О семействах подмногообразий постоянной отрицательной кривизны в многомерном евклидовом пространстве.

Ю.А.Аминов

Наименьшая размерность евклидова пространства, в которое возможно локальное изометрическое погружение n-мерного пространства постоянной отрицательной кривизны в виде регулярного подмногообразия, равна (2n-1). (Теорема Картана-Либера). Мы рассмотрим регулярное семейство таких подмногообразий в некоторой области евклидова пространства E^{2n-1}. Более того, предположим, что это семейство включается в ортогональную систему координат в E^{2n-1} в виде координатных подмногообразий (точная формулировка дана ниже).

Заметим, что ортогональные системы координат часто являются наиболее удобными при рассмотрении геометрических вопросов в римановых пространствах. Их теории посвящена обширная литература, можно указать, например, классическую монографию Г.Дарбу [1]. В последнее время ортогональные системы координат строились в работах В.Е. Захарова [3] и И.М.Кричевера [4] методами обратной задачи рассеяния.

Укажем простой способ построения одного класса триортогональных систем координат в E^3. В плоскости с координатами x, y рассмотрим регулярное семейство кривых , например, задаваемое уравнением $F(x, y) = const$. Рассмотрим ортогональные траектории этого семейства. Вращая вокруг оси x оба семейства кривых, получим два семейства поверхностей вращения , ортогональных друг другу. Вместе с плоскостями, проходящими через ось x, получим триортогональное семейство поверхностей. Произвол в задании такого семейства - одна функция двух переменных - функция $F(x, y)$. Если эта функция задана, то нахождение триортогональной системы зависит от интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения, определяющего ортогональные траектории семейства $F(x, y) = const$.

Известно, что в общем случае триортогональная система координат в E^3 определяется с произволом 3 функции 2-х аргументов. Нахождение такой системы сводится к решению уравнения в частных производных третьего порядка на одну функцию от координат x, y, z в пространстве. Поверхности уровня этой функции образуют однопараметрическое семейство поверхностей - семейство Ляме, которое можно включить в триортогональную систему.

Особенно простой вид это уравнение имеет в том случае, когда поверхность из семейства задана в явном виде, т.е.

$$z = z(x, y, u),$$

где u- параметр, определяющий поверхность из семейства. Пусть p, q, r, s, t - классические обозначения производных функции z по аргументам x и y,

$$T = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Тогда уравнение записывается так, [5]

$$[(1 + q^2)s - pqt]\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + [(1 + p^2)t - (1 + q^2)r]\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} +$$

$$+[pqr - (1 + p^2)s]\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Л.Бианки рассмотрел 3-ортогональные системы координат в 3-мерном евклидовом пространстве E^3 такие, что одно семейство координатных поверхностей состоит из поверхностей постоянной гауссовой кривизны K_0,[2]. В том случае, когда $K_0 < 0$, он доказал, что метрика E^3 приводится к виду

$$ds^2 = \cos^2 \omega du_1^2 + \sin^2 \omega du_2^2 + (\frac{1}{\sqrt{-K_0}} \frac{\partial \omega}{\partial u_3})^2 du_3^2. \quad (1)$$

где 2ω - угол между асимптотическими линиями на поверхности $u_3 = const$.

Мы рассмотрим в евклидовом пространстве E^{2n-1} семейство n-мерных подмногообразий F^n постоянной отрицательной кривизны K_0, которое можно включить в (2n-1)- ортогональную систему координат. Кривизна K_0 может изменяться при изменении F^n. Пусть метрика E^{2n-1} записывается в виде

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} H_i^2 du_i^2 + \sum_{\alpha=n+1}^{2n-1} H_\alpha^2 du_\alpha^2, \quad (2)$$

причем, подмногообразия $F^n : u_{n+1} = const, ..., u_{2n-1} = const$ имеют постоянную отрицательную кривизну K_0 и, кроме того, сумма первых n метрических коэффициентов равна 1

$$\sum_{i=1}^{n} H_i^2 = 1. \quad (3)$$

Такую систему координат будем называть *системой Бианки* (в случае n=2 условие (3) выполнено автоматически.)

Заметим, что на каждом подмногообразии F^n с постоянной отрицательной кривизной можно ввести координаты кривизны, для которых условие (3) будет выполнено, [2].

Рассмотрим вопрос локального и глобального существования систем Бианки. Под регулярностью системы координат понимаем условие: функции H_p не обращаются в нуль и принадлежат классу регулярности C^2.

Теорема 1 *Пусть в шаре радиуса ρ евклидова пространства E^{2n-1} задана регулярная система координат Бианки и $K_0 \leq -1$. Тогда*

$$\rho \leq \frac{\pi}{4}.$$

Это означает, что радиус шара не может быть слишком большим. Существует пример системы Бианки в E^3 с постоянной кривизной $K_0 = -1$, в котором $\rho = \frac{1}{2}$, (см. ниже). Имеет место

Теорема 2 *Системы координат Бианки локально существуют в евклидовых пространствах E^3 и E^5.*

Список литературы

[1] G.Darboux. Lecons sur les systemes orthogonaux et les Coordonnees Curvilignes, Gauthier-Villars, Paris, 2-nd Edition, 1910.

[2] L.Bianchi. Vorlesungen uber Differentialgeometrie, Druck und Verlag von B.G.Teubner, Leipzig und Berlin, 1910.

[3] V.E.Zakharov. Description of the n-orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type, I: integration of the Lame equations, Duke Math. Journal, v.94, N 1, 1998, p.103-139.

[4] И.М.Кричевер. Алгебро-геометрические n-ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности. Функциональный анализ и его приложения, 1997, т. 31, вып. 1, с. 32-50.

[5] A.R.Forsyth. Lectures on the Differential Geometry of curves and surfaces, Cambridge: at the University Press, 1912.