Відгук
офіційного опонента на дисертацію Ігнатович Світлани Юріївни
«Метод рядів та вільних алгебр в аналізі нелінійних керованих систем»,
подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 «математичний аналіз»

Теорія керування є одною із важливих і цікавих областей теорії диференційних рівнянь, де яскраво відображаються різноманітні розділи геометрії, функціонального аналізу, теорії функцій тощо. Підґрунтя теорії керування належать роботам Л. С. Понтрягіна, В. Г. Болтянського, Р. В. Гамкрелідзе, Є. Ф. Міщенко, Р. Калмана, Р. Белмана. Важлива роль у цьому колі питань належить методу функції керованості, запропонованому В. І. Коробовим. Цей метод дозволив відповісти на основні питання теорії керування. Започаткований роботою В. І. Коробова і Г. М. Скляра новий напрямок досліджень в цій галузі дозволив з позицій відомої проблеми моментів сформулювати цікаві задачі теорії керування. Так min-проблема моментів Маркова еквівалентна лінійній задачі швидкодії. Узагальнення цього методу на нелінійні системи (Г. М. Скляр, С. Ю. Ігнатович) дозволило виділити класи таких систем, які наближаються лінійними степеневими min-проблемами моментів. На цьому шляху було з'ясовано, що вивчення таких систем спирається на ряди нелінійних степеневих моментів, а ці нелінійні степеневі моменти утворюють вільну асоціативну алгебру. Таким чином, дослідження нелінійних систем привело до аналізу нелінійних моментних рядів з певною алгебраїчною структурою. Окрім того, систематизація моментних рядів, елементи яких утворюють вільну асоціативну алгебру, дозволяє відповісти на ключові питання теорії керування та вказати розумні (можливо, нелінійні) системи керування, що апроксимують початкову систему. Все вищезгадане характеризує актуальність теми дисертації.

Метою дисертаційної роботи є створення єдиного підходу до вивчення нелінійних керованих систем, який розвиває вищезгаданий моментний підхід для лінійних систем. Для досягнення цієї мети автору довелося залучити методи загальної алгебри: ввести абстрактну асоціативну алгебру і досліджувати ряди елементів цієї алгебри з векторними коефіцієнтами.

Дисертація складається з анотації, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел, що включає 162 найменування, і трьох додатків.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано на зв'язок з науковими програмами та темами, які виконувалися відповідно планам наукових робіт кафедри диференціальних рівнянь та керування і кафедри прикладної математики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, сформульовано мету і задачі дослідження.

В розділі 1 наведено огляд літератури за темою дисертації, а такою стисло викладені необхідні для подальшого розуміння поняття і результати з теорії керування (у тому числі зв'язок з проблемою моментів) і алгебри. Зокрема, викладена теорема щодо переходу від задачі попадання для системи, афінної за керуванням, до ряду нелінійних степеневих моментів (теорема 1.1) і сформульована відповідна нелінійна min-проблема моментів Маркова (означення 1.1), які було запропоновано в роботах Г. М. Скляра і С. Ю. Ігнатович, опублікованих у Доповідях РАН (1999 р.) і журналі SIAM J Control and Optimization (2000 р.), а також викладено в кандидатській дисертації С. Ю. Ігнатович. В цих роботах було виділено клас нелінійних систем, які еквівалентні лінійним в сенсі швидкодії (означення 1.2, теорема 1.2). Вищезгадані результати є відправною точкою для досліджень, яким присвячена дана дисертація.

Також в цьому розділі викладаються деякі означення і факти щодо задачі однорідної апроксимації (підрозділ 1.2), яка є ще одним джерелом для даного дослідження.

