Рецензія

на дисертаційну роботу Сухоребської Дар'ї Дмитрівни

«Прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у просторах сталої кривини»

на здобуття наукового ступеня доктора філософії (PhD)

за спеціальністю 111 «математика»

Дисертаційна робота Д.Д. Сухоребської стосується сучасної проблематики геометрії «в цілому» нерегулярних опуклих поверхонь і диференціальної геометрії багатомірниї підмноговидів ріманових просторів. Обидва напрямки є традиційним для харківської наукової геометричної школи, заснованої О.В. Погорєловим і розбудованої Ю.А. Аміновим, О.А. Борисенком та їх учнями.

Перша частина роботи (розділи 2-4) присвячена питанням теорії замкнутих геодезичних на опуклих поверхнях. Ця тематика, започаткована в роботах А. Пункаре у зв'язку з геометричною інтерпретацією задач математичної фізики, активно розвивалась протягом минулого століття в рамках теорії поверхонь, ріманової геометрії, диференціальної топології, варіаційного числення, теорії динамічних систем та багатьох інших суміжних математичних напрямків. Зокрема, на початку 2000-х в роботах Ю.В. Протасова, Д. Фукс, Е. Фукс, А. Петруніна та інш. було досліджено питання існування і множинності простих замкнутих геодезичних ліній на нерегулярних поверхнях – правильних (і деяких інших) опуклих багатогранниках в тривимірному евклідовому просторі. Результати, отримані із застосуванням тонких синтетичних методів геометрії «в цілому», свідчили про змістовність розглянутої проблеми і мотивували її перенесення на випадок нерегулярних опуклих поверхонь в неевклідових просторах – сферичному і гіперболічному.

В дисертаційній роботі Д.Д. Сухоребської основна увага приділяється опису простих замкнутих геодезичних на правильних тетраедрах в тривимірному сферичному і гіперболічному просторах. На відміну від евклідового випадку, сфера S^3 і простір Лобачевського H^3 містять ціле сімейство метрично різних правильних тетраедрів. Параметром сімейства виступає кут α при вершині тетраедра: з огляду на теорему Гауса-Бонне, $\pi/3 < \alpha < 2\pi/3$ для тетраедрів в сферичному просторі, $0 < \alpha < \pi/3$ для тетраедрів в гіперболічному просторі, і $\alpha = \pi/3$ для тетраедрів в евклідовому просторі. При цьому кожна грань тетраедра сама по собі є метрично нетривіальною з огляду на присутність внутрішньої кривини. Таке різноманіття правильних тетраедрів з нетривіальною внутрішньою геометрією в сферичному і гіперболічному просторах робить проблему опису простих замкнутих геодезичних на них значно складнішою і цікавішою, порівняно з евклідовим випадком.

В розділі 2 дисертаційної роботи доповнено відомі раніше результати стосовно простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі T в евклідовому просторі E^3. Нагадаємо, що згадані геодезичні класифікуються за комбінаторним типом, що визначається парою взаємно простих чисел (p,q) і характеризує порядок перетину геодезичної з ребрами тетраедра. При цьому для кожної фіксованої пари (p,q) існує нескінченна множина неконгруентних простих замкнених геодезичних типу (p,q) на тетраедрі T. В дисертаційній роботі, як основний результат розділу 2, доведено, що для кожної фіксованої пари (p,q) існує і є єдиною[1] проста замкнена геодезична типу (p,q), яка проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра T. Крім того, для згаданої геодезичної отримано оцінку знизу для відстані від точок геодезичної до вершин тетраедра, а також доведено симетричність розгортки тетраедра вздовж геодезичної.

