ГОЛОМОРФНЫЕ КОНФОРМНЫЕ СУБМЕРСИИ МНОГООБРАЗИЙ КЭЛЕРА-ЭЙНШТЕЙНА

ОКРУТ С.И.

В работах [1], [2] и [3] было показано, что в кэлеровой геометрии имеется аналог скрещенных произведений римановой геометрии. Этот аналог, скрещенное кэлерово расслоение, в невырожденном случае не является глобально тривиальным и не расслаивается на пару взаимно ортогональных слоений, как в римановой геометрии. Скрещенное кэлерово расслоение характеризуется тем, что оно допускает голоморфную конформную субмерсию с вертикальным показателем конформности и вполне геодезическими слоями.

Здесь дается описание многообразий Кэлера-Эйнштейна допускающих голоморфную конформную субмерсию со вполне геодезическими слоями при некоторых дополнительных предположениях на свойства субмерсии. Доказательства приведенных утверждений имеются в [4]. Показано, что локальных препятствий построения таких метрик нет. Однако для полных метрик с компактными одномерными слоями разнообразие почти что сводится к прямым произведениям.

Рассмотрим следующее обобщение понятия вполне вещественной бисекционной кривизны введенной Бишопом и Гольдбергом. Пусть L и V комплексные ортогональные подпространства в касательном пространстве кэлерова многообразия, причем $\dim_c L = 1$ и $\dim_c V = q$. Выберем некоторый ортонормированный базис $U_1, \dots, U_q, JU_1, \dots, JU_q$ в V и выберем некоторый единичный вектор X в L. Для каждой пары векторов X и U_α через $B(X, U_\alpha)$ будет обозначаться вполне вещественная бисекционная кривизна, $B(X, U_\alpha) = g(R(X, JX)JU_\alpha, U_\alpha)$. Величина

$$B(L, V) = \frac{1}{q} \sum_{\alpha=1}^{q} B(X, U_\alpha),$$

будет в дальнейшем называться *средней вполне вещественной кривизной* пары подпространств L и Q. Можно показать корректность введенной величины $B(L, V)$. Если V – это вертикальное пространство субмерсии ν, а L – это произвольное одномерное комплексное подпространство в горизонтальном пространстве, то средняя вполне вещественная кривизна $B(L, V)$ является лишь функцией точки многообразия E. Введем обозначение для функции $\varkappa = B(L, V)$ на многообразии E.

Предложение 1. *Пусть кэлерово многообразие E допускает голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями на базу M, кэлерово многообразие, и $\dim_c M = m > 1$. Тогда справедливы следующие выражения:*

а) $\mathrm{ric}(U, W) = \mathrm{ric}_V(U, W) - 2m d\omega^c(U, JW)$,
б) $\mathrm{ric}(U, Y) = 0$,
в) $\mathrm{ric}(X^H, Y^H) = \mathrm{ric}_M(X, Y) + (q\varkappa - 2(m+1)\|\mathrm{gr}\, f\|^2) g(X^H, Y^H)$,

где ric_V – это тензор Риччи вертикального слоя субмерсии как подмногообразия в индуцированной метрике.

Теорема 1. *Пусть многообразие Кэлера-Эйнштейна E допускает голоморфную конформную субмерсию с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими q- мерными слоями на кэлерово многообразие M, $\dim_c M = m > 1$. Тогда верно следующее:*

а) *M – это многообразие Эйнштейна,*
б) $\lambda = \lambda_M e^{-2f} + q\varkappa - 2(m+1)\|\mathrm{gr}\, f\|^2$,

где λ – это постоянная Эйнштейна.

Теорема 2. *Пусть кэлерово многообразие (E, g) допускает голоморфную конформную субмерсию с вертикальным непостоянным показателем конформности f и вполне геодезическими одномерными слоями на кэлерово многообразие M, $\dim_c M = m > 1$. При этих условиях E – это эйнштейново многообразие лишь тогда, когда выполняются следующие два условия:*

а) *M – это многообразие Эйнштейна,*

б) *E кэлерово продолжение, показатель конформности которого как функция несущей функции продолжения удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{f} = \frac{\lambda}{4\pi(m+2)}e^{2f} - \frac{\lambda_M}{4\pi(m+1)} + Ce^{-2(m+1)f}$,*

где λ и λ_M – это постоянные Эйнштейна многообразий E и M, соответственно, а C некоторая константа.

Теорема 3. *Каково бы не было ходжево многообразие Эйнштейна M с постоянной Эйнштейна λ_M, для любой наперед заданной константы λ существует многообразие Кэлера-Эйнштейна E с постоянной Эйнштейна λ, допускающее голоморфную конформную субмерсию с вертикальным показателем конформности и вполне геодезическими слоями на многообразие M.*

Теорема 4. *Пусть полное многообразие Кэлера-Эйнштейна E допускает голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности и одномерными вполне геодезическими компактными слоями на кэлерово многообразие M, $\dim_c M > 1$. Тогда многообразие E локально изометрично прямому произведению поверхности S постоянной кривизны λ на многообразие Кэлера-Эйнштейна с постоянной Эйнштейна равной λ.*

Следствие 1. *В предположениях доказанной теоремы многообразие E послойно голоморфно накрывается произведением вида $L \times \widetilde{M}$, где многообразие L – это одно из трех модельных односвязных многообразий постоянной кривизны λ, а $\widetilde{M}$ – это односвязное многообразие Кэлера-Эйнштейна с постоянной Эйнштейна равной тоже λ.*

Следствие 2. *Если полное многообразие Кэлера-Эйнштейна E положительной скалярной кривизны допускает голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности и одномерными вполне геодезическими слоями на кэлерово многообразие M, $\dim_c M > 1$, то E глобально приводимо, $E \simeq \mathbb{C}P^1 \times M$. Причем сфера Римана $\mathbb{C}P^1$ несет метрику постоянной положительной кривизны λ, а M – это многообразие Кэлера-Эйнштейна и λ – его постоянная Эйнштейна.*

Следствие 3. *Если полное многообразие Кэлера-Эйнштейна E допускает голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности и одномерными компактными вполне геодезическими слоями на односвязное кэлерово многообразие M, $\dim_c M > 1$, то E глобально приводимо, $E \simeq S \times M$. Причем многообразие S несет метрику постоянной кривизны λ, а M – это многообразие Кэлера-Эйнштейна с постоянной Эйнштейна равной тоже λ.*

Список литературы

[1] *С.И. Окрут,* Скрещенное произведение в кэлеровой геометрии. - Мат. физика, анализ, геометрия (1997), т. 4, N 1/2, с. 145-188.

[2] *С.И. Окрут,* Конформные субмерсии кэлеровых многообразий I. - Мат. физика, анализ, геометрия (1998), т. 5, N 3/4, 228-249.

[3] *С.И. Окрут,* Конформные субмерсии кэлеровых многообразий II. - Мат. физика, анализ, геометрия (1999), т. 6, N 3/4, 288-316.

[4] *С.И. Окрут,* Голоморфные конформные субмерсии многообразий Кэлера-Эйнштейна. - Мат. физика, анализ, геометрия (2004), т. 11, N 2, (в печати).