L.A. Masaltsev, E.Petrov; Kharkov national university

Минимальные поверхности в трехмерной группе Гейзенберга

Известный результат М. до Кармо и С.К. Пенга [6] утверждает, что единственной полной устойчивой минимальной поверхностью M в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ является плоскость. В случае, когда объемлющее риманово 3-х мерное многобразие N^3 имеет неотрицательную скалярную кривизну, Д.Фишер-Колбри и Р. Шоен в [7] доказали классификационную теорему для полных ориентируемых устойчивых поверхностей: 1) если M компактно, то M конформно эквивалентно сфере S^2 или M есть вполне геодезический плоский тор, 2) если M некомпактно, то M конформно эквивалентно комплексной плоскости $\mathbb{C}$ или цилиндру. Для 3-мерных римановых многообразий знакопеременной кривизны Риччи имеются отдельные примеры устойчивых полных поверхностей, например в [8]. В настоящей работе мы исследуем устойчивость некоторых минимальных поверхностей в трехмерной группе Гейзенберга Nil с левоинвариантной метрикой $ds^2 = dx^2+dy^2+(dz-xdy)^2$. Ненулевые компоненты тензора Риччи этой метрики есть : $\rho_{11} = -\frac{1}{2}, \rho_{22} = \frac{x^2-1}{2}, \rho_{33} = \frac{1}{2}, \rho_{23} = -\frac{x}{2}$, и следовательно, кривизна Риччи меняется в пределах $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и скалярная кривизна равна $-\frac{1}{2}$. Через nil будем обозначать алгебру Ли группы Nil. Группа изометрий Nil описана в [4]. Она имеет размерность 4, содержит подгруппу трансляций, изоморфную самой Nil, одномерную подгруппу вращений относительно вертикальных слоев и отражения типа $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$. Поэтому, описанные в теоремах 1 и 2 минимальные поверхности в Nil следует рассматривать с точностью до изометрий. В теореме 1 мы доказываем устойчивость 1) "вертикальных плоскостей" Nil (т.е. поверхностей, допускающих параметризацию $r(s, t) = (0, s, t)$ и $r(s, t) = (s, as+b, t)$, где $a, b \in \mathbb{R}$ – постоянные) и образов вертикальных плоскостей nil при экспоненциальном отображении $exp\colon nil \to Nil$ (т.е. поверхностей с параметризацией $r(s, t) = \left(s, as + b, t + \frac{1}{2}s(as + b)\right)$), 2) "наклонных плоскостей, параллельных оси Ox" в Nil (т.е. поверхностей, допускающих параметризацию $r(s, t) = (s, t, as + b)$), в том числе и "горизонтальной плоскости $z = 0$", 3) поверхностей, заданных уравнениями $z = ax + by + c + \frac{1}{2}xy$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ – постоянные), которые представляют собой образы наклонных плоскостей nil при экспоненциальном отображении.

Известен критерий устойчивости области на минимальной поверхности в $\mathbb{R}^3$, найденный Барбосой и до Кармо [5] : область D на минимальной поверхности устойчива, если площадь ее сферического образа $g(D)$ меньше, чем 2π, в частности, геликоид и катеноид являются неустойчивыми поверхностями. В работе Ю.А.Аминова [2] доказаны теоремы неустойчивости для поверхностей, гомеоморфных сфере в римановом пространстве, секционная кривизна которого лежит в пределах $(\frac{1}{4}, 1]$. С.Т.Яо и Р.Шоен в [9] доказали также неустойчивость ориентируемой минимальной поверхности рода $p > 0$ в римановом пространстве положительной скалярной кривизны. В теореме 2 мы доказываем неустойчивость $SO(2)$- инвариантных поверхностей вращения (аналогов катеноида) в Nil, описанных в [3], а также получаем вторым способом один из результатов теоремы 1.

1 Устойчивость некоторых полных линейчатых минимальных поверхностей в Nil.

