ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том XXXIV Выпуск 2
1989

ТЕОРЕМЫ МАРЦИНКЕВИЧА И ЛУКАЧА НА АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

ФЕЛЬДМАН Г. М.

Марцинкевичем [1] доказана следующая теорема.

Теорема А. *Пусть* $P(s)$ — *многочлен,* $P(0)=0$. *Если* $f(s)=\exp\{P(s)\}$ — *характеристическая функция, то* $P(s)=-\alpha s^2+i\beta s$, $\alpha\geqslant 0$, $-\infty<\beta<\infty$, *т. е.* $f(s)$ — *характеристическая функция гауссовского распределения.*

Теорема А была получена Марцинкевичем, как следствие доказанной им же, более общей теоремы, дающей необходимое условие, которому должна удовлетворять целая характеристическая функция конечного порядка [1].

В настоящей работе мы полностью опишем класс локально компактных абелевых групп, на которых верна аналогичная теорема. Затем мы рассмотрим групповой аналог теоремы Лукача, обобщающей теорему А.

Пусть X — локально компактная абелева сепарабельная метрическая группа (в дальнейшем просто группа), $Y=X^*$ — ее группа характеров, (x, y) — значение характера $y\in Y$ на элементе $x\in X$. Свертка двух распределений μ и ν и характеристическая функция распределения μ определяются обычным образом:

$$(\mu*\nu)(E)=\int_X\mu(E-x)\,d\nu(x),\quad \hat\mu(y)=\int_X(x, y)\,d\mu(x).$$

Через $\sigma(\mu)$ обозначим носитель распределения μ. Вырожденное распределение, сосредоточенное в точке $x\in X$, обозначим E_x.

Если G — замкнутая подгруппа в группе X, то $G^\perp$ обозначает ее аннулятор: $G^\perp=\{y\in Y\colon (x, y)=1$ для всех $x\in G\}$. Компоненту нуля группы X обозначим C_x. Через Y_0 обозначим подгруппу в Y, состоящую из всех компактных элементов.

Обозначим $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, T и $Z(n)$ группы целых чисел, рациональных чисел, вещественных чисел, комплексных чисел, группу вращений окружности и группу корней степени n из единицы.

Определение 1 [2]. Распределение γ на группе X называется *гауссовским*, если его характеристическая функция представима в виде

$$\hat\gamma(y)=(x, y)\exp\{-\varphi(y)\},$$

где $x\in X$, а $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению

$$\varphi(y_1+y_2)+\varphi(y_1-y_2)=2[\varphi(y_1)+\varphi(y_2)] \tag{1}$$

для любых $y_1, y_2\in Y$.

Множество гауссовских распределений на группе X обозначим $\Gamma(X)$.

Пусть $h \in Y$. Обозначим Δ_h оператор конечной разности

$$\Delta_h \psi(y) = \psi(y+h) - \psi(y).$$

Определение 2. Непрерывная функция $\psi(y)$ на группе Y называется *многочленом*, если при некотором m

$$\Delta_h^{m+1} \psi(y) = 0 \tag{2}$$

для любых $y, h \in Y$.

Минимальное m, для которого выполнено (2), будем называть степенью многочлена $\psi(y)$.

Примеры. 1. Пусть l: $Y \to \mathbf{C}$ — ненулевой гомоморфизм, т. е. $l(y_1 + y_2) = l(y_1) + l(y_2)$, $l(y) \not\equiv 0$. Тогда $l(y)$ — многочлен степени 1.

2. Пусть $\varphi(y)$ $(\varphi(y) \not\equiv 0)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (1). Тогда $\varphi(y)$ — многочлен степени 2.

Теорема 1. *Пусть μ — распределение на группе X с характеристической функцией*

$$\hat{\mu}(y) = \exp\{\psi(y)\}, \tag{3}$$

где $\psi(y)$ — многочлен, $\psi(0) = 0$. Если группа X не содержит подгруппы, изоморфной T, то $\mu \in \Gamma(X)$. Если же группа X содержит подгруппу, изоморфную T, то при любом натуральном $m > 2$ на X существует распределение $\mu \notin \Gamma(X)$ с характеристической функцией (3), *где $\psi(y)$ — многочлен степени m.*

Для доказательства нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $\psi(y)$ — многочлен на группе Y. Тогда*

$$\psi(y + \zeta) = \psi(y) \tag{4}$$

для любых $\zeta \in Y_0$, $y \in Y$.

