Рецензія

на роботу Сухоребської Д.Д. «Прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах в просторах постійної кривини» представлену на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «математика» (Галузь знань 11 «математика та статистика») .

1. Замкнені геодезичні на однозв'язних гладких двовимірних поверхнях виникають як інтегрований граничний випадок плоскої обмеженої задачі трьох тіл. Пуанкаре (1905р.) висунув гіпотезу про існування як мінімум трьох простих замкнених геодезичних на гладкій замкненій опуклій двовимірній поверхні у евклідовому просторі. Ця гіпотеза була доведена Люстерніком і Шнарельманом (1929 рю)]. Були розроблені методи пошуку замкнених геодезичних на регулярних поверхнях додатної або від'ємної кривини.

На замкненому двовимірному рімановому многовиді від'ємної кривини існує нескінченно багато замкнених геодезичних. Тому слід оцінити кількість замкнених геодезичних в залежності від їх довжини на компактному многовиді від'ємної кривини. Хубер довів, що на повному замкненому двовимірному рімановому многовиді $M2$ постійної від'ємної кривини число замкнених геодезичних довжини не більше L має порядок росту $e\ L/L$, коли L прямує на нескінченність. Рівін та Мірзахані встановили, що на многовиді $M2$ роду g з n число простих замкнених геодезичних довжини не більше L має поліноміальний порядок росту L $6g$–6+2n , коли L прямує на нескінченність.

Теореми про геодезичні на опуклих двовимірних поверхнях відіграють важливу роль у геометрії "в цілому" цих поверхонь у просторах постійної кривини. Важливі результати у цій темі були отримані Кон-Фоссеном , Александровим , Погорєловим . В одній з найперших робіт Погорєлов довів, що на замкненій опуклій поверхні гауссової кривини ≤ k, 16 де k > 0, геодезична довжини < $\pi/\surd\ k$ реалізує найкоротшу відстань між її кінцями. Топоногов довів, що на C 2 - регулярній замкненій поверхні кривини ≥ k > 0 довжина простої замкненої геодезичної не більше $2\pi/\surd\ k$. Борисенко узагальнив цей результат Топоногова на випадок простих замкнених геодезичних у двовимірних просторах Александрова.

Д.Фукс та Е.Фукс доповнили та систематизували результати про замкнені геодезичні на регулярних багатогранниках у евклідовому просторі . Протасов знайшов умову існування простих замкнених геодезичних на довільному багатограннику у евклідовому просторі.

У евклідовому просторі грані тетраедра мають нульову гауссову кривину, і кривина тетраедра сконцентрована тільки у його вершинах. Розгортка правильного тетраедра вздовж геодезичної є частиною стандартної тріангуляції евклідової площини. З цього факту слідує класифікація замкнених геодезичних на регулярних тетраедрах у евклідовому просторі.

У просторі Лобачевського або у сферичному просторі гауссова кривина граней дорівнює k = −1 або 1 відповідно. Кривина тетраедра визначається не тільки його вершинами, але і гранями. У сферичному просторі кут грані α правильного тетраедра задовольняє умовам $\pi/3$ < α ≤ $2\pi/3$. У просторі Лобачевського кут грані α задовольняє 0 < α < $\pi/3$. В обох випадках внутрішня геометрія тетраедра залежить від величини кута грані. Не існує розбиття площини Лобачевського або сферичної площини правильними трикутниками з будь-яким кутом α. Поведінка замкнених геодезичних на правильному тетраедрі у тривимірному просторі постійної кривини k різниться в залежності від знаку k.

У дисертаційній роботі були розроблені нові методи роботи з нерегулярними поверхнями у поєднанні з теоремами рімановоі геометрії, топології та оцінками з теорії чисел. Отримані результати важливі як з теоретичної так і з прикладної точок зору. Все це є достатнім підґрунтям темі дослідження дисертації.

