Анотація

Карпенко І. М., "Метод задачі Рімана–Гільберта для модифікованого рівняння Камасси–Хольма з ненульовими крайовими умовами," – кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «математика» (галузь знань 11 «математика та статистика»). Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України.

Метою дослідження дисертаційної роботи є розробка методу оберненої задачі розсіювання у формі задачі Рімана–Гільберта (РГ) для модифікованого рівняння Камасси–Хольма (мКХ):

$$m_t + \big((u^2 - u_x^2)m\big)_x = 0, \qquad\qquad m := u - u_{xx},$$

з метою дослідження властивостей розв'язків цього рівняння, зокрема, асимптотики за великим часом.

Основними постановками задачі є такі:

(i) Задача Коші на x-осі у випадку, коли розв'язок прямує до ненульової сталої при $|x| \to \infty$.

(ii) Задача Коші на x-осі у випадку, коли розв'язок прямує до двох різних сталих при $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$.

У **розділі 2** розглядається задача Коші для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на осі:

$$\begin{aligned} &m_t + \big((u^2 - u_x^2)m\big)_x = 0, \quad m := u - u_{xx}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \\ &u(x,0) = u_0(x), \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -\infty < x < +\infty, \end{aligned}$$

за умови, що

$$u_0(x) \to 1 \quad \text{коли} \quad x \to \pm\infty$$

і що еволюція за часом зберігає цю поведінку: $u(x,t) \to 1$ при $x \to \pm\infty$ для всіх $t > 0$. Рівняння мКХ є модифікацією, з кубічною нелінійністю, оригінального рівняння Камасси–Хольма (КХ)

$$m_t + (um)_x + u_x m = 0, \quad m := u - u_{xx}.$$

Рівняння мКХ, як і рівняння КХ, є інтегровним у тому сенсі, що воно є умовою сумісності відповідної пари лінійних диференціальних рівнянь — так званих рівнянь пари Лакса. Завдяки ненульовому фону, x-рівняння з пари Лакса для рівняння мКХ можна розглядати як спектральну задачу, яка має неперервний спектр. Це дозволяє сформулювати обернену спектральну задачу (обернену задачу розсіювання) як задачу аналітичної факторизації Рімана–Гільберта у комплексній площині спектрального параметра, з умовою стрибка на дійсній осі (яка є неперервним спектром).

Запропонований формалізм задачі Рімана–Гільберта ґрунтується на адаптації загальної ідеї — використання спеціальних розв'язків (розв'язків Йоста) асоційованих рівнянь пари Лакса як «блоків» для побудови матричної задачі Рімана–Гільберта, тобто задачі аналітичної факторизації у комплексній площині спектрального параметра, яку параметризовано просторовою та часовою змінними нелінійного рівняння — до випадку рівняння мКХ, з урахуванням особливостей рівнянь асоційованої пари Лакса.

Стандартна пара Лакса для рівняння мКХ, відома в літературі, має форму 2×2 матричних лінійних диференціальних рівнянь:

$$\Phi_x(x,t,\lambda) = \mathsf{U}(x,t,\lambda)\Phi(x,t,\lambda), \qquad \Phi_t(x,t,\lambda) = \mathsf{V}(x,t,\lambda)\Phi(x,t,\lambda),$$

де матриці-коефіцієнти U та V визначено у термінах розв'язку рівняння мКХ:

$$\mathsf{U} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \lambda m \\ -\lambda m & 1 \end{pmatrix}, \ \mathsf{V} = \begin{pmatrix} \lambda^{-2} + \frac{u^2-u_x^2}{2} & -\frac{u-u_x}{\lambda} - \frac{\lambda(u^2-u_x^2)m}{2} \\ \frac{(u+u_x)}{\lambda} + \frac{\lambda(u^2-u_x^2)m}{2} & -\lambda^{-2} - \frac{u^2-u_x^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що x-рівняння пари Лакса (включає U та є спектральною задачею зі спектральним параметром λ), має дві особливості, що суттєво впливають на аналітичні властивості розв'язків Йоста: (a) λ входить у U як добуток з “моментом” $m(x,t)$, який у рамках оберненої задачі є невідомою функцією; (б) коли $|x| \to \infty$, $m(x,t)$ прямує до ненульової сталої. Зокрема, ці особливості впливають на проблему контролю поведінки розв'язків Йоста, коли $\lambda \to \infty$. У дисертації цю проблему вирішено таким чином: (i) застосовуючи калібрувальні перетворення, рівняння пари Лакса трансформовано до зручної форми, у якій діагональні члени домінують у певному сенсі, коли $\lambda \to \infty$; (ii) введено нову просторову змінну, що дозволяє отримати явний опис поведінки розв'язків Йоста при $\lambda \to \infty$ у термінах (нової) просторової та часової змінних; (iii) введено новий (уніформізуючий) спектральний параметр μ, який дозволяє уникнути нераціональної залежності коефіцієнтів у рівняннях пари Лакса від спектрального параметра.