Доказательство. Пусть степень многочлена $\psi(y)$ равна m. Тогда

$$\Delta_h^{m+1}\psi(y) = \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j C_{m+1}^j \psi(y + (m - j + 1)h) = 0 \tag{5}$$

для любых $y, h \in Y$. Рассмотрим на группе $\mathbf{Z}$ функцию $P(l) = \psi(y + lh)$, $l \in \mathbf{Z}$. Из (5) вытекает, что функция $P(l)$ удовлетворяет уравнению $\Delta_1^{m+1} P(l) \equiv 0$. Поэтому $P(l)$ — многочлен на группе $\mathbf{Z}$ степени не больше, чем m, и имеет место представление

$$P(l) = P(0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\Delta_1^j P(0)}{j!} l(l-1)\ldots(l-j+1)$$

для любого $l \in \mathbf{Z}$ (см., например, [3, с. 37]). Отсюда следует, что

$$\psi(y + lh) = \psi(y) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\Delta_h^j \psi(y)}{j!} l(l-1)\ldots(l-j+1) \tag{6}$$

для любого $l \in \mathbf{Z}$.

Пусть $\zeta \in Y_0$ и $K(\zeta)$ — компактная группа, порожденная элементом ζ. При фиксированном $y \in Y$ функция $\psi(\eta)$ непрерывна на компакте $\eta \in y + K(\zeta)$ и поэтому ограничена на нем. Из (6) при $h = \zeta$ тогда вытекает, что $\Delta_\zeta^j \psi(y) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, т. е. $\psi(y + l\zeta) = \psi(y)$, $l \in \mathbf{Z}$. Полагая здесь $l = 1$, получаем (4).

Следствие 1. *Пусть Y — компактная группа. Если $\psi(y)$ — многочлен на Y, то $\psi(y) = \mathrm{const}$.*

З а м е ч а н и е 1. По лемме 1 многочлен $\psi(y)$ инвариантен относительно подгруппы Y_0. Следовательно, $\psi(y)$ определяет некоторый многочлен $\tilde{\psi}([y]) = \psi(y)$ на фактор-группе Y/Y_0.

Следствие 2. *Пусть μ — распределение на группе X с характеристической функцией* (3). *Тогда $\sigma(\mu) \subset C_X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть H_0 — некоторая компактная подгруппа в группе Y. Тогда по следствию 1 функция $\psi(y) \equiv 0$ на H_0. Значит, $\psi(y) \equiv 0$ на Y_0, и поэтому $\hat{\mu}(y) \equiv 1$ на Y_0. Отсюда вытекает, что $\sigma(\mu) \subset Y_0^{\perp} = C_X$.

Лемма 2 [4]. *Пусть группа X не содержит подгруппы, изоморфной T. Тогда если $\mu \in \Gamma(X)$ и $\mu = \mu_1 * \mu_2$, то $\mu_j \in \Gamma(X)$, $j = 1, 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Учитывая следствия 1 и 2, группу X с самого начала будем считать связной. По структурной теореме для связных локально компактных абелевых групп каждая такая группа изоморфна группе вида $X \approx \mathbf{R}^n + K$, где $n \geqslant 0$, а K — связная компактная группа [5, с. 127]. Тогда $Y \approx R^n + D$, где $D = K^*$ — дискретная группа, не содержащая элементов конечного порядка. В силу сепарабельности группы X, группа D счетна [5, с. 484].

Обозначим $\mathbf{Q}_0^\infty$ и $\mathbf{R}_0^\infty$ счетные прямые суммы групп рациональных и вещественных чисел (элементами этих групп являются бесконечные последовательности чисел, лишь конечное число членов которых отлично от нуля). Группу $\mathbf{Q}_0^\infty$ будем рассматривать в дискретной топологии, а в группе $\mathbf{R}_0^\infty$ введем топологию строгого индуктивного предела пространств $\mathbf{R}^n$. Сходимость элементов $s_k \to s$ в этой топологии означает, что все s_k лежат в одном $\mathbf{R}^n$ и там сходятся. Через $\tilde{\mathbf{R}}^n$ обозначим подгруппу в $\mathbf{R}_0^\infty$, изоморфную $\mathbf{R}^n$.

