

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Хейфеця Олександра Яковича
«Унітарні системи розсіювання та задачі інтерполяції»,
представлену на здобуття наукового ступеня доктора
фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

1. Актуальність теми дослідження. Основним напрямом дисертаційного дослідження є унітарні системи розсіювання та пов'язані з ними інтерполяційні задачі аналізу. Цей напрям досліджень в математичному аналізі починається з класичної проблеми моментів, яка була запропонована і досліджена Стильтьєсом наприкінці 19-го століття. З цих досліджень Стильтьєса почався новий напрям в математичному аналізі, так звана теорія класичних інтерполяційних задач аналізу. Основні положення цієї теорії запропонували в перші десятиліття 20-го століття Г. Гамбургер, І. Шур, К. Каратеодорі, Л. Фейер, Р. Неванлінна, Г. Пік, Г. Вейль, М. Ріс, О. Теплиц, Г. Херглотц, Г. Сегьо і багато інших математиків. Ці автори розглядали різні інтерполяційні задачі в різних класах аналітичних функцій. Проте при розв'язанні цих задач спостерігався цілий ряд спільних рис. Так, умовою існування розв'язків різних інтерполяційних задач була невід'ємність матриці Піка або її аналогів, а умовою невизначеності - строга додатність відповідних матриць Піка. Далі, в невизначеному випадку множина розв'язків кожної інтерполяційної задачі описувалось дробово-лінійним перетворенням, параметром в якому була довільним аналітична функція з класу, в якому була сформульована відповідна інтерполяційна задача. Ці обставини і дозволили об'єднати інтерполяційні задачі в різних класах аналітичних функцій під спільною назвою класичні інтерполяційні задачі аналізу (термін Н.І. Ахієзера). При дослідженні різних класичних інтерполяційних задач для аналітичних функцій були застосовані методи теорії ланцюгових дробів, теорії ортогональних многочленів, суперпозиції дрібно-лінійних перетворень, лема Шварца і її узагальнення, кола Вейля, параметри Шура, розширення позитивних функціоналів М. Рісса і деякі інші методи.

На початку 30-х років 20-го століття М. Стоун запропонував операторний підхід для розв'язку проблеми моментів. Цей підхід вперше дозволив розглядати класичні інтерполяційні задачі аналізу в операторному і матричному варіанті. Подальший розвиток операторний підхід для розв'язання проблеми моментів отримав в роботах М.Г. Крейна, А.В. Штрауса, Ю.М. Березанського, Д.З. Арова, В.М. Адамяна та інших математиків. Операторний підхід був розвинений Б.Секефальви-Надем і А. Корані для класичної задачі Неванлінни-Піка. Надалі операторний підхід в роботах багатьох авторів було поширено на інші інтерполяційні задачі і їх дискретні, неперервні, матричні та операторні аналоги.

Подальший розвиток операторний підхід отримав в циклі робіт В.М. Адамяна, Д.З. Арова та М.Г. Крейна, виконаних наприкінці 60-х років 20-го століття. При цьому була використана теорія узагальнених резольвент ермітових операторів, побудована в роботах М.Г. Крейна та А.В. Штрауса. Водночас В.П.Потапов запропонував новий підхід до теорії інтерполяційних задач аналі-

зу. У підході В.П. Потапова розв'язок усіченої інтерполяційної задачі зводилося до розв'язання Основної Матричної Нерівності (ОМН). У кожній інтерполяційній задачі ОМН є нетривіальним узагальненням класичної леми Шварца. Для розв'язку ОМН був запропонований метод факторизації. В результаті множина всіх розв'язків усіченої інтерполяційної задачі в цілком невизначеному випадку описувалася у вигляді дрібно-лінійного перетворення над парами відповідного типу. Матриця коефіцієнтів дрібно-лінійного перетворення називається резольвентною матрицею відповідної задачі. Метод В.П. Потапова застосовували і розвивали І.В. Ковалішина, В.Е. Кацнельсон та інші математики. В результаті для основних усічених цілком невизначених інтерполяційних задач були розв'язані як прямі задачі опису множини всіх розв'язків, так і вперше були розв'язані зворотні задачі опису резольвентних матриць відповідних усічених цілком невизначених інтерполяційних задач.