Напомним некоторые сведения, относящиеся к проблеме устойчивости минимальной поверхности M в трехмерном римановом пространстве N^3. Пусть (s, t) - координаты на поверхности M, $r(s, t)$- радиус-вектор поверхности, $n(s, t)$- вектор нормали к M в данной точке и $w(s, t)$ кусочно-дифференцируемая функция с компактным носителем, заданная на поверхности. Тогда для второй вариации площади поверхности M, определяемой радиусом-вектором $r(s, t) + w(s, t)n(s, t)$ справедлива формула [1, с.212]

$$\delta^2 S = \int\limits_M \left(|\nabla w|^2 - (Ric(n, n) + ||h||^2)w^2\right) d\sigma = -\int\limits_M wLw d\sigma, \tag{1}$$

где $Ric(n, n) = \rho_{ij}n^i n^j$ - кривизна Риччи пространства N^3 в направлении единичной нормали n, $||h||^2 = \sum\limits_i k_i^2$ - квадрат длины второй квадратичной формы поверхности, $d\sigma$- элемент площади поверхности M, оператор устойчивости L есть $L = \Delta_M + \left(Ric(n,n) + ||h||^2\right)$ (Δ_M – оператор Лапласа метрики поверхности M, индуцированной ее изометрическим погружением в N^3). Минимальная поверхность M называется устойчивой, если $\delta^2 S \geqslant 0$ для произвольных варьирующих функций w с компактным носителем на M. При доказательстве устойчивости мы будем пользоваться критерием устойчивости, который был доказан в работе Фишер-Колбри и Шоена [7, теорема 1]: поверхность устойчива тогда и только тогда, когда существует положительная функция g на M, удовлетворяющая уравнению $Lg = \left(\Delta_M + \left(Ric(n,n) + ||h||^2\right)\right) g = 0$ всюду на M. Минимальность и полнота поверхностей, приведенных в теореме 1 ниже, следуют из рассмотрения их метрических и вторых фундаментальных форм. Некоторые из них были рассмотрены в [3].

Теорема 1. *Следующие полные минимальные поверхности в Nil являются устойчивыми для любых констант $a, b, c \in \mathbb{R}$:*

1) *"вертикальная плоскость" $r(s,t) = (0, s, t)$,*

2) *"вертикальная плоскость" $r(s,t) = (s, as + b, t)$,*

3) *экспоненциальный образ вертикальной плоскости nil $r(s,t) = \left(s, as + b, t + \frac{1}{2}s(as + b)\right)$,*

4) *произвольная "наклонная плоскость, параллельная оси Ox" $r(s,t) = (s, t, at + b)$,*

5) *экспоненциальный образ наклонной плоскости nil $r(s,t) = (s, t, as + bt + c + \frac{1}{2}st)$.*

Доказательство. 1) Для случая $r(s,t) = (0, s, t)$ коэффициенты фундаментальных форм равны $g_{11} = g_{22} = 1$, $b_{12} = \frac{1}{2}$, остальные 0, $n = (1, 0, 0)$, $-k_1^2 = -k_2^2 = k_1 k_2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{1}{4}$, и $Ric(n,n) + ||h||^2 = 0$. Тогда стабильность следует непосредственно из формулы (1): оператор $L = \Delta_M$ и для второй вариации получается выражение $\delta^2 S = \int\limits_M |\nabla w|^2 d\sigma \geqslant 0$.

2) В случае "вертикальной" плоскости $r(s,t) = (s, as + b, t)$ можно использовать найденные в теореме 2 в [3] коэффициенты первой и второй фундаментальной форм поверхности: $g_{11} = 1 + a^2(1 + s^2), g_{12} = -as, g_{22} = 1$, $b_{11} = a\sqrt{1 + a^2}s, b_{12} = -\frac{\sqrt{1+a^2}}{2}, b_{22} = 0$ Отсюда находим $-k_1^2 = k_1 k_2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{1}{4}$, и $||h||^2 = k_1^2 + k_2^2 = \frac{1}{2}$. Нормаль к "вертикальной плоскости" имеет вид $n = \frac{(-a,1,s)}{\sqrt{1+a^2}}$ и кривизна Риччи в направлении нормали равна $Ric(n,n) = -\frac{1}{2}$. Аналогично предыдущему пункту, получаем стабильность.