Построим мономорфизм f_0: $D \to \mathbf{Q}_0^\infty$ стандартным образом. Выберем в D максимальную независимую систему элементов $\{d_j\}$. Будем считать для определенности, что эта система бесконечна (случай, когда система элементов $\{d_j\}$ конечна, проще и рассматривается аналогично). Для любого элемента $d \in D$ найдутся такие целые числа $k \neq 0$, $k_1, \ldots, k_l$, что $kd = k_1 d_1 + \ldots + k_l d_l$. Из независимости $\{d_j\}$ следует, что набор рациональных чисел $\{k_j/k\}_{j=1}^{l}$ однозначно определяется по d. Так как группа D не содержит элементов конечного порядка, то отображение $f_0(d) = (k_1/k, \ldots, k_l/k, 0, \ldots)$ является мономорфизмом группы D в $\mathbf{Q}_0^\infty \subset \mathbf{R}_0^\infty$.

Обозначим $\bar{\mu}$ распределение $\bar{\mu}(E) = \mu(-E)$. Тогда $\hat{\bar{\mu}}(y) = \overline{\hat{\mu}(y)}$. Учитывая лемму 2, достаточно проверить, что $\nu = \mu * \bar{\mu} \in \Gamma(X)$. Так как $\hat{\nu}(y) = \exp\{2\,\mathrm{Re}\,\psi(y)\}$, то можно, не ограничивая общности, с самого начала считать, что функция $\psi(y)$ вещественна и неположительна. Теорема будет доказана, если мы проверим, что $\psi(y)$ удовлетворяет уравнению (1).

Мы ограничимся проведением доказательства в предположении, что $X = K$, $Y = D$. Общий случай рассматривается аналогично. Как доказано в [4], если группа K не содержит подгруппы, изоморфной T, то для любых элементов $y_1, y_2 \in D$ найдется такая подгруппа $H \subset D$ конечного ранга q, что $y_1, y_2 \in H$ и $\overline{f_0(H)} = \tilde{\mathbf{R}}^q$ (замыкание берется в топологии группы $\mathbf{R}_0^\infty$).

Пусть $\{b_j\}_{j=1}^q$ — максимальная независимая система элементов в $f_0(H)$. Обозначим $\{e_j\}_{j=1}^q$ каноническую систему образующих группы $\mathbf{Z}^q$ ($e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_q = (0, \ldots, 0, 1)$). Построим мономорфизм $g: f_0(H) \to \mathbf{Q}^q \subset \mathbf{R}^q$ аналогично тому, как был построен мономорфизм f_0. При этом $g(b_j) = e_j$, $j = 1, \ldots, q$, а g естественным образом продолжается до изоморфизма групп $\widetilde{\mathbf{R}}^q$ и $\mathbf{R}^q$. Положим $h = g \circ f_0$, $A = h(H)$. Поскольку $\overline{f_0(H)} = \widetilde{\mathbf{R}}^q$, получаем: $\bar{A} = \mathbf{R}^q$.

Определим на группе A функцию $\zeta(a) = \zeta(h(y)) = \psi(y)$, $a = h(y) \in A$, $y \in H$. Функция $\zeta(a)$, очевидно, является многочленом на группе A. Доказательство теоремы свелось, таким образом, к следующей задаче. На группе A, удовлетворяющей условиям $\mathbf{Z}^q \subset A \subset \mathbf{Q}^q \subset \mathbf{R}^q$, $\bar{A} = \mathbf{R}^q$, рассматривается многочлен $\zeta(a)$, $\zeta(a) \leqslant 0$, $\zeta(0) = 0$. Известно, что $\exp\{\zeta(a)\}$ — характеристическая функция. Доказать, что $\zeta(a)$ удовлетворяет уравнению (1).

Пусть $\eta(a)$ — произвольный многочлен степени m на группе A. Рассмотрим сужение функции $\eta(a)$ на подгруппу $\mathbf{Z}^q \subset A$. Так как по условию $\Delta_b^{m+1}\eta(a) = 0$ при любых $a, b \in \mathbf{Z}^q$, то нетрудно проверить, что функция $\eta(a)$ на $\mathbf{Z}^q$ представима в виде

$$\eta(a) = \eta(n_1, \ldots, n_q) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_q=k} c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_q} n_1^{\alpha_1} \ldots n_q^{\alpha_q}, \tag{7}$$

$a = (n_1, \ldots, n_q) \in \mathbf{Z}^q$, т. е. является обычным многочленом степени m от целочисленных переменных $n_1, \ldots, n_q$. Отсюда следует, что если B — такая подгруппа в $\mathbf{Q}^q$, что $B \approx \mathbf{Z}^q$ и $\mathbf{Z}^q \subset B \subset A$, а сужение многочлена $\eta(a)$ на B таково, что $\eta(a) = 0$ при $a \in \mathbf{Z}^q$, то $\eta(a) = 0$ при всех $a \in B$.

