ВІДГУК
офіційного опонента на дисертаційну роботу
Луньова Антона Андрійовича
"Питання повноти і базисності граничних задач
для систем звичайних диференціальних рівнянь"
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Спектральну теорію граничних задач для диференціальних рівнянь на скінченному проміжку було започатковано в класичних роботах Дж. Біркгофа та Я. Д. Тамаркіна. Їм належить поняття регулярних (та посилено регулярних) граничних умов. Саме в цьому випадку ними була побудована фундаментальна система розв'язків звичайного диференціального рівняння n-го порядку зі спеціальною асимптотикою, а також доведена теорема про повноту системи кореневих векторів цих операторів. Зазначимо, що розділені граничні умови є регулярними тільки у виняткових випадках. Повнота системи кореневих функцій для цього класу граничних задач була отримана в роботах М. В. Кєлдиша, А. А. Шкалікова. Потім ці результати розвивалися та узагальнювалися в роботах А. Г. Костюченка, А. П. Хромова, Г. М. Губрєєва, А. М. Мінкіна, В. С. Рихлова, О. М. Гомілка, Г. В. Радзієвського та ін.

Клас систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку є ширшим ніж клас диференціальних рівнянь n-го порядку. Загальні системи першого порядку вивчались Дж. Біркгофом і Р. Лангером. Ними був введений та досліджений клас граничних задач для систем з регулярними граничними умовами і отримано асимптотику спектра. Але питання повноти кореневих функцій не було досліджено. Для 2×2 системи Дірака з обмеженим потенціалом питання повноти було розглянуто в монографії В. А. Марченка. В роботах М. М. Маламуда та Л. Л. Оридороги було виділено більш загальний клас граничних умов – слабко регулярні граничні умови. Для граничних задач з такими умовами вони довели повноту та мінімальність кореневих векторів. Слід зазначити, що регулярність по Біркгофу-Лангеру означає, що $2n$ деяких детермінантів, побудованих по граничних умовах, є ненульовими. В той же час, слабка регулярність граничних умов означає, що лише три таких детермінанта є ненульовими. Також зазначимо, що для 2×2 системи Дірака питання базисності Ріса розглядалось в роботах багатьох дослідників.

Модель балки Тимошенка була введена С. Тимошенком у 20-х роках 20-го століття і після цього вивчалася багатьма математиками. Властивості повноти та базисності Ріса динамічного генератора відповідної граничної задачі для системи сполучених гіперболічних рівнянь грають важливу роль при вивченні стабільності моделі і спадання енергії.

Спектральні функції самоспряжених розширень мінімального симетричного оператора Штурма-Ліувілля досліджувалися В. А. Марченком і Б. М. Лєвітаном. Ними незалежно було знайдено асимптотичну формулу для спектральних функцій. Для рівняння високого порядку цей результат встановив А. Г. Костюченко. Слід зазначити, що головним членом цієї асимптотики є спектральна функція самоспряженого оператора з тими ж граничними умовами і нульовими коефіцієнтами, але явна форма цієї спектральної функції була відсутня.

Все вище зазначене підкреслює важливість та актуальність досліджень, здійснених в дисертаційній роботі.

Дисертація має чотири розділи.

У розділі 1 дисертації наведено огляд сучасного стану областей спектральної теорії диференціальних операторів, які будуть досліджуватися в дисертації. Зокрема, зроблено змістовний аналіз попередніх результатів стосовно повноти і базисності кореневих векторів для звичайних диференціальних операторів, що з'ясовує важливість досліджень у цій області.

У розділі 2 дисертації досліджуються питання повноти для граничних задач для систем $n \times n$ диференціальних рівнянь першого порядку. Спочатку отримано абстрактну теорему 2.3, яка виражає повноту системи кореневих функцій відповідної граничної задачі через зріст характеристичного детермінанта на деяких променях комплексної площини. Під час доведення використовується апарат цілих функцій (оцінка цілої функції знизу і теореми Фрагмена-Ліндельофа і Ліувілля). Далі, встановлюється уточнена асимптотична формула для характеристичного детермінанта (пропозиція 2.8). Цей результат є технічно найсильнішим у дисертації і потребував серйозної аналітики. Комбінуючи абстрактну теорему повноти з цією асимптотикою, отримано явні умови повноти системи кореневих функцій граничних задач з неслабко регулярними граничними умовами (теорема 2.10, пропозиція 2.14, наслідки 2.16, 2.18, 2.20). Також отримано деяку необхідну умову повноти (пропозиція 2.22). Зазначимо, що теорема 2.10 і пропозиції 2.14 і 2.22 суттєво узагальнюють відповідні результати М. М. Маламуда і Л. Л. Оридороги.

