Анотація

Рибалко Я.В., "Метод оберненої задачі розсіювання для нелокальних інтегровних рівнянь," – кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «математика» (галузь знань 11 «математика та статистика»). Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України.

Предметом дослідження дисертаційної роботи є початкові задачі для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера (ННРШ):

$$\begin{aligned} &iq_t(x,t) + q_{xx}(x,t) + 2\sigma q^2(x,t)\bar{q}(-x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ &q(x,0) = q_0(x), \end{aligned}$$

де $i^2 = -1$, $q(x,t) \in \mathbb{C}$, $\bar{q}$ позначає комплексно спряжену до q, а параметр σ приймає значення 1 (фокусуюче рівняння) або -1 (дефокусуюче рівняння). Розглядаються задачі з двома типами крайових умов при $|x| \to \infty$: (i) нульовими крайовими умовами, тобто $q(x,t) \to 0$ достатньо швидко при $x \to \pm\infty$ для всіх $t \geq 0$ (включаючи задану початкову функцію $q(x,0)$), та (ii) асиметричними ступінчастими крайовими умовами:

$$\begin{aligned} &q(x,t) = o(1), && x \to -\infty, \quad t \geq 0, \\ &q(x,t) = A + o(1), && x \to +\infty, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

де $A > 0$, а через $o(1)$ позначено функції, що прямують до нуля. Зазначимо, що ступінчаста початкова задача для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера розглядається вперше.

У Розділі 2 дисертаційної роботи розглядається задача Коші зі спадаючими до нуля початковими даними, де розв'язок при всіх фіксованих $t > 0$ теж має спадати до нуля, коли $|x| \to \infty$. Для такої початкової задачі розроблено (підрозділ 2.1) метод оберненої задачі розсіювання у вигляді задачі факторизації Рімана-Гільберта, який виявився зручним для подальшого асимптотичного аналізу поведінки розв'язків задачі Коші за великим часом (підрозділ 2.2). Доведено, що вихідна задача Рімана-Гільберта задовольняє новій (нелокальній) умові симетрії. Для отримання асимптотики за великим часом, узагальнено так званий нелінійний метод перевалу (метод Дейфта і Жу) на випадок, коли певна комбінація спектральних функцій, що розглядається на контурі стрибка задачі Рімана-Гільберта, не є дійснозначною функцією (на відміну від випадку класичного (локального) нелінійного рівняння Шредінгера та інших відомих локальних нелінійних інтегровних рівнянь). Зокрема, показано, що для отримання коректних оцінок у асимптотичних формулах, спектральні функції мають задовольняти певну умову на поведінку аргументу на дійсній осі, яка апріорі виконується у випадку локальних інтегровних рівнянь. Таке припущення щодо поведінки аргументу спектральних функцій зроблено вперше у асимптотичному аналізі інтегровних систем.

Основною особливістю отриманого асимптотичного результату є те, що степінь спадання розв'язку початкової задачі до нуля при $t \to \infty$ вздовж напрямку $x/t = const$ залежить, взагалі кажучи, від значення x/t (на відміну від локального нелінійного рівняння Шредінгера, де головний асимптотичний член (у випадку відсутності солітонів) прямує до нуля як $O(t^{-1/2})$ у будь-якому напрямку). Більш точно, доведено, що головний член асимптотики розв'язку має вигляд

$$q(x,t) \sim t^{-\frac{1}{2}+\operatorname{Im}\nu(-\xi)} p(-\xi) \exp\left\{4it\xi^2 - i\operatorname{Re}\nu(-\xi)\ln t\right\}, \quad t \to \infty,$$

де $\xi = \frac{x}{4t} = const$, а функції $\nu(-\xi)$ та $p(-\xi)$ визначаються явно у термінах спектральних функцій, які, в свою чергу, визначаються початковими даними $q_0(x)$. Необхідною умовою існування такої асимптотики є умова

$\operatorname{Im}\nu(-\xi) \in (-1/2, 1/2)$, яка формалізує згадану вище умову на поведінку аргументу певної спектральної функції (зазначимо, що у випадку локального нелінійного рівняння Шредінгера, $\operatorname{Im}\nu(-\xi) \equiv 0$ для будь-якого початкового даного).