3) Будем обозначать $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,x), e_3 = (0,0,1)$ – ортонормированный базис левоинвариантных векторных полей в Nil. Рассмотрим поверхность с параметризацией $r(s,t) = \left(s, as + b, t + \frac{1}{2}s(as + b)\right)$. Первая фундаментальная форма равна $(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2$, где $\eta^1 = \Delta ds, \eta^2 = \frac{1}{2}bds + dt$ ($\Delta^2 = 1 + a^2$), двойственный базис векторных полей образован полями $v_1 = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{b}{2\Delta}\frac{\partial}{\partial t}, v_2 = \frac{\partial}{\partial t}$. При этом $r_*(v_1) = \frac{1}{\Delta}(e_1 + ae_2), r_*(v_2) = e_3, n = \frac{1}{\Delta}(-ae_1 + e_2)$, и $Ric(n,n) = -\frac{1}{2}$. Методом внешних форм (см., например, [8]) находим, что вторая фундаментальная форма поверхности равна $h_{ij}ds^i ds^j$ ($s^1 = s, s^2 = t$), где $h_{11} = h_{22} = 0, h_{12} = h_{21} = -\frac{1}{2}$, и $||h||^2 = \sum\limits_{i,j} h_{ij}^2 = \frac{1}{2}$. Доказательство стабильности получается как в двух предыдущих пунктах.

4) В случае "наклонной плоскости, параллельной оси Ox" с параметризацией $r(s,t) = (s, t, at + b)$ коэффициенты первой и второй фундаментальных форм есть: $g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = 1 + (a-s)^2, b_{11} = b_{22} = 0, b_{12} = \frac{1-(a-s)^2}{2\sqrt{(a-s)^2+1}}$. Поэтому $-k_1^2 = -k_2^2 = k_1 k_2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{(1-(a-s)^2)^2}{4(1+(a-s)^2)^2}$. и, следовательно, $||h||^2 = 2k_1^2 = \frac{(1-(a-s)^2)^2}{2(1+(a-s)^2)^2}$. Кривизна Риччи в направлении нормали есть : $Ric(n,n) = \frac{1-(a-s)^2}{2(1+(a-s)^2)}$. Оператор Лапласа метрики g_{ij} "наклонной плоскости" есть

$$\Delta_M = g^{ij}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^i \partial s^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial s^k}\right) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{1 + (a-s)^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{a-s}{1+(a-s)^2}\frac{a-s}{1+(a-s)^2}\frac{\partial}{\partial s}.$$

Поэтому, согласно критерию устойчивости Фишер-Колбри и Шоена достаточно указать положительное решение g уравнения

$$Lg = \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{1}{1+(a-s)^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \frac{a-s}{1+(a-s)^2}\frac{a-s}{1+(a-s)^2}\frac{\partial g}{\partial s} + \frac{1-(a-s)^2}{(1+(a-s)^2)^2} g = 0.$$

Такое решение, заданное для всех (s,t) нетрудно найти : $g = (1+(a-s)^2)^{-\frac{1}{2}}$ откуда и следует устойчивость "наклонной плоскости".

5) В случае, когда минимальная поверхность параметризована уравнением $r(s,t) = \left(s,t,as+bt+c+\frac{1}{2}st\right)$, коэффициенты ее первой и второй фундаментальных форм равны : $g_{11} = 1+\left(a+\frac{1}{2}t\right)^2, g_{12} = \left(a+\frac{1}{2}t\right)\left(b-\frac{1}{2}s\right), g_{22} = 1+\left(b-\frac{1}{2}s\right)^2$, $b_{11} = -b_{22} = -\frac{1}{\Delta}\left(a+\frac{1}{2}t\right)\left(b-\frac{1}{2}s\right), b_{12} = \frac{1}{2\Delta}\left(\left(a+\frac{1}{2}t\right)^2-\left(b-\frac{1}{2}s\right)^2\right)$, где $\Delta^2 = 1+\left(a+\frac{1}{2}t\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}s\right)^2$. Вектор нормали есть $n = \frac{1}{\Delta}\left(a+\frac{1}{2}t, b+\frac{1}{2}s, 1+\left(b+\frac{1}{2}s\right)s\right)$. При этом $||h||^2 = \frac{1}{2\Delta^4}\left(\left(a+\frac{1}{2}t\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}s\right)^2\right)^2$, и кривизна Риччи $Ric(n,n) = \frac{1}{2\Delta^2}\left(1-\left(a+\frac{1}{2}t\right)^2-\left(b-\frac{1}{2}s\right)^2\right)$. Тогда оператор устойчивости L имеет вид $L = \Delta_M + \frac{1}{2\Delta^4}$. Оператор Лапласа для выписанной выше метрики этой параметризации поверхности есть