В розділі 2 систематично викладається зображення нелінійних керованих систем у вигляді рядів ітерованих інтегралів (підрозділ 2.1) або нелінійних степеневих моментів (підрозділ 2.2). Самі зображення не є новими (як було зазначено вище, вони сформульовані у розділі 1 з відповідними посиланнями), але в розділі 2 вводяться відображення «у кінець траєкторії» $\mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}(\theta,u)$ і «до початку траєкторії» $S_{a,b}(\theta,u)$, вводяться і обговорюються вільні алгебри ітерованих інтегралів і нелінійних степеневих моментів $\mathcal{F}_\theta$ і $\mathcal{A}_\theta$, обговорюються властивості коефіцієнтів рядів з точки зору цих алгебр, а також вводяться відповідні абстрактні вільні алгебри $\mathcal{F}$ і $\mathcal{A}$. Зокрема, пояснюється, що заміни змінних в системах відповідають перетворенням рядів, в яких використовується тасуючий добуток. Цей попередній розгляд приводить до абстрактної постановки задачі однорідної апроксимації, якій присвячений розділ 3.

В розділі 3 розглядається абстрактна вільна асоціативна алгебра $\mathfrak{A}$. В ній вводиться клас формальних степеневих рядів $\mathcal{Z}_g = \sum_{k\geq 1, i_1,\ldots,i_k\in I} g_{i_1\ldots i_k}\,\zeta_{i_1\ldots i_k}$, який узагальнює ряди ітерованих інтегралів і ряди нелінійних степеневих моментів. Вводяться означення ядерної підалгебри Лі $\mathfrak{L}_g$ (означення 3.2) і лівого ідеалу $\mathfrak{J}_g$ (означення 3.3), які породжуються коефіцієнтами ряду. На такій абстрактній мові формулюється задача однорідної апроксимації ряду (означення 3.4).

В підрозділі 3.2 вивчаються базиси, пов'язані з введеними структурами – ядерною алгеброю Лі і лівим ідеалом. Зокрема, отриманий опис базису ортогонального доповнення до лівого ідеалу $\mathfrak{J}_g^\perp$ (теорема 3.1). Ця теорема узагальнює теорему Р. Рі про характеризацію елемента алгебри Лі, оскільки з неї випливає ортогональний розклад асоціативної алгебри (3.36) (наслідок 3.4). Теорема 3.1, а також її наслідок – лема 3.10 про опис базису $\mathfrak{J}_g^\perp$ в термінах спряженого базису є стартовим кроком для отримання основних результатів розділу 3.

Основні результати розділу 3 викладені в підрозділі 3.3. перш за все, це теорема 3.2 про опис загального вигляду однорідної апроксимації (3.63). А саме, будь-яка однорідна апроксимація ряду є поліномом $\mathcal{Z}_{\hat{g}} = P(d_1,\ldots,d_n)$ від елементів спряженого базису. По суті, це є теоремою про існування та єдиність (абстрактної) однорідної апроксимації, тому що будь-яка апроксимація вказаного вигляду поліноміальним перетворенням зводиться до апроксимації $\left(\mathcal{Z}_{\hat{g}}\right)_i = d_i$. Альтернативний вигляд апроксимації дається теоремою 3.4; з неї легко випливає, що апроксимація повністю визначається ядерною підалгеброю Лі. У лемі 3.17 доводиться, що будь-яка градуйована підалгебра ковимірності n є ядерною підалгеброю Лі для якогось ряду. Це в сукупності дає повний опис і класифікацію всіх однорідних апроксимацій. Як наслідок цих результатів, запропоноване безкоординатне означення однорідної апроксимації (означення 3.5). Крім того, отриманий повний опис всіх апроксимуючих перетворень (теорема 3.3); він є конструктивним, тому що зводиться до перетворення поліноміальної вектор-функції. Отже, в розділі 3 розвинута абстрактна теорія однорідної апроксимації для формальних рядів у вільній асоціативній алгебрі.

В розділі 4 вищезгадані результати застосовуються до рядів ітерованих інтегралів, що відповідають задачі Коші для нелінійних систем, лінійних за керуванням. В підрозділі 4.1 сформульовані безпосередні наслідки з результатів розділу 3: поняття ядерної підалгебри Лі і лівого ідеалу (означення 4.1 і 4.2), теореми 4.1, 4.2 про вигляд однорідної апроксимації, наслідки 4.3–4.5 про повну класифікацію однорідних апроксимацій, а також опис усіх апроксимуючих перетворень (теореми 4.3, 4.4).

