ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Гречнєвої Марини Олександрівни

«Геометрія двовимірної поверхні простору Мінковського та її грассманового образу»

подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.04 — геометрія та топологія
фізико-математичні науки (11 - математика та статистика)

Відображення Гаусса, яке ставить у відповідність кожній точці підмноговиду евклідового простору його дотичну площину, є одним з головних інструментів аналізу підмноговидів і використовується не лише в диференціальній геометрії, а й в алгебраїчній геометрії, диференціальній та алгебраїчній топології, K-теорії.

Образ відображення Гаусса — це підмножина в грассмановому многовиді, яка називається грассмановим образом. Для підноговидів евклідового простору грассмановий образ досліджувався в роботах таких іноземних математиків як M. Obata, Yu. Muto, Y. Wong, D. Hoffman, R. Osserman J. Weiner, а також математиків харківської школи Ю. А. Амінова, О. А. Борисенка, Ю. А. Ніколаєвського, В. М. Савельєва, В. О. Горькавого, О. В. Лейбіної.

Дисертаційна робота Гречнєвої Марини Олександрівни присвячена вивченню локальної геометрії двовимірних підмноговидів простору Мінковського ${}^1\mathbb{R}_4$ та їх грассманових образів. Відмічу, що К. О. Кізбікенов досліджував геометрію двовимірних поверхонь в $\mathbb{R}^4$ із заданим грассмановим образом; M. Kossowski вивчав геометрію поверхонь в 3-вимірному просторі Мінковського ${}^1\mathbb{R}_3$; B. Palmer, Yu. Xin, R. Aiyama та багато інших отримали результати про гіперповерхні в просторах Мінковського; також Zu Huan Yu розглядав просторовоподібні поверхні в просторах Мінковського ${}^n\mathbb{R}_{n+2}$.

Величезна кількість робіт по вивченню відображення Гаусса та його образу свідчить про актуальність вибраної тематики. З іншого боку, я не зміг знайти в доступній літературі та інтернеті робіт присвячених детальному дослідженню грассманових образів саме 2-поверхонь в ${}^1\mathbb{R}_4$, тому можу сказати, що отримані результати є новими.

Нагадаю, що простір Мінковського це 4-вимірний евклідовий простір зі скалярним добутком сигнатури $(-+++)$, тобто

$$(x, y) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4,$$

де $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ і $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Цей простір розбивається на три підмножини в залежності від знаку “квадрата” норми вектора:

$$(x, x) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Вектор x називають

- *просторовоподібним*, якщо $(x, x) > 0$;
- *ізотропним*, якщо $(x, x) = 0$;
- *часоподібним*, якщо $(x, x) < 0$.

Позначимо через $G(2,4)$ грасмановий многовид 2-площин в $\mathbb{R}^4 \equiv {}^1\mathbb{R}_4$. Двовимірна площина $\sigma \in G(2,4)$ називається

- *просторовоподібною*, якщо кожен її вектор $x \neq 0$ є просторовоподібним;
- *ізотропною*, якщо кожен її вектор $x \neq 0$ є або просторовоподібним, або ізотропним; в цьому випадку вона перетинає конус $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ по єдиній прямій в якій дотикається до цього конусу;
- *часоподібною*, у всіх інших випадках; насправді тоді вона містить вектори всіх трьох типів.

Таким чином $G(2,4)$ розбивається на 3 підмножини

$$G(2,4) = {}^S G(2,4) \sqcup {}^I G(2,4) \sqcup {}^T G(2,4)$$

просторовоподібних, ізотропних, та часоподібних площин.

Добре відомо, що відображення $\perp\colon G(2,4) \to G(2,4)$, яке кожній 2-площині σ в $\mathbb{R}^4$ ставить у відповідність її ортогональне доповнення $\sigma^{\perp}$, є дифеоморфізмом порядку 2, тобто $\sigma^{\perp\perp} = \sigma$.

Виявляється, що якщо задати аналогічне відображення $* : G(2,4) \to G(2,4)$, яке кожній 2-площині σ в ${}^1\mathbb{R}_4$ ставить у відповідність її ортогональне доповнення σ^* відносно метрики Мінковського, то цей дифеоморфізм (також порядку 2) залишає множину ізотропних площин ${}^I G(2,4)$ і переставляє місцями ${}^S G(2,4)$ та ${}^T G(2,4)$ (стор. 60 дисертації). На стор. 72 дисертації вказано формули для $*$ в плюккерових координатах.