2. Мета дослідження полягає взнаходженні усіх замкнених геодезичних без точок самоперетину на правильних тетраедрах у тривимірному сферичному просторі та просторі Лобачевського. У сферичному просторі знайдено: 1) оцінку зверху на кут грані тетраедра, за якої на правильному тетраедрі існує проста замкнена геодезична даного типу , 2) оцінку знизу на кут грані тетраедра, за якої проста замкнена геодезична даного типу не існує на правильному тетраедрі. У просторі Лобачевського дана повна класифікація простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі. Доведено, що число простих замкнених геодезичних довжини не більше L на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського має асимптотичний порядок росту L в квадраті , коли L прямує на нескінченність. Другою метою дослідження є розглянути локальне ізометричне вкладення підмноговиду малої ковимірності з індукованою метрикою обертання у простір Лобачевського. Доведено, що підмноговид є підмноговидом обертання, якщо геодезичні координатні лінії індукованої метрики обертання є лініями кривини підмноговиду

3. Методи дослідження полягають в вивченні комбінаторної структури простої замкненої геодезичної γ на тетраедрі, що не залежить від кривини об'ємлюючого простору. Послідовність, у якій γ перетинає ребра тетраедра, однозначно визначається парою взаємно простих натуральних чисел (p, q), $0 \le p < q$. Побудовано спеціальне геодезичне відображення тетраедра у сферичному просторі на тетраедр у евклідовому просторі та отримано оцінку знизу на кут грані тетраедра, на якому не існує простої замкненої геодезичної даного типу (p, q). Щоб отримати оцінку зверху на кут грані тетраедра, який містить просту замкнену геодезичну типу (p, q), у сферичному просторі, мотримана оцінка різниці між розгорткою тетраедра у сферичному та у евклідовому просторі. Для роботи з правильними тетраедрами простору Лобачевського, розглядалася модель Келі-Клейна цього простору. У цій моделі простір Лобачевського є внутрішністю одиничної кулі. Геодезичними лініями простору Лобачевського у такій моделі є хорди кулі. Властивості простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського були доведені, використовуючи теореми з рімановоі геометрії. Отримана повна класифікація простих замкнених геодезичних на правильних тетраедрах у просторі Лобачевського. Для оцінки числа $N(L, \alpha)$ простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського було проаналізовано структуру розгортки тетраедра вздовж геодезичної. Застосував теорему з теорії чисел про асимптотику зростання функції Ейлера, ми отримали асимптотику числа $N(L, \alpha)$.Для дослідження підмноговиду $F\,l$ з індукованою метрикою обертання у просторі Лобачевського, простір Лобачевського зобразили у вигляді гіперповерхні у псевдоевклідового простору. Розглядалися і три випадки: коли підмноговид $F\,l$ має від'ємну, нульову та додатну зовнішню секційну кривину. Використовуючи рівняння Гауса та Вейнгартена, було знайдено явну формулу радіус-вектора $F\,l$. У випадку додатної зовнішньої секційної кривини було використано перетворення Погорєлова простору Лобачевського на евклідовий простір.

4. Наукова новизна отриманих в дисертаційний роботі полягає в тому, що в ній вперше отримана класифікація простих замкнених геодезичних на правильних тетраедрах у сферичному просторі та у просторі Лобачевського.

5. Робота складається з 5 розділів (вступ та 4 розділи) в яких отримані наступні результати.

Розділ 3 : На правильному тетраедрі у сферичному просторі існує скінченна кількість простих замкнених геодезичних. Довжина простої замкненої геодезичної менше 2π. Для будь якої пари взаємно простих натуральних чисел (p, q) було знайдено числа $\alpha 1$ та $\alpha 2$, що задовольняють нерівності $\pi/3 < \alpha 1 < \alpha 2 < 2\pi/3$, і такі, що вірні наступні твердження: Якщо $\pi/3 < \alpha < \alpha 1$, то на правильному тетраедрі з кутом грані α у сферичному просторі існує єдина проста замкнена геодезична типу (p, q), з точністю до ізометрії тетраедра. Ця геодезична проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра. Якщо $\alpha 2 < \alpha < 2\pi/3$, тоді на правильному тетраедрі з кутом грані α у сферичному просторі не існує простої замкненої геодезичної типу (p, q).

