дисертації повністю викладені у трьох наукових статтях, опублікованих у престижних міжнародних журналах, які входять до баз Scopus та Web of Science. Запропоновані методи та отримані результати можуть бути використані у подальших дослідженнях інтегровних систем з різними типами нелокальності. Вважаю, що дисертаційна робота «Метод оберненої задачі розсіювання для нелокальних інтегровних рівнянь» задовольняє всім вимогам, що передбачені наказом Міністерства науки і освіти України від 12.01.2017 № 40 «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації», а її автор, Рибалко Ян Владиславович, безумовно заслуговує на присудження ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика і статистика» за спеціальністю 111 «Математика».

Опонент

професор кафедри фундаментальної
математики факультету математики
і інформатики Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна,
доктор фіз.-мат. наук, професор

В.Д. Гордевський



В.Д. Гордевський
Заступник служби управління персоналом