ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Луньова Антона Андрійовича
"Питання повноти і базисності граничних задач
для систем звичайних диференціальних рівнянь"
представлену на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Несамоспряжені граничні задачі для звичайних диференціальних рівнянь n-го порядку на скінченному відрізку вперше було розглянуто в класичних роботах Дж. Біркгофа (1908 р.) та Я. Д. Тамаркіна (1912 р.). Вони ввели поняття регулярних граничних умов і довели повноту системи власних і приєднаних функцій (СВПФ) регулярної граничної задачі. Повноту СВПФ для деяких класів нерегулярних граничних задач було вперше отримано М. В. Кєлдишем (1951 р.). Надалі питання про повноту та базисность СВПФ несамоспряжених граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь n-го порядку досліджувалися в роботах А. А. Шкалікова, А. Г. Костюченка, Г. М. Губреєва, А. П. Хромова, В. С. Рихлова та багатьох інших математиків.

Несамоспряжені граничні задачі для систем $n\times n$ диференціальних рівнянь першого порядку вперше були досліджені Дж. Біркгофом і Р. Лангером (1923 р.). Вони ввели поняття регулярних граничних умов та дослідили СВПФ відповідних граничних задач для систем $n\times n$ диференціальних рівнянь першого порядку. Надалі ці результати розвивалися і узагальнювалися в роботах багатьох математиків. В контексті даної дисертації слід зазначити недавні результати М. М. Маламуда та Л. Л. Оридороги, в яких було доведено повноту СВПФ граничної задачі для загальної $n\times n$ системи диференціальних рівнянь першого порядку із слабко регулярними граничними умовами (більш широкий клас граничних умов, ніж регулярні).

Ще одним напрямком дослідження СВПФ є з'ясування питання про те, коли СВПФ утворюють базис Ріса у відповідному гільбертовому просторі. Питання базисності Ріса СВПФ регулярних граничних задач для 2×2 системи Дірака вивчалось в роботах І. Трушина та М. Ямамото, С. Хассі та Л. Л. Оридороги, П. Джакова та Б. С. Мітягіна, А. Г. Баскакова, А. В. Дєрбушова та А. О. Щербакова, А. С. Макіна та ін.

Звичайні диференціальні рівняння на піввісі вивчалися багатьма дослідниками. Зокрема, питання прямування розв'язків рівняння Штурма-Ліувілля до нуля на нескінченності вивчалося М. Бірнакі, Х. Мілло, Дж. Сансоне, Л. А. Гусаровим, В. Б. Лідським і Б. В. Федосовим, Дж. В. Макі, Л. Хатвані та багатьма іншими.

Теорія розширень симетричних операторів до самоспряжених була запропонована фон Нейманом в зв'язку з побудовою математичного апарату для квантової механіки (1932 рік). Після цієї роботи багато математиків займалися дослідженням самоспряжених розширень симетричних операторів. Для невід'ємних операторів Фрідріхсом та Крейном були знайдені два "крайніх" розширення. Ці розширення були названі Крейном "м'яким" і "жорстким". Для "крайніх" розширень в 1999 році в роботі по проблемі моментів Б. Саймон запропонував назви розширення Фрідріхса та розширення Крейна. Розширення Фрідріхса та розширення Крейна відіграють фундаментальну роль в теорії невід'ємних симетричних операторів, проблемі моментів та суміжних питаннях аналізу.

У дисертації розглянуті такі основні завдання:

1. Дослідження умов повноти СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з граничними умовами, які не є слабко регулярними.
2. Знайти нові умови блочної базисності Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого при регулярних граничних умовах.
3. Знайти нові умови на потенціал ЗДР другого порядку, при яких усі розв’язки прямують до нуля на нескінченності.
4. Знайти явні формули для спектральних функцій розширень Фрідріхса та Крейна мінімального диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на піввісі.

Все вище сказане показує, що дослідження здобувача є важливими та актуальними.

Дисертаційна робота містить чотири розділи.

У першому розділі роботи зроблено огляд літератури по темі роботи. Змістовно аналізуються попередні результати про повноту і базисність СВПФ граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь n-го порядку і систем диференціальних рівнянь першого порядку. Також проводиться детальний огляд питання про прямування до нуля на нескінченності всіх розв’язків рівняння Штурма-Ліувілля на піввісі.

В другому розділ роботи досліджено повноту СВПФ граничних задач для $n\times n$ систем диференціальних рівнянь першого порядку. Загальна теорема 2.3 зв’язує повноту СВПФ та асимптотичну поведінку характеристичного визначника, яка отримана в пропозиції 2.8. Використовуючи ці результати, отримано явні умови повноти СВПФ граничних задач з граничними умовами, що не є слабко регулярними: теорема 2.10, пропозиція 2.14, наслідки 2.16 та

2.18. Ці результати узагальнюють недавні результати М. М. Маламуда і Л. Л. Оридороги. Відзначимо також наслідок 2.20, де отримано аналог подвійної повноти для системи експоненціально-тригонометричних функцій, що є СВПФ класичного квадратичного диференціального пучка Келдиша. Цей наслідок доповнює попередні результати Ю. І. Любарського та В. А. Ткаченка, А. Г. Костюченка та А. А. Шкалікова, М. Г. Джавадова та М. Г. Гасимова, В. П. Гурарія та ін.

