ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук

Деркача Володимира Олександровича

про дисертацію

Хейфеця Олександра Яковича

"*Унітарні системи розсіювання та задачі інтерполяції*"

на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

зі спеціальності

01.01.01 - математичний аналіз

Дисертація присвячена дослідженню інтерполяційних проблем аналізу, пов'язаних з ними унітарних систем розсіювання та відповідних модельних просторів функцій або мір, а саме:

(a) поширенню схеми Абстрактної Інтерполяційної Задачі на випадок, коли рішеннями є не тільки аналітичні, а й позитивні гармонічні функції;

(b) розгляду на основі цього підходу проблеми про ліфтинг комутанту у загальному випадку;

(c) розгляду оберненої проблеми про ліфтінг комутанту, тобто характеризації коефіцієнтів формули, що параметризує її розв'язки;

(d) вирішенню проблем Д. Сарасона про регуляризацію γ-твірних пар і про регулярність γ-твірних пар з властивістю абсолютної неперервності;

(e) отриманню кратного аналога теореми Жюліа – Каратеодорі про кутову межову похідну та розгляду відповідної межової інтерполяційної задачі;

(f) введенню до розгляду розширеного класу Крейна – Лангера, який містить крім функцій з полюсами ще й функції зі стрибками, та розв'язанню в цьому класі інтерполяційної проблеми Неванлінни – Піка.

Типовим прикладом інтерполяційної проблеми є степенева проблема моментів, розглянута Стільт'єсом наприкінці XIX століття. Різні підходи до цієї проблеми і її зв'язок з теорією ланцюгових дробів і з теорією розширень ермітових операторів було розроблено в подальшому в роботах Г. Гамбургера, братів Ф. і М. Ріс, Р. Неванлінни, М. Стоуна, М. Лівшиця, М. Крейна та багатьох інших. Справжній вибух досліджень в теорії інтерполяційних проблем спостерігався на початку XX століття, коли в роботах К. Каратеодорі, Л. Фейера, І. Шура, Г. Піка і Р. Неванлінни було знайдено критерії розв'язності інтерполяційних проблем в різних класах і розроблено покроковий підхід до вирішення цих проблем. Спільною рисою цих інтерполяційних проблем був той факт, що множина їх розв'язків описувалась у вигляді дробово-лінійного перетворення над довільною функцією певного класу з матрицею коефіцієнтів (резольвентною матрицею), яка визначалась даними задачі.

Ця резольвентна матриця слугувала містком, який поєднував теорію інтерполяційних проблем з теорією лінійних операторів, де аналогом резольвентної матриці була характеристична матриця М. Лівшиця, введена до розгляду в 40-х роках. Операторний підхід до інтерполяційних проблем отримав потужний розвиток в роботах В. Адамяна, Д. Арова і М. Крейна кінця 60-х років, в яких можливості теорії розширень ермітових операторів було продемонстровано на прикладі проблеми Нехарі. Альтернативні підходи до інтерполяційних проблем було розроблено в 60-ті - 70-ті роки В.П. Потаповим і І.В. Ковалішиною, А.А. Нудельманом, Г. Димом і І. Гохбергом, Дж. Боллом і Дж. Хелтоном. В основу підходу Потапова було покладено Лему Шварца та її узагальнення, яке Потапов назвав Основною Матричною Нерівністю задачі. Наприкінці 80-х років підходи Адамяна-Арова-Крейна і Потапова було поєднано в Схемі Абстрактної Задачі Інтерполяції розробленої В. Кацнельсоном, О. Хейфецем і П. Юдицьким.

Нова хвиля інтересу до інтерполяційних проблем в 70-90-х роках була викликана розвитком теорії систем в роботах Р. Калмана, Т. Кайлата та ін. Зокрема в роботах Б. Франсіса, Дж. Хелтона, Г. Зеймса і К. Главера було показано, що проблема мінімізації чутливості системи в теорії H^∞– контролю пов'язана з проблемою Нехарі, а проблема її редукції з так званою, проблемою Нехарі-Такагі. Як бачимо, тематика дисертації досить широка і придатна для застосувань як у комплексному аналізі і теорії операторів так і в теорії систем. З огляду на це актуальність дисертації не викликає сумнівів.

Дисертація складається з анотації (українською та англійською мовами), вступу, семи розділів, висновків і списку використаних джерел.

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету й завдання досліджень, визначено наукову новизну і практичне значення одержаних результатів, наведено відомості про їх апробацію, установи та організації, де вони доповідались і обговорювались, публікації за темою дисертації.