Крім того, використано наслідок властивості (а), який полягає у тому, що при $\lambda = 0$ матриця коефіцієнтів U стає незалежною від u. Ця властивість дозволяє побудувати ефективний алгоритм отримання розв'язку задачі Коші для рівняння мКХ з розв'язку асоційованої задачі РГ, розглядаючи поведінку останнього при $\lambda \to 0$. Зазначимо, що у цьому відношенні рівняння мКХ суттєво відрізняється від інших рівнянь типу Камасси-Холма (включно з оригінальним рівнянням КХ): для контролю розв'язків Йоста при $\lambda = 0$ не треба вводити нове калібрувальне перетворення початкової пари Лакса, а достатньо перегрупувати члени у парі Лакса, яка забезпечує ефективний контроль її розв'язків при $\lambda \to \infty$.

З використанням розробленого формалізму отримано параметричне зображення розв'язку задачі Коші для рівняння мКХ на постійному фоні в термінах розв'язку асоційованої задачі РГ, дані для якої (матриця стрибків і параметри для умов на залишки у сингулярних точках, якщо вони наявні) однозначно визначаються початковими даними для задачі Коші.

Запропонований формалізм дозволяє охарактеризувати як регулярні, так і нерегулярні односолітонні розв'язки (розв'язки, що генеруються однією (с точністю до симетрій) сингулярною умовою та мають вигляд локалізованого збурення, що розповсюджується зі сталою швидкістю, не міняючи своєї форми). Такі розв'язки відповідають задачам РГ з тривіальною умовою стрибка та відповідним чином заданими умовами на лишки у сингулярних точках. Зокрема, виділено два типи нерегулярних солітонних розв'язків рівняння мКХ: (i) розв'язки піконного типу, які є функціями неперервними разом із першою похідною, але мають необмежені похідні порядків більших за 2 у точці піку; (ii) петлеподібні багатозначні розв'язки.

Теорема. *Рівняння мКХ має односолітонні розв'язки (серед яких є як регулярні, так і нерегулярні), які характеризуються двома параметрами, $\hat{\delta} > 0$ та $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, та даються у параметричній формі формулою $u(x,t) \equiv \hat{u}(y(x-t,t),t) + 1$, де*

$$\begin{aligned}
\hat{u}(y,t) &= 4\tan^2\theta \frac{z^2(y,t) + 2\cos^2\theta \cdot z(y,t) + \cos^2\theta}{(z^2(y,t) + 2z(y,t) + \cos^2\theta)^2} z(y,t), \\
x(y,t) &= y + 2\ln\frac{z(y,t) + 1 + \sin\theta}{z(y,t) + 1 - \sin\theta}, \\
z(y,t) &= 2\hat{\delta}\sin\theta\, \mathrm{e}^{y\sin\theta} \mathrm{e}^{-\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}t}.
\end{aligned}$$

В залежності від значення параметра θ, розв'язки мають якісно різні властивості:

(i) *При $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$, односолітонні розв'язки є гладкими функціями вихідних фізичних змінних (x,t).*

(ii) *При $\theta = \frac{\pi}{3}$, односолінонні розв'язки мають скінчену гладкість у змінних (x,t) у точці піку.*

(iii) *При $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, односолітонні розв'язки є регулярними функціями у змінних (y,t) але стають багатозначними (петлеподібними) у змінних (x,t).*

У **розділі 3**, використовуючи формалізм, розроблений у розділі 2, отримано головні члени асимптотики за великого часу t для розв'язку задачі Коші для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на сталому ненульовому фоні. Дослідження зосереджене на безсолітонному випадку, тобто у припущенні, що умови на лишки відсутні (нерегулярну задачу Рімана–Гільберта (яка включає в себе умови на лишки) для загального випадку можна звести до регулярної, використовуючи множники Бляшке–Потапова).