Крім того, для ізотропної площини $\sigma \in {}^I G(2,4)$ перетин $\sigma \cap \sigma^*$ є спільною ізотропною прямою, а тому σ та σ^* породжують 3-вимірний підпростір в ${}^1\mathbb{R}_4$. Якщо ж площина $\sigma \in G(2,4)$ не ізотропна, то σ та σ^* — трансверсальні і породжують весь простір ${}^1\mathbb{R}_4$.

Нехай $U \subset {}^1\mathbb{R}_4$ — двовимірний підмноговид. Для кожної точки $x \in U$ позначимо через T_x дотичну площину до U в точці x і нехай $N_x = T_x^*$ — її ортогональне доповнення відносно метрики Мінковського. Вони обидві мають розмірність 2, а тому можна побудувати два відображення

$$\tau,\ \nu = * \circ \tau : U \to G(2,4), \qquad \tau(x) = T_x, \qquad \nu(x) = N_x.$$

Поверхня $U \subset {}^1\mathbb{R}_4$ називається *просторовоподібною* (відповідно, *ізотропною*, *часоподібною*) якщо $\tau(U)$ міститься в ${}^S G(2,4)$, (відповідно в ${}^I G(2,4)$, ${}^T G(2,4)$). При цьому друге відображення ν називається *гауссовим*, а $\nu(U)$ — *лінійчатим грассмановим образом* U.

В представленій дисертаційній роботі досліджуються питання властивості відображення ν та зв'язку диференціально геометричних властивостей U та $\nu(U)$.

Перейду до більш детального обговорення змісту дисертації.

Розділ 1 містить огляд літератури з даної тематики.

Розділ 2 присвячений диференціально геометричним властивостям грассманових многовидів. Нехай $G(l,n)$ — простір всіх l-площин в $\mathbb{R}^n$, що проходять через початок координат. Його можна ототожнити з простором суміжних класів

$$G(l,n) \cong \frac{O(n)}{O(l)\,O(n-l)},$$

де $O(k)$ — ортогональна група $\mathbb{R}^k$. Це показує, що $G(l,n)$ є компактним замкнутим многовидом, а також дозволяє ввести на ньому "канонічну" ріманову метрику, яка визначається "кутами між l-площинами". Крім того, використовуючи плюккерові координати можна вкласти $G(l,n)$ в проективний простір $\mathbb{R}\mathrm{P}^{C_n^l}$, де C_n^l — біноміальний коефіцієнт.

Введемо в $\mathbb{R}^n$ структуру простору Мінковського ${}^1\mathbb{R}_n$. Це дозволяє, як і вище, виділити три типи l-площин по їх розташуванню відносно "світлового конусу": просторовоподібні, ізотропні та часовоподібні, а отже $G(l,l+p)$ розбивається на три частини

$$G(l,l+p) = {}^SG(l,n) \sqcup {}^IG(l,n) \sqcup {}^TG(l,n).$$

В **розділі 2** автор

- показує, що ${}^SG(l,n)$, ${}^IG(l,n)$ та $\sqcup^T G(l,n)$ є многовидами,
- вводить на них ріманові метрики, які визначаються "стаціонарними кутами між площинами" аналогічно евклідовому випадку (2.14), за допомогою формул (2.16)-(2.18).
- обчислює символи Кристофеля I і II роду та наводить рівняння геодезичних в цих многовидах.

Нехай $\mathbb{R}^6$ має координати $p = (p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34})$, які дозволяють параметризувати 2-площини в $\mathbb{R}^4$ і називаються *плюккеровими*. Введемо на $\mathbb{R}^6$ псевдоевклідову метрику сигнатури $(---+++)$, так, що функція $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, визначена за формулою,

$$f(p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34}) = -(p^{12})^2 - (p^{13})^2 - (p^{14})^2 + (p^{23})^2 + (p^{24})^2 + (p^{34})^2,$$

є квадратом норми вектора p відносно цієї метрики, і позначатимемо $\mathbb{R}^6$ через ${}^3\mathbb{R}_6$. В **підрозділі 3.3** побудовано вкладення

$$i_T : {}^TG(2,4) \ \subset \ f^{-1}(-1),$$

$$i_I : {}^IG(2,4) \ \subset \ f^{-1}(0),$$

$$i_S : {}^SG(2,4) \ \subset \ f^{-1}(1),$$

див. формули (3.12), (3.13), (3.14). Далі **підрозділах 3.4 та 3.5** отримано формули для тензорів кривини та секційних кривин многовидів ${}^SG(2,4)$ та ${}^TG(2,4)$ індукованих з вказаних вище вкладень. Цікаво відмітити, що їх тензори кривини відрізняються знаками, див. формули (3.18) та (3.19). Також показано, що секційні кривини можуть набувати довільних значень.