У першому розділі наведено огляд літератури по інтерполяційним проблемам, проблемі Нехарі, проблемі ліфтингу комутанту та сформульовано основні результати дисертації. Зокрема, докладно пояснюється схема Абстрактної Задачі Інтерполяції (АЗІ) розроблена в роботах В.Е. Кацнельсона, О.Хейфеця і П. Юдицького, яка охоплює такі проблеми, як проблема Неванлінни–Піка, бідотична проблема, проблема Сарасона і проблема моментів. В цих проблемах розшукуються функції аналітичні в області з вузлами інтерполяції всередині області або на її межі. Основним засобом розв'язання АЗІ є теорія унітарних вузлів і техніка зчеплення унітарних вузлів, при цьому резольвентна матриця знаходиться як характеристична функція такого вузла. Для побудови функціональної моделі унітарного вузла використовується простір де Бранжа-Ровняка. Але для таких задач як проблема ліфтинга комутанта і проблема Нехарі ця техніка не спрацьовує, тому що їх розв'язки не є аналітичними функціями. Для таких задач замість унітарних вузлів автор розглядає унітарні системи розсіювання введені в спільній роботі автора з С. Бойко і В. Дубовим, а замість просторів де Бранжа-Ровняка використовуються простори мір Хеллінгера.

У Розділі 2 містяться необхідні відомості про унітарні системи розсіювання. Сукупність $\mathfrak{S} = (\mathcal{U}, \rho; \mathcal{K}, \mathcal{E})$, де $\mathcal{K}$ – *гільбертів простір станів*, $\mathcal{E}$ – *простір коефіцієнтів*, $\mathcal{U}$ – унітарний оператор еволюції, що діє в $\mathcal{K}$ і ρ – оператор *масштабу* що діє з $\mathcal{E}$ в $\mathcal{K}$. З кожною унітарною системою розсіювання $\mathfrak{S}$ пов'язується її *спектральна функція*

$$\sigma(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)\rho^*(I - \overline{\zeta}\mathcal{U})^{-1}(I - \zeta\mathcal{U}^*)^{-1}\rho. \tag{1}$$

яка є позитивною гармонійною операторно-значною функцією в просторі $\mathcal{E}$.

З мірою σ є пов'язаним простір $\mathcal{L}^\sigma$ всіх $\mathcal{E}$ - значних векторних мір ν, для яких існує скалярна міра μ на $\mathbb{T}$ така що оператор

$$\begin{bmatrix} \mu(\Delta) & \nu(\Delta)^* \\ \nu(\Delta) & \sigma(\Delta) \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{C} \oplus \mathcal{E}) \tag{2}$$

є невід'ємним для будь-якої борелівської підмножини $\Delta \subseteq \mathbb{T}$. В Теоремі 2.7

показано як унітарні системи розсіювання реалізуються у просторі Хеллінгера. Викладено числення з'єднань унітарних системи розсіювання зі зворотним зв'язком та обчислено динаміку з'єднаної системи. Обчислено функції розсіювання з'єднаної системи відносно заданого масштабу та масштабу з'єднання.

У Розділі 3 формулюється узагальнена АЗІ в термінах унітарних систем розсіювання. Нехай $\tilde{X}$ це лінійний простір, $\tilde{D}$ невід'ємна форма на $\tilde{X}$, $\tilde{T}_1$ і $\tilde{T}_2$ два лінійних оператора в $\tilde{X}$. Припустимо, що ці об'єкти пов'язані тотожністю

$$\tilde{D}(\tilde{T}_1\tilde{x}, \tilde{T}_1\tilde{y}) = \tilde{D}(\tilde{T}_2\tilde{x}, \tilde{T}_2\tilde{y}) \quad \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}. \tag{3}$$

Нехай $\widetilde{H}_0$ це гільбертів простір, що побудовано на базі $\tilde{X}$ за допомогою форми $\tilde{D}$. Нехай E це допоміжний Гільбертів простір і $\rho_0 : E \to \tilde{H}_0$ – обмежений лінійний оператор. Невід'ємна гармонійна в колі $\mathbb{T}$ операторно-значна функція $\sigma(\zeta) : E \to E$ (або відповідна операторно-значна міра $\sigma(dt)$ на одиничному колі $\mathbb{T}$) називається розв'язком узагальненої АЗІ, якщо існує лінійне відображення $\tilde{F} : \tilde{X} \to L^\sigma$з $\tilde{X}$ в простір Хеллінгера L^σ пов'язаний з σ, таке, що:

$$(i) \quad \tilde{F}\tilde{T}_2\tilde{x} = \bar{t}\tilde{F}\tilde{T}_1 x;$$

$$(ii) \quad \|\tilde{F}\tilde{x}\|^2_{L^\sigma} \le \tilde{D}(\tilde{x}, \tilde{x});$$

$$(iii) \quad \tilde{F}\rho_0 e = \sigma(dt)e, \ \forall e \in E.$$

Тотожність (3) дозволяє визначити ізометрію $\widetilde{V} : [T_1\tilde{x}] \to [T_2\tilde{x}]$ в $\tilde{H}_0$, яка відіграє центральну роль у вирішенні задачі. В Теоремі 3.6 множина розв'язків узагальненої АЗІ описується формулою (1), де $\mathcal{U}$ – довільне унітарне розширення оператора $\widetilde{V}$. З урахуванням результатів Розділу 2 це приводить до параметризації розв'язків узагальненої АЗІ з вільним параметром $\omega(\zeta)$, який може бути довільною операторно-значною функцією класу Шура в колі $\mathbb{T}$, $\omega(\zeta) : N_1 \to N_2$.

У Розділі 4 розглядається загальна проблема про ліфтинг комутанту, розв'язність якої було доведено Б. С-Надем і Ч. Фойашем в 1968 р. Показано, що вона вкладається в схему Абстрактної Задачі Інтерполяції, розглянуту в Розділі 3, вивчено специфіку даних задачі про ліфтинг і отримано опис всіх ліфтингів заданого стиснення в термінах їх символів. Поняття символу ліфтингу також введено в цій роботі і узагальнює класичне поняття символу Ганкелева оператора. В Теоремі 4.18 отримано повну характеризацію коефіцієнтів параметризуючої формули проблеми ліфтинга комутанту.

Ці результати застосовано до задачі Нехарі, яка є окремим випадком задачі про ліфтинг комутанту. В проблемі Нехарі *задано послідовність комплексних чисел $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z}_-}$, і потрібно описати всі L^∞-функції w на одиничному колі $\mathbb{T}$ такі, що*

$$\|w\|_\infty \leq 1 \text{ і } w_n = \gamma_n \text{ при } n = -1, -2, -3, \ldots,$$

де $w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n t^n$ розклад w в ряд Фур'є.

Загальна формула, що дає параметризацію розв'язків проблеми ліфтинга комутанта у випадку проблеми Нехарі може бути записана як

$$w = \frac{a}{\overline{a}}\frac{\omega - \overline{b}}{1 - \omega b}, \quad \omega \in S, \tag{4}$$

де функції a, b задовольняють умовам:

(1) $a, b \in H^\infty$,

(2) a зовнішня, $b(0) = 0$,

(3) $|a|^2 + |b|^2 = 1$ майже всюди на $\mathbb{T}$,

Пару функцій (a, b), що має перелічені вище властивості, називають, дотримуючись термінології Д. З. Арова, *γ-твірною парою.*

У тому випадку, коли формула (4) дає опис всіх розв'язків деякої задачі Нехарі, відповідна пара (a, b) називається *регулярною γ-твірною парою.* Це поняття було введено Д. З. Аровим і їм була отримана характеризація таких пар. В Теоремі 4.28 знайдено додаткову умову, відмінну від умови Арова, яка забезпечує регулярність γ-твірної пари:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{clos}\left\{ \begin{bmatrix} ah \\ P_{H^2} s_0 h \end{bmatrix} : h \in H^2 \right\} \text{ де } s_0 := -\frac{a}{\overline{a}}\overline{b}. \tag{5}$$

Основним результатом Розділу 5 є Теорема 5.7, яка стверджує, що для кожної γ-твірної пари (a, b) існує внутрішня функція θ така, що пара $(a, b\theta)$ є регулярною, що є відповіддю на проблему поставлену Сарасоном в 1989 р.

У підрозділі 5.2 побудовано контрприклад до іншої проблеми Д. Сарасона. Про γ-твірну пара (a, b) говорять, що вона має властивість абсолютної неперервності, якщо для будь-якої функції ω класу Шура міра $\sigma_{b\omega}$ в представленні Ріса-Герглотца

$$\frac{1+b(\zeta)\omega(\zeta)}{1-b(\zeta)\omega(\zeta)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{t+\zeta}{t-\zeta}\sigma_{b\omega}(dt), \quad |\zeta| < 1$$

є абсолютно неперервною. Сарасон сформулював як гіпотезу, що з цієї властивості пари (a, b) випливає її регулярність. Автором показано, що пари (a, b), що виникають при параметризації розв'язків проблеми моментів Гамбургера мають властивість абсолютної неперервності, але є сингулярними, тобто не можуть бути регулярними.