Для асимптотичного аналізу розв'язку задачі Коші, коли $t \to \infty$, застосовано нелінійний метод найскорішого спуску. Попередньо, вихідну задачу РГ, асоційовану з рівнянням мКХ, яка має специфічні сингулярності при $\mu = \pm 1$, зведено до звичайної задачі РГ (тобто такої, що має тільки умову стрибка та умову нормування). Примітною особливістю модифікованого рівняння Камасси–Хольма є те, що асоційована вихідна задача РГ має умови сингулярності у $\mu = 1$ та $\mu = -1$ з різними матричними структурами, що не дозволяє позбутися їх шляхом зведення матричної задачі РГ до векторної (що має місце у випадку звичайного рівняння Камасси–Хольма). Цю проблему розв'язано у два кроки. На першому кроці, задачу РГ з умовами сингулярності у $\mu = \pm 1$ зведено до задачі РГ, що характеризується такими двома умовами: (i) елементи матричного розв'язку регулярні у $\mu = \pm 1$, але його визначник дорівнює нулю у цих точках (зазначимо, що $\det M(\mu) \equiv 1$ для розв'язку вихідної задачі РГ); (ii) розв'язок є сингулярним при $\mu = 0$. Другим кроком, знаходимо зображення розв'язку цієї задачі РГ через розв'язок відповідної регулярної задачі. Саме розв'язок отриманої регулярної задачі РГ проаналізовано асимптотично при $t \to +\infty$, адаптуючи нелінійний метод найскорішого спуску. У підсумку, отримано головні асимптотичні члени для розв'язку $u(x,t)$ задачі Коші у тих секторах напівплощини (x,t), де відхилення від фону є нетривіальним (у решті секторів, $\frac{x}{t} > 3$ і $\frac{x}{t} < \frac{3}{4}$, $u(x,t)$ швидко спадає до 1).

Теорема. *Нехай* $u_0(x)$ *— гладка функція така, що (i) вона достатньо швидко прямує до* 1*, коли* $x \to \pm\infty$*, і задовольняє нерівність* $(1 - \partial_x^2)u_0(x) > 0$ *для всіх* x *та (ii) асоційована з нею спектральна функція* $a(\mu)$ *не має нулів у верхній півплощині (безсолітонний випадок).*

Тоді у секторах (x,t) *півплощини, які задано нерівностями* $1 < \frac{x}{t} < 3$ *та* $\frac{3}{4} < \frac{x}{t} < 1$*, розв'язок* $u(x,t)$ *задачі Коші має таку асимптотичну* *поведінку за великим часом:*

(i) Для $1 < \frac{x}{t} < 3$,

$$u(x,t) = 1 + \frac{C_1(\zeta)}{\sqrt{t}} \cos\left\{C_2(\zeta)t + C_3(\zeta)\ln t + \tilde{C}_4(\zeta)\right\} + \mathrm{o}(t^{-1/2});$$

(ii) Для $\frac{3}{4} < \frac{x}{t} < 1$,

$$u(x,t) = 1 + \sum_{j=0,1} \frac{C_1^{(j)}(\zeta)}{\sqrt{t}} \cos\left\{C_2^{(j)}(\zeta)t + C_3^{(j)}(\zeta)\ln t + \tilde{C}_4^{(j)}(\zeta)\right\} + \mathrm{o}(t^{-1/2}),$$

де C_i, $C_i^{(j)}$, $\tilde{C}_4$, $\tilde{C}_4^j$ *— функції від* $\zeta := \frac{x}{t}$, *визначені у термінах спектральних функцій, які, у свою чергу, однозначно визначаються початковими даними* $u_0(x)$.

У **розділі 4** розглянуто задачу Коші для модифікованого рівняння Камасси–Холма у випадку, у якому розв'язок прямує до двох різних констант, коли просторова змінна прямує до різних нескінченностей дійсної осі:

$$\begin{aligned} &m_t + \left((u^2 - u_x^2)m\right)_x = 0, \qquad m := u - u_{xx}, \qquad t > 0, \qquad -\infty < x < +\infty, \\ &u(x,0) = u_0(x), \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\infty < x < +\infty, \end{aligned}$$

де

$$u_0(x) \to \begin{cases} A_1, & x \to -\infty, \\ A_2, & x \to \infty \end{cases}$$

і еволюція за часом зберігає цю поведінку:

$$u(x,t) \to \begin{cases} A_1, & x \to -\infty, \\ A_2, & x \to \infty \end{cases}$$

для всіх t.