$$\Delta_M = \frac{1}{\Delta^2}\left(\left(1+\left(b-\frac{1}{2}s\right)^2\right)\frac{\partial^2}{\partial s^2} - 2\left(a+\frac{1}{2}t\right)\left(b-\frac{1}{2}s\right)\frac{\partial^2}{\partial s\partial t} + \left(1+\left(a+\frac{1}{2}t\right)^2\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{b-\frac{1}{2}s}{\Delta^2}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{a+\frac{1}{2}t}{\Delta^2}\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Нетрудно проверить, что функция $g(s,t) = \frac{1}{\Delta}$ представляет собой положительное решение уравнения $Lg = 0$, заданное на всей поверхности, откуда и вытекает устойчивость рассматриваемой минимальной поверхности. $\square$

Замечание. *Отметим, что "вертикальная плоскость" с параметризацией $r(s,t) = (a,s,t)$, где $a \in \mathbb{R}$ – константа, равно как и экспоненциальный образ вертикальной плоскости nil $x = a$ с параметризацией $r(s,t) = \left(a,s,t+\frac{1}{2}as\right)$, минимальны тогда и только тогда, когда $a = 0$, а "наклонная плоскость" с параметризацией $r(s,t) = (s,t,cs+at+b)$, $a,b,c \in \mathbb{R}$ – тогда и только тогда, когда $c = 0$. Это означает что в теореме 1 перечислены все поверхности из класса минимальных поверхностей Nil, представляющих собой аналоги плоскостей или экспоненциальные образы плоскостей алгебры nil.*

2 Неустойчивость $SO(2)-$ инвариантных минимальных поверхностей в Nil.

В [3] были рассмотрены поверхности, инвариантные относительно действия связной компоненты единицы подгруппы $Iso(Nil)$, стабилизирующей 0. Они задаются следующими погружениями:

$$r(u,v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u) + \frac{1}{2}\sin v\cos v(x(u))^2),$$

где $x(u), z(u)$ —числовые функции. Метрическая форма поверхности и вторая фундаментальная форма погружения имеют вид:

$$I = du^2 - z'x^2dudv + (x^2 + \frac{1}{4}x^4)dv^2,$$

$$II = \frac{1}{\Delta}(x''z' + \frac{1}{2}x(x')^2z' - z''x')du^2 + \frac{2}{\Delta}(\frac{1}{2}x(z')^2 - \frac{1}{8}x^3(x')^2)dudv + \frac{1}{\Delta}(-xz' - \frac{1}{2}x^3z')dv^2,$$

где $\Delta = \sqrt{1+\frac{1}{4}xx'}$. Единичный вектор нормали к поверхности равен

$$n = \frac{1}{\Delta}(\frac{1}{2}xx'\sin v + z'\cos v, z'\sin v - \frac{1}{2}xx'\cos v, -x' + xz'\sin v\cos v - \frac{1}{2}x^2x'\cos^2 v).$$

Было установлено ([3]), что поверхность минимальна тогда и только тогда, когда

$$x(u) = \sqrt{Cu^2 - 4 + \frac{4}{C}}, C \in (0,1], \tag{2}$$

а z находится из условия натуральности параметра $(x')^2 + (z')^2 = 1$. Обозначим минимальную поверхность, соответствующую параметру C, через M_C. Непосредственным вычислением устанавливается, что для данной поверхности $Ric(n,n) + ||h||^2 = -8\frac{(C^5-2C^4)u^4+(16C^3-16C^2)u^2-16C^2+48C-32}{(4+C^2u^2)^2(C^2u^2-4C+4)^2}C$.

В пространстве функций на поверхности, не зависящих от v ($\phi(u,v)=\phi(u)$), оператор Лапласа-Бельтрами имеет вид:

$$\Delta_{M_C}=\frac{1}{C}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+2\frac{Cu(C^2u^2-2C+4)}{(4+C^2u^2)(C^2u^2-4C+4)}\frac{\partial}{\partial u}.$$

Теорема 2. *Для поверхностей M_C выполнены факты:*

1) M_C при $C\in(0,1)$ неустойчивы;

2) M_1 устойчива.