Таким чином, однорідна апроксимація нелінійної системи, лінійної за керуванням, – це більш проста, але в загальному випадку нелінійна система. В цьому полягає основне досягнення дисертації: даний повний опис і вказані методі побудови нелінійних систем відносно простого вигляду, які наближають довільні нелінійні системи.

Підрозділ 4.2 присвячений з'ясуванню того, в якому сенсі однорідна апроксимація наближає саму систему. А саме, досліджується зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації в сенсі швидкодії (поняття, що введене в дисертації, означення 2.13). Тут отриманий основний результат розділу 4 – теорема 4.6. В ній доведено, що (при деяких умовах) розв'язок задачі швидкодії для системи, лінійної за керуванням, і розв'язок задачі швидкодії для її однорідної апроксимації еквівалентні в асимптотичному сенсі в околі нуля. Цей результат пояснює назву «апроксимація» для однорідної апроксимації.

В підрозділі 4.3 вивчається задача апроксимації в залежності від початкової точки. Основний метод дослідження – вивчення ядерної підалгебри Лі як функції початкової точки. Основним результатом підрозділу є теорема 4.7 про критерій регулярності однорідної системи. Оскільки однорідні системи є однорідними апроксимаціями, то фактично це є критерієм регулярності однорідної апроксимації.

Розділ 5 присвячений класу нелінійних систем, афінних за керуванням. В підрозділі 5.1 теж застосовуються результати розділу 3: поняття ядерної підалгебри Лі і правого ідеалу (означення 5.1 і 5.2), теореми 5.1, 5.2 про вигляд однорідної апроксимації, наслідки 5.3–5.4 про класифікацію однорідних апроксимацій. В пункті 5.1.2 вказаний метод побудови системи, що реалізує однорідну апроксимацію, а загальна задача реалізованості досліджується далі в пункті 5.3.2.

В підрозділі 5.2 досліджується зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації в сенсі швидкодії для систем, афінних за керуванням. (Задача швидкодії в цьому випадку зводиться до нелінійної min-проблеми моментів Маркова.) Виявилося, що для афінних за керуванням систем це питання більш складне, ніж для лінійних за керуванням систем: навіть саме означення еквівалентності треба модифікувати (означення 5.4). Основний результат розділу – теорема 5.3 про таку еквівалентність: при деяких умовах оптимальний час і оптимальне керування для однорідної апроксимації і оптимальний час і «майже оптимальне» керування для самої системи еквівалентні в асимптотичному сенсі в околі нуля. В пункті 5.2.2 розглядається зворотна задача: нехай деяка однорідна система апроксимує іншу в сенсі швидкодії; чи вірно, що вона є однорідною апроксимацією для неї. В теоремах 5.4 і 5.5 вказані умови, при яких це вірно.

В розділі 6 розглядається ще одна класифікаційна задача – про вектори зросту для систем, лінійних за керуванням. Означення еквівалентності («A-еквівалентність за зворотним зв'язком») тут інше: припускаються заміни керування (означення 6.4), при цьому вектор зросту системи не змінюється. Задача ставиться так: дати опис векторів зросту, для яких множина всіх однорідних систем з цим вектором зросту з точністю до заміни керування скінченна («A-нормальні вектори зросту», означення 6.5). Близьким є поняття «A-простих векторів зросту», тобто таких, для яких множина малих збурень систем з цим вектором зросту з точністю до заміни керування скінченна (означення 6.6). Обидва терміни введені в дисертації. Для систем з двовимірним керуванням в пункті 6.2.2 даний повний перелік всіх A-нормальних і A-простих векторів зросту (теореми 6.4–6.6). Попутно розв'язується задача реалізовності для вектора зросту (підрозділ 6.1).

Розділ 7 включає результати щодо відображуваності в класі C^1 (підрозділ 7.1) і розв'язок одної тривимірної задачі швидкодії (підрозділ 7.2). Ця система є однорідною, отже, вона є однорідною апроксимацією для цілого класу тривимірних систем, і її оптимальний час і оптимальне керування (які отримані явно) апроксимують розв'язок задачі швидкодії в околі нуля для всіх систем з цього класу.