Розроблено формалізм задачі Рімана–Гільберта для цієї задачі Коші. Для цього застосовано перетворення рівнянь пари Лакса, які дозволяють детально дослідити аналітичні властивості відповідних розв'язків Йоста та спектральних функцій, зокрема, симетрії та поведінку в точках розгалуження. При побудові задачі Рімана–Гільберта використано трансформовані пари Лакса, що включають функції $k_j(\lambda) := \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{A_j^2}}$, $j = 1, 2$, визначені як такі, що мають вітки з розрізами вздовж $(-\infty, -\frac{1}{A_j})$ та $(\frac{1}{A_j}, \infty)$. Подібно до випадку з постійним фоном, за допомогою аналіза поведінки розв'язку побудованої задачі Рімана–Гільберта при $\lambda = 0$ отримано параметричне зображення розв'язку задачі Коші.

Теорема. *Припустимо, що задача Рімана–Гільберта, асоційована з початковими даними $u_0(x)$, має розв'язок $\hat{M}(y, t, x)$ з розвиненням*

$$\hat{M}(y,t,\lambda) = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \hat{a}_1(y,t) \\ \hat{a}_1^{-1}(y,t) & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\lambda\begin{pmatrix} \hat{a}_2(y,t) & 0 \\ 0 & \hat{a}_3(y,t) \end{pmatrix} + \mathrm{O}(\lambda^2)$$

при $\lambda \to 0$. Тоді розв'язок $u(x, t)$ задачі Коші можна зобразити у параметричний формі у термінах $\hat{a}_j(y, t)$, $j = 1, 2, 3$ таким чином: $u(x, t) = \hat{u}(y(x, t), t)$, де

$$\begin{aligned} \hat{u}(y,t) &= \hat{a}_1(y,t)\hat{a}_2(y,t) + \hat{a}_1^{-1}(y,t)\hat{a}_3(y,t), \\ x(y,t) &= y - 2\ln\hat{a}_1(y,t) + A_2^2 t. \end{aligned}$$

Крім того, $\hat{u}_x(y, t)$ також може бути алгебраїчно зображено у термінах $\hat{a}_j(y, t)$, $j = 1, 2, 3$, а саме: $u_x(x, t) = \hat{u}_x(y(x, t), t)$, де

$$\hat{u}_x(y,t) = -\hat{a}_1(y,t)\hat{a}_2(y,t) + \hat{a}_1^{-1}(y,t)\hat{a}_3(y,t).$$

Ключові слова: диференціальні рівняння з частинними похідними, інтегровні нелінійні рівняння, модифіковане рівняння Камасси–Хольма, задача Рімана–Гільберта, спектральна задача, пара Лакса, симетрії, пряма задача розсіювання, обернена задача розсіювання, метод оберненої задачі розсіювання, нелінійний метод найшвидшого спуску, солітон, асимптотика.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. A. Boutet de Monvel, I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions”, J. Math. Phys. **61**, No. 3, 031504, 24 (2020).

   https://doi.org/10.1063/1.5139519

2. I. Karpenko, “Long-time asymptotics for the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions”, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry **16**, No.2, 224–252 (2022).

   https://doi.org/10.15407/mag18.02.224

3. I. Karpenko, D. Shepelsky, G. Teschl “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with step-like boundary conditions”, Monatshefte für Mathematik **201**, (2023), 127–172.

   https://doi.org/10.1007/s00605-022-01786-y

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

4. I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions”, VI International Conference “Analysis and Mathematical Physics”, Kharkiv, Ukraine (June 2018).

5. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The Riemann–Hilbert approach to the Cauchy problem for the modified Camassa–Holm equation”, 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications, Vinnytsia, Ukraine (June 2019).

6. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The inverse scattering transform, in the form of Riemann–Hilbert problem, for the modified Camassa–Holm equation”, international Conference dedicated to 70th anniversary of Professor A.M.Plichko “Banach Spaces and their Applications”, Lviv, Ukraine (June 2019).

7. I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann–Hilbert problem approach to the modified Camassa–Holm equation on a nonzero background”, Pidzakharychi, Ukraine (August 2019).

8. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The modified Camassa–Holm equation on a nonzero background: large-time asymptotics for the Cauchy problem”, Workshop “New horizons in dispersive hydrodynamics”, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, United Kingdom (June 2021).

9. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The large-time asymptotics for the modified Camassa–Holm equation on a non-zero background”, 5-th International Conference “Differential Equations and Control Theory ”, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine (September 2021).