В розділі 3 дисертаційної роботи описано прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі T_α в тривимірному сферичному просторі S^3 кривини 1. Доведено наступні класифікаційні твердження:

1) кожна проста замкнута геодезична на T_α є геодезичною комбінаторного типу (p,q), для деяких взаємно простих p і q, також вона обов'язково проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра T_α, а її довжина є менше 2π;

2) якщо $\pi/2 \leq \alpha < 2\pi/3$, то на правильному тетраедрі T_α існує єдина проста замкнута геодезична, вона має комбінаторний тип (0,1);

3) якщо $\pi/3 < \alpha < \pi/2$, то на правильному тетраедрі T_α існують єдина проста замкнута геодезична комбінаторного типу (0,1) і єдина проста замкнута геодезична комбінаторного типу (1,1);

4) при кожному фіксованому значенні (p,q), відмінному від (0,1) і (1,1), знайдено лакуну $\pi/3<\alpha_1(p,q)<\alpha_2(p,q)<\pi/2$ таку, що при $\pi/3<\alpha<\alpha_1(p,q)$ на правильному тетраедрі T_α існує проста замкнута геодезична комбінаторного типу (p,q), а при $\alpha_2(p,q)<\alpha < \pi/2$ на правильному тетраедрі T_α немає простих замкнутих геодезичних комбінаторного типу (p,q).

Таким чином, в розділі 3 дисертаційної роботи показано, що, на відміну від евклідового випадку, на кожному правильному тетраедрі T_α в тривимірній сфері S^3 існує лише скінченна кількість різних простих замкнених геодезичних. При цьому, кожна така проста замкнена геодезична проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра і певним «комбінаторним» чином перетинає ребра тетраедра, що надає можливість її повного конструктивного відновлення.

---

[1] Тут і далі: єдиність – з точністю до симетрій тетраедра.

В розділі 4 описано прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі T_α в тривимірному гіперболічному просторі H^3 кривини – 1. Доведено наступні класифікаційні твердження:

1) кожна проста замкнута геодезична на T_α є геодезичною комбінаторного типу (p,q), для деяких взаємно простих p і q , і вона обов'язково проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра T_α ;

2) на правильному тетраедрі T_α для кожної пари взаємно простих (p,q) існує і є єдиною проста замкнута геодезична комбінаторного типу (p,q), а отже T_α містить нескінчену (злічену) множину неконгруентних простих замкнених геодезичних;

3) надано оцінку відстані від точок простої замкненої геодезичної до вершин правильного тетраедра T_α і показано, що вона не може бути довільно малою, на відміну від евклідового випадку;

4) обчислено асимптотику кількості неконгруентних простих замкнених геодезичних довжини не більше L на правильному тетраедрі T_α.

Таким чином, в розділі 4 надано вичерпний конструктивний опис простих замкнених геодезичних на довільних правильних тетраедрах в тривимірному гіперболічному просторі H^3.

В цілому, результати розділів 3 і 4 стосовно існування і множинності простих замкнених геодезичних на правильних тетраедрах в тривимірних сферичному і гіперболічному просторах суттєво розвивають попередні результати Ю.В. Протасова, Д. Фукс і Е. Фукс, демонструючи значну різницю в поведінці простих замкнених геодезичних на правильних тетраедрах в евклідовому просторі і неевклідових просторах, особливо – в тривимірній сфері. Крім того, результати розділу 4 доповнюють та ілюструють фундаментальні твердження щодо асимптотики кількості простих замкнених геодезичних на гіперболічних многовидах, доведені раніше в роботах М.Мірзахані, І. Рівіна та інших.

Методи синтетичної геометрії, застосовані в розділах 3 і 4 дисертаційної роботи, мають універсальний характер і, скоріш за все, можуть бути застосовані у подальших дослідженнях простих замкнутих геодезичних на інших (спеціальних і загальних) многогранниках в ріманових просторах сталої кривини.

