Відгук
офіційного опонента на дисертаційну роботу
Андреєва Кирила Миколайовича
«Хвилі розрідження для рівняння Кортевега – де Фріза:
асимптотики та інтеграли руху»
подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика

Дисертаційну роботу Андреєва К.М. присвячено дослідженню властивостей розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза із початковими умовами типу сходинки. В дисертації обговорюються два важливих питання, пов'язаних із цим розв'язком. Перше із них – це побудова повного набору інтегралів руху, що дозволяють інтерпретувати рівняння КдФ із початковими умовами типу сходинки як цілком інтегровну гамільтонову систему. Друге питання стосується асимптотичної поведінки розв'язку типу сходинки за великим часом.

Ще з часів відкриття методу оберненої задачі розсіювання, рівняння Кортевега – де Фріза залишається одним з найбільш популярних і досліджуваних рівнянь теорії цілком інтегровних систем. Його проінтегровано для досить широкого класу початкових умов, що включають до себе спадні, періодичні та квазіперіодичні скінченнозонні умови та їхні компактні збурення, а також різноманітні сходинки, що мають різну асимптотичну поведінку на різних півосях. Отже, існування, єдиність та асимптотична поведінка за великою просторовою змінною при фіксованому часі для цих класів розв'язків є добре вивченою. Більш того, для більшості цих розв'язків, і, зокрема, у випадку сходинок із сталими фонами, фізична картина для асимптотик є досить добре зрозумілою у режимі, коли обидві, часова та просторова, змінні прямують до нескінченності вздовж деяких променів, тобто їхнє відношення є деякою сталою. Однак математично строге обґрунтування цих асимптотик отримано далеко не всюди, і далеко не для всіх відношень просторової та часової змінної, тобто не для всіх напрямків променів. По суті, для розв'язків типу сходинки єдиним математично строгим результатом для рівняння КдФ є результат Є.Я. Хруслова, що стосується асимптотичних солітонів для хвилі стиску в області позаду переднього хвильового фронту.

В дисертаційній роботі К. Андреєва досліджуються асимптотики розв'язку рівняння КдФ, що відповідає початковим даним, які швидко спадають на позитивній півосі, а на негативній вони прямують до деякої позитивної сталої. Такий розв'язок прийнято зараз називати хвилею розрідження. Слід зазначити, що головні члени асимптотичного розвинення за часом для хвилі розрідження є відомими, але їх було отримано фізиками тільки для початкових даних, що є плюс/мінус функцією Хевісайда, тобто чистою сходинкою. Крім того, ці асимптотики зовсім не обґрунтовувались, і нічого не було відомо про другий член асимптотичного розвинення за часом. Ці задачі успішно розв'язано в дисертації. Більш того, в дисертаційній роботі початкові умови є суттєво більш загальними, ніж чиста сходинка.

Методом дослідження є нелінійний метод найшвидшого спуску, який застосовано для векторних задач Рімана-Гільберта. Цей метод є дуже добре розвиненим для задач із спадними початковими умовами. Повний асимптотичний аналіз розв'язку складається з кількох частин. Спершу ставиться асоційована матрична задача Рімана-Гільберта та доводиться єдиність її розв'язку. Потім деякими стандартними перетвореннями та зсувами контурів спряження цю задачу трансформують у еквівалентну задачу із матрицею стрибку, що є наближеною за великим часом до матриці стрибку із кусково сталими за спектральним параметром коефіцієнтами. Це є так звана модельна задача Рімана-Гільберта, і вона має точний розв'язок, який досить легко знаходиться. При цих перетвореннях, на контурі спряження виникає декілька точок, в околах яких еквівалентна матриця стрибку не є близькою до модельної, отже тут потрібно розв'язувати додаткові задачі Рімана-Гільберта, що мають назву задач параметрикса. Останнім кроком дослідження є аналіз деякого сингулярного інтегрального рівняння, якій доводить, що розв'язок початкової задачі Рімана-Гільберта добре апроксимується розв'язком модельної задачі в околі нескінченності, звідки й можна вилучити асимптотику розв'язку задачі Коші. У деяких випадках на цю асимптотику впливає саме розв'язок задачі параметрикса.

Для умов типу сходинки нелінійний метод найшвидшого спуску є досить ефективним, але у переважній кількості досліджень він використовується тільки для знаходження розв'язку модельної задачі і формального обчислення головного члена асимптотичного розвинення розв'язку нелінійного рівняння за часом. На відміну від цих результатів, в дисертації К.М. Андреєва проведено повний асимптотичний аналіз хвилі розрідження за великим часом. Взагалі кажучи, це перше дослідження для рівняння КдФ з початковими умовами типу сходинки, де розв'язано задачу параметрикса і проведено заключний асимптотичний аналіз, причому навіть за наявності резонансів, вплив яких на асимптотики хвилі розрідження досі не вивчався.

Дослідження здійснено в трьох принципових областях просторово-часової півплощини: солітонній, середній та області дисперсійного спаду. Ці області розділено променями, що формують вузькі перехідні області навколо переднього та заднього хвильових фронтів. В перехідних областях ніяких строгих результатів ще не отримано, і це може бути цікавим сюжетом для подальших досліджень здобувача.