У Розділі 3 розглядається початкова задача для нелокального фокусуючого нелінійного рівняння Шредінгера (тобто, у випадку $\sigma = 1$) зі ступінчастими граничними умовами: $q(x,t) \to 0$ при $x \to -\infty$ та $q(x,t) \to A$ при $x \to \infty$, де $A > 0$. Для цієї задачі вперше запропоновано та детально розроблено метод обереної задачі розсіювання. Зокрема, показано, що відповідні спетральні функції мають особливості на неперервному спектрі, отримано зв'язки (відсутні у випадку локального рівняння) між певними спектральними функціями та дискретним спектром, та отримано точний солітонний розв'язок типу кінка

$$q(x,t) = \frac{A}{1 - e^{-Ax - iA^2 t + i\phi_1}}, \quad \phi_1 \in \mathbb{R},$$

який має ізольовані, періодичні по t сингулярності у точках $x = 0$, $t = t_n$, де $t_n = \frac{\phi_1}{A^2} + \frac{2\pi}{A^2} n$, $n \in \mathbb{Z}$. Показано, що вихідна задача Рімана-Гільберта (у тому числі, у випадку початкових даних у вигляді "чистої сходинки") має специфічну сингулярність на контурі стрибка задачі. Для проведення асимптотичного (за великим часом) аналізу, розроблено відповідну адаптацію нелінійного метод перевалу, яка, як і у випадку задачі на нульовому фоні (зі спадаючими початковими даними), ускладнюється "накруткою" аргументу певної спектральної функції. Показано, що асимптотика вздовж напрямків $\xi = \frac{x}{4t} = const$ має якісно різний вигляд у двох чверть-площинах півплощини $-\infty < x < \infty$, $t > 0$: (i) при $x < 0$, розв'язок описується формулою типу Захарова-Манакова, особливістю якої є залежність швидкості спадання до 0 від напрямку; (ii) при $x > 0$, розв'язок прямує до "модульованої константи", тобто сталого значення, яке залежить від напрямку $\xi = \frac{x}{4t} = const$:

коли $t \to \infty$,

$$q(x,t) \sim \begin{cases} t^{-\frac{1}{2}-\operatorname{Im}\nu(\xi)}\alpha_1(\xi)\exp\left\{4it\xi^2 - i\operatorname{Re}\nu(\xi)\ln t\right\}, \ x<0, \\ A\delta^2(0,\xi), \ x>0, \end{cases}$$

де функції $\nu(\xi)$, $\alpha_1(\xi)$ та $\delta^2(0,\xi)$ явно виписуються у термінах спектральних функцій, що відповідають початковому даному $q_0(x)$. Як і у випадку задачі на нульовому фоні, необхідною умовою існування такої асимптотики є умова $\operatorname{Im}\nu(-\xi) \in (-1/2, 1/2)$.

У Розділі 4 розглядається задача Коші зі ступінчастими граничними умовами $q(x,t) \to 0$ при $x \to -\infty$ та $q(x,t) \to A > 0$ при $x \to \infty$ для дефокусуючого рівняння (тобто з $\sigma = -1$). Центральна увага приділяється задачам з початковими даними, близькими, у певному сенсі, до "чистої сходинки зі зміщенням", тобто до $q_{R,A}(x)$, де $q_{R,A}(x) = 0$ при $x < R$ та $q_{R,A}(x) = A$ при $x > R$, де $R > 0$. Зазначимо, що для нелокальних інтегровних рівнянь, задача з початковим даним у вигляді сходинки зі зміщенням розглядається вперше. Через те, що нелокальне нелінійне рівняння Шредінгера (на відміну від його локального аналога) не є трансляційно інваріантним, поведінка розв'язків таких задач апріорі має суттєво залежати від параметра R.

Для цієї задачі також був розроблений метод оберненої задачі розсіювання у формі задачі факторизації Рімана-Гільберта. Виявлено характерні риси даних для задачі Рімана-Гільберта (структура дискретних даних та властивості функцій на контурі стрибка), які суттєво відрізняються у порівнянні з локальними задачами. Зокрема, певні спектральні функції мають "накрутку" аргументу більшу, ніж π, у точках на неперервному спектрі, кількість яких залежить від R. Наявність таких точок суттєво впливає на асимптотичний аналіз і, як, насідок, на кінцевий асимптотичний результат. Показано, що асимптотика вздовж напрямків $\xi = \frac{x}{4t} = const$ є якісно різною у різних секторах у (x,t) площині, кількість яких залежить від зв'язку між A та R (тобто між амплітудою граничних умов та величиною зміщення): при фіксованому A, чим більше R, тим більшою є кількість секторів з якісно різною поведінкою розв'язку за великим часом. Ці сектори можна віднести до двох різних груп, які чергуються між собою: у секторах першої групи, розв'язок прямує до нуля, а у секторах другої групи розв'язок наближається до константи (залежної від значення x/t).

