ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА МНОГООБРАЗИИ СО СЛУЧАЙНОЙ КРИВИЗНОЙ

В.Г.Ламбурт, Д.Д.Соколов, В.Н.Тутубалин

Московский государственный университет, Москва, Воробьевы горы, МГУ
E-mail: sokoloff@dds.srcc.msu.su

Работа поддержана грантами РФФИ 04-02-16094 и 02-01-00297.

Аннотация

Изучено поведение близких геодезических на двумерном римановом многообразии со случайной кривизной. Показано, что даже если кривизна в среднем равна нулю, расстояние между геодезическими экспоненциально нарастает подобно тому, как это происходит на многообразии с отрицательной кривизной.

1 Введение

Основные результаты геометрии в целом о строении римановых многообразий и поверхностей в трехмерном пространстве можно рассматривать в контексте противопоставления свойств объектов с положительной и отрицательной кривизной. Например, односвязные многообразия отрицательной кривизны гомеоморфны пространству Лобачевского (теорема Адамара-Картана), а односвязные многообразия положительной и не слишком сильно меняющейся кривизны гомеоморфны сфере (теорема о сфере) [1]. Другой пример: полные поверхности положительной кривизны во многих отношениях напоминают сферу (теория Александрова-Погорелова, [2,3]), зато в трехмерном евклидовом пространстве отсутствуют не только полные регулярные поверхности постоянной отрицательной кривизны (теорема Гильберта, [4]), но и полные регулярные поверхности с отделенной от нуля отрицательной кривизной (теорема Ефимова, [5,6,7]). В основе доказательства этих фактов лежит противопоставление свойств близких геодезических на многообразиях положительной и отрицательной кривизны. На первых геодезические имеют тенденцию образовывать сопряженные точки, а на вторых – экспоненциально разбегаются.

Противопоставление свойств объектов с положительной и отрицательной кривизной допускает широкие обобщения, например, оно переносится на поверхности псевдоевклидова пространства [8].

В то же время геометрия в целом практически не содержит общих результатов о строении объектов со знакопеременной кривизной. Конечно, изучение внутренней геометрии конкретного многообразия знакопеременной кривизны или конкретной поверхности знакопеременной кривизны не вызывает принципиальных затруднений, однако неясно, как выделить общие свойства подобных объектов, которые и могли бы составить предмет содержательной теории. Представляется вероятным, что эти свойства должны как-то объединять свойства многообразий с положительной и отрицательной кривизной, но мы затрудняемся указать какие-либо конкретные работы в этом направлении.

Оказывается, что подобные шаги были сделаны в другой области науки. В 1964 г. Я.Б.Зельдович рассмотрел [9] (см. также [10]) распространение лучей света во Вселенной, которая в среднем однородна и изотропна, но имеет локальные неоднородности. Если отвлечься от специальных астрономических аспектов этой работы, то основной вывод состоит в том, что Вселенная с локальными неоднородностями кажется имеющей меньшую кривизну, чем среднее значение кривизны пространства. В частности, если плотность Вселенной в среднем равна критической плотности, при которой сопутствующее пространство в среднем имеет нулевую кривизну, то флуктуации кривизны создают впечатление отрицательности кривизны.

Анализ показывает, что идея Зельдовича оказывается плодотворной не только (и даже не столько) в астрономии, но и указывает путь, на котором для многообразий переменной кривизны можно получать результаты общего характера. Цель нашей работы – предложить соответствующую конструкцию и ввести эту идею в круг идей геометрии в целом. Другими словами, мы предлагаем рассматривать многообразия со случайной кривизной, которая в среднем равна нулю, и изучить геометрические явления, возникающие из-за флуктуаций кривизны. Мы покажем, что в такой постановке удается проследить качественное поведение близких геодезических. Более того, аналитический аппарат такого исследования хорошо разработан в теории вероятностей при изучении уравнений со случайными коэффициентами и, более конкретно, при изучении статистических свойств произведения случайных матриц.

В задачи этой работы не входит развитие аналитических методов теории вероятностей или геометрии в целом, поэтому мы ограничимся простейшими формулировками результата. В частности, мы ограничимся рассмотрением двумерных римановых пространств, хотя многомерные обобщения не составляют принципиальных затруднений.

