ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію
Резуненка Олександра Вячеславовича
"*Якісні властивості динамічних систем, що породжені нелінійними диференціальними рівняннями у частинних похідних з загаюванням*",
що представлена на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук за спеціальністю
01.01.03 — математична фізика

1. Актуальність теми дисертаційного дослідження

Робота виконана в рамках досліджень кафедри математичного аналізу та кафедри фундаментальної математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Предметом дослідження даної дисертації виступають якісні властивості нескінченновимірних динамічних систем, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями у частинних похідних. Необхідність в розбудові умов розв'язності та дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь з загаюванням виникає через їх широке застосування при моделюванні різноманітних динамічних процесів в біології, медицині, інженерії та інших областях. Зазвичай ці питання досить успішно розв'язуються в рамках класичного підходу за умови, що ефект загаювання не залежить від фазової змінної. Проте, автором дисертації розглядається такий клас нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних з урахуванням ефектів загаювання, що можуть залежати від стану системи. В цьому випадку перевірка умов за яких відповідні початково-крайові задачі є коректно розв'язними за Ж. Адамаром є нетривіальною або неможливою. В зв'язку з цим ясно, що будь-які подальші дослідження в побудові та обгрунтувані нових достатніх умов розв'язності для окресленого класу задач, дослідження якісної поведінки відповідних динамічних систем є актуальною задачею. В контексті наведеного вважаю, що тема дисертаційної роботи Резуненка О.В. є актуальною.

2. Наукова новизна одержаних результатів

До найбільш важливих результатів даного дослідження, які визначають наукову новизну роботи та виносяться на захист, варто віднести наступні:

1. Збудовано інерційний многовид із загаюванням, для параболічних та гіперболічних рівнянь зі сталим загаюванням.

2. Збудована родина наближених інерційних многовидів, які проходять крізь всі стаціонарні точки динамічної системи, що збудована за розв'язками параболічних рівнянь зі сталим загаюванням.

3. Збудовані інерційний многовид із загаюванням та родина наближених інерційних многовидів, для рівнянь у частинних похідних другого порядку за часом зі сталим загаюванням.

4. Запропонована нова умова на зосереджене загаювання, що залежить від стану (так звана "ігноруюча умова"), за якої початково-крайова задача для параболічних рівнянь є коректно розв'язною на просторі неперервних функцій.

5. Запропонована "узагальнена ігноруюча умова"на зосереджене загаювання, що залежить від стану, за якої початково-крайова задача для параболічних рівнянь є коректно розв'язною на просторі неперервних функцій.

6. Запропоновано та обгрунтовано умови для коректної розв'язності в просторі неперервних функцій для параболічних рівнянь зі змішаними типами загаювання, що залежать від стану.

7. Запропонована та досліджена неавтономна ігноруюча умова для неавтономних нелінійних диференціальних рівнянь.

8. Запропоновані нові постановки задач в метричних нелінійних просторах, в яких коректно розв'язні параболічні рівняння із зосередженими загаюваннями, що залежать від стану.

9. Знайдені умови існування глобальних компактних атракторів для параболічних рівнянь із різними типами загаювань (зосереджені, розподілені, змішані), що залежать від стану.

10. Отримано умови фрактальної скінченновимірності глобальних атракторів для рівнянь у частинних похідних із загаюваннями, що залежать від стану.

11. Отримано умови коректної розв'язанності для систем, що описують динаміку вірусних захворювань із урахуванням відповідей імунної системи та просторової неоднорідності інфікованих органів. Досліджена стійкість стаціонарних станів таких системи.

3. Аналіз публікацій та повнота відображення результатів в авторефераті дисертації

За результатами наукових досліджень опубліковано в 39 наукових роботах, з них — 24 наукові статті у фахових наукових виданнях, що входять до наукометричних баз даних, та 15 тез доповідей на міжнародних наукових конференціях. Результати роботи за темою дисертації доповідалися та обговорювалися на семінарах кафедри математичної фізики та обчислювальної математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (керівник чл.-кор. НАН України І.Д. Чуєшов), математичному семінарі ФТІНТ НАН України (керівник акад. НАН України Є.Я. Хруслов), семінарі, що присвячений 60-ти річчю проф. Г.М. Скляра (керівник проф. В.І. Коробов), двічі на семінарі Математичного інституту Університету м.Гісена, Німеччина (керівник проф. Х.-О. Вальтер), математичному семінарі університету Нью Фаундленда, Канада (керівник проф. К. Зоу), семінарі кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники проф. Т.А. Мельник, проф. В.Г. Самойленко), семінарі кафедри диференціальних рівнянь Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (керівник проф. П.І. Когут).