Точніше, має місце наступний асимптотичний результат. Нехай $n \in \mathbb{N}$ таке, що $\frac{(n-1)\pi}{A} < R < \frac{n\pi}{A}$, і нехай початкові дані породжують числа $\{p_j\}_1^n$ і $\{\omega_j\}_1^{n-1}$ ($p_j \in \mathbb{C}$ із $\operatorname{Im} p_j > 0$ та $\omega_j \in \mathbb{R}$) (у спосіб, аналогічний тому, як подібні числа породжуються "чистою сходинкою зі зміщенням"), які задовольняють нерівностям

$$-\infty < \operatorname{Re} p_n < -\omega_{n-1} < \operatorname{Re} p_{n-1} < -\omega_{n-2} < \cdots < \operatorname{Re} p_1 < 0.$$

Тут $\{p_j\}_1^n$ – нулі відповідної спектральної функції, а числа $\{\omega_j\}_1^{n-1}$ фігурують в умовах на $\operatorname{Im}\nu$: $\operatorname{Im}\nu(\xi) - m \in (-1/2, 1/2)$ при $-\omega_{n-m} < \xi < \operatorname{Re} p_{n-m}$, та $\operatorname{Im}\nu(-\xi) - m \in (-1/2, 1/2)$ при $\omega_{n-m-1} < \xi < -\operatorname{Re} p_{n-m}$, $m = \overline{0, n-1}$. Тоді існують $4n$ секторів у напівплощині (x,t) з $t > 0$, у яких головний член асимптотики при $t \to \infty$ має наступний вигляд:

$$q(x,t) \sim \begin{cases} A\delta^2(0,\xi) \displaystyle\prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\xi}{p_{n-s}}\right)^2, \quad -\operatorname{Re} p_{n-m} < \xi < \omega_{n-m}, \\ t^{-\frac{1}{2} - \operatorname{Im}\nu(\xi) + m} \alpha_3(\xi) \exp\{4it\xi^2 - i \operatorname{Re}\nu(\xi) \ln t\}, \\ \qquad\qquad -\omega_{n-m} < \xi < \operatorname{Re} p_{n-m}, \\ \dfrac{-4\overline{p}_{n-m}^2}{A\overline{\delta^2}(0,-\xi)} \displaystyle\prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\overline{p}_{n-s}}{\xi}\right)^2, \quad \operatorname{Re} p_{n-m} < \xi < -\omega_{n-m-1}, \\ t^{-\frac{1}{2} + \operatorname{Im}\nu(-\xi) - m} \alpha_4(\xi) \exp\{4it\xi^2 - i \operatorname{Re}\nu(-\xi) \ln t\}, \\ \qquad\qquad \omega_{n-m-1} < \xi < -\operatorname{Re} p_{n-m}. \end{cases}$$

Тут $m = \overline{0, n-1}$, $\omega_0 = 0$, $\omega_n = +\infty$, а функції $\delta(0,\xi)$, $\alpha_3(\xi)$, $\alpha_4(\xi)$ та $\nu(\xi)$ визначаються у термінах спектральних функцій, порождених початковими даними.

Ключові слова: нелокальне нелінійне рівняння Шредінгера, метод обер-

неної задачі розсіювання, задача Рімана-Гільберта, нелінійний метод перевалу.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Статті

1. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation with step-like initial data,” Journal of Differential Equations **270**, 694–724 (2021).

2. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation,” Journal of Mathematical Physics **60**, 031504 (2019).

3. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “Defocusing nonlocal nonlinear Schrödinger equation with step-like boundary conditions: long-time behavior for shifted initial data”, Journal of Mathematical Physics, Analysis and Geometry, **16**, No.4, 418–453 (2020).

4. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “Riemann-Hilbert approach for the integrable nonlocal nonlinear Schrodinger equation with step-like initial data”, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics **88**, 4–16 (2018).

Тези конференцій

5. Ya. Rybalko, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger”, 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications. June 18-20, Vinnytsia, Ukraine.

6. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “The integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation: Riemann-Hilbert approach and long-time asymptotics”, Differential Equations and Control Theory. V.Karazin Kharkiv National University, September 25-27, 2018, Kharkiv, Ukraine.

7. VI Ya. Rybalko, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation with step-like initial data”, International Conference.

Analysis and Mathematical Physics. B. Verkin Inst. LTPE. June 18-22, 2018.

8. Ya. Rybalko, "Long-time asymptotics for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation on the line", V International Conference. Analysis and Mathematical Physics. B. Verkin Inst. LTPE, V.Karazin Kharkiv National University. June 19-24, 2017.

9. Ya. Rybalko, "Long-time asymptotics for solutions of the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation", Modern problems in mathematics. V.Karazin Kharkiv National University. April 25-26, 2017.