2 Уравнение Якоби и случайная кривизна

Рассмотрим на двумерном римановом многообразии R семейство геодезических $\gamma(\phi)$, проходящих через фиксированную точку A под углом ϕ к фиксированной геодезической Γ. Мы будем изучать строение риманова пространства в окрестности геодезической Γ. Отложим отрезки длины x вдоль геодезической Γ и вдоль близкой к ней геодезической $\gamma(d\phi)$ и пусть $yd\phi$ - расстояние между этими точками. Тогда $y(x)$ называется полем Якоби, или геодезическим отклонением, на геодезической Γ и подчиняется уравнению Якоби

$$y'' + K(x)y = 0, \tag{1}$$

где K - кривизна риманова пространства. Начальные условия для уравнения (1) имеют вид $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$.

Мы будем считать кривизну $K(x)$ случайным процессом. Тогда, конечно, решение уравнения Якоби тоже становится случайным процессом; мы будем изучать статистические свойства этого процесса. Предположим, что случайный процесс $K(x)$ устроен следующим образом. В точках $x_1 = \delta$, $x_2 = 2\delta$, $...., x_n = n\delta, ...$ происходит внезапная потеря памяти так, что на сегментах $[n\delta, (n+1)\delta)$ величины K представляют собой равнораспределенные и независимые в совокупности случайные процессы. Такой процесс называется процессом с обновлением, а δ называется длиной обновления. Отметим, что поскольку в процессе с обновлением существуют дискретные детерминированные точки потери памяти, такой процесс не является статистически однородным и не имеет парной корреляционной функции, зависящей лишь от разности положений точек. Этот недостаток можно устранить, считая, что координаты потерь памяти x_n представляют собой случайный пуассоновский поток событий со средним временем $\delta = \lambda^{-1}$, где λ - параметр пуассоновского процесса. Такой процесс называется процессом с восстановлением. Для наших целей несущественно, как именно устроен случайный процесс $K(x)$ между точками обновления. Для простоты можно считать, что между точками обновления $K(x) = \mathrm{const}$, так что рассматриваемый случайный процесс сводится к последовательности независимых равнораспределенных случайных величин. Для справедливости дальнейших выводов достаточно существования вероятностной плотности у этих величин, в частности величины можно считать гауссовскими.

При этих предположениях не вызывает сомнения, что для каждой реализации случайного процесса K уравнение (1) с нашими начальными условиями имеет решение, которое на интервалах между точками обновления имеет непрерывные вторые производные. Усложняя вероятностную модель, можно было бы добиться гладкости вторых производных и в точках обновления. Отметим, что зная поле Якоби $y(x)$, можно восстановить и метрику (первую квадратичную форму) риманова пространства на геодезической Γ. Эта метрика имеет вид

$$d\,s^2 = d\,x^2 + y^2(x)d\phi^2. \tag{2}$$

3 Показатель Ляпунова и теорема Ферстенберга

Построим теперь количественную характеристику поля Якоби на геодезической Γ, которая интересна с геометрической точки зрения и может быть исследована методами теории вероятностей.

Перепишем уравнение (1) в виде системы линейных уравнений для двухкомпонентного вектора-строки $\mathbf{z}$ с компонентами $z^1 = y$, $z^2 = y'$. Тогда

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = \mathbf{z}\hat{A}(u), \tag{3}$$

где $\hat{A}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -K(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Явное решение этого уравнения с начальными условиями $\mathbf{z}_0$ можно записать в виде следующего мультипликативного интеграла [11]

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{z}(0) \prod_0^x (I + \hat{A}(u)du), \tag{4}$$

где I - единичная матрица 2×2. Свойства мультипликативного интеграла близки к свойствам обычного (аддитивного) интеграла. В частности, при минимальных требованиях к случайному процессу K мультипликативный интеграл, стоящий в (4), существует.

Будем интересоваться значениями вектора $\mathbf{z}$ в моменты обновления. Тогда в n-ый момент обновления

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_0 \prod_{i=1}^n B_i, \tag{5}$$

где $\mathbf{z}_0 = (0, 1)$, а матрицы B_i представляют собой мультипликативные интегралы вида (4), вычисленные между точками обновления. Очевидно, что матрицы B_i являются независимыми и равнораспределенными матрицами.