В завершальному розділі 5 дисертаційної роботи досліджуються багатомірні підмноговиди гіперболічного простору, які мають внутрішньо-геометричну симетрію обертання. Вивчається зовнішня геометрія таких підмноговидів із використанням базових геометричних і аналітичних методів сучасної диференціальної геометрії підмноговидів і ріманової геометрії. Як основний результат, виписані змістовні геометричні умови, які гарантують, що досліджувані підмноговиди є підмноговидами обертання, утвореними застосуванням до просторових кривих ортогональних перетворень в обхопному просторі. Доведені в роботі твердження узагальнюють на гіперболічний випадок отримані кілька років тому результати О.А. Борисенка стосовно зовнішньо-геометричної структури підмноговидів з метрикою обертання в багатомірному евклідовому просторі.

Результати дисертаційної роботи Д.Д. Сухоребської є новими і актуальними, супроводжуються коректними доведеннями. Вони в досить повній мірі представлені в публікаціях в авторитетних фахових математичних виданнях та пройшли апробацію на міжнародних наукових конференціях і семінарах. Зокрема, результати роботи регулярно доповідалися на засіданнях Харківського міського геометричного семінару, з повними доведеннями та змістовним обговоренням. Текст дисертації оформлено відповідно до актуальних вимог щодо дисертаційних робіт.

Зауваження.

1. На сторінці 19 вперше згадується тип простої замкнутої геодезичної. Бажано було б навести чітко виокремлене твердження, що довільна проста замкнута геодезична на правильному тетраедрі в тривимірному евклідовому просторі є геодезичною типу (p,q). Опосередковано цей феномен пояснений на сторінках 33-34 і проілюстрований на малюнку 2.2. На мій погляд, він є фундаментально важливим в даній роботі і заслуговує на окреме формулювання.

2. Інколи в тексті зустрічаються не дуже коректні з математичної точки зору словосполучення, наприклад – «геодезична перетинає точку», «вершини є кутами» і т.д. Крім того, при розгляді геодезичних ліній на розгортках тетраедрів у сферичному і гіперболічному просторах не дуже вдалим, на мій погляд, є використання терміну «прямолінійний відрізок».

3. Бажано було б посилання на монографії якось деталізувати, конкретизуючи відповідні розділи або сторінки (інколи це зроблено). Також бажано було б робити наскрізну нумерацію усіх тверджень в межах розділу, а не окремо для теорем, лем, тверджень і наслідків.

4. В тексті присутня певна кількість друкарських помилок як граматичного, так і математичного змісту. Наприклад, на сторінці 44, вказано, що сегмент X_1Y_1 перетинає ребро A_4A_2 під прямим кутом, хоча насправді, здається, мова йде про перетин сегмента X_1Y_1 з ребром A_4A_3. А на сторінці 69 помилково вказано, що гранями тетраедра в гіперболічному просторі є сферичні трикутники.

5. В твердженнях розділу 5, починаючи з Леми 5.1, не вказано область визначення координат $u^1,\ldots, u^l$ і тому може скластись уява, що результати мають локальний характер. З іншого боку, у деяких етапах доведень використовуються «полярні» координати, що залучає вже глобальні властивості ріманових метрик, пов'язані з присутністю виділеної точки – полюса. Бажано було б це якось деталізувати.

Підбиваючи підсумок, відзначу, що дисертаційна робота Д.Д. Сухоребської виконана на високому науковому рівні, отримані в ній результати суттєво розвивають сучасну геометрію «в цілому» і можуть бути використані як в подальших дослідженнях в області геометрії, так і при викладанні геометричних курсів для студентів математичних факультетів ВНЗ. Рівень виконання роботи свідчить про високу математичну кваліфікацію і ерудицію її автора, та гарні навички використання сучасних математичних методів наукових досліджень.

Вважаю, що Д.Д. Сухоребська заслуговує на присудження їй наукового ступеня доктора філософії (PhD) зі спеціальності 111 – математика.

Рецензент
провідний науковий співробітник
ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України
Д.ф.-м.н. В.О. Горькавий

Особистий підпис гр. Горькавого В.О.
ЗАСВІДЧУЮ
Учений секретар ФТІНТ
ім. Б.І. Вєркіна НАН України
кандидат фізико-математичних наук
Кононенко О.М.
Ідентифікаційний код 03534601
Україна, м. Харків