10. I. Karpenko, D. Shepelsky, G. Teschl, “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with step-like boundary conditions”, Ivano-Frankivsk, Ukraine (May 2022).

11. I. Karpenko, “The modified Camassa–Holm equation on a step-like background”, Complex Analysis, Spectral Theory and Approximation meet in Linz, Johannes Kepler University, Linz, Austria (July 2022).

12. I. Karpenko, “A Riemann–Hilbert problem approach to the modified Camassa–Holm equation on a step like background”, Workshop From Modeling and Analysis to Approximation and Fast Algorithms, Hasenwinkel, Germany (December 2022).

Abstract

I. Karpenko, "The modified Camassa–Holm equation with nonvanishing boundary conditions by a Riemann–Hilbert approach," – Scholarly manuscript.

PhD Thesis in Mathematics (specialty code: 111). B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine.

This Thesis aims at the development of the inverse scattering transform (IST), in the form of a Riemann–Hilbert problem, for the modified Camassa–Holm (mCH) equation:

$$m_t + \left((u^2 - u_x^2)m\right)_x = 0, \qquad m := u - u_{xx},$$

in order to study properties of solutions of the mCH equations, particularly, their the long-time behavior.

Two main problem settings are as follows:

(i) The Cauchy problem on the whole x-line in the case when the solution is assumed to approach a non-zero constant as $|x| \to \infty$.

(ii) The Cauchy problem on the whole x-line in the case when the solution is assumed to approach two different constants as $x \to +\infty$ and $x \to -\infty$.

In **Chapter 2**, we consider the Cauchy problem for the modified Camassa–Holm equation on the line:

$$\begin{aligned} &m_t + \left((u^2 - u_x^2)m\right)_x = 0, \quad m := u - u_{xx}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty,\\ &u(x,0) = u_0(x), \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\infty < x < +\infty, \end{aligned}$$

assuming that

$$u_0(x) \to 1 \quad \text{as} \;\; x \to \pm\infty$$

and that the time evolution preserves this behavior: $u(x,t) \to 1$ as $x \to \pm\infty$ for all $t > 0$. A non-zero background provides that the spectral problem in

the associated Lax pair equations has a continuous spectrum, which allows us to formulate the inverse spectral problem as a Riemann–Hilbert factorization problem with jump conditions across the real axis (constituting the continuous spectrum).

Our development of the Riemann–Hilbert problem formalism is based on the adaptation of a general idea — the use of dedicated (Jost) solutions of the associated Lax pair equations as "building block" for a matrix-valued Riemann–Hilbert problem, which is to be formulated in the complex plane of the spectral parameter and parameterized by the spatial and temporal variable of the nonlinear equation in question — to the case of the mCH equation taking into account particular features of its Lax pair equations.

The Lax pair originally proposed and conventionally used in studies of the mCH equation has the form of 2×2 matrix linear differential equations:

$$\Phi_x(x,t,\lambda) = \mathsf{U}(x,t,\lambda)\Phi(x,t,\lambda), \qquad \Phi_t(x,t,\lambda) = \mathsf{V}(x,t,\lambda)\Phi(x,t,\lambda)$$

where the coefficient matrices U and V are defined in terms of a solution of the mCH equation:

$$\mathsf{U} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \lambda m \\ -\lambda m & 1 \end{pmatrix}, \ \mathsf{V} = \begin{pmatrix} \lambda^{-2} + \frac{u^2-u_x^2}{2} & -\frac{u-u_x}{\lambda} - \frac{\lambda(u^2-u_x^2)m}{2} \\ \frac{(u+u_x)}{\lambda} + \frac{\lambda(u^2-u_x^2)m}{2} & -\lambda^{-2} - \frac{u^2-u_x^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Two specific features of the x-equation associated with the mCH equation (involving U and constituting the spectral problem, with the spectral parameter λ), that affect analytic properties of the Jost solutions are as follows: (a) λ enters U through a product with the "momentum" $m(x,t)$, which, in the framework of the inverse problem, is an unknown function; (b) as $|x| \to \infty$, $m(x,t)$ approaches non-zero constants. In particular, these features affect the problem of control of the large-λ behavior of the Jost solutions. In our development of the RH formalism, this problem is addressed by (i) transforming (by applying a dedicated gauge transformation) the Lax pair equations to an appropriate form, with diagonal parts that dominate, in a certain sense, for large λ; (ii) introducing a new spatial-type variable, in view of having an explicit description of the large-λ behavior of the Jost solutions in terms of space and time parameters; (iii) introducing a new (uniformising) spectral parameter μ (related to λ by $\lambda = -\frac{1}{2}(\mu + \frac{1}{\mu})$), which allows us to avoid non-rational dependence of the coefficients in the Lax pair equations on the spectral parameter.