Розділ 4 : На правильному тетраедрі у просторі Лобачевського для будь якої пари взаємно простих чисел (p, q), $0 \le p < q$, існує єдина проста замкнена геодезична типу (p, q), з точністю до ізометрії тетраедра. Ця геодезична проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра. Геодезичні типу (p, q) вичерпують усі прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського. Число простих замкнених геодезичних на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського має порядок росту $c(\alpha)L$ 2 , коли $L \to \infty$.

Розділ 5 : Розглядалося локально ізометричне вкладення підмноговидів малої ковимірності з індукованою метрикою обертання у простір Лобачевського. Отримані наступні результати: (i) Нехай $F\ l$ є регулярним пімноговидом простору Лобачевського $H2l{-}1$ з індукованою метрикою обертання від'ємної зовнішньої секційної кривини. Якщо геодезичні координатні лінії метрики є лініями кривини $F\ l$, тоді підмноговид $F\ l$ є підмноговидом обертанням. (ii) Нехай $F\ l$ є регулярною гіперповерхнею у просторі Лобачевського $Hl{+}1$ з індукованою метрикою обертання нульової зовнішньої секційної кривини. Якщо геодезичні координатні лінії цієї метрики є лініями кривини $F\ l$, тоді підмноговид $F\ l$ є циліндром. конусом або асимптотичним конусом з одномірною твірною. (iii) Нехай $F\ l$ є регулярною гіперповерхнею у просторі Лобачевського $Hl{+}1$ з індукованою метрикою обертання додатної зовнішньої секційної кривини. Якщо $l > 2$, тоді $F\ l$ є підмноговидом обертання в $H3$. Якщо $l = 2$ і координатні лінії метрики є лініями кривини $F\ l$, тоді підмноговид F 2 є підмноговидом обертанням

6. Результатів дисертації доповідалися на десяти міжнародних конференціях, семінарах, воркшопах. Публікації містять головні результати дисертаційної роботи.

7. Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати та запропоновані методи будуть використовуватися у подальших дослідженнях замкнених геодезичних на поверхнях з нерегулярними точками, Ряд задач у фізиці, (ейлерові рухи твердого тіла, опис течії ідеальної рідини, задача трьох тіл), зводяться до вивчення поведінки геодезичних на многовидах. Задачі про геодезичні лінії також відіграють важливу роль у механіці, динамічних системах та варіаційному численні. Правильні багатогранники використовуються у теорії груп та у лінійних диференціальних рівняннях.

8. Основні результати дисертаційної роботи викладені в чотирьох статтях, дві з яких проіндексовані у міжнародних наукометричних базах Scopus 24 або Web of Science. Відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, в яких відображено основні результати роботи, опубліковано у виданні,що, належить до квартилю Q3. Ще дві статті та опубліковані у науковому виданні, включеному до переліку наукових фахових видань України. Додатково, результати дисертації викладено у тезах трьох конференцій.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена знаходженню класифікації простих замкнених геодезичних на правильних тетраедрах у сферичному просторі та у просторі Лобачевського. Класифікація замкнених геодезичних на правильному тетраедрі в евклідовому просторі випливає зі стандартної тріангуляції евклідової площини. Вершини тріангуляції допускають однозначне позначення, узгоджене з вершинами тетраедра. Розгортка тетраедра вздовж будь-якої замкненої геодезичної є частиною тріангуляції. Кути граней правильного тетраедра в евклідовому просторі дорівнюють $\pi/3$. Кривина такого тетраедра зосереджена лише у його вершинах.