Отметим, что $Sp\, A(u) \equiv 0$, поэтому матрицы B_i унимодулярны. Нетрудно проверить, что, выбрав подходящим образом величины K между точками обновления и перемножив достаточное число матриц B_i, в произведении можно получить любую унимодулярную матрицу 2×2. Это свойство вместе с независимостью матриц B_i обеспечивает ниже достаточные условия для применения теоремы Ферстенберга [12].

Пусть теперь r_n – длина вектора z_n. Если с вероятностью единица существует предел

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln r_n}{n\delta}, \tag{6}$$

то мы будем называть его показателем Ляпунова геодезической Г.

Положительность показателя Ляпунова влечет экспоненциальный рост модуля вектора $\mathbf{z}$. Существование вероятностной плотности распределения значения кривизны между точками обновления приводит к существованию вероятностной плотности распределения на множестве направлений вектора $\mathbf{z}$. Это, в свою очередь, приводит к экспоненциальному росту не только модуля вектора, но и его первой компоненты. Таким образом, с вероятностью единица геодезические, близкие к геодезической Г, экспоненциально удаляются от нее (по крайней мере это удаление фиксируется для точек обновления). С другой стороны, показатель Ляпунова для геодезической в точности совпадает с показателем Ляпунова для соответствующего произведения случайных матриц. При сделанных предположениях теорема Ферстенберга утверждает, что показатель Ляпунова существует и положителен. Итак, мы приходим к следующей теореме:

Теорема. *При сделанных предположениях относительно кривизны пространства вдоль геодезической* Γ, *показатель Ляпунова этой геодезической* λ *существует и положителен.*

Напомним еще раз, что мы намеренно построили геометрическую конструкцию так, чтобы свести дело к известному результату теории вероятностей избегая аналитических осложнений. Не видно принципиальных препятствий для того, чтобы существенно усложнить вероятностное описание случайной кривизны на геодезической Γ с тем, чтобы вывод теоремы сохранялся.

4 Обсуждение

Итак, на многообразии со случайной кривизной наблюдается экспоненциальный рост поля Якоби, вычисленного в точках обновлений. В этом отношении геодезические на многообразии со случайной кривизной ведут себя подобно геодезическим на пространстве отрицательной кривизны.

Метод доказательства теоремы Ферстенберга состоит в изучении статистических средних от степеней (не обязательно целых и положительных) величин r_n. В результате возникает функция

$$\gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln < r_n^\alpha >}{n\delta}, \tag{7}$$

дающая скорости роста статистических моментов ($< \ldots >$ означает статистическое среднее соответствующей величины). Выясняется (см., напр., [13, 14]), что функция $\gamma(\alpha)$ выпукла вниз, $\gamma(0) = 0$ и $\frac{d\gamma}{d\alpha}|_{\alpha=0} = \lambda$. Взятые вместе, эти факты означают, что статистические моменты полей Якоби целочисленного порядка растут, как и ожидается, экспоненциально, но этот рост более быстрый, чем у типичной реализации самого поля Якоби. Такое на первый взгляд парадоксальное поведение связано с тем, что доминирующий вклад в рост статистических моментов полей Якоби определяется не типичными, а все более и более редкими реализациями случайного процесса $K(x)$. Подобное поведение случайного процесса $y(x)$ принято называть перемежаемым. Явление перемежаемости является общим свойством неустойчивостей в случайных средах [15].

Перемежаемое поведение решений уравнения (1) можно рассмотреть с точки зрения теории уравнений с малым параметром. Если считать, что дисперсия процесса $K(x)$ мала и рассматривать ее как малый параметр в уравнении (1), то стандартные соображения этой теории подсказывают, что подобное возмущение должно быть регулярным. Однако на самом деле статистическая природа возмущения приводит к тому, что оно оказывается сингулярным, что и фиксируется свойством перемежаемости. Причина такого аномального поведения в том, что гауссовская случайная величина даже с малой дисперсией может, пусть и с малой вероятностью, принять сколь угодно большое значение, что и делает рассматриваемое возмущение сингулярным.