Moreover, we take advantage of a consequence of property (a) that for $\lambda = 0$, U becomes "solution-independent" (independent of u), which suggests an efficient way for "extracting" the solution of the Cauchy problem from the solution of the RH problem taking the details of the behavior of the latter as $\lambda \to 0$. With this respect, the mCH equation turns out to be remarkably different from other Camassa–Holm-type equations (including the original Camassa–Holm equation): in order to control the Jost solutions at $\lambda = 0$, there is no need of a separate gauge transformation of the original Lax pair, but the required form of the Lax pair comes from regrouping the terms of that appropriate for large λ.

Using the developed formalism, we obtain a parametric representation of the solution of the Cauchy problem for the mCH equation on a constant background in terms of the solution of the associated RH problem, the data for which (the jump matrix and the parameters of the residue conditions, if any) are uniquely determined by the initial data for the Cauchy problem.

Particularly, this formalism allows us to characterize regular as well as non-regular one-soliton solutions (solutions characterized by a single (up to the symmetries) singularity in the RH problem and having the form of a perturbation propagating with a constant speed while keeping its form unchanged) associated with the RH problems with trivial jump condition and appropriately prescribed residue conditions. In this way, we specify two families of non-regular soliton solutions of the mCH equation: (i) peakon-type solutions, which are continuous together with their first derivative but having unbounded derivatives of order greater than 2 at the peak points; (ii) loop-shaped, multi-valued solutions, which are conventional, signal-valued solitons in the modified variables that becomes multi-valued when going back to the original variables, x and t.

Theorem. *The mCH equation has a family of one-soliton solutions, regular* *as well as non-regular,* $u(x,t) \equiv u_{\theta,\hat{\delta}}(x,t)$*, characterized by two parameters,* $\hat{\delta} > 0$ *and* $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$*. These solitons* $u(x,t) \equiv \hat{u}(y(x-t,t),t) + 1$ *are given, in parametric form, by*

$$
\begin{aligned}
\hat{u}(y,t) &= 4\tan^2\theta \frac{z^2(y,t) + 2\cos^2\theta \cdot z(y,t) + \cos^2\theta}{(z^2(y,t) + 2z(y,t) + \cos^2\theta)^2} z(y,t),\\
x(y,t) &= y + 2\ln\frac{z(y,t) + 1 + \sin\theta}{z(y,t) + 1 - \sin\theta},\\
z(y,t) &= 2\hat{\delta}\sin\theta\, \mathrm{e}^{y\sin\theta} \mathrm{e}^{-\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}t}.
\end{aligned}
$$

Depending on the value of the parameter θ*, the solutions have qualitatively different properties:*

(i) *For* $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$*, one-soliton solutions are smooth in the original (*(x,t)*) variables.*

(ii) *For* $\theta = \frac{\pi}{3}$*, one-soliton solutions have finite smoothness in the* (x,t) *variables.*

(iii) *For* $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$*, one-soliton solutions are regular in the* (y,t) *variables but can be viewed as multivalued and loop-shaped in the* (x,t) *variables.*

In **Chapter 3**, taking the formalism developed in Section 2 as the starting point, we obtain the leading large-t asymptotic terms for the solution of the Cauchy problem for the modified Camassa–Holm equation on the whole line in the case when the solution is assumed to approach a non-zero constant at the both infinities of the space variable. We focus on the study of the solitonless case assuming that there are no residue conditions (for the soliton case, where the basic RH problem involves residue conditions, one can reduce (using the Blaschke–Potapov factors) this RH problem to that having no residue conditions).