Доказательство. Рассмотрим на M_C не зависящие от v функции $w(u,v)=w(u)$. Для таких функций уравнение Якоби $Lw=0$ – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. При $C=1$ это

$$w''+\frac{2u^2+4}{u(4+u^2)}w'+\frac{8}{(4+u^2)^2}w=0.$$

У этого уравнения существует решение $w(u,v)=w(u)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}}$, гладкое и положительное на всей поверхности, и, согласно [7, теорема 1], M_1 стабильна.

Рассмотрим случай $C\in(0,1)$. Тогда среди решений $Lw=0$ есть функция

$$w(u,v)=w(u)=\frac{u\int\frac{\sqrt{(C^2u^2+4)(C^2u^2-4C+4)}}{u^2}du}{\sqrt{(C^2u^2+4)(C^2u^2-4C+4)}},\tag{3}$$

тут интегралом обозначена та первообразная, которая является нечетной функцией (она существует, т.к. интегрируемая функция четная). Тогда w — четная функция. Обозначим подынтегральную функцию w_1, а интеграл — w_2. Тогда, если продолжить w_1 как функцию одного вещественного переменного по той же формуле на всю комплексную плоскость, это будет мероморфная функция с единственным полюсом второго порядка в 0, имеющая в окрестности 0 ряд Лорана с первым членом $\frac{4\sqrt{1-C}}{z^2}$ и вторым (по z^{-1}) членом 0. У продолжения w_2 тогда 0 будет полюсом первого порядка, а соответствующий ряд будет начинаться с $-\frac{4\sqrt{1-C}}{z}$. Наконец, для продолжения w ряд Лорана в 0 будет начинаться с $-\frac{4\sqrt{1-C}}{4\sqrt{1-C}}=-1$, т.е. будет рядом Тейлора, а функция будет голоморфной. Отсюда, w — аналитическая функция, в частности, гладкая. Кроме того, мы выяснили, что $w(0)=-1$. С другой стороны, $\lim\limits_{u\to+\infty}w_1=C^2$, отсюда $w_2\underset{u\to+\infty}{\sim}C^2u$ и $\lim\limits_{u\to+\infty}w=\frac{C^2}{C^2}=1$. Тогда из гладкости и четности w следует, что существует $a\in(0,+\infty)$ такое, что $w(a)=w(-a)=0$. Тем самым мы получили на кольцевой области $D=\{u\in(-a,a),v\in[0,2\pi)\}$ с компактным замыканием поле Якоби и показали, что при $C\in(0,1)$ поверхности M_C неустойчивы. $\square$

Замечание. *Легко видеть, что M_C при $C=1$ – это поверхность $z=\frac{1}{2}xy$, т.е. мы другим способом доказали пункт 5) теоремы 1 для случая $a=b=c=0$.*

Список литературы

[1] Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий, Киев, Наукова думка, 2002.

[2] Аминов Ю.А. О неустойчивости минимальной поверхности в n-мерном римановом пространстве положительной кривизны. Матем. сб. (1976), 100 , n.3, с.400-419.

[3] Масальцев Л.А., Петров Е.В. Минимальные поверхности в группе Гейзенберга Вiсник Харкiв. нац. унiв. n.602, сер. Матем. прикладна матем. механика,вип.53, (2003), с.

[4] Скотт П. Геометрии на 3-мерных многообразиях, М. "Мир", 1986.

[5] J.L.Barbosa, M. do Carmo, On the size of a stable minimal surface in R^3, Amer. J. Math. 98,(1976), p.515-528.

[6] do Carmo M., Peng C.K. The stable minimal surfaces in R^3 are planes. Bull. Amer.Math. Soc.-1979-1, n.6, p.903-906.

[7] Fischer-Colbrie, D., Schoen, R. The structure of complete stable minimal surface in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. Comm. Rure Appl.Math. 33, (1980),p.199-211.

[8] Kokubu M. On minimal surfaces in the real special linear group $SL(2,\mathbb{R})$. //Tokyo J. Math.– 1997.– **20**.– № 2.– p. 287-297.

[9] Schoen R, Yau S.T. Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negatie scalar curature. Ann. of Math. (1979), 110, n.1, p.127-142.