Нехай $U \subset {}^1\mathbb{R}_4$ просторовоподібна поверхня, тобто $\nu(U)$ міститься в ${}^TG(2,4)$. Тоді коректно визначена композиція

$$\nu' = i_T \circ \nu : U \to f^{-1}(-1) \subset {}^3\mathbb{R}_6.$$

Її образ $\nu'(U)$ називається в дисертації *точковим грасмановим образом.*

Аналогічно, для часоподібної ($\nu(U) \subset {}^SG(2,4)$), її точковий грасмановий образ визначається як образ $\nu'(U)$ відображення

$$\nu' = i_S \circ \nu : U \to f^{-1}(1) \subset {}^3\mathbb{R}_6,$$

а для ізотропної ($\nu(U) \subset {}^IG(2,4)$), як образ $\nu'(U)$ відображення

$$\nu' = i_I \circ \nu : U \to f^{-1}(0) \subset {}^3\mathbb{R}_6.$$

Далі автор вивчає геометричні властивості точкових грасманових образів як підмноговидів в ${}^3\mathbb{R}_6$ для просторовоподібних та часоподібних поверхонь. Нехай $U \subset {}^1\mathbb{R}_4$ — просторовоподібна поверхня, тобто

$$\tau(U) \subset {}^SG(2,4), \qquad \nu(U) \subset {}^TG(2,4),$$

$x \in U$ — регулярна точка гауссового відображення ν, і $\Sigma = T_{\nu(x)}\nu(U) \subset T({}^TG(2,4))$ — дотична площина до точки $\nu(x)$ (тобто нормальної площини до U в точці x відносно метрики Мінковського) в грассмановому образі $\nu(U)$. Теорема 3.2 з **підрозділу 3.6** дає формули для кривини ${}^TG(2,4)$ в напрямку Σ. Також для кожного з цих випадків виписуються інші диференціальні інваріанти таких поверхонь: індикатриси нормальної кривини та дві другі квадратичні форми (відповідно до корозмірності U в ${}^1\mathbb{R}_4$).

Аналогічний "двоїстий" результат (теорема 3.3) має місце для часоподібної поверхні, причому формули для кривини в теоремах 3.2 та 3.3 відрізняються лише знаком.

Підрозділ 3.7 дає характеризації просторовоподібних та часопобідних поверхонь $U \subset {}^1\mathbb{R}_4$ зі стаціонарними значеннями кривини уздовж площин, дотичних до їх грассманового образу. Нульовій кривині відповідають плоскі поверхні та поверхні з плоскою нормальною зв'язністю (теорема 3.4), а значення 1 для ${}^SG(2,4)$ та -1 для ${}^TG(2,4)$ характеризує підповерхні, що лежать в 3-вимірних підпросторах в ${}^1\mathbb{R}_4$ (теорема 3.5).

В **підрозділі 3.8** дається афінна та грассманова класифікації точок неізотропних поверхонь в ${}^1\mathbb{R}_4$. Нехай $U \subset {}^1\mathbb{R}_4$ така просторовоподібна поверхня, що $\nu' : U \to {}^3\mathbb{R}_6$ є вкладенням вкладенням, тобто її точковий грасмановий образ $\nu'(U)$ є підповерхнею в ${}^3\mathbb{R}_6$. Добре відомою є афінна класифікація точок U по типу дотичного параболоїда: еліптичні, параболічні та гіперболічні. Можна поставити питання: як пов'язані типи точок $x \in U$ в ${}^1\mathbb{R}_4$ відносно метрики Мінковського сигнатури $(-+++)$ та $\nu'(x) \in \nu'(U) \subset {}^3\mathbb{R}_6$ відносно псевдоевклідової метрики сигнатури $(---+++)$.

Відмічу, що ${}^3\mathbb{R}_6$ можна ввести поняття просторовоподібних, ізотропних та часоподібних напрямків, 2-площин, та 2-поверхонь аналогічно тому, як було вище для ${}^1\mathbb{R}_4$.

Теореми 3.5 та 3.6 стверджують, що якщо $U \subset {}^1\mathbb{R}_4$ просторовоподібна поверхня, у якої точковий грасмановий образ $\nu'(U) \subset {}^3\mathbb{R}_6$ є часоподібною поверхнею, то для кожної точки $x \in U$ її образ $\nu'(x)$ той самий тип на $\nu'(U)$, що і тип x на U. Аналогічне "двоїсте" твердження має місце і для часоподібних поверхонь.

Останній **розділ 4** присвячений питанням відновлення неізотропної поверхні простору Мінковського за заданим грассмановим образом. В евклідовому випадку такими задачами займався Y. Muto та Ю. А. Амінов.

Нехай $V \subset {}^S G(2,4)$ — поверхня одного з типів: еліптичного, параболічного або гіперболічного. В теоремі 4.1 знайдено диференціальні рівняння другого порядку в частинних похідних, яким повинні задовольняти координатні функції V, для того щоб існувала така поверхня $U \subset {}^1\mathbb{R}_4$, що $V = \nu(U)$. При цьому тип рівняння збігається з типом поверхні. Цей результат є аналогом результату Ю. А. Амінова.

Також в теоремі 4.2 отримано достатні умови локальної розв'язності тих диференціальних рівнянь. Зокрема, це так, якщо кривина V в деякій точці $\sigma \in V$ більша за 1.

Аналогічні твердження встановлені для поверхонь $V \subset {}^T G(2,4)$.

В теоремах 4.4 та 4.5 узагальнюється результат Кізбікенова про існування глобальної поверхні з межею і заданим грассмановим образом в ${}^S G(2,4)$ або ${}^T G(2,4)$.

1. Рекомендації.

1.1 Роботу "пронизують" результати про двоїстість між множинами просторовоподібних ${}^S G(2,4)$ та часоподібних ${}^T G(2,4)$ площин та поверхонь. Але автор чомусь не приділяє цьому увагу. Було б непогано переформулювати результати дисертації з точки зору двоїстості. Можливо це дозволило б уникнути деяких повторів доведень схожих тверджень для просторовоподібних та часоподібних площин, і навіть "автоматично" переносити результати про просторовоподібні поверхні на часоподібні, або навпаки.

1.2 Також отримані результати повинні мати аналоги для розподілів 2-площин в ${}^1\mathbb{R}_4$, та диференціальних 2-форм. Можливо саме для розподілів двоїстість формулювалась би найбільш природно. Цікаво також було б знайти інтерпретації чи застосування отриманих результатів в електродинаміці та спеціальній теорії відносності.

2. Зауваження щодо тексту дисертації.

2.1 стор. 29, рядок 9 зверху, визначення 2.2.

Не пояснено, що таке *стаціонарне значення кутів* між l-площинами в евклідовому просторі,

2.2 Далі на стор. 32 в визначенні 2.3 дано строге означення стаціонарного кута між l-площинами в просторі Мінковського ${}^1\mathbb{R}_n$, але потім, в теоремі 2.2, говориться, *що деякі кутові площини можуть вироджуватись в прямі.* Останнє вимагає пояснень, бо, згідно визначення 2.3, кутова площина - двовимірна.

Також в формулюванні теореми 2.2 не пояснено що таке *цілком ортогональні* площини.

В кінці доведення теореми 2.2 пояснюється, що кутові площини визначаються власними напрямками деякого самоспряженого оператора W і можна припустити, що "виродження площин в прямі" означає виродження відповідних власних векторів.

Крім того, згідно останнього речення на стор. 34, можна припустити, що під *цілком ортогональними* площинами автор розуміє площини, які відповідають власним напрямкам W з різними власними значеннями.

2.3 стор. 33, формула (2.6):

$$DE'A_i^t = 0, \qquad FE'B_i^t = 0, \ i = 1, \ldots, l.$$

Не зрозуміло, що таке матриці D та F.

2.4 стор. 35, рядки 3-5 зверху:

Визначимо значення стаціонарних кутів між ізотропними l-площинами π і τ як граничні значення стаціонарних кутів між просторовоподібними l-площинами π_1 й τ_1 коли π_1 прямує до π, а τ_1 - до τ.

Варто було б пояснити чому така границя існує і чому вона єдина.