Кривина тетраедра у сферичному просторі або у просторі Лобачевського визначається як вершинами, так і гранями, які мають кривину відповідно 1 або −1. У сферичному просторі кут α граней тетраедра задовольняє умовам $\pi/3 < \alpha < 2\pi/3$. У просторі Лобачевського кут α граней задовольняє $0 < \alpha < \pi/3$. Не існує розбиття сферичної площини або площини Лобачевського правильними трикутниками з довільним кутом α. Поведінка простих замкнених геодезичних відрізняється залежно від кривини об'ємлюючого простору. Порядок, у якому проста замкнена геодезична γ перетинає ребра тетраедра визначається впорядкованою парою взаємно простих натуральних чисел (p, q). Цей факт не залежить від кривини граней тетраедра. Всередині розгортки тетраедра геодезичні одного класу є паралельними одна одній. Доведено, що кожен клас містить просту замкнену геодезичну, яка проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра. Звідси випливає властивість симетрії розгортки правильного тетраедра вздовж

простої замкненої геодезичної (див. Розділ 2 та [42]).На відміну від евклідового простору, на правильному тетраедрі у сферичному просторі або у просторі Лобачевського, кожен клас простих замкнених геодезичних типу (p, q) містить лише одну просту замкнену геодезичну, з точністю до ізометрії тетраедра. Ця геодезична проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра. На правильному тетраедрі у сферичному просторі існує скінченна кількість простих замкнених геодезичних. Довжина простої замкнутої геодезичної у такому випадку менша 2π. У роботі знайдено оцінку знизу на кут α граней правильного тетраедра у сферичному просторі, за якої такий тетраедр не має простої замкненої геодезичної типу (p, q).

Також дано оцінку зверху на кут α граней правильного тетраедра у сферичному просторі, за якої на такому тетраедрі існує проста замкненагеодезична типу (p, q).Правильний тетраедр у просторі Лобачевського має нескінченну кількість простих замкнутих геодезичних. У роботі доведено, що для будь-якої впорядкованої пари взаємно простих натуральних чисел (p, q), на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського існує і єдина проста замкнута геодезична типу (p, q), з точністю до ізометрії тетраедра. Ця геодезична проходить через середини двох пар протилежних ребер тетраедра. Геодезичними типу (p, q) вичерпуються усі прості замкнені геодезичні на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського. Показано, що число простих замкнутих геодезичних довжини не більше L на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського має порядок зростання L. Якщо кут α прямує до нуля, то вершини тетраедра прямують на нескінченність. Граничний тетраедр є некомпактною поверхнею, яка гомеоморфнасфері з чотирма каспами та має повну регулярну метрику постійної кривини. Рід цієї поверхні дорівнює нулю. З роботи Рівіна [39] відомо, що число простих замкнених геодезичних на такій поверхні має порядок росту L2.

Таким чином, число простих замкнених геодезичних довжини не більше L на регулярній поверхні постійної від'ємної кривини з чотирма каспами, та на правильному тетраедрі у просторі Лобачевського має однаковий порядок зростання L2, коли L прагне до нескінченності. Деякі властивості простих замкнутих геодезичних на правильному тетраедрі випливають з групи симетрій тетраедра. Група симетрій тетраедра є скінченною підгрупою групи поворотів двовимірної сфери. Розглядалися три окремі випадки, коли підмноговид має від'ємну, нульову і додатну зовнішню секційну кривину. Простір Лобачевського у цьому випадку розглядався як гіперплощина з індукованою метрикою постійної від'ємної кривини у псевдоевклідовому просторі. Отримані результати є узагальненням теорем, доведених у роботі Борисенка [9] для підмноговидів евклідового простору.

Дисертація написана чітко, кожне твердження має ґрунтовне доведення. Публікації містять основні твердження дисертації. Рівень дисертації високий. Вважаю, що дисертація відповідає вимогам які пред*являються до дисертацій до наукового ступеня доктора філософії (111-Математика), а Сухоребська Дар'я Дмитрівна заслуговує присудження ступеня доктора філософії за спеціальністю 111-Математика.

Провідний науковий співробітник

Фізико-Технічного Інституту Низких

Температур ім..Б.і.Вєркіна НАН України Золотарьов В.О.

Професор,доктор фіз.-мат.наук

Особистий підпис гр. Золотарьова В.О.

ЗАСВІДЧУЮ

Учений секретар ФТІНТ

ім. Б.І. Вєркіна НАН України

кандидат фізико-математичних наук

Каменєнко О.И.

Ідентифікаційний код 03534601