Представим теперь группу A в виде объединения возрастающей последовательности подгрупп A_j:

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad A_1 = \mathbf{Z}^q, \quad A_{j+1} \supset A_j, \quad A_j \approx \mathbf{Z}^q, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Обозначим $\eta(a)$ сужение многочлена $\zeta(a)$ на подгруппу A_1. Функция $\eta(a)$ на $A_1 = \mathbf{Z}^q$, как отмечено выше, имеет представление (7), и формулой (7) продолжается до обычного многочлена на группе $\mathbf{R}^q$, в частности, и на подгруппе A. Сохраним для продолженной функции обозначение $\eta(a)$. Многочлен $\delta(a) = \zeta(a) - \eta(a)$, $a \in A$, по построению обращается в нуль на $\mathbf{Z}^q$, а значит, $\delta(a) = 0$ при $a \in A_j$, $j = 1, 2, \ldots$. Поэтому $\delta(a) \equiv 0$ на группе A, и следовательно, функция $\zeta(a)$ на группе A представима в виде

$$\zeta(a) = \zeta(r_1, \ldots, r_q) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_q=k} c_{\alpha_1, \ldots \alpha_q} r_1^{\alpha_1} \ldots r_q^{\alpha_q}, \tag{8}$$

$a = (r_1, \ldots, r_q) \in A$.

Формулой (8) функция $\zeta(a)$ продолжается с группы A на $\mathbf{R}^q$. Для продолженной функции сохраним обозначение $\zeta(a)$. Поскольку функция $\exp\{\zeta(a)\}$ была положительно определенной на группе A, а группа A плотна в $\mathbf{R}^q$, продолженная функция $\exp\{\zeta(s)\}$ на группе $\mathbf{R}^q$ также будет положительно определенной и, следовательно, по теореме Бохнера—Хинчина — характеристической функцией. Из теоремы А легко следует, что тогда $\exp\{\zeta(s)\}$ — характеристическая функция гауссовского распределения в $\mathbf{R}^q$, т. е. многочлен $\zeta(s)$ удовлетворяет уравнению (1). Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Предположим теперь, что группа X содержит подгруппу $\widetilde{T}$, изоморфную T. Пусть $m > 2$. Рассмотрим на группе $\mathbf{Z}$ многочлен степени m

$$\psi_0(n) = \begin{cases} -n^2 + in^m, & m = 2l+1, \\ -n^m, & m = 2l. \end{cases}$$

Положим $f(n) = \exp\{\psi_0(n)\}$. Тогда $\sum\limits_{n\neq 0} |f(n)| < 1$, и поэтому функция $\rho(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp\{-int\} > 0$. Значит, $f(n)$ — характеристическая функция некоторого распределения μ_0 на группе T с плотностью $\rho(t)$ относительно нормированной меры Лебега.

Распределение μ_0 с помощью изоморфизма $\widetilde{T} \approx T$ можно перенести на группу $\widetilde{T} \subset X$ и рассматривать как распределение на группе X. Легко видеть, что характеристическая функция полученного распределения μ имеет представление (3), где $\psi(y)$ — многочлен степени m. Теорема полностью доказана, так как очевидно, $\mu \notin \Gamma(X)$.

Замечание 2. Пусть группа X не содержит подгруппы, изоморфной T, $\psi(y)$ — многочлен на Y. Положим $\varphi(y) = -\operatorname{Re}\psi(y)$, $l(y) = \operatorname{Im}\psi(y)$. Из определения 2 следует, что $\varphi(y)$ и $l(y)$ — многочлены. Из теоремы 1 вытекает, что если μ — распределение на группе X с характеристической функцией (3), то функция $\varphi(y)$ неотрицательна и удовлетворяет уравнению (1), а $\exp\{il(y)\} = (x, y)$, где x — некоторый элемент X. Рассуждение, аналогичное тому, с помощью которого мы при доказательстве теоремы 1 установили, что функция $\varphi(y)$ удовлетворяет уравнению (1), показывает, что функция $l(y)$ удовлетворяет уравнению

$$l(y_1 + y_2) = l(y_1) + l(y_2) \tag{9}$$

для любых $y_1, y_2 \in Y$. (Здесь существенно, что группа X не содержит подгруппы, изоморфной T. Действительно, пусть $X = T$, $Y = \mathbf{Z}$. Положим $l(n) = \pi n^2$. Тогда $l(n)$ — многочлен и при любом $n \in \mathbf{Z}$

$$\exp\{il(n)\} = \exp\{i\pi n\},$$

т. е. функция $\exp\{il(n)\}$ — характер группы $\mathbf{Z}$, а $l(n+m) \neq l(n) + l(m)$, $n, m \in \mathbf{Z}$.)