У Розділі 6 отримано аналог класичної теореми Жюліа-Каратеодорі про кутову межову похідну для похідних вищого порядку. Зокрема, в Теоремі 6.2 показано, що для функцій класу Шура кратний аналог умови Жюліа-Каратеодорі

$$\liminf_{z \to t_0} d_{w,n}(z) < \infty \quad \text{при усіх } \ n \geq 0, \tag{6}$$

де $d_{w,n}(z) := \frac{1}{(n!)^2}\frac{\partial^{2n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^n}\frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2}$ є еквівалентним умові існування межових значень

$$w_j(t_0) := \lim_{z \to t_0} \frac{w^{(j)}(z)}{j!}, \qquad j \geq 0$$

при деяких додаткових умовах на допоміжну матрицю Шварца–Піка. У Теоремі 6.25 розглянуто відповідну межову інтерполяційну задачу і доведено що кратний аналог умови Жюліа-Каратеодорі є еквівалентним умові симетрії межових похідних, яка виникала в працях І.В. Ковалішиної.

У Розділі 7 вивчено розширений клас Крейна-Лангера S_κ, який визначається від'ємним індексом інерції матриць Шварца- Піка і який (на відміну від узагальненого класу Шура) містить не тільки функції з полюсами, але й функції зі стрибками.

В Теоремі 7.18 розглянуто задачу Неванлінни-Піка у розширеному класі Крейна-Лангера та отримано параметризацію всіх її розв'язків в класі S_κ.

Формула, що описує множину розв'язків має вигляд дробово-лінійного перетворення над довільною функцією класу Шура, тобто на відміну від задачі Неванлінни-Піка в узагальненому класі Шура, коли дозволяються лише розв'язки з полюсами, в цій задачі немає виключних параметрів. Крім того розглянуто вироджений випадок задачі Неванлінни-Піка у розширеному класі Крейна-Лангера і доведено, що тоді задача завжди має єдиний розв'язок, який може мати стрибки, на відміну від класичної постановки коли розв'язків може не бути.

Зауваження. У дисертації трапляються описки, наприклад:

1. стор. 117 треба замінити "областб визначеня" на "областю визначення" і видалити зайву літеру "г" перед словом"Гільбертовому";
2. стор. 163 треба замінити "Аровым" на "Аровим";
3. стор. 167 треба замінити "відомої" на "відомою";
4. стор. 307 Назва " класичний клас Крейна-Лангера" не є загальноприйнятою. Зазвичай для цього класу використовується назва " узагальнений клас Шура".

Переходячи до загальної оцінки дисертації, відмітимо, що дисертація Хейфеця О. Я. є завершеною працею, в ній отримано низку нових, вагомих і яскравих результатів в галузі комплексного аналізу і теорії інтерполяційних задач, які охоплюють абстрактні інтерполяційні задачі, проблему ліфтингу комутанту, проблему Нехарі, межову кратну інтерполяційну проблему, задачу Неванлінни-Піка у розширеному класі Крейна-Лангера, знайдено відповіді на дві проблеми поставлені Сарасоном, розв'язано обернену задачу проблеми ліфтинга комутанту і проблеми Нехарі. Усі наведені в дисертації результати є новими. Вони чітко сформульовані й науково обґрунтовані, вчасно опубліковані, що забезпечує достовірність основних дисертаційних положень та висновків з них. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

На підставі сказаного вважаю, що дисертаційна робота "Унітарні системи розсіювання та задачі інтерполяції" за актуальністю тематики і одержаними в ній науковими результатами повністю відповідає усім вимогам щодо докторських дисертацій зі спеціальності 01.01.01 - математичний аналіз, зокрема вимогам постанови Кабінету Міністрів України за № 567 від 24 липня 2013 року "Про затвердження Порядку присудження наукових ступенів" зі змінами і доповненнями, внесеними постановами Кабінету Міністрів України від 19 серпня 2015 року за №656, від 30 грудня 2015 року за №1159, від 27 липня 2016 року за №567 і наказом №40 МОН України від 12 січня 2017 року, а її автор Хейфець О. Я. заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент –
доктор фізико-математичних наук, професор,
22 квітня 2019 р. В.О. Деркач

Підпис професора кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь Донецького національного університету імені Василя Стуса, Деркача Володимира Олександровича засвідчую

Відгук надійшов до ради 06.05.2019
Вчений секретар
Спец. вченої ради Д 64.175.01
(В.О. Горькавий)