2.5 стор. 36, рядок 10 зверху.

Друкарська помилка: замість "l-площині" потрібно написати "l-площини".

2.6 стор. 36, рядок 17 зверху.

Не пояснено що таке *загальні напрямки* кутових площин.

2.7 стор. 37, оцінки для власних значень матриці W.

Автор без доведень наводить асимптотичні вирази (залежні від параметра λ) для елементів матриці $W = \left(\begin{smallmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{smallmatrix}\right)$ та їх власних значень μ_1 та μ_2 у вигляді

$$\mu_{1,2} = \frac{A\lambda + O(\lambda^2)}{(B \pm B)^2\lambda + O(\lambda^2)},$$

де A та B — деякі вирази, точні формули для яких в даному разі не відіграють ніякої ролі.

Далі, просто *ігноруючи в чисельнику і знаменнику доданки* $O(\lambda^2)$, автор робить висновок, що при $\lambda \to 0$ маємо дві границі

$$\mu_1 = \frac{A}{(B-B)^2} = \infty, \qquad \mu_2 = \frac{A}{2B^2},$$

чого не може бути, бо власні значення матриці завжди скінченні.

Якщо асимптотична формула для $\mu_{1,2}$ правильна, і для μ_1 існує скінченна границя, то

$$\lim_{\lambda\to 0} \mu_1 = \lim_{\lambda\to 0} \frac{A\lambda + O(\lambda^2)}{(B-B)^2\lambda + O(\lambda^2)} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{A\lambda + O(\lambda^2)}{O(\lambda^2)} = \mu_1,$$

що необхідно означає, що $A = 0$.

З іншого боку, наскільки я зміг перевірити, формули для μ_1 та μ_2 не використовуються в дисертації і не впливають на отримані результати.

2.8 стор. 42. Автор вводить простори $G(l, l+p)$ та $PG(l, l+p)$, що складаються з l-вимірних площин в $\mathbb{R}^{l+p}$ та ${}^1\mathbb{R}_{l+p}$.

Варто було б відмітити, що $G(l, l+p)$ та $PG(l, l+p)$ — одна і та ж сама множина.

2.9 стор. 68, підрозділ 3.3.

Підрозділ називається *"Лінійчатий і точковий грассманів образ поверхні"*, але означення *лінійчатого* грасманового образу не дається. Я не знайшов його в тексті дисертації. Відносно *точкового* образу на стор. 72 сказано, що *параметричні рівняння $p^{ij} = p^{ij}(u_1, u_2)$ задають точковий грассманів образ поверхні.*

З контексту можна зрозуміти, що під лінійчатим грасмановим образом автор розуміє $\nu(U)$, а точковий грасмановий образ — це $\nu'(U)$ і він визначений окремо лише для просторовоподібних, часоподібних та ізотропних поверхонь.

Це призводить до двоякого трактування формулювання теорем 3.6 та 3.7, див. зауваження

2.10 стор. 83 та 86, теореми 3.2 та 3.3.

В формулах для кривини з цих теорем автор використовує позначення K, a, b не пояснивши, що вони означають, і лише на стор. 85 вказується, що потрібно повернутись до параграфу 3.2, що починається на стор. 62. В ньому на стор. 65 вводяться позначення

$$a = \frac{L^1_{11} - L^1_{22}}{2}, \qquad b = L^2_{12},$$

а також дається формула (3.3) для K. Варто було б дати нумерацію формулам для a та b і нагадати їх в теоремах 3.2 та 3.3.

2.11 Плюккерові координати 2-площини σ в $\mathbb{R}^4$ визначаються лише з точністю до постійного множника — визначника матриці заміни координат в площині σ, і задають вкладення $G(2,4)$ в проективний простір $\mathbb{RP}^5$. Цей простір має канонічну метрику індуковану з його дволистного накриття $S^5 \to \mathbb{RP}^5$, і, зазвичай, $G(2,4)$ розглядається з рімановою метрикою індукованою цим вкладенням $G(2,4) \subset \mathbb{RP}^5$. Назвемо цю метрику **проективною**.

Зокрема на ${}^TG(2,4)$, ${}^IG(2,4)$ та ${}^SG(2,4)$ ми маємо метрики індуковані проективною метрикою.

З іншого боку, як згадувалось вище, в підрозділі 3.3 автор будує окремі вкладення

$${}^TG(2,4) \subset f^{-1}(-1), \qquad {}^IG(2,4) \subset f^{-1}(0), \qquad {}^SG(2,4) \subset f^{-1}(1),$$

де $f : G(2,4) \to \mathbb{R}^6$ визначена за формулою:

$$f(p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34}) = -(p^{12})^2 - (p^{13})^2 - (p^{14})^2 + (p^{23})^2 + (p^{24})^2 + (p^{34})^2,$$

а отже на них індукується метрики з $\mathbb{R}^6$ які назвемо **евклідовими**.

Нехай також $q : \mathbb{R}^6 \setminus 0 \to \mathbb{RP}^5$ — проективізація $\mathbb{R}^6$. Тоді q індукує дифеоморфізм ${}^TG(2,4) \subset \mathbb{R}^6$ евклідовою метрикою на ${}^TG(2,4) \subset \mathbb{RP}^5$ з проективною метрикою, і так само для ${}^IG(2,4)$ та ${}^SG(2,4)$.

Варто було б прояснити, чи тотожні евклідові та проективні метрики на ${}^TG(2,4)$, ${}^IG(2,4)$ та ${}^SG(2,4)$.

2.12 стор. 99, визначення 3.1, 3.2, 3.3.

Всі три визначення вводять поняття еліптичної, параболічної та гіперболічної точок.

Визначення 3.1 базується визначення 3.2 та 3.3, тому його потрібно поставити після них. Крім того, в визначеннях 3.2 та 3.3 потрібно додатково вимагати, що відповідне відображення $\nu' : U \to {}^3\mathbb{R}_6$ є вкладенням в околі даної точки.

2.13 стор. 99.

Теорема 3.6. *Для часоподібної поверхні* ***із просторовоподібним грассмановим образом*** *афінна та грассманова класифікації еквівалентні.*

Потрібно уточнити, що в теоремі йдеться саме про **точковий** грасмановий образ поверхні $U \subset {}^1\mathbb{R}_4$, тобто образ $\nu'(U) \subset {}^3\mathbb{R}_6$, а не лінійний образ $\nu(U) \subset G(2,4)$.

Так як для часоподібної поверхні $U \subset {}^1\mathbb{R}_4$ її **лінійчатий** грасмановий образ $\nu(U)$ міститься в ${}^SG(2,4)$, то вираз "*просторовоподібним грассмановим образом*" може бути трактований як вимога $\nu(U) \subset {}^SG(2,4)$, яка і так виконується. Тому без уточнення, що йдеться мова про **точковий** грасмановий образ, та вимога виглядає зайвою.

2.14 стор. 102. Аналогічне зауваження до формулювання теореми 3.7.

2.15 стор. 157. В списку літератури некоректно написана назва статті [85] M. Obata. Повинно бути *"The Gauss map of immersions of Riemannian manifolds in spaces of constant curvature"*.

Ці зауваження абсолютно не впливають на позитивне враження від дисертації.

Хочу відзначити, що дисертаційна робота носить теоретичний характер і виконана на високому науковому рівні. В ній отримані цікаві результати які можуть мати застосування не лише в диференціальній геометрії а й електродлинаміці та спеціальній теорії відносності. Всі наведені в ній результати є новими та належать безпосередньо автору. Результати роботи опубліковано у реферованих вітчизняних та зарубіжних журналах, вони неодноразово доповідались на наукових семінарах та пройшли апробацію на міжнародних наукових конференціях.

Вважаю, що дисертаційна робота М. О. Гречнєвої «Геометрія двовимірної поверхні простору Мінковського та її грассманового образу» задовольняє всім вимогам «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України No 567 від 24 липня 2013 року (зі змінами, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів України №656 від 19 серпня 2015 року та №1159 від 30 грудня 2015 року), щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня кандидата наук, а її автор Гречнєва Марина Олександрівна заслуговує на присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.04 - геометрія та топологія.

Офіційний опонент,
член-кореспондент НАН України,
завідувач лабораторії топології
у складі відділу алгебри та топології
Інституту математики НАН України — Підпис — С. І. Максименко

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
м. Київ

ЗАСВІДЧУЮ
Зав. [illegible]
07.09.18р

Відгук надійшов до ради 10.09.2018
Вчений секретар спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01
([illegible])
10.09.2018

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. ВЄРКІНА НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ
КАНЦЕЛЯРІЯ
Ідентифікаційний код 03534601