For the sake of the large-t analysis, we reduce the original (singular) RH problem representation for the solution of the mCH equation to the solution of a regular RH problem (i.e., to a RH problem with the jump and normalization conditions only). A notable feature of the modified Camassa–Holm equation is that the associated basic RH problem has two singularity conditions (at $\mu = \pm 1$) with different matrix structures, which does not allow getting rid of them by reducing the matrix RH problem to a vector one, as it can be done in the case of the (original) Camassa–Holm equation. In our approach, we address the reduction problem in two steps. First, we reduce the RH problem with the singularity conditions at $\mu = \pm 1$ to a RH problem which is characterized by the following two conditions: (i) the matrix entries are regular at $\mu = \pm 1$, but the determinant of the (matrix) solution vanishes at $\mu = \pm 1$ (notice that $\det M(\mu) \equiv 1$ for the solution of the original RH problem); (ii) the solution is singular at $\mu = 0$. Then, we represent the solution of the latter RH problem in terms of the solution of a regular one. In turn, the solution of the resulting regular RH problem is analyzed asymptotically, as $t \to +\infty$, using an appropriate adaptation of the nonlinear steepest descent method. This finally allows us to present the leading asymptotic terms for the solution $u(x,t)$ of the Cauchy problem, in two sectors of the (x,t) half-plane, $1 < \frac{x}{t} < 3$ and $\frac{3}{4} < \frac{x}{t} < 1$, where the deviation from the background value is nontrivial (in the remaining sectors $\frac{x}{t} > 3$ and $\frac{x}{t} < \frac{3}{4}$, $u(x,t)$ decays to 1 rapidly).

Theorem. *Let $u_0(x)$ be a smooth function which tends sufficiently fast to 1 as $x \to \pm\infty$ and satisfies $(1 - \partial_x^2)u_0(x) > 0$ for all x. Assume the solitonless case, i.e., assume that the appropriate spectral (scattering) function associated with $u_0(x)$ has no zeros in the upper half-plane*

Then the solution $u(x,t)$ of the Cauchy problem has the following large-time asymptotics in two sectors of the (x,t) half-plane specified by $1 < \frac{x}{t} < 3$ and $\frac{3}{4} < \frac{x}{t} < 1$:

(i) For $1 < \zeta := \frac{x}{t} < 3$,

$$u(x,t) = 1 + \frac{C_1(\zeta)}{\sqrt{t}} \cos\left\{C_2(\zeta)t + C_3(\zeta)\ln t + \tilde{C}_4(\zeta)\right\} + \mathrm{o}(t^{-1/2});$$

(ii) For $\frac{3}{4} < \frac{x}{t} < 1$,

$$u(x,t) = 1 + \sum_{j=0,1} \frac{C_1^{(j)}(\zeta)}{\sqrt{t}} \cos\left\{C_2^{(j)}(\zeta)t + C_3^{(j)}(\zeta)\ln t + \tilde{C}_4^{(j)}(\zeta)\right\} + \mathrm{o}(t^{-1/2}),$$

where C_i, $C_i^{(j)}$, $\tilde{C}_4$, $\tilde{C}_4^j$ are functions of ζ that can be specified in terms of the scattering data, which in turn are uniquely determined by the initial data.

In **Chapter 4**, we consider the Cauchy problem for the modified Camassa–Holm equation on the whole line in the case when the solution is assumed to approach two different constants at plus and minus infinity of the space variable, namely:

$$\begin{aligned} &m_t + \left((u^2 - u_x^2)m\right)_x = 0, \qquad m := u - u_{xx}, \qquad t > 0, \qquad -\infty < x < +\infty, \\ &u(x,0) = u_0(x), \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\infty < x < +\infty, \end{aligned}$$

assuming that

$$u_0(x) \to \begin{cases} A_1, & x \to -\infty \\ A_2, & x \to \infty \end{cases}$$

and that the time evolution preserves this behavior.

We develop the Riemann–Hilbert problem formalism for this Cauchy problem. For this purpose, we introduce appropriate transformations of the Lax pair equations and the associated Jost solutions ("eigenfunctions") and present detailed analytic properties of the eigenfunctions and the corresponding spectral functions (scattering coefficients), including the symmetries and the behavior at the branch points. The construction of the Riemann–Hilbert problem exploits the transformed Lax pair equations involving the functions $k_j(\lambda) := \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{A_j^2}}$, $j = 1, 2$ specified as having the branch cuts $(-\infty, -\frac{1}{A_j}) \cup (\frac{1}{A_j}, \infty)$. Similarly to the case of the constant background, the solution of the constructed Riemann–Hilbert problem evaluated at $\lambda = 0$ gives a parametric representation of the solution of the Cauchy problem.