Починаючи з кінця 70-х та в 80-ті роки двадцятого століття було запропоновано кілька загальних схем розв'язку інтерполяційних задач, які містили в собі як частковий випадок різні конкретні інтерполяційні задачі аналізу. Слід пригадати АСГ-проблему моментів А.А. Нудельмана та метод операторних тотожностей Л.А. Сахновича. Але більш загальною та зручною виявилася Абстрактна Задача Інтерполяційна (АЗІ), запропонована В.Е. Кацнельсоном, А.Я. Хейфецем та П.М. Юдицьким. Ця схема стала широко відомою і застосовується в роботах багатьох математиків.

Разом з тим, незважаючи на істотний прогрес в теорії класичних інтерполяційних задач аналізу, багато важливих питань цієї теорії і її застосувань в суміжних галузях аналізу залишалися відкритими. А саме:

1. Розв'язки АЗІ повинні бути аналітичними функціями. Однак в деяких важливих класах інтерполяційних задач розв'язки повинні бути додатними гармонійними функціями. Крім того, повне дослідження передбачає розгляд цілком невизначеного і виродженого випадків. Тому важливою проблемою є така модифікація АЗІ, яка охоплювала б додатній гармонійний і вироджений випадки.
2. Задача про ліфтинг комутанту була розв'язана тільки в цілком невизначеному випадку. Проте не було розв'язано задачу про ліфтинг комутанту в загальному випадку. Ця обставина істотно ускладнювала подальший розвиток і застосування теорії інтерполяційних задач.
3. Множина всіх розв'язків задачі про ліфтинг комутанту описується в термінах дробово-лінійних перетворень. Матриця коефіцієнтів такого дробово-лінійного перетворення називається резольвентною матрицею задачі. Важлива задача знаходження характеристичних властивостей множини резольвентних матриць задачі про ліфтинг комутанту не була розв'язана в загальному випадку. Ця задача тісно пов'язана з нерозв'язаною гіпотезою Д. Сарасона про регуляризацію γ -твірних пар в задачі Нехарі.
4. У зв'язку з теорією інтерполяційних задач, в роботах В.М. Адамяна, Д.З. Арова та М.Г. Крейна було введено деякий підклас у класі функцій, які аналітичні в одиничному колі і мають додатну дійсну частину.

Такі функції допускають інтегральне зображення Ріса-Герглотца з деякою невід'ємною мірою. Було поставлено питання про те, чи завжди відповідні міри є абсолютно неперервними? В інших термінах еквівалентне питання було поставлено Д. Сарасоном. Але ці важливі питання залишалися відкритими.

5. У роботах Жюліа і Каратеодорі для функцій класу Шура були досліджені зв'язки між недотичними границями функції та її похідної в точках одиничного кола. Для задач кратної граничної інтерполяції становить значний інтерес узагальнення цих результатів на випадок вищих похідних. Такого узагальнення не було проведено раніше.
6. Множина розв'язків задачі Неванліни-Піка в класі Крейна-Лангера може бути описана за допомогою дробово-лінійного перетворення над відповідними параметрами. Однак в цьому випадку проявляється і деяка особлива риса задачі. Якщо розглядати дробово-лінійне перетворення над усіма параметрами, то з'являються зайві розв'язки. Іншими словами, з'являється деяка множина виняткових параметрів. Залишалось відкритим питання про те, чи можна образ всіх параметрів при дробово-лінійному перетворенні охарактеризувати в інтерполяційних термінах?

Розв'язанню цих важливих математичних проблем і присвячена дисертація А.Я. Хейфеця. З огляду на все вищесказане, вважаю обрану здобувачем тему дисертаційного дослідження **актуальною**.

2. Зміст та наукова новизна результатів. Дисертаційна робота складається з анотацій, вступу, сьомі розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 93 найменування, та додатку. Загальний обсяг роботи становить 328 сторінок.