Из сказанного следует, что при любом $t \geqslant 0$ функция $\exp\{t\psi(y)\}$ является характеристической функцией некоторого распределения $\mu_t \in \Gamma(X)$. Причем $\mu_0 = E_0$, $\mu_1 = \mu$, $\mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s$ для любых $t, s \geqslant 0$ и $\mu_t \to E_0$ при $t \to 0$. Распределение μ оказалось, таким образом, включенным в непрерывную однопараметрическую полугруппу гауссовских распределений на X.

Замечание 3. Интересно отметить, что на группе $X = T^2$ существует распределение $\mu \notin \Gamma(T^2)$ с характеристической функцией (3), где $\psi(y)$ — многочлен степени 2. Действительно, положим

$$\psi(n, m) = -\alpha(n^2 + m^2) + i\pi(n^2 + m^2 + nm), \quad (n, m) \in \mathbf{Z}^2,$$

где $\alpha > 0$ выбрано столь большим, чтобы $\sum\limits_{(n,\, m)\neq 0} \exp\{-\alpha(n^2+m^2)\} < 1$. Тогда

$$\rho(t, s) = \sum_{(n,\, m)\in \mathbf{Z}^2} \exp\{\psi(n, m) - i(tn+sm)\} > 0,$$

а $\exp\{\psi(n, m)\}$ — характеристическая функция некоторого распределения μ на группе T^2 с плотностью $\rho(t, s)$. Поскольку функция $\exp\{i\pi(n^2 + m^2 + nm)\}$ не является характером группы $\mathbf{Z}^2$, $\mu \notin \Gamma(T^2)$.

Теорема A была обобщена Лукачем, который доказал следующее утверждение [6].

Теорема B. *Пусть* $P(s)$ — *многочлен,* $P(0) = 0$. *Если* $f(s) = \exp\{\lambda_1(e^{is} - 1) + \lambda_2(e^{-is} - 1) + P(s)\}$ — *характеристическая функция, то* $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, 2$, *а* $P(s) = -\alpha s^2 + i\beta s$, *где* $\alpha \geqslant 0$, $-\infty < \beta < \infty$.

Отметим, что существенное усиление теорем Марцинкевича и Лукача было получено И. В. Островским (см. [7]). О дальнейших исследованиях в этом направлении см. библиографию в обзоре [8].

Развивая соображения, использованные при доказательстве теоремы 1, мы полностью опишем класс локально компактных абелевых групп, на которые переносится теорема B.

Теорема 2. *Пусть группа* X *не содержит подгруппы, изоморфной* T, μ — *распределение на* X *с характеристической функцией*

$$\hat{\mu}(y) = \exp\{\lambda_1[(x_0, y) - 1] + \lambda_2[(-x_0, y) - 1] + \psi(y)\},$$

где $\psi(y)$ — *многочлен,* $\psi(0) = 0$. *Тогда для функции* $\psi(y)$ *справедливо разложение*

$$\psi(y) = -\varphi(y) + il(y), \tag{10}$$

где $\varphi(y)$ — *непрерывная неотрицательная функция, удовлетворяющая уравнению* (1), *а* $l(y)$ — *непрерывная вещественная функция, удовлетворяющая уравнению* (9). *Если* x_0 — *элемент бесконечного порядка, то* $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, 2$.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 3. *Теорема 2 справедлива для группы* $X = \mathbf{R}^n$.

Это утверждение вытекает из теоремы B.

Лемма 4. *Пусть* $x_0 \in X$ — *элемент бесконечного порядка,*

$$f(y) = \exp\{\lambda_1[(x_0, y) - 1] + \lambda_2[(-x_0, y) - 1]\}$$

— *характеристическая функция. Тогда* $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, 2$. *Если* x_0 — *элемент порядка* n, $n > 2$, *то существует такая характеристическая функция* $f(y)$, *где* $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что $T = \{\xi \in \mathbf{C}\colon |\xi| = 1\}$. Пусть x_0 — элемент бесконечного порядка. Рассмотрим подгруппу $E = \{\alpha \in T\colon \alpha = (x_0, y),\ y \in Y\}$ в T. Очевидно, что подгруппа E плотна в T. Определим на E функцию $\Phi(\alpha) = f(y)$, $\alpha = (x_0, y)$. Это определение корректно. Функция

$$\Phi(\alpha) = \exp\{\lambda_1(\alpha - 1) + \lambda_2(\bar{\alpha} - 1)\}, \quad \alpha \in E, \tag{11}$$

продолжается формулой (11) до функции $\Phi(\xi)$ на группе T. Так как функция $\Phi(\alpha)$ на E была положительно определенной, а подгруппа E плотна в T, то продолженная функция $\Phi(\xi)$ на T также будет положительно определенной, а тогда по теореме Бохнера — Хинчина — характеристической. Отсюда сразу следует, что $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, 2$.