Відзначимо, що в дисертаційній роботі досліджуються дві різні векторні мероморфні задачі Рімана-Гільберта, що сформульовано за правими ти лівими даними розсіювання. В залежності від зони дослідження обирається та або інша постановка, і це значно полегшує подальший асимптотичний аналіз. Кожна з цих задач потребує доведення єдиності розв'язку, що є досить нетривіальним, особливо за наявності резонансу на кінці неперервного спектру, який породжує додаткові сингулярності.

Найбільш цікавими дослідженнями дисертації, з моєї точки зору, є результати розділу 2, що стосуються області між переднім та заднім хвильовими фронтами. Тут найбільшою мірою виявляються особливості задач із початковими умовами типу сходинки. Зокрема, тут використовується так званий метод g-функції, яку вдалося знайти у явному вигляді. Також цікавим і нетривіальним є постановка і розв'язання локальної задачі параметрикса, і подальший аналіз відповідних сингулярних інтегральних рівнянь, які демонструють, що, на відміну від області дисперсійного спаду, як перший, так і другий члени асимптотичного розвинення не відчувають впливу параметрикса. Результати цього розділу, так само, як і розділу 3, мають закінчений характер, і можуть бути узагальнені лише у напрямку так званих поліноміальних апроксимацій, що застосовуються за умови, що початкові умови прямують до своїх фонових констант зі швидкістю меншою, ніж експоненційна.

В розділі 4 вивчається розв'язок рівняння КдФ типу сходинки більш загального класу, ніж у попередніх розділах. А саме, на однієї з півосей він є асимптотично близьким до скінченнозонного розв'язку і спадає на іншій. Завдяки подальшому розвитку методу оберненої задачі розсіювання на скінченнозонних фонах, тут отримано повній набір так званих регулярізованих інтегралів руху, що є значним кроком в інтерпретації рівняння КдФ як цілком інтегрованої гамільтонової системи з неспадними початковими умовами.

Мають місце деякі зауваження:

1. У підрозділі 1.4, що містить опис відомих результатів з застосування нелінійного методу найшвидшого спуску для знаходження асимптотик розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь, було б бажаним стисло навести основи цього методу у класичному випадку спадних початкових даних. Це дозволило б легше зрозуміти особливості цього підходу у випадку початкових даних типу сходинки.

2. В підрозділі 2.2 розглядаються перетворення, що призводять до модельної задачі Рімана-Гільберта у солітонній області. Ця модельна задача виявляється такою ж самою, як у спадному випадку. Тому дисертант просто посилається на розв'язання цієї задачі в роботі [51], і далі наводить формулювання свого результату. Було б однак бажаним описати у загальних рисах яким чином розв'язано цю задачу в [51], і як саме з відповідної асимптотики виникають солітони.

3. В формулюванні теореми 2.15 на с. 73 немає пояснення, що означає число N. Цей параметр, як виявляється, наводився значно раніше, на с. 34. Бажано в формулюваннях теорем нагадувати основні позначення.

4. На с. 93 має місце посилання на формулу (3.44), яка з'являється тільки через декілька сторінок, в теоремі 3.6. Очевидно, що основний результат розділу

(теорема 3.6), в порівнянні з відповідною статтею, було зміщено у кінець, і не перевірено нумерацію.

5. Література: в посиланнях на книги [16, 41, 53, 62, 64] є відсутньою кількість сторінок. У неангломовних посиланнях [10, 11] містяться англомовні слова.

Зазначені зауваження ні якою мірою не ставлять під сумнів достовірність і цінність отриманих у роботі результатів.

Зміст автореферату повністю відповідає змісту дисертації.

Дисертаційна робота «Хвилі розрідження для рівняння Кортевега – де Фріза: асимптотики та інтеграли руху» є завершеним науковим дослідженням. Результати можуть бути використані у подальшому вивченні асимптотичної поведінки розв'язків нелінійних рівнянь типу КдФ (ланцюжок Тоди, мКдФ та інші).

Вважаю, що дисертаційна робота Андреєва К.М. «Хвилі розрідження для рівняння Кортевега – де Фріза: асимптотики та інтеграли руху» за обсягом проведених наукових досліджень, актуальністю, науковою новизною, кількістю опублікованих наукових праць та рівнем апробації відповідає всім вимогам МОН України, що висуваються до кандидатських дисертацій, а її автор Андреєв Кирило Миколайович безумовно заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика.

Доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри фундаментальної математики
Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна В. Д. Гордевський

13 вересня 2018 р.

Підпис В. Д. Гордевський
ЗАСВІДЧУЮ
Учений секретар Харківського національного
університету імені В.Н.Каразіна

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ * ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Н. КАРАЗІНА * КОД 02071205

Відгук надійшов до ради [illegible].09.2018 р.
Вчений секретар
Спец. вченої ради Д 64.175.01 (В.О. Горькавий)

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ІМ. Б.І. ВЄРКІНА НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ
КАНЦЕЛЯРІЯ
Ідентифікаційний код * 03534601 *