У **першому розділі** дисертації міститься огляд літератури, що відноситься до розглянутих в дисертації питань. Крім того, дано короткий виклад основних результатів дисертації.

У **другому розділі** дисертації наведено основні результати, які будуть використовуватися в подальшому. Так, дано визначення унітарних систем розсіювання і операторних мір Хелленгера. Наведено конструкція реалізації унітарних систем розсіювання в просторі операторних мір Хеллінгера. Показано зв'язок між шуровськими доповненнями мір і ортогональними розкладаннями відповідних просторів Хеллінгера. Дано параметричний опис унітарних розширень ізометрій і їх резольвент. Наведено конструкція з'єднання зі зворотним зв'язком унітарних систем розсіювання і обчислена функція розсіювання для з'єднаної системи відносно заданих масштабів.

Основні результати дисертації наведені в розділах 3-7.

У **розділі 3** дисертації наведено узагальнення Абстрактної Задачі Інтерполяції (АЗІ) Кацнельсона-Хейфеця-Юдицького. Це узагальнення дозволяє розглядати в якості розв'язків АЗІ не тільки аналітичні, а й додатні гармонійні функції і відповідні їм міри. Здобувач запропонував метод розв'язання узагальненої АЗІ, який використовує унітарні розширення ізометричних операторів. В результаті отримано параметричне представлення множини всіх розв'язків

узагальненої АЗІ. Остаточна формула має вигляд

$$\sigma_p = \sigma_0 + r_2 \omega (\mathbf{1} - s\omega)^{-1} r_1 + r_1^* (\mathbf{1} - \omega^* s^*)^{-1} \omega^* r_2^*,$$

де ω є довільною оператор-функцією класу Шура.

У не узагальненому випадку формула опису всіх розв'язків АЗІ була відома раніше. Вона має вигляд

$$w = s_0 + s_2 \omega (\mathbf{1} - s\omega)^{-1} s_1.$$

Слід зазначити, що для узагальненої АЗІ формула опису всіх розв'язків виявилася складнішою тому, що при узагальненні АЗІ довелося відійти від розгляду тільки ортогональних АЗІ. Постановка і розв'язання узагальненої АЗІ відносяться до основних результатів дисертації.

У розділі 4 дисертації розглянуто задачу про ліфтинг.

Нехай

1. В гільбертових просторах \mathcal{K}' і \mathcal{K}'' задані унітарні оператори U' і U'' .
2. Задані підпростори $\mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}'$ і $\mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}''$, які є $*$ -циклічними для U' і U'' відповідно (тобто, найменший підпростір що приводить U' та містить \mathcal{K}'_+ це увесь простір \mathcal{K}' , аналогічно для U'' і \mathcal{K}''_-).
3. Виконано умову

$$U' \mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}'_+, \quad U''^* \mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}''_-.$$

4. Задано стискуючий сплітаючий оператор $X: \mathcal{K}'_+ \rightarrow \mathcal{K}''_-$,

$$XU'|_{\mathcal{K}'_+} = P_{\mathcal{K}''_-} U'' X.$$

Задача про ліфтинг полягає з тому, щоб дати опис всіх стискуючих операторів $Y: \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}''$, які сплітають U' і U'' , $YU' = U''Y$ і є ліфтингами X

$$P_{\mathcal{K}''_-} Y|_{\mathcal{K}'_+} = X.$$

Задачею Нехарі називається задача про ліфтинг, в якій

$$\mathcal{K}' = L^2(E_1), \quad \mathcal{K}'' = L^2(E_2), \quad \mathcal{K}'_+ = H^2(E_1), \quad \mathcal{K}''_- = H^2_-(E_2),$$

U' и U'' оператори множення на незалежну змінну t .