Третій розділ роботи присвячений питанням базисності Ріса для граничних задач для $n \times n$ систем диференціальних рівнянь першого порядку. Головна ідея – звести відповідний диференціальний оператор спеціальним калібрувальним перетворенням до диференціального оператора з нормальними граничними умовами. Якщо при цьому потенціальна матриця є обмеженою, то застосування результатів Маркуса-Мацаєва дозволяє отримати блочну базисність Ріса. Отримані результати (теорема 3.6 і пропозиція 3.8) містять у собі регулярні граничні умови періодичного типу та умови, що розпадаються, і є першими загальними результатами про базисність Ріса для граничних задач для загальних $n \times n$ систем (з додатковою умовою, що потенціал є обмеженим). Раніше подібний результат було встановлено лише в окремому випадку: Я. В. Микитюк і Д. В. Пуйда довели базисність Ріса для задачі Діріхле для $2m \times 2m$ системи Дірака, але з потенціалом $Q \in L^2$. У цьому ж розділі розглядається загальна модель балки Тимошенка. У теоремі 3.14 встановлено повноту і блочну базисність Ріса СВПФ, що є першим результатом такого типу для загальної моделі балки. Зауважимо, що базисність Ріса СВПФ дозволяє дослідити багато властивостей різних типів балок.

Четвертий розділ роботи присвячений диференціальним рівнянням високого порядку на піввісі. Теорема 4.1 узагальнює результат В. Б. Лідського та Б. В. Федосова про прямування до нуля на нескінченності усіх розв'язків звичайного диференціального рівняння другого порядку на піввісі на випадок комплексно-значного потенціалу. У теоремі 4.2 встановлено іншу умову, яка забезпечує прямування всіх розв'язків такого рівняння до нуля на нескінченності. Теореми 4.6 і 4.7 дають явні формули для спектральних функцій розширень Фрідріхса і Крейна мінімального симетричного диференціального оператора порядку $2n$ з нульовими коефіцієнтами.

Особливо відзначимо наступні нові результати, які отримані в дисертаційній роботі:

1. Вперше доведено повноту СВПФ загальних граничних задач для $n \times n$ систем диференціальних рівнянь першого порядку з нерегулярними і навіть виродженими граничними умовами.
2. Вперше доведено блочну базисність Ріса СВПФ граничних задач для загальних $n \times n$ систем диференціальних рівнянь першого порядку з потенціалом $Q \in L^\infty$ і широким класом регулярних граничних умов.
3. Вперше встановлено повноту і блочну базисність Ріса СВПФ для а загальної моделі балки Тимошенка з послабленими умовами гладкості на параметри моделі, які не покривалися попередніми роботами.
4. Знайдено умови на комплексно-значний потенціал звичайного диференціального рівняння другого порядку на півосі, які забезпечують прямування всіх розв'язків цього рівняння до нуля на нескінченності.
5. Вперше знайдені явні формулу для спектральної функції розширень Фрідріхса і Крейна мінімального симетричного диференціального оператора порядку $2n$ з нульовими коефіцієнтами.

Всі вище перелічені результати сформульовані у вигляді доведених теорем, тобто є обґрунтованими. Достовірність результатів випливає з їх доведень і порівнянь з відомими раніше результатами. Здобувач демонструє вільне володіння різноманітною математичною технікою. Науковий рівень дисертаційної роботи є достатньо високим.

Автореферат і основні положення дисертації є ідентичними за змістом. Публікації містять всі результати дисертації.

По дисертаційній роботі є такі зауваження:

1. В назві дисертації після слова "базисності" слід було додати слова "кореневих функцій"
2. На стор. 83 у формулі (3.26) позначення $m_a(\lambda, A)$ і $R_\lambda(A)$ не було введено раніше.
3. На стор. 104 перед формулою (3.120) замість «Зо гляду на ці позначення» слід було писати «З огляду на ці позначення»
4. На стор. 126 функція $A_2(t)$ є необмеженою в околі нуля, і насправді не задовольняє умовам теореми 4.5. Її треба замінити на $A_2(t+1)$, щоб усунути цю проблему.
5. На стор. 150 у посиланні 4 (назва статті російською мовою) замість «Ріса» слід було писати «Рисса».
6. На стор. 155 у посиланні 41 (назва статті російською мовою) замість «Ріса» слід було писати «Рисса».

Наведені зауваження не відбиваються на загальному позитивному враженні від дисертаційної роботи.

З огляду на викладене вище, вважаю, що дисертація Луньова Антона Андрійовича «Питання повноти і басистості граничних задач для систем звичайних диференціальних рівнянь» є завершеною актуальною науковою працею. Дисертація відповідає вимогам “Порядку присудження наукових ступенів” (Постанова Кабінету міністрів України №567 від 24.07.2013) щодо кандидатських дисертацій, а її автор, Луньов Антон Андрійович, заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук, доцент,
професор кафедри вищої математики
Харківського національного університету
ім. В. Н. Каразіна Ю. М. Дюкарев

Підпис засвідчую
Начальник служби управління
персоналом

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ * КОД 02071205 * ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА