# ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Драча Костянтина Дмитровича

**«Екстремальні оцінки для повних гіперповерхонь у ріманових просторах»**

подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.04    геометрія та топологія

Дисертаційна робота Драча Костянтина Дмитровича «Екстремальні оцінки для повних гіперповерхонь у ріманових просторах» відноситься до геометрії «в цілому» і присвячена дослідженню глобальної поведінки гіперповерхонь в ріманових та лоренцевих просторах. В ній розглянуто такі три питання.

- Вивчення поведінки кутів між градієнтом функції відстані до гіперповерхні та полем її нормалей і порівняння цих кутів з аналогічними кутами для цілком омбілічних поверхонь в просторах сталої кривини. В цьому напрямку отримано узагальнення теореми Бляшке про прокочування сфери.
- Вивчення опуклих гіперповерхонь, що містяться у сферичному шарі, зокрема отримано узагальнення результатів О. А. Борисенка та В. Мікуеля.
- Ізопериметрична задача про просту замкнену опуклу криву сталої довжини яка обмежує область найменшої площі. Ця задача розв'язана з використанням принципу максимуму Понтрягіна, а в якості застосування отримано нові доведення теорем Бляшке-Лебега та Сантало-Яноша.

Проблеми такого характеру розглядались в роботах багатьох геометрів таких, як Я. Штейнер, В. Бляшке, Д. Гільберт, О. Д. Александров, О. В. Погорєлов, Л. Сантало, І. Янош, А. Д. Мілка, О. А. Борисенко, В. І. Діскант. Результати, що отримані в дисертації, на мою думку вносять значний вклад в розвиток диференціальної геометрії.

Перейду до більш детального опису змісту дисертаційної роботи. Вона складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 84 найменування. Повний обсяг дисертації    168 сторінок.

**Перший розділ** надає основний теоретичний матеріал. В ньому представлені деякі теоретичні відомості з ріманової та лоренцевої геометрій, наведено поняття $\lambda$- та $\lambda_1, \lambda_2$-опуклості гіперповерхонь та сформульовано принцип максимуму Понтрягіна.

В **другому розділі** доведено теореми порівняння радіальних кутів в ріманових многовидах та аналоги цих результатів для гіперболічних кутів в лоренцевих многовидах.

Нехай $M$    повний однозв'язний ріманів многовид обмеженої зверху (знизу) деяким числом $c$ секційної кривини, $\Sigma$    $\lambda$-опукла ($\lambda$-увігнута) гіперповерхня в $M$, $\nu$    нормальне одиничне векторне поле направлене всередину області $D_\Sigma$, що обмежена поверхнею $\Sigma$ і $p \in D_\Sigma \setminus \Sigma$.

Добре відомо, що кожен ріманів многовид $M$ є також метричним простором, у якому відстань між точками $\mathrm{dist}(p,q)$ визначається як мінімальна довжина кривих, що з'єднують $p$ та $q$. Загальна проблема, що ставиться в дисертаційній роботі, полягає в вивченні властивостей функції відстані $d_p : M \to (0,+\infty)$ до точки $p$, $d_p(q) = \mathrm{dist}(q,p)$, $q \in M$ та її обмеження $\tau_p = d_p|_\Sigma$ на $\Sigma$.

Одним з продуктивних підходів до дослідження $\tau_p$ полягає в вивченні поведінки кута $\phi$ між нормаллю $\nu(q)$ та градієнтом $\nabla d_p$. Він тісно пов'язаний з нормальними кривинами гіперповерхні $\Sigma$ і частина результатів дисертації описує цей зв'язок.

Зокрема, лема 2.5 є узагальненням результату О. А. Борисенка і дає формулу для нормальної кривини $\Sigma$ уздовж одиничного поля градієнта функції $\tau_p$ на випадок лоренцевих многовидів. Ця формула залежить від $\cos\phi$.

Нехай також $M(c)$ повний однозв'язний ріманів многовид сталої секційної кривини $c$, $\mathcal{F}_\lambda$ цілком омбілічна гіперповерхня в $M(c)$ кривини $\lambda$, $\nu_\lambda$ нормальне одиничне векторне поле направлене всередину області $D_{\mathcal{F}_\lambda}$, що обмежена $\mathcal{F}_\lambda$ і $p_\lambda \in D_{\mathcal{F}_\lambda} \setminus \mathcal{F}_\lambda$ така точка, що $\mathrm{dist}(p,\Sigma) = \mathrm{dist}(p_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$.

Теореми 2.6 та 2.9 дають порівняння значень $\cos\phi(q)$ та $\cos\phi(q_\lambda)$ для точок $q \in \Sigma$ і $q_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda$ таких, що $\mathrm{dist}(p,q) = \mathrm{dist}(p_\lambda, q_\lambda)$. Показано, що $\cos\phi(q) \geq \cos\phi_\lambda(q_\lambda)$ в $\lambda$-опуклому випадку і $\cos\phi(q) \leq \cos\phi_\lambda(q_\lambda)$ в $\lambda$-увігнутому випадку. Далі в лемі 2.10 отримано оцінки знизу на $\cos\phi_\lambda$, що дає оцінки знизу на $\cos\phi$ (теорема 2.12).

Теореми 2.17 та 2.19 характеризують відповідно $\lambda$-опуклі та $\lambda$-увігнуті області $D_\Sigma \subset M(c)$ з гладкою межею $\Sigma$ в термінах нерівності між функціями радіальних кутів $\varphi$ та $\varphi_\lambda$ як в теоремах 2.6 та 2.9, а також в термінах теореми Бляшке про прокочування сфери.

З цих теорем отримано узагальнення теореми Бляшке для довільних ріманових многовидів (теорема 2.20).

В підрозділі 2.5 отримано аналоги попередніх результатів для лоренцевих многовидів. Принципово новим твердженням, яке не виконується для ріманових многовидів, є теорема 2.26, яка показує, що функція гіперболічного кута для просторової гіперповерхні $\Sigma$ завжди обмежена зверху.

В **розділі 3** досліджуються опуклі гіперповерхні, що міститься в сферичному шарі, тобто між двома сферами радіусів $r < R$. Спочатку автор досліджує так звані закруглені веретеноподібні $\lambda_1, \lambda_2$-опуклі поверхні $\Sigma$, та дає оцінки на співвідношення між радіусами вписаної, $r$, та описаної, $R$, сфер до таких поверхонь (леми 3.2 та 3.4).

Далі в лемі 3.6 показано, що якщо $\Sigma$ $\lambda_1, \lambda_2$-опукла поверхня в $M(c)$, $r$ радіус вписаної в $\Sigma$ сфери с центром в деякій точці $o$, і $\bar{\Sigma}$ закруглена веретеноподібна $\lambda_1, \lambda_2$-опукла поверхня з таким само радіусом вписаної сфери $r$, і радіусом $\bar{R}$ описаної сфери, то $\Sigma$ також міститься в шарі радіусу $\bar{R}$ з центром в точці $o$.

Ця лема дозволяє встановити точні оцінки на радіуси вписаної та описаної сфер для довільної $\lambda_1, \lambda_2$-опуклої поверхні $\Sigma \subset M(c)$, теореми 3.7 - 3.9, та 3.10 для $\lambda$-опуклих поверхонь.

Якщо тепер $\Sigma$ повна $\lambda$-опукла поверхня в повному однозв'язному многовиді $M$, то при певних обмеженнях знизу на секційну кривину $M$, з попередніх результатів випливають оцінки на ширину $R - r$ сферичного шару в який можна помістити $\Sigma$, теорема 3.16.

Нехай тепер $\gamma$ проста замкнута $\lambda$-опукла крива в $M^2(c)$, $L(\gamma)$ її довжина і $A(\gamma)$ площа області, що обмежена $\gamma$. Останній **розділ 4** присвячений доведенню того, що серед усіх простих замкнутих $\lambda$-опуклих кривих в $M^2(c)$ фіксованої довжини, область найменшої площі обмежується так званою «луночкою» кривою $\gamma_0$, що складається з двох дуг однакової довжини і кривини $\lambda$, (теорема 4.2)

В якості допоміжних результатів в теоремі 4.3 отримано оцінки знизу на $A(\gamma)$ в термінах $L(\gamma)$, а в лемі 4.4. отримані точні співвідношення між $A(\gamma)$ та $L(\gamma)$ для луночок. Крім того в підрозділі 4.3 показано, що існує проста замкнута $\lambda$-опукла крива в $M^2(c)$, на якій реалізується мінімум площ $A(\gamma)$, а в лемі 4.7 що таку криву завжди можна вважати або центрально симетричною або симетричною відносно деякої геодезичної прямої.

Подальше доведення базується на використанні принципу максимуму Понтрягіна, де в якості керуючого параметру $u(t)$ взято радіус кривини. В підрозділі 4.5 розглянуто евклідовий випадок $c = 0$. Спочатку задача переформульовується у вигляді (4.29), який дозволяє застосовувати принцип максимуму. З того, що розв'язок існує, випливає, що він повинен задовольняти умовам Понтрягіна. З цих умов виводиться, що керуючий параметр $u(t)$ повинен мати лише скінчене число точок розриву і приймати постійні значення на інтервала неперервності. Це означає, що відповідна крива повинна складатись з дуг які мають постійну кривину $\lambda$. Крім того в лемі 4.9 також показано, що ці дуги повинні мати однакові довжини і бути з'єднаними під однаковими кутами, і далі, що таких дуг повинно бути рівно дві, тобто що оптимальна крива є луночкою.

Доведення випадків $c \neq 0$ проведено в підрозділі схожими методами.

В якості застосування автор отримує нові доведення теореми Бляшке-Лебега про криві постійної ширини, які обмежують найменшу площу, та теореми Сантало-Яneша про границю $\lim\limits_{t\to\infty} A(\Omega_t)/L(\Omega_t)$ для сімей $\{\Omega_t\}$ зростаючих компактних $h$-опуклих областей в $\mathbb{H}(-k^2)$.

**Зауваження щодо змісту.**

(1) Стор. 22, абзац 3. Означення невиродженої площини (цитую):

... *Двумерная плоскость называется невырожденной, если существует* $v \in T_pM$ *такой, что* $\langle v, v\rangle \neq 0$.

Таке формулювання не залежить від площини, а тому є некоректним. Але наступне після нього речення в дисертації дає коректне означення невиродженості. Можливо автор хотів сказати, що

*Двумерная плоскость* $\sigma \subset T_pM$ *называется невырожденной, если* $\langle v, v\rangle \neq 0$ *для любого ненулевого вектора* $v \in \sigma$.

(2) Стор. 25, абзац 3. Автор використовує поняття *«непродолжаемой в будущее геодезической»*, але в дисертації його означення я не знайшов.

(3) Стор. 45, Означення 2.1 функції $\varphi$. Варто було б відмітити, що ця функція є неперервною, але не диференційовною в точках $\varphi^{-1}(0) \cup \varphi^{-1}(2\pi)$, в той час як $\cos\varphi$ є гладкою функцією.

(4) Стор. 48, рядок 15 зверху: замість «*в силу утверждение 1.6*» потрібно написати «*в силу утверждения 1.6*».

(5) Стор. 49, рядок 7 знизу: замість «*слогаемое*» потрібно написати «*слагаемое*».

(6) Стор. 60, рядок 12 зверху: замість «*область* $D_\Sigma$ *компакпна*» потрібно написати «*область* $D_\Sigma$ *компактна*».

(7) Стор. 99, формула (3.16) Потрібно замінити $q$ на $s$:

$$\max_{s\in\Sigma} \operatorname{dist}(o, s) \le \tilde{R}.$$

Відмічені недоліки не є суттєвими і **не впливають** на загальну дуже високу позитивну оцінку роботи.

Дисертація носить теоретичний характер, виконана на високому науковому рівні і справляє гарне враження. Всі наведені в ній результати є новими і належать безпосередньо автору. Результати дисертації опубліковані в 7 статтях у виданнях, що входять до переліку фахових наукових журналів згідно чинного законодавства, і в 6 тезах доповідей на міжнародних конференціях. Вони також доповідались на багатьох наукових семінарах. Автореферат добре відображає зміст дисертації.

Оцінюючи рецензовану дисертацію в цілому, можна зробити висновок про те, що вона є завершеним науковим дослідженням, яке збагатило геометрію «в цілому» актуальними результатами. Отримані результати можуть бути застосовані в подальших дослідженнях.

Вважаю, що дисертаційна робота Драча Костянтина Дмитровича **«Екстремальні оцінки для повних гіперповерхонь у ріманових просторах»** відповідає всім вимогам МОН України, що ставляться до дисертацій на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.04 - геометрія і топологія, а її автор без сумніву заслуговує присвоєння даного ступеня.

Офіційний опонент,
доктор фізико-математичних наук,
завідувач відділу топології
Інституту математики НАН України

С.І. Максименко

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ЗАСВІДЧУЮ
Зав. канцелярією
Інституту математики АН України
« ___ » ____________ ___ р.

Відгук надійшов 12.02.2016 р.
Вчений секретар
Спец. вченої ради Д 64.175.01 (В.О. Горькавий)