Пусть x_0 — элемент порядка n. Не ограничивая общности, можно считать, что $X = Z(n)$. Тогда $Y \approx X$. Будем обозначать элементы группы X символом $[k] = \exp\{2\pi ik/n\}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, а элементы группы Y символом $[l]$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$. Пусть $\lambda \in \mathbf{R}$. Рассмотрим на группе X заряд

$$e(\lambda E_{[k]}) = \exp\{-\lambda\}(E_{[0]} + \lambda E_{[k]} + \lambda^2 E_{[2k]}/2! + \ldots).$$

Его характеристическая функция имеет вид

$$e\,\widehat{(\lambda E_{[k]})}([l]) = \exp\{\lambda[([k],[l]) - 1]\} = \exp\{\lambda[\exp\{2\pi ikl/n\} - 1]\}.$$

Очевидно, что $e(E_{[1]})\{[k]\} \geqslant \delta > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и $e(\lambda E_{[k]}) \to E_{[0]}$ при $\lambda \to 0$. Поэтому при достаточно малом $\lambda_2 < 0$ свертка $e(E_{[1]}) * e(\lambda_2 E_{[n-1]})$ является распределением с характеристической функцией $f(y)$, где $\lambda_1 = 1$, а $\lambda_2 < 0$.

Доказательство теоремы 2. Если $C_X = \{0\}$, то $C_X^\perp = Y_0 = Y$ и, как вытекает из следствия 1, $\psi(y) = 0$, $y \in Y$. Теорема 2 в этом случае следует из леммы 4.

Пусть $C_X \neq \{0\}$. Тогда $C_X \approx \mathbf{R}^n + K$, где K — связная компактная группа. Чтобы не усложнять обозначения, будем считать, что $C_X = K$, причем ограничимся проведением доказательства для случая, когда группа K имеет конечную размерность q. Тогда $D = K^*$ — дискретная группа конечного ранга q, не содержащая элементов конечного порядка. Случай, когда размерность группы K бесконечна, может быть рассмотрен аналогично (ср. с доказательством теоремы 1).

Если $f\colon X_1 \to X_2$ — гомоморфизм групп, то f^* будет обозначать сопряженный гомоморфизм групп характеров $f^*\colon Y_2 \to Y_1$ $(Y_j = X_j^*, j = 1, 2)$, определяемый формулой $(x_1, f^*(y_2)) = (f(x_1), y_2)$ для любых $x_1 \in X_1$, $y_2 \in Y_2$. Отметим, что гомоморфизм f является мономорфизмом тогда и только тогда, когда образ $f^*(Y_2)$ плотен в Y_1 (см. [5, с. 498]).

Пусть $f_0\colon D \to \mathbf{Q}^q \subset \mathbf{R}^q$ — мономорфизм D в $\mathbf{R}^q$, построенный аналогично тому, как при доказательстве теоремы 1 построен мономорфизм $D \to \mathbf{Q}_0^\infty \subset \mathbf{R}_0^\infty$. Положим $p_0 = f_0^*$, $p_0\colon \mathbf{R}^q \to K = C_X$.

По замечанию 1 функция $\psi(y)$ определяет функцию $\tilde{\psi}([y]) = \psi(y)$ на фактор-группе $Y/Y_0 \approx C_X^* = D$. Элементы группы D мы также будем обозначать $[y]$ и считать, что функция $\tilde{\psi}([y])$ определена на D. Положим $A = f_0(D)$ и $\zeta(a) = \zeta(f_0([y])) = \tilde{\psi}([y])$, $a = f_0([y]) \in A$. Функция $\zeta(a)$ является многочленом на группе A, поэтому, как установлено при доказательстве теоремы 1, имеет место представление (8), и функция $\zeta(a)$ продолжается формулой (8) до функции $\zeta(s)$ на $\mathbf{R}^q$.

Так как группа C_X не содержит подгруппы, изоморфной T, то подгруппа A плотна в $\mathbf{R}^q$ (см. [4]). По свойству сопряженных гомоморфизмов отсюда следует, что p_0 — мономорфизм. Обозначим π вложение $C_X \subset X$, т. е. $\pi(x) = x$, $x \in C_X$.

