Об одной задаче оптимизации критического давления в геометрической теории устойчивости строго выпуклых оболочек

В.И.Бабенко

1.*Постановка задачи.* Рассматривается устойчивость напряженно-деформированного равновесного состояния при равномерном внешнем давлении p жестко закрепленной вдоль края, однородной, изотропной линейно-упругой, достаточно тонкой, строго выпуклой, непологой оболочки, очерченной по поверхности второгопорядка F. То есть, срединная поверхность F оболочки – либо эллипсоид, либо эллиптический параболоид, либо двухполостный гиперболоид. Среди этих возможных форм оболочек, изготовленных из одного и того же материала, имеющих одну и ту же постоянную толщину δ и одну и ту же высоту, и опирающиеся на один и тот же плоский край ∂F, ортогональный оси симметрии оболочки, необходимо найти такую форму оболочки, для которой критическое давление $p_\star$ будет наибольшим. В этом случае найденная оболочка будет "обладать максимальной устойчивостью".

2.*Приведен краткий исторический очерк* о создании и основных этапах развития геометрической теории устойчивости оболочек А.В.Погорелова.

В частности, описаны различные варианты вывода формулы (1) А.В.Погорелова для критического давления $p_\star$ жестко закрепленной строго выпуклой оболочки при равномерном внешнем давлении p, полученном в предположении, что потеря устойчивости сопровождается образованием на поверхности оболочки вмятины, расположенной вне окрестности ее края ∂F

$$p_\star = \min_{(F)} \bar{e} K, \tag{1}$$

где K- гауссова кривизна срединной поверхности F; $\bar{e} = E\delta^2[12(1-\nu^2)]^{-\frac{1}{2}}$; E- модуль Юнга, а ν – коэффициент Пуассона материала оболочки.

3.Если воспользоваться формулой (1) при решении задачи п.1, то последняя сводится к анализу гауссовой кривизны K. Правая часть достигает своего минимального значения у края в случае параболоида, гиперболоида и вытянутого эллипсоида, не содержащего экватор. Наибольшее значение критического давления $p_\star$ имеет эллипсоидальная оболочка вращения с осью вращения, параллельной большей оси эллипса ∂F – края оболочки.

4.Если далее учесть возможность потери устойчивости у края и рассмотреть другие локальные формы потери устойчивости оболочек, то придем к следующей формуле для асимптотического значения $p_\star^{'}$ критического давления $p_\star$

$$p_\star^{'} = \min_{(F)} \frac{\bar{e}K}{1 + [1 + 4K(T_1^2 T_2^1 - T_1^1 T_2^2)/p^2]^{\frac{1}{2}}}, \tag{2}$$

где T_j^i- смешанные компоненты тензора усилий безмоментного напряженно- деформированного докритического состояния равновесия рассматриваемой оболочки.

Усилия T^i_j определяются из линейной смстемы безмоментной теории оболочек при условии, что оболочка находится под действием равномерного внешнего давления p и что вдоль края ∂F тангенциальные составляющие смещения точек срединной поверхности F равны нулю.

В общем случае для рассматриваемых здесь (см. п.1) форм оболочек критическое давление по формуле (2) определяется численно (исключение составляют оболочки вращения). Расчеты по формуле (2) показали, что наибольшее критическое давление $p'_\star$ достигается на том же эллипсоиде вращения, что и в п.3.