Theorem. *Assume that $u(x,t)$ is the solution of the Cauchy problem and let $\hat{M}(y,t,x)$ be the solution of the associated RH problem, whose data are determined by $u_0(x)$. Let*

$$\hat{M}(y,t,\lambda) = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \hat{a}_1(y,t) \\ \hat{a}_1^{-1}(y,t) & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\lambda \begin{pmatrix} \hat{a}_2(y,t) & 0 \\ 0 & \hat{a}_3(y,t) \end{pmatrix} + \mathrm{O}(\lambda^2)$$

be the development of $\hat{M}(y,t,\lambda)$ *as* $\lambda \to 0$. *Then the solution* $u(x,t)$ *of the Cauchy problem can be expressed, in a parametric form, in terms of* $\hat{a}_j(y,t)$, $j = 1,2,3$ *as follows:* $u(x,t) = \hat{u}(y(x,t),t)$, *where*

$$\begin{aligned}\hat{u}(y,t) &= \hat{a}_1(y,t)\hat{a}_2(y,t) + \hat{a}_1^{-1}(y,t)\hat{a}_3(y,t),\\ x(y,t) &= y - 2\ln\hat{a}_1(y,t) + A_2^2 t.\end{aligned}$$

Moreover, $\hat{u}_x(y,t)$ *can also be algebraically expressed in terms of* $\hat{a}_j(y,t)$, $j = 1,2,3$*; namely,* $u_x(x,t) = \hat{u}_x(y(x,t),t)$, *where*

$$\hat{u}_x(y,t) = -\hat{a}_1(y,t)\hat{a}_2(y,t) + \hat{a}_1^{-1}(y,t)\hat{a}_3(y,t).$$

Keywords: partial differential equations, integrable nonlinear equations, modified Camassa–Holm equation, Riemann–Hilbert problem, spectral problem, Lax pair, symmetries, direct scattering problem, inverse scattering problem, inverse scattering transform method, nonlinear steepest descent method, soliton, asymptotics.

Publications of the candidate related to the thesis topic

Journal papers in which the main results of the thesis are published

1. A. Boutet de Monvel, I. Karpenko, D. Shepelsky, "A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions", J. Math. Phys. **61**, No. 3, 031504, 24 (2020).

   https://doi.org/10.1063/1.5139519

2. I. Karpenko, "Long-time asymptotics for the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions", Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry **16**, No.2, 224–252 (2022).

   https://doi.org/10.15407/mag18.02.224

3. I. Karpenko, D. Shepelsky, G. Teschl "A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with step-like boundary conditions", Monatshefte für Mathematik **201**, (2023), 127–172.

   https://doi.org/10.1007/s00605-022-01786-y

Approbation of the thesis results

4. I. Karpenko, D. Shepelsky, "A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions", VI International Conference "Analysis and Mathematical Physics", Kharkiv, Ukraine (June 2018).

5. I. Karpenko, D. Shepelsky, "The Riemann–Hilbert approach to the Cauchy problem for the modified Camassa–Holm equation", 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications, Vinnytsia, Ukraine (June 2019).

6. I. Karpenko, D. Shepelsky, "The inverse scattering transform, in the form of Riemann–Hilbert problem, for the modified Camassa–Holm equation", international Conference dedicated to 70th anniversary of Professor A.M.Plichko "Banach Spaces and their Applications", Lviv, Ukraine (June 2019).

7. I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann–Hilbert problem approach to the modified Camassa–Holm equation on a nonzero background”, Pidzakharychi, Ukraine (August 2019).
8. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The modified Camassa–Holm equation on a nonzero background: large-time asymptotics for the Cauchy problem”, Workshop “New horizons in dispersive hydrodynamics”, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, United Kingdom (June 2021).
9. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The large-time asymptotics for the modified Camassa–Holm equation on a non-zero background”, 5-th International Conference “DIFFERENTIAL EQUATIONS and CONTROL THEORY”, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine (September 2021).
10. I. Karpenko, D. Shepelsky, G. Teschl, “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with step-like boundary conditions”, The international online conference “CURRENT TRENDS IN ABSTRACT AND APPLIED ANALYSIS”, Ivano-Frankivsk, Ukraine (May 2022).
11. I. Karpenko, “The modified Camassa–Holm equation on a step-like background”, Complex Analysis, Spectral Theory and Approximation meet in Linz, Johannes Kepler University, Linz, Austria (July 2022).
12. I. Karpenko, “A Riemann–Hilbert problem approach to the modified Camassa-Holm equation on a step like background”, Workshop From Modeling and Analysis to Approximation and Fast Algorithms, Hasenwinkel, Germany (December 2022).