Перелік публікацій та їх зміст відповідають темі дисертації, в повному обсязі відображають її основні положення, наукові результати та висновки, свідчать про їх новизну. Зміст автореферату відповідає змісту дисертації. В ньому достатньо повно відображені основні положення і висновки дисертації. У дисертації і авторефераті визначено особистий внесок дисертанта для тих друкованих праць, які опубліковані в співавторстві.

4. Оцінка змісту дисертації і її завершеності

Дисертація є завершеною науковою роботою, виконаною на актуальну тему. Дисертація написана чіткою і ясною мовою, з логічним способом викладення матеріалу. Дисертація складається зі вступу, 6 розділів, висновків, списку використаних першоджерел, 4 додатків, та супроводжується анотаціями та списком публікацій здобувача за темою дисертації. Метою роботи є побудова динамічних систем та дослідження їх асимптотичних властивостей для еволюційних задач математичної фізики та біології, які описуються диференціальними рівняннями із загаюваннями різної природи.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету і задачі дослідження, виділено наукову новизну та практичну цінність отриманих результатів, зазначено особистий внесок здобувача, апробацію роботи та публікації.

В **першому розділі** зроблено огляд літератури за темою дисертації, викладено основні поняття, ідеї та методи, які пов'язані з напрямком досліджень, та результати щодо споріднених проблем, отриманих іншими авторами. Наведено порівняльний аналіз із деякими роботами, що містять подібні результати.

Основним об'єктом досліджень **другого розділу** дисертації виступає наступне диференціальне рівняння:

$$\frac{du}{dt} + Au = B(u_t) \quad \text{для } t > \sigma. \tag{1}$$

де $u_t(\theta) = u(t+\theta)$, $\forall\,\theta \in [-r, 0]$, A — додатній лінійний оператор з дискретним спектром в сепарабельному гільбертовому просторі H зі щільною областю визначення $D(A) \subset H$, $B : C_\alpha := C(a, b; D(A^\alpha)) \to H$ — нелінійне відображення таке, що

$$B(v) = B_0(v(0)) + B_1(v), \quad \forall\, v \in C_\alpha,$$

а відображення $B_0 : D(A^\alpha) \to H$ та $B_1 : C_\alpha \to H$ при $\alpha \in [0, 1/2]$ є ліпшицевими у відповідних парах просторів. Характерною ознакою рівняння (1) є припущення щодо сталості загаювання, яке в свою чергу може бути зосередженим, розподіленим та змішаним. Проте суттєвим є те, що такі загаювання не залежать від стану системи.

Для такого класу рівнянь автором досліджено умови існування інерційного многовиду із загаюванням (ІМЗ) для системи (1). Окремо розглянуто задачу побудови наближеного інерційного многовиду (НІМ) для параболічних рівнянь з загаюванням. Ключовою ідеєю для такої побудови послужив знайдений автором зв'язок між поняттями ІМЗ та НІМ. Це дозволило не лише побудувати НІМ, але й дослідити залежність НІМ від величини загаювання. Основні результати стосовно ІМЗ та НІМ сформульовано в теоремах 2.2 та 2.21. В цьому ж розділі запропонована також побудова експоненційної родини наближених інерційних многовидів для параболічних рівнянь без загаювання. Основним результатом цього підрозділу є теорема 2.34, яка підтверджує, що використання інерційних многовидів із загаюванням є доцільним при побудові експоненційної множини наближених інерційних многовидів. На завершення розділу, автор досліджує рівняння другого порядку за часом із загаюванням методом ІМЗ. А саме розглядається задача

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + Au = B(u_t) \quad \text{для} \ \ t > 0, \ \varepsilon > 0 \tag{2}$$

із початковими даними

$$u(\theta) = u^0(\theta) \quad \text{для} \ \ \theta \in [-r, 0], \ \dot{u}|_{t=0+} = u^1. \tag{3}$$

За аналогією до результатів попередніх підрозділів, для цього рівняння побудовані ІМЗ (теорема 2.41), та за їх допомогою отримано СНІМ (стаціонарні НІМ).

Третій розділ розділ дисертаційної роботи присв'ячено рівнянням у частинних похідних із загаюваннями, що залежать від стану (ЗЗС). Саме цьому типу загаювання приділена основна увага в дисертації. На мою думку рівняння такого типу розглядаються в літературі вперше. Раніше були відомі лише поодинокі результати лише для звичайних диференціальних рівнянь із загаюваннями, що залежать від стану. Характерною ознакою таких задач є той факт, що їх розв'язки можу бути неєдиними навіть при достатньо гладких вихідних даних.

