ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію Фардиголи Лариси Василівни
«Оператори перетворення та оператори впливу в задачах керування»
подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01-математичний аналіз

Дисертація являє собою об'ємне, багатостороннє дослідження присвячене побудові нових типів операторів перетворення та просторів соболєвського типу для диференціальних операторів другого порядку та розробленню методики застосування цих операторів до задач керування та крайових задач. Ці питання інтенсивно розробляються у нас в країні і за кордоном. Оператори перетворення широко застосовуються для розв'язання різноманітних проблем теорії диференціальних рівнянь і математичної фізики.

Для успішного захисту докторської дисертації здобувач, зазвичай, повинен вводити нові поняття, використовувати нові підходи для розв'язку задач. Л.В. Фардігола успішно впоралася з цим завданням. У дисертаційній роботі введено та вивчено нові оператори перетворення та нові простори соболєвського типу для диференціального оператора зі змінними коефіцієнтами і розроблено методику застосування цих операторів до задач теорії керування та крайових задач. Використання цієї методики дозволяє зводити задачі для рівнянь зі змінними коефіцієнтами до відповідних задач зі сталими коефіцієнтами. Оператори перетворення виникли в середині минулого сторіччя в роботах Ж. Дезарта та Б.М. Левітана. В подальшому вони досліджувалися і застосовувалися багатьма математиками: Б.Я. Левіним, Б.М. Левітаном, В.О. Марченком, О.Я. Повзнером, Є.Я. Хрусловим та іншими. Також в роботі введено та досліджено оператори впливу, що описують вплив керування на кінцевий стан керованої системи. За допомогою цих операторів одержано нові критерії керованості, розв'язано проблему сталілізовності та коректності нелокальних крайових задач для хвильового рівняння з змінними коефіцієнтами. Відмічу, що застосувань операторів перетворення до теорії керувань та крайових задач, практично, не було до цієї дисертаційної роботи. Тому вважаю, що тематика досліджень дисертації є актуальною і сучасною областю математики.

Дисертація Л.В. Фардиголи складається зі вступу, основної частини з семи розділів, висновків та списку використаних джерел зі 120 найменувань. Загальний обсяг роботи 295 сторінок. Це цілісне наукове дослідження, написане за результатами 23 робіт.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовані мета та задачі, об'єкт та предмет дослідження, розкрита наукова новизна та значення здобутих результатів.

У розділі 1 проведено огляд літератури, формулюються відомі результати за темою дисертації та зроблено вибір напрямку дослідження.

У розділі 2 введено та досліджено деякі модифікації просторів типу Соболєва , які дозволяють продовжувати розв'язки хвильового рівняння на простори $H_0^m(\mathbb{R})$, та вивчено непарні та парні продовження розподілів з цих просторів. Одержані результати використано в розділі 5. Основними об'єктами дослідження цього розділу є оператори впливу, пов'язані із задачею Діріхле та задачею Неймана, що виникають при дослідженні проблем керованості для хвильового рівняння. Тут дано означення цих операторів та докладно вивчено їх властивості.

У розділі 3 введено і досліджено оператори перетворення $\tilde{\mathbb{T}}$**,** $\hat{\mathbb{T}}$ та простори $\mathbb{H}^m, m=\overline{-2,2}$ соболєвського типу для диференціальних операторів другого порядку зі змінними коефіцієнтами $\frac{1}{\rho(x)}\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{d}{dx}(\cdot)\right)$. Вони відіграють дуже важливу роль у цьому дослідженні. Ці простори та операторіи є, з одного боку, основними інструментами дослідження, а, з іншого боку, знаходяться серед основних об'єктів вивчення в даній роботі. Простори $\mathbb{H}^m, m=\overline{-2,2}$ є модифікацією класичних просторів Соболєва $H^m, m=\overline{-2,2}$, де простір $L^2(\mathbb{R})$ замінено ваговим простором $L^2_\rho(\mathbb{R})$ з вагою $\sqrt{\rho}$, а диференціальний оператор $\frac{d}{dx}$ замінено "лінійно деформованим" оператором $\sqrt{k/\rho}\left(d/dx+\left(\rho'/\rho+k'/k\right)/4\right)$. У цьому розділі детально вивчено властивості цих модифікованих соболєвських просторів та їх співвідношення з класичними соболєвськими просторами. Оператори $\tilde{\mathbb{T}}=\boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{T}}_r$ та $\hat{\mathbb{T}}=\boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{T}}_r$ є композиціями двох операторів. Оператори $\tilde{\boldsymbol{T}}_r$ та $\hat{\boldsymbol{T}}_r$ є класичними операторами перетворення для оператора Штурма-Ліувілля на півосі, що зберігають асимптотику функцій на нескінченності, продовжені непарним чином на H^{-2} або парним чином на H^{-1}, відповідно. Оператор $\boldsymbol{S}$, фактично, є оператором, що здійснює заміну змінних в розподілах з класичного соболєвського простору H^{-2} та відображає цей простір на модифікований соболєвський простір $\mathbb{H}^{-2}$. Доведено, що цей оператор є ізометричним ізоморфізмом просторів H_m та $\mathbb{H}^m, m=\overline{-2,2}$.

У розділі 4 введено та вивчено оператори перетворення $\boldsymbol{\Psi}$ та $\boldsymbol{\Phi}$ і деякі модифікації просторів Соболєва, зокрема, простори $H_0^{s[1/2]}$ та $H^0_{s[1/2]}$, $s \in \mathbb{R}$ для двовимірного оператора Лапласа зі сталими коефіцієнтами, визначеного на радіально симетричних розподілах.

У розділі 5 одержано критерії керованості для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі

$$w_{tt} = w_{xx} - q^2 w, \quad x > 0, t \in (0,T)$$

кероване крайовою умовою Діріхле $w(0,t) = u(t), \quad t \in (0,T)$,

або крайовою умовою Неймана $w_x(0,t) = u(t), \quad t \in (0,T)$,

за початкових умов

$$w(x,0) = w_0^0(x),\ w_t(x,0) = w_1^0(x),\ x > 0,$$

де $T > 0, q \geq 0$ - деякі сталі; $u \in L^\infty(0,T)$ - керування; w_0^0, w_1^0 - початкові дані. Цю керовану систему розглянуто у просторах Соболєва. Одержано критерії (наближеної) L^∞-керованості цієї системи за заданий та вільний час. Властивості керованості у випадках $q = 0$ та $q > 0$ є подібними за заданий час та вони є істотно різними за вільний час. Так, якщо $q > 0$, то будь-який стан системи є наближено L^∞-керованим за вільний час, а, якщо $q = 0$, то стан системи $\begin{pmatrix} w_0^0 \\ w_1^0 \end{pmatrix}$ є наближено L^∞-керованим за вільний час у тому і лише тому випадку, коли $w_1^0 = \left(w_0^0\right)_x$. Ця ж умова є необхідною для L^∞-керованості за заданий час в обох випадках: $q = 0$ та $q > 0$.

Застосовуючи результати розділу 4, для двовимірного хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півплощині, керованого крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана імпульсного типу, знайдено необхідні та достатні умови керованості як за заданий час так і за вільний час.

У цьому ж розділі для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами вивчено проблему стабілізовності за допомоги позиційного керування без запізнення та позиційного керування із запізненням. Крім того, для цього рівняння одержано критерії коректності нелокальної крайової задачі.

У розділі 6, застосовуючи результати, одержані у розділі 3, основні результати розділу 5 узагальнено на хвильові рівняння зі змінними коефіцієнтами на півосі.

Розглянуто хвильове рівняння зі змінними коефіцієнтами,

$$z_{tt} = \frac{1}{\rho(x)}\left(k(x)z_x\right)_x + \gamma(x)z, \quad x > 0, t > 0,$$

кероване крайовою умовою Діріхле $z(0,\cdot) = v(t)$, $t \in (0,T)$,

або крайовою умовою Неймана $z_{\xi}(0,\cdot) = v(t)$, $t \in (0,T)$,

за початкових умов

$$z(\cdot,0) = z_0^0,\ z_t(\cdot,0) = z_1^0, \ \ x > 0,$$

де $T > 0$- деяка стала; $v \in L^{\infty}(0,T)$-- керування; z_0^0, z_1^0 -початкові дані. Цю керовану систему розглянуто у модифікованих просторах Соболєва. Тут ρ, k, γ-задані функції такі, що $\gamma \in C^1[0,+\infty)$, а $\rho, k \in C^1[0,+\infty)$ є позитивними на $[0,\infty)$, $(\rho k) \in C^2[0,+\infty)$, $(\rho k)'(0) = 0$ і

$$\int_0^x \sqrt{\rho(\mu)/k(\mu)}\,d\mu \to +\infty, \quad \text{коли} \quad x \to +\infty.$$

Наступні дві умови також вважаються виконаними

$$P(k,\rho) - \gamma \in L^{\infty}(0,+\infty) \cup C^1(0,+\infty),$$

$$\exists q = const \geq 0 \quad \sigma\sqrt{\frac{\rho}{k}}\left(P(k,\rho) - \gamma - q^2\right) \in L^1(0,+\infty),$$

де $P(\rho,k) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{\rho}}\left(\sqrt{\frac{k}{\rho}}\left(\frac{k'}{k} + \frac{\rho'}{\rho}\right)\right)' + \left(\sqrt{\frac{k}{\rho}}\left(\left(\frac{k'}{k} + \frac{\rho'}{\rho}\right)\right)\right)^2$.

Застосовуючи оператори $\tilde{\mathbb{T}}$, $\hat{\mathbb{T}}$ та простори $\mathbb{H}^m, m = \overline{-2,2}$ соболєвського типу для диференціальних операторів другого порядку зі змінними коефіцієнтами, які було введено та досліджено в розділі 3, одержано критерії (наближеної) L^{∞}-керованості цієї системи за заданий та вільний час. Властивості керованості у випадках $q = 0$ та $q > 0$ є подібними за заданий час та вони є істотно відмінними за вільний час. Так, якщо $q > 0$, то будь-який стан системи $\begin{pmatrix} z_0^0 \\ z_1^0 \end{pmatrix}$ є наближено L^{∞}-керованим за вільний час, а, якщо q=0, то стан системи є наближено L^{∞}-керованим за вільний час у тому і лише тому випадку, коли z_0^0 та z_1^0 пов'язані між собою. Подібна умова, що зв'язує z_0^0 та z_1^0 є необхідною для L^{∞}-керованості за заданий час в обох випадках: $q = 0$ та $q > 0$. Таким чином, трансформована керована система із загальним хвильовим оператором зі змінними коефіцієнтами відтворює властивості керованості вихідної керованої системи з найпростішим хвильовим оператором зі сталими коефіцієнтами і навпаки.

Крім того, для хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами, застосовуючи оператори перетворення $\tilde{\mathbb{T}} = \boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{T}}_r$ та $\hat{\mathbb{T}} = \boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{T}}_r$, доведено стабілізовність за допомоги позиційного керування та одержано критерії коректності нелокальної крайової задачі.

Приклади, що наведені *в розділі 7*, ілюструють та доповнюють результати попередніх розділів.

Дисертація Л.В. Фардиголи є завершеною науковою працею. Всі основні результати дисертації є новими. Їх достовірність не викликає сумнівів, оскільки вони підтверджені строгими та повними математичними доведеннями теорем та лем. Автореферат повністю відображає зміст дисертації. Результати дисертації своєчасно опубліковані. Рівень основних публікацій автора є високим. Результати дисертації опубліковано в 23 статтях в фахових і міжнародних математичних журналах.

Резюмуючи сказане, вважаю, що новизна і значимість отриманих результатів, обсяг виконаної роботи дозволяють зробити висновок, що дисертація Л.В. Фардиголи відповідає усім вимогам, що пред'являються ДАК МОН України до дисертацій, а її автор безумовно заслуговує присвоєння йому вченого ступеня доктора фізико - математичних наук за спеціальністю 01.01.01 -математичний аналіз.

Офіційний опонент:
завідувач кафедри вищої та прикладної математики, проф. ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет»
доктор фізико - математичних наук О.М. Холькін

Підпис Холькіна О.М.

ЗАСВІДЧУЮ
Нач. загального
відділу
Т. Вахненко

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД «ПРИАЗОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ІДЕНТИФІКАЦІЙНИЙ КОД 02070812

10.10.2016