Возможны 3 случая.

1) Для любого $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, выполнено: $nx_0 \notin p_0(\mathbf{R}^q)$. В этом случае x_0 — элемент бесконечного порядка. Продолжим мономорфизм p_0 до мономорфизма $\tilde{p}_0$ $\mathbf{Z} + \mathbf{R}^q \to X$ формулой

$$\tilde{p}_0(k, t) = kx_0 + \pi(p_0(t)), \quad (k, t) \in \mathbf{Z} + \mathbf{R}^q.$$

Легко видеть, что сопряженный гомоморфизм $\tilde{p}_0^*$: $Y \to T + \mathbf{R}^q$ определяется формулой $\tilde{p}_0^*(y) = ((x_0, y), f_0([y]))$. Заметим теперь, что если $\tilde{p}_0^*(y_1) = \tilde{p}_0^*(y_2)$, то $(x_0, y_1) = (x_0, y_2)$ и $y_1 - y_2 \in Y_0$. Поэтому по лемме 1 справедливо равенство $\hat{\mu}(y_1) = \hat{\mu}(y_2)$. Определим на группе $\tilde{p}_0^*(Y)$ функцию $M(\tilde{p}_0^*(y)) = \hat{\mu}(y)$. Из сказанного выше следует, что это определение корректно. По построению функция

$$M(\alpha, a) = \exp\{\lambda_1[\alpha - 1] + \lambda_2[\bar{\alpha} - 1] + \zeta(a)\}, \tag{12}$$

$(\alpha = (x_0, y),\ a = f_0([y]))$, является положительно определенной на подгруппе $\tilde{p}_0^*(Y)$ и формулой (12) продолжается до функции $M(\xi, s)$ на группе $T + \mathbf{R}^q$. Поскольку $\tilde{p}_0$ — мономорфизм, подгруппа $\tilde{p}_0^*(Y)$ плотна в $T + \mathbf{R}^q$. Поэтому функция $M(\xi, s)$ является положительно определенной на группе $T + \mathbf{R}^q$, а тогда по теореме Бохнера — Хинчина — характеристической функцией. Из того, что $M(1, s) = \exp\{\zeta(s)\}$ — характеристическая функция на $\mathbf{R}^q$, следует, что функция $\exp\{\psi(y)\}$ характеристическая. Разложение (10) для многочлена $\psi(y)$ вытекает тогда из замечания 2. Из того, что $M(\xi, 0) = \exp\{\lambda_1[\xi - 1] + \lambda_2[\bar{\xi} - 1]\}$ — характеристическая функция на T, следует, что $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, 2$. В случае 1) теорема доказана.

2) Для некоторого натурального $n > 1$

$$x_0, \ldots, (n-1)x_0 \notin p_0(\mathbf{R}^q), \quad nx_0 \in p_0(\mathbf{R}^q).$$

Пусть $nx_0 = p_0(t_0)$. Положим $x_1 = x_0 - p_0(t_0/n)$. Тогда x_1 — элемент порядка n. Продолжим мономорфизм p_0 до мономорфизма $\tilde{p}_0$: $Z(n) + \mathbf{R}^q \to X$ формулой

$$\tilde{p}_0([k], t) = kx_1 + \pi(p_0(t)), \quad ([k], t) \in Z(n) + \mathbf{R}^q.$$

Легко видеть, что сопряженный гомоморфизм $\tilde{p}_0^*$: $Y \to Z(n) + \mathbf{R}^q$ определяется формулой $\tilde{p}_0^*(y) = ((x_1, y), f_0([y]))$. Отметим также, что $\tilde{p}_0([1], t_0/n) = x_0$. Пусть $\tilde{p}_0^*(y_1) = \tilde{p}_0^*(y_2)$. Тогда $(x_1, y_1) = (x_1, y_2)$ и $y_1 - y_2 \in Y_0$. Так как $Y_0 = C_X^{\perp}$, а $p_0(\mathbf{R}^q) \subset C_X$, то $(\pi(p_0(t)), y_1) = (\pi(p_0(t)), y_2)$ при всех $t \in \mathbf{R}^q$. Поэтому

$$(x_0, y_1) = (x_1 + \pi(p_0(t_0/n)), y_1) = (x_1, y_1)(\pi(p_0(t_0/n)), y_1) =$$
$$= (x_1, y_2)(\pi(p_0(t_0/n)), y_2) = (x_1 + \pi(p_0(t_0/n)), y_2) = (x_0, y_2).$$