Зокрема, досліджуючи наступне (нелокальне) РЧП із зосередженим ЗЗС

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + Au(t,x) + du(t,x) &= \int_\Omega b(u(t-\eta(u(t),u_t),y))f(x-y)\,dy \\ &= (F(u_t))(x), \quad x \in \Omega,\end{aligned} \tag{4}$$

де лінійний оператор A задовольняє означені вище властивості, $f : \Omega - \Omega \to \mathbb{R}$ обмежена вимірна функція, $\eta : L^2(\Omega) \times L^2(-r,0; L^2(\Omega)) \to \mathbb{R}$ зосереджене загаювання, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ локально ліпшицева обмежена функція, d додатна стала, автором показано, що його розв'язанність на класі слабких розв'язків можна встановити залучаючи наближені за Галеркіним розв'язки для нелокального РЧП із розподіленим на $[-r,0]$ ЗЗС

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + Au(t,x) + du(t,x) &= \int_{-r}^0 \int_\Omega b(u(t+\theta,y))f(x-y)\,dy\,\xi^n(\theta,u(t),u_t)\,d\theta \\ &= (F_n(u_t))(x), \quad x \in \Omega,\end{aligned}$$

де власне ξ^n задає розподілене ЗЗС. Цей результат видається новим та досить цікавим, оскільки він дає практичні рекомендації щодо способу досяжності таких розв'язків, хоча їх єдиність залишається відкритою проблемою.

Подальший зміст третього розділу присвячено рівнянням із зосередженим ЗЗС та підходу, що спирається на основну ігноруючу умову та її узагальнення. На мою думку це є ключовими результатами дисертації, а запропонована автором умова "ігнорування" є абсолютно природнім припущення в таких задачах. Сутність цієї умови полягає в наступному: $\exists\, \eta_{ign} > 0$ таке, що функція загаювання η "ігнорує" значення $\varphi(\theta)$ для $\theta \in [-\eta_{ign}, 0]$, тобто

$$\exists\, \eta_{ign} > 0 \ : \ \forall \varphi^1, \varphi^2 \in C \ : \ \forall \theta \in [-r, -\eta_{ign}], \ \varphi^1(\theta) = \varphi^2(\theta) \Longrightarrow \eta(\varphi^1) = \eta(\varphi^2).$$

Залучаючи наведену умову автор показує, що відповідні РЧП з зосередженим ЗЗС породжують динамічну систему, яка має компактний глобальний атрактор, що утворює компактну множину в шкалі просторів $C_\delta := C([-r, 0]; D(A^\delta))$, $\delta \in [0, 1/2)$.

Отримані результати узагальнюються автором на рівняння в частинних похідних із змішаним ЗЗС, а також досліджуються питання, що пов'язані з асимптотичною поведінкою відповідних динамічних систем та існування для них компактних атракторів.

На завершення розділу, автор залучає запропонований підхід до вивчення РЧП із загаюванням, що залежить від стану, в метричному просторі. Зокрема, в теоремі 3.91 доведено існування глобального атрактора для динамічної системи в метричному просторі, який не є лінійним простором.

Розділ 4 присвячено дослідженню моделі вірусної динаміки. Моделі мають п'ять змінних. Відносно них досліджується відповідна система ЗДР із ЗЗС. Загаювання η в такій системі відповідає проміжку часу між контактом віруса і клітини та моментом, коли клітина стає активно інфікованою (починає продукувати нові віріони). У підрозділі 4.2 нелінійність f належить класу д'Анжеліса-Беддінгтона. Автором отримано достатні умови, за яких стаціонарний розв'язок такої системи є глобально асимптотично стійким. показуємо, як техніка, що була розвинута у попередніх пунктах, показано, що запропонована методика досліджень може бути застосована до іншого важливого випадку — рівноваги виснаженого імунітету. Ця рівновага може також описувати випадок зриву або неактивації імунної відповіді. В підрозділі 4.3 досліджена система (4.3) із загальною функцією реакції та неперервні розв'язки за ігноруючої умови. Знайдені умови локальної асимптотичної стійкості (теорема 4.19).

У **розділі 5** пропонується та досліджується модель реакції-дифузії для динаміки вірусних захворювань із урахуванням загаювання, що залежить від стану та широкого класу нелінійностей, що моделюють передачу вірусу. Автор ставить за мету дослідити існування класичних розв'язків з ліпшицевими за часом початковими функціями, які адекватно описують можливі розривні зміни параметрів системи. Показано, що в цьому випадку можна залучити теорію стійкості О.М.Ляпунова для дослідження внутрішньої інфекційної рівноваги, що відповідає хронічному перебігу хвороби. Основні результати сформульовано в теоремах 5.3, 5.7, та 5.11.

Розділі 6 присвячено методу трансформації часу. Для цього розглядається диференціальне рівняння з ЗЗС, яке динамічно залежить від стану. Вважається що воно є підпорядкованим додатковому диференціальному рівнянню. Застосовуючи метод трансформації часу, автор приходить до систем зі сталим загаюванням та порівнює асимптотичні властивості для початкової та трансформованої систем. Залучаючи спеціальну функцію, яку називають перетворенням (трансформацією) часу, автор показує, що обраний розв'язок вихідної системи (6.1)–(6.4) можна звести до розв'язку певної системи зі сталим загаюванням. Окрім цього автором отримано результат про неперервну залежність перетворення часу від початкових даних (Теорема 6.5). Запропоновано також поняття еквівалентності часів у методі трансформації часу для порівняння асимптотичних властивостей початкової та трансформованої систем (підрозділ 6.2).