У дисертаційній роботі задача про ліфтинг розв'язана в найзагальнішому випадку по такій схемі. За даними задачі про ліфтинг будується АЗІ. Розв'язки цієї АЗІ називаються символами ліфтингу. Між розв'язками задачі про ліфтинг і символами ліфтингу встановлюється взаємно однозначна відповідність. Опис символів ліфтинга задає така формула

$$w = s_0 + s_2 (I - \omega s)^{-1} \omega s_1.$$

Тут $\omega(\zeta)$ є довільною оператор-функцією класу Шура. Зворотня задача про ліфтинг формулюється так. За яких умов чотири функції s , s_2 , s_1 і s_0 беруть участь у формулі (1), яка описує множину всіх символів деякої задачі про ліфтинг. В дисертації отримано повний розв'язок цієї зворотної задачі. Далі розвинена техніка застосовується для аналізу часткового випадку задачі про

ліфтинг - задачі Нехарі. Враховується специфіка даної задачі і для неї отримані нові результати.

Розв'язання в найзагальнішому випадку прямої і оберненої задачі про ліфтинг відноситься до основних результатів дисертаційної роботи.

У розділі 5 дисертації досліджена резольвентна матриця скалярної задачі Нехарі в невизначеному випадку. Множина розв'язків невизначеної задачі Нехарі описується формулою (майже всюди на \mathbb{T})

$$w = \frac{a \omega - \bar{b}}{\bar{a} 1 - \omega b},$$

де ω довільна функція класу Шура, а функції a і b мають такі властивості

1. функції $a, b \in H^\infty$,
2. функція a зовнішня, $a(0) > 0$, $b(0) = 0$,
3. майже всюди на \mathbb{T} має місце рівність $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Пара таких функцій (a, b) називається γ -твірною.

Якщо для деякої пари функцій (a, b) формула (1) творить всі розв'язки деякої задачі Нехарі, то відповідна пара (a, b) називається *регулярною за Аровим γ -твірною парою*.

В дисертації отримано нову характеристику регулярних γ -твірних пар. А саме γ -твірна пара (a, b) є регулярною тоді і тільки тоді коли вона задовольняє умовам 1 – 3 і додатковій умові ($s_0 := -\frac{a}{\bar{a}}\bar{b}$)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{clos} \left\{ \begin{bmatrix} ah \\ P_{H^2} s_0 h \end{bmatrix} : h \in H^2 \right\}.$$

Здобувач довів, що для довільної γ -твірної пари (a, b) існує внутрішня функція θ така, що пара $(a, b\theta)$ є регулярною.

Цей результат дає позитивну відповідь на першу гіпотезу Д. Сарасона.

Говорять, що γ -твірна пара (a, b) має властивість *абсолютної неперервності* (ас) якщо для будь-якої функції класу Шура ω міра $\sigma_{b\omega}$ в представленні

$$\frac{1 + b(\zeta)\omega(\zeta)}{1 - b(\zeta)\omega(\zeta)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{t + \zeta}{t - \zeta} \sigma_{b\omega}(dt), \quad |\zeta| < 1$$

є абсолютно неперервною.

Усі регулярні γ -твірні пари (a, b) мають властивість (ас) (Адамян, Аров, Крейн). Адамяном, Аровим і Крейном було сформульовано питання: чи є зворотне твердження вірним? Твердження еквівалентне цьому було сформульовано Д. Сарасоном у вигляді гіпотези (друга гіпотеза Д. Сарасона). Здобувачем доведено, що це твердження не є вірним.

Позитивна відповідь на першу та негативна відповідь на другу гіпотезу Д. Сарасона відносяться до основних результатів дисертації.

У розділі 6 дисертації доведено кратний аналог класичної теореми Жюлія - Каратеодорі. Клас Шура аналітичних функцій що відображають одиничний круг \mathbb{D} в своє замикання позначемо через \mathcal{S} . Символ $z \xrightarrow{\widehat{}} t_0$ позначає, що z наближається недотичним напрямом до граничної точки t_0 одиничного кола \mathbb{T} .