У розділі 3 дисертації досліджується питання блочної базисності Ріса для граничних задач для загальних $n \times n$ систем. Головні результати цього розділу (теорема 3.6 і пропозиція 3.8) встановлюють блочну базисність Ріса для широкого класу регулярних граничних задач для загальних $n \times n$ систем з обмеженим потенціалом і є першими загальними результатами такого типу. У цьому ж розділі попередні результати про повноту і базисність застосовуються до динамічного генератора моделі балки Тимошенка. Розглядається найбільш загальна модель балки закріпленої в одному кінці з послабленими умовами гладкості на параметри моделі, які раніше в літературі не розглядалися. У пропозиції 3.12 показано, що динамічний генератор відповідної моделі є подібним до оператора типу Дірака четвертого порядку. Після цього із попередніх результатів випливають властивості повноти і блочної базисності Ріса у регулярному випадку (теорема 3.14). До того ж, встановлено результат про повноту у нерегулярному випадку (теорема 3.15). Раніше вважалось, що властивість повноти для динамічного генератора моделі балки Тимошенка вперше була отримана в роботі Маріанни Шубов 2002-го року. Але в зауваженні 3.17 пояснено, що її доведення є помилковим. Це показує, що встановлені результати про повноту для динамічного генератора моделі балки Тимошенка є першими в літературі.

У розділі 4 дисертації досліджуються деякі питання спектральної теорії диференціальних рівнянь високого порядку. У теоремах 4.1 і 4.2 встановлено нові умови на комплексно-значний потенціал рівняння Штурма-Ліувілля, які забезпечують «зникнення» усіх розв'язків на нескінченності. У теоремах 4.6 і 4.7 встановлено явну формулу для спектральних функцій задач Діріхлє і Неймана для диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами. Цікавим є також зв'язок між функцією Вейля відповідних самоспряжених розширень і точними константами в нерівностях для проміжних похідних, встановлений в зауваженні 4.14.

По дисертації є наступні незначні зауваження:

1. Назва дисертації трохи невдала. Ліпшим варіантом є «Повнота і базисність для граничних задач для систем звичайних диференціальних рівнянь».
2. Огляд літератури по моделі балки Тимошенка на стор. 37 є дуже стислим, і його було б краще розширити.
3. На стор. 57 в зауваженні 2.7 замість $y_{j,k}$ має бути y_{jk}.
4. На стор. 100, рядок 5, замість «Доведення було базується» має бути «Доведення базується».
5. В доведенні Леми 4.16 (стор. 142) робиться припущення, що функція g_k є гладкою. В кінці доведення треба зазначити той факт, що вектор, який реалізує лінійний функціонал за теоремою Ріса є єдиним, що робить доведення коректним.

Незважаючи на ці недоліки, вважаю, що дисертація А. А. Луньова є закінченим науковим дослідженням і повністю відповідає вимогам, які пред'являються до дисертацій, представлених на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук, оскільки:

a) В термінах коефіцієнтів граничних умов і елементів потенціальної матриці отримано достатні умови повноти систем кореневих функцій нерегулярних граничних задач для загальних систем $n\times n$ диференціальних рівнянь першого порядку.
b) Вперше встановлено блочну базисність Ріса систем кореневих функцій широкого класу регулярних граничних задач для загальних систем $n\times n$ диференціальних рівнянь першого порядку з обмеженим потенціалом.
c) Вперше отримано повноту і блочну базисність Ріса системи кореневих векторів динамічного генератора загальної моделі просторово неоднорідної балки Тимошенка з локально розподіленими функціями зворотного зв'язку, що закріплена в одному кінці.
d) Знайдено явну формулу для спектральної функції задач Діріхлє і Неймана для диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами.

Науковий рівень дисертації високий, а всі результати обґрунтовані і спираються на чіткі та коректні доведення. Результати дисертації можуть бути використані в моделюванні різноманітних процесів в механіці рідин, в'язкопружності, фізиці, а також в дифузійних процесах з аномальною природою. Дослідження, яке проведено автором, може бути корисним в наукових розробках, що проводяться в Інституті математики НАН України, у Фізико-технічному інституті низьких температур НАН України ім. Б. І. Вєркіна, Донецькому національному університеті, Львівському національному університеті ім. І.Франка. Автореферат ідентичним чином відображає основні твердження і положення дисертації. Публікації містять основні результати та висновки дисертаційної роботи.

На підставі вище згаданого вважаю, що дисертаційна роботаА. А. Луньова « Питання повноти і базисності граничних задач длязвичайних диференційних рівнянь» виконана на відповідному рівні, а дисертант безумовно заслуговує присвоєння йому ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01. 01 «математичний аналіз.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук, професор,
провідний науковий співробітник
Фізико-технічного інституту низьких
температур НАН України
ім. Б. І. Вєркіна В. О. Золотарьов

Особистий підпис гр. Золотарьова В.О
ЗАСВІДЧУЮ
Учений секретар ФТІНТ
ім. Б.І. Вєркіна НАН України
кандидат фізико-математичних наук
Кашменко О.Ф.

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ІМ. Б.І. ВЄРКІНА НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ
УКРАЇНА, М.ХАРКІВ
Ідентифікаційний код 03534601