Дисертація включає три додатки: обов'язковий додаток А, що містить список публікацій здобувача, а також додаток Б, що включає доведення деяких відомих результатів (зокрема, щодо рядів ітерованих інтегралів і нелінійних степеневих моментів), і додаток В, що містить доведення деяких результатів з лінеаризовності.

Дисертація написана чіткою ясною мовою, з відповідною аргументацією аналізу кожної задачі, що вивчається.

По дисертації є слідуючі зауваження.

1) Операція конкатенації (стор. 61) зображається як символ $\vee$, що не досить зручно, так як в алгебрі цим символом позначають зовнішній добуток.
2) На стор. 207 в інтегралі описка: τ_m замість τ_{m+1}.
3) На стор. 292 в теоремі 7.3 не сказано, що таке $\varphi_x(x)$.
4) На стор. 52 в теоремі 1.7 одне з посилань [43] зайве.
5) На стор. 175, рядок 2: у рівності $\mathcal{P}^3 = \{0\}$ описка, що очевидно з подальшого тексту.

Незважаючи на ці недоліки, вважаю, що дисертація Ігнатович С. Ю. є закінченим науковим дослідженням і повністю відповідає вимогам, які пред'являються до дисертацій, поданих на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, так як:

1) Запропонований новий підхід до дослідження нелінійних керованих систем, оснований на вивченні структур, які породжує система у вільній алгебрі (ітерованих інтегралів або нелінійних степеневих моментів). Сформульовано і розв'язано абстрактну задачу однорідної апроксимації формального ряду елементів вільної асоціативної алгебри. Знайдені і досліджені об'єкти, які відповідають за однорідну апроксимацію – ядерна підалгебра Лі і односторонній ідеал, що породжені рядом.
2) На основі цього підходу отриманий повний розв'язок задачі однорідної апроксимації для систем, лінійних і афінних за керуванням: отримана класифікація і повний опис однорідних апроксимацій і апроксимуючих перетворень, вказані методи їх побудови, запропоноване безкоординатне означення однорідної апроксимації.
3) Поставлено задачу еквівалентності в сенсі швидкодії для нелінійних систем. Встановлено умови, при яких однорідна апроксимація наближає систему в сенсі швидкодії, досліджено зворотну задачу.
4) На основі розвинутого підходу проведене дослідження векторів зросту систем, лінійних за керуванням, з точки зору скінченності множини однорідних апроксимацій з цим вектором зросту; отриманий повний розв'язок задачі для двовимірних керувань.

Науковий рівень дисертації високий, а всі результати обґрунтовані і спираються на чіткі і коректні доведення. Отримані результати носять теоретичний характер і можуть бути використані для дослідження різноманітних задач, зокрема, з теорії керування. Дослідження, що проведені автором, можуть бути корисними в наукових розробках, що проводяться у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна, Київському національному університеті імені Т. Г. Шевченка, Інституті прикладної математики і механіки НАН України, Інституті математики НАН України, Дніпровському національному університеті імені О. Гончара, Одеському національному університеті ім. І. І. Мечнікова та інших.

Автореферат ідентичним чином відображає основні положення і твердження дисертації. Публікації містять головні результати дисертаційної роботи.

На підставі вищезгаданого вважаю, що дисертаційна робота Ігнатович С. Ю. «Метод рядів та вільних алгебр в аналізі нелінійних керованих систем» задовольняє всім вимогам, що пред'являються до докторських дисертацій, а дисертант заслуговує присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 «математичний аналіз».

Доктор фізико-математичних наук, професор,
провідний науковий співробітник
Фізико-технічного інституту низьких
температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України — В. О. Золотарьов

Золотарьова В.О.

ЗАСВІДЧУЮ
Учений секретар ФТІНТ
ім. Б. І. Вєркіна НАН України
кандидат фізико-математичних наук
Калиненко О.М.

Фізико-технічний інститут низьких температур Національної академії наук України
Ідентифікаційний код 03534601
Україна, м. Харків