Символ $z \rightarrow t_0$ позначає, що z прямує до t_0 перебуваючи в \mathbb{D} . Для довільних функції $w \in \mathcal{S}$, $n \geq 0$ і $z \in \mathbb{D}$ маємо

$$\mathbf{P}_n^w(z) := \left[\frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \frac{1 - |w(z)|^2}{1 - |z|^2} \right]_{i,j=0}^n \geq 0.$$

Матриця $\mathbf{P}_n^w(t_0)$ називається *матрицею Шварца - Піка*.

Нехай точки $t_0 \in \mathbb{T}$. Межовою матрицею Шварца - Піка називається

$$\mathbf{P}_n^w(t_0) = \lim_{z \rightarrow t_0} \mathbf{P}_n^w(z) \geq 0,$$

якщо границя в (1) існує.

Нехай для функції $w \in \mathcal{S}$ існують такі недотичні границі

$$w_j(t_0) := \lim_{z \rightarrow t_0} \frac{w^{(j)}(z)}{j!} \quad \text{для } j = 0, \dots, 2n + 1,$$

де $w^{(j)}$ позначає похідну порядку j . Введемо позначення

$$\mathbb{P}_n^w(t_0) := \begin{bmatrix} w_1(t_0) & \cdots & w_{n+1}(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n+1}(t_0) & \cdots & w_{2n+1}(t_0) \end{bmatrix} \Psi_n(t_0) \begin{bmatrix} \overline{w_0(t_0)} & \cdots & \overline{w_n(t_0)} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \overline{w_0(t_0)} \end{bmatrix},$$

де $\Psi_n(t_0) = [\Psi_{j\ell}]_{j,\ell=0}^n$ це верхньо трикутна матриця з елементами

$$\Psi_{j\ell} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } j > \ell \\ (-1)^\ell \binom{\ell}{j} t_0^{\ell+j+1}, & \text{якщо } j \leq \ell. \end{cases}$$

Нехай

$$d_{w,n}(z) := \frac{1}{(n!)^2} \frac{\partial^{2n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^n} \frac{1 - |w(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

В дисертаційній роботі доказано таку теорему.

Теорема 6.2. Для довільних $w \in \mathcal{S}$, $t_0 \in \mathbb{T}$ і $n > 0$ еквівалентні такі умови:

$$(1) \quad \liminf_{z \rightarrow t_0} d_{w,n}(z) < \infty. \quad (1)$$

$$(2) \quad \lim_{z \rightarrow t_0} d_{w,n}(z) < \infty. \quad (2)$$

(3) Межова матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^w(t_0)$ існує.

(4) Недотичні межові границі (1) існують $|w_0(t_0)| = 1$ і $\mathbb{P}_n^w(t_0) \geq 0$.

Більш того, якщо ці умови виконуються, то границі (1) і (2) співпадають і

$$\mathbf{P}_n^w(t_0) = \mathbb{P}_n^w(t_0).$$

При $n = 1$ теорема 6.2 є класичною теоремою Жюліа - Каратеодорі. При $n > 1$ теорема 6.2 є нетривіальним кратним аналогом класичної теореми Жюліа - Каратеодорі та є одним з основних результатів дисертації.

У розділі 7 дисертації впроваджено і досліджено розширений клас функцій Крейна-Лангера і розв'язана задача Неванлінни-Піка для таких функцій.

Розширений клас функцій Крейна-Лангера визначається так. Нехай задане ціле число $\kappa > 0$. Через \mathcal{S}_κ позначимо клас функцій f , які голоморфні в одиничному колі, за винятком деякої дискретної множини точок Λ , і для будь-якого скінченного набору точок z_1, z_2, \dots, z_n з області визначення функції f від'ємний індекс інерції матриці Піка

$$P = \left[\frac{1 - f(z_i)f(z_j)^*}{1 - z_i z_j^*} \right]_{i,j=1}^n$$

не перевищує κ . Крім того, існує деякій набір точок для яких від'ємний індекс інерції матриці Піка дорівнює κ .