Отметим, что мы формально не требовали равенства нулю среднего значения кривизны $K(x)$. Однако наши выводы неявно связаны с этим предположением. В самом деле, если кривизна $K(x)$ в среднем отрицательна, то положительность показателя Ляпунова выглядит естественно (хотя, конечно, и нуждается в доказательстве). В том случае, когда кривизна $K(x)$ в среднем положительна, теорема Ферстенберга тоже гарантирует существование и положительность показателя Ляпунова, однако геометрическая интерпретация подобного результата требует дополнительных построений. Действительно, полные многообразия с положительной и отделенной от нуля кривизной компактны, так что геодезические на них если и не замкнуты, то удаленные их части во всяком случае могут подходить близко друг к другу, а это плохо совместимо с требованием обновления. Тем не менее, можно выделить нетривиальный класс многообразий случайной положительной кривизны, для исследования геодезических на которых применима теорема Ферстенберга, однако описание этой конструкции выходит за рамки данной работы.

Итак, мы установили, что многообразия со случайной кривизной, которая в среднем равна нулю, обнаруживают сходство с многообразиями отрицательной кривизны в том смысле, что (при сделанных предположениях) показатели Ляпунова для их геодезических положительны. Многообразия со случайной кривизной обнаруживают сходство и с многообразиями положительной кривизны, которое выражается в том, что поле Якоби $y(x)$ с вероятностью единица обращается в ноль в бесконечной последовательности точек $\hat{x}_k$ (конечно, точки $\hat{x}_k$ как правило не совпадают с точками обновления, поэтому обращение в ноль поля Якоби в точках $\hat{x}_k$ не противоречит положительности показателя Ляпунова). Наличие этой последовательности следует из того, что с малой, но отличной от нуля вероятностью может получиться столь большой набор участков пусть небольшой, но положительной кривизны, так что в целом этот набор приведет к образованию сопряженной точки, а в силу условия независимости это событие обязательно реализуется на бесконечной геодезической. Некоторые статистические свойства последовательности $\hat{x}_k$ удается изучить, однако это выходит за рамки данной работы.

Суммируя, можно сказать, что изменение вдоль геодезической поля Якоби $y(x)$ напоминает поведение функции $\sin x \exp x$. Конечно, осцилляции поля Якоби не являются периодическими, а рост его – строго равномерным.

Список литературы

1. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.*, Риманова геометрия в целом, М., Мир, 1971.

2. *Александров А.Д.*, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.-Л., ОГИЗ, 1948.

3. *Погорелов А.В.*, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., Наука, 1975.

4. *Гильберт Д*, Основания геометрии, М.-Л., ОГИЗ, 1948.

5. *Ефимов Н.В.*, Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны, Матем. сб., Т. 64, вып. 2, С. 286 – 320.

6. *Ефимов Н.В.*, Гиперболичесчкие задачи теории поверхностей, Труды международного конгресса математиков (Москва-1966), М, Мир, 1968, с. 177-188.

7. *Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е.,* Введение в дифференциальную геометрию "в целом", М., Наука, 1973.

8. *Артыкбаев А., Соколов Д.Д.*, Геометрия в целом в плоском пространстве-времени, Ташкент, Фан, 1991.

9. *Зельдович Я.Б.*, Наблюдения во вселенной однородной в среднем, Астрон. ж., 1964, т. 41, с. 19-24.
10. *Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.*, Строение и эволюция Вселенной, М., Наука, 1975.
11. *Гантмахер Ф.Р.*, Теория матриц, М., Наука, 1967.
12. *Тутубалин В.Н.*, Некоторые теоремы типа закона больших чисел, Теория вероятностей и ее примен., 1969, т. 14, вып. 2, с. 319-326.
13. *Молчанов С.А., Тутубалин В.Н.*, Линейная модель гидромагнитного динамо и произведения случайных матриц., Теория вероятностей и ее примен., 1984, т. 29, вып. 2, с. 235-247.
14. *Ya.B.Zeldovich, A.A.Ruzmaikin, S.A.Molchanov, Sokoloff D.*, Kinematic dynamo in the lienar velocity field, J.Fluid Mech., 144, 1-11, 1984.
15. *Ya.B.Zeldovich, A.A.Ruzmaikin, S.A.Molchanov, Sokoloff D.*, Intermittency, diffusion and generation in a nonstationary random medium, Sov. Sci. Rev., C. Math. Phys., 7, 1-110, Harwood Acad. Publ., Chur, 1988.