Висновки містять детальний опис отриманих в дисертації результатів, і досить повно відображають зміст дисертаційної роботи.

6. Зауваження щодо змісту дисертації

1. Припущення в розділі 3 щодо обмеженості та вимірності функції $f : (\Omega - \Omega) \to \mathbb{R}$ можна послабити, поклавши $f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^{n_0})$ для деякого $q > 1$. Дійсно, умова локальної ліпшицивості та обмеженості функції $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ буде гарантувати абсолютну інтегровність на Ω їх добутку $b(u(t+\theta, y))f(x-y)$.

2. Для того, щоб уникнути непорозумінь, які пов'язані із залученням понять слабкого (weak), ослабленого (mild) та інших типів розв'язків, бажано було б означенні 3.2 функцію u назвати розв'язком в сенсі розподілень.

3. Умову строгої додатності на параметр d в рівнянні (3.11) можна послабити поклавши $d \geq 0$, якщо при цьому коерцитивність оператора A в просторі $D(A^{1/2})$ не порушується. Принаймні це можна зробити для такого випадку
$$A = -\mathrm{div}\,(a(x)\nabla) : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega), \quad a(x) \geq a_0 > 0 \text{ в } \Omega$$

4. Поняття граничного розв'язку задачі (3.11)-(3.13) є не дуже вдалим. Функція u в означенні 3.14 є скоріше досяжним розв'язком задачі (3.11)-(3.13) аніж її граничним розв'язком.

5. Для уникнення непорозумінь вимоги щодо гладкості обмеженої області Ω в $\mathbb{R}^{n_0}$ варто будо б уточнити. Зазвичай, в дослідженні проблеми існування слабких розв'язків достатньо вимагати ліпшицевості від межі такої області та її зв'язності.

5. За текстом дисертації зустрічаються деякі неточності, орфографічні помилки, та "русизми" , зокрема:

   - твердження 3.7 варто уточнити добавивши "...неперервно вкладений в простір $C([0,T]; X)$";
   - на стор.48 замість $C(a, b; D(A^\alpha))$ писати $C([a, b]; D(A^\alpha))$;
   - на стор. 51 фразу "чисельне вивчення" мабуть варто замінити на "числове дослідження" .

Проте наведені зауваження не впливають на високу оцінку та загальне позитивне враження від дисертаційної роботи та отриманих в ній результатів. В якості побажання (і це може стати предметом подальшого розвитку методів і ідей дисертації) було б цікаво з'ясувати проблеми розв'язанності еволюційних початково-крайових задач за умови, що ефект загаювання проявляє себе в крайових умовах і залежить від стану системи на межі області.

ЗАГАЛЬНИЙ ВИСНОВОК

Не зважаючи на наведені зауваження вважаю, що дисертація Резуненка Олександра Вячеславовича *"Якісні властивості динамічних систем, що породжені нелінійними диференціальними рівняннями у частинних похідних з загаюванням"* є логічним, самостійним та завершеним науковим дослідженням на актуальну тему. Дисертація виконана на високому професійному рівні. Вона містить нові науково обґрунтовані результати в області теорії динамічних систем та рівнянь в частинних похідних з загаюванням, які опираються на чіткі і коректні доведення.

Основні положення і результати роботи знайшли своє відображення у відкритому друці, пройшли апробацію на міжнародних конференціях та семінарах. Основний зміст роботи достатньо повно відображено в опублікованих працях. Автореферат містить основні наукові положення і твердження дисертації.

Наведене дає підстави зробити висновок, що дисертаційна робота Резуненка Олександра Вячеславовича *"Якісні властивості динамічних систем, що породжені нелінійними диференціальними рівняннями у частинних похідних з загаюванням"*, що представлена на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика, за обсягом проведених досліджень, її актуальністю, новизною, науковим рівнем та кількістю публікацій відповідає всім п.п.9, 10, 12–14 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 24.07.2013 року № 567, а її автор — Резуненко О.В. заслуговує на присудження їі наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика.

Офіційний опонент,
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри диференціальних рівнянь
Дніпровського національного університету
имені Олеся Гончара — Когут П.І.

Підпис проф. Когута Петра Ілліча засвідчую:
проректор з наукової роботи — Оковитий С.І.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
02066747

Відгук надійшов до ради 18.11.2019 р.
Вчений секретар
Спец. вченої ради Д 64.175.01 (В.О. Тришкова)

ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ІМ. Б.І. ... НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ
КАНЦЕЛЯРІЯ