Нові наукові результати розділу 7. Впроваджено і досліджено розширений клас функцій Крейна-Лангера \mathcal{S}_κ . Доведено, що кожна функція з класу \mathcal{S}_κ може бути продовжена до стандартної класу \mathcal{S}_κ . В точках дискретної множини Λ стандартні функції мають полюси або стрибки. У звичайному класі Крейна-Лангера в точках дискретної множини Λ функції можуть мати тільки полюса. Саме можливість стрибків і полюсів для розширеного класу функцій Крейна-Лангера дозволила в опису всіх розв'язків задачі Неванлінни-Піка уникнути зайвих розв'язків і зняти проблему виняткових параметрів. У дисертації досліджена і вироджена задача Неванлінни-Піка, яка в узагальненому класі Крейна-Лангера завжди має єдиний розв'язок. У звичайному класі Крейна-Лангера вироджена задача Неванлінни-Піка може мати і порожню множину розв'язків.

3. Обґрунтованість та достовірність результатів дисертації. Дисертаційна робота Хейфеця Олександра Яковича виконане на високому науковому рівні. Всі основні результати сформульовані у вигляді повністю доведених теорем. Обґрунтованість та достовірність результатів дисертації впливає з їх доведень і порівнянь з відомими раніше результатами.

4. Публікації та апробація результатів дисертації. Усі основні результати дисертації опубліковано в 23 статтях в реферованих математичних виданнях. Крім того, результати дисертації опубліковані в 14 матеріалах міжнародних наукових конференцій. Результати дисертації неодноразово доповідались на фахових наукових семінарах у провідних наукових центрах, а також пройшли апробацію на багатьох міжнародних математичних конференціях як в Україні так і за її межами. Автореферат адекватно висвітлює основні результати дисертаційної роботи. Наукові результати дисертації є достатньо відомими та доступними для фахівців.

5. Практичне значення результатів дисертації. Дисертаційна робота Хейфеця Олександра Яковича є завершеною науковою роботою теоретичного характеру. У ній отримана низька нових результатів. Крім того, дані позитивні і негативні відповіді на гіпотези, які були сформульовані видатними математиками. Проведені автором дослідження будуть корисними фахівцям з теорії інтерполяційних задач, теорії розсіювання і суміжних питань математичного аналізу.

6. Зауваження та недоліки.

До недоліків дисертації треба віднести певну кількість дрібних помилок. Наприклад:

1. На стор. 28 рядок 8 зверху: замість «э» слід було писати «е».
2. На стор. 33 рядки 1 та 3 знизу: слід вилучити зайві круглі дужки.
3. На стор. 34 формула (1.1.29): замість « $i = i$ » слід було писати « i ».
4. На стор. 34 рядок 10 знизу: замість «дефектним» слід було писати «дефектним».
5. На стор. 35 рядок 12 знизу: замість «загальний» слід було писати «Загальний».
6. На стор. 36 рядок 8 зверху: замість «моіх» слід було писати «моїх».
7. На стор. 48 рядок 5 знизу: замість «виливає» слід було писати «випливає».
8. На стор. 72 рядок 7 зверху: замість «остаточно» слід було писати «Остаточно».
9. На стор. 124 рядок 9 зверху: замість «шо» слід було писати «що».
10. На стор. 134 рядок 9 зверху: замість «и» слід було писати «і».
11. На стор. 183 рядок 7 знизу: замість «відображення» слід було писати «Відображення».
12. На стор. 204 формула (6.1.5): замість «if» слід було писати «якщо».

Наведені зауваження не відбиваються на загальному позитивному враженні від дисертаційної роботи.

7. Висновки. З огляду на викладене вище, вважаю, що дисертація Хейфеця Олександра Яковича «Унітарні системи розсіювання та задачі інтерполяції», є завершеною актуальною науковою працею. Дисертація задовольняє вимогам пп. 9, 10, 12-14 «Порядку присудження наукових ступенів» (Постанова Кабінету міністрів України №567 від 24.07.2013) щодо докторських дисертацій, а її автор, Хейфец Олександр Якович, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Доктор фізико-математичних наук, доцент,
професор кафедри вищої математики
фізичного факультету
Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна

Ю.М. Дюкарев