Учитывая лемму 1, видим, что $\hat{\mu}(y_1) = \hat{\mu}(y_2)$. Значит, функция $M(\tilde{p}_0^*(y)) = \hat{\mu}(y)$ на подгруппе $\tilde{p}_0^*(Y)$ определена корректно. По построению функция

$$M([l], a) = \exp\{\lambda_1(\exp\{i(2\pi l/n + \langle t_0/n, a\rangle)\} - 1) +$$
$$+ \lambda_2(\exp\{-i(2\pi l/n + \langle t_0/n, a\rangle)\} - 1) + \zeta(a)\}, \tag{13}$$

$([l] = (x_1, y),\ a = f_0([y]))$, является положительно определенной на подгруппе $\tilde{p}_0^*(Y)$ и формулой (13) продолжается до функции $M([l], s)$ на группе $Z(n) + \mathbf{R}^q$. Поскольку $\tilde{p}_0$ — мономорфизм, подгруппа $\tilde{p}_0^*(Y)$ плотна в $Z(n) + \mathbf{R}^q$. Поэтому функция $M([l], s)$ является положительно определенной на группе $Z(n) + \mathbf{R}^q$, а тогда по теореме Бохнера — Хинчина — характеристической функцией. Учитывая, что

$$M([0], s) = \exp\{\lambda_1(\exp\{i\langle t_0/n, s\rangle\} - 1) +$$
$$+ \lambda_2(\exp\{-i\langle t_0/n, s\rangle\} - 1) + \zeta(s)\}$$

— характеристическая функция на $\mathbf{R}^q$, из леммы 3 получаем, в частности, что $\exp\{\zeta(s)\}$ — характеристическая функция. Значит, и $\exp\{\psi(y)\}$ — характеристическая функция. Разложение (10) для многочлена $\psi(y)$ вытекает тогда из замечания 2.

Пусть x_0 — элемент бесконечного порядка. Тогда $t_0 \neq 0$. Рассматривая характеристическую функцию $M([0], s)$, по лемме 4 получаем, что $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, 2$. В случае 2) теорема также доказана.

Отметим, что если x_0 — элемент конечного порядка n, то при $n > 2$ лемма 4 показывает, что неотрицательность λ_j, $j = 1, 2$, вообще говоря, не имеет места. Если же $n = 2$, то $x_0 = -x_0$, и исходная характеристическая функция имеет вид

$$\hat{\mu}(y) = \exp\{\lambda[(x_0, y) - 1] + \psi(y)\}, \quad (\lambda = \lambda_1 + \lambda_2).$$

В этом случае из того, что $M([l], 0) = \exp\{\lambda(\exp\{i\pi l\} - 1)\}$ — характеристическая функция на $Z(2)$, следует, что $\lambda \geqslant 0$.

3) Пусть $x_0 \in p_0(\mathbf{R}^q)$. В этом случае x_0 — элемент бесконечного порядка. Пусть $x_0 = p_0(t_0)$. Обозначим $\tilde{p}_0$ мономорфизм $\tilde{p}_0$: $\mathbf{R}^q \to X$, определенный формулой $\tilde{p}_0(t) = \pi(p_0(t))$. Сопряженный гомоморфизм $\tilde{p}_0^*$: $Y \to \mathbf{R}^q$ имеет вид $\tilde{p}_0^*(y) = f_0([y])$. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве п. 2), проверяем, что если $\tilde{p}_0^*(y_1) = \tilde{p}_0^*(y_2)$, то $\hat{\mu}(y_1) = \hat{\mu}(y_2)$. Это позволяет корректно определить функцию $M(\tilde{p}_0^*(y)) = \hat{\mu}(y)$ на группе $\tilde{p}_0^*(Y)$. По построению функция

$$M(a) = \exp\{\lambda_1(\exp\{i\langle t_0, a\rangle\} - 1) + \lambda_2(\exp\{-i\langle t_0, a\rangle\} - 1) + \zeta(a)\}, \tag{14}$$

$(a = f_0([y]))$, является положительно определенной на подгруппе $\tilde{p}_0^*(Y)$ и формулой (14) продолжается до функции $M(s)$ на $\mathbf{R}^q$. Поскольку $\tilde{p}_0$ — мономорфизм, подгруппа $\tilde{p}_0^*(Y)$ плотна в $\mathbf{R}^q$. Поэтому функция $M(s)$ является положительно определенной на группе $\mathbf{R}^q$, а тогда по теореме Бохнера — Хинчина — характеристической функцией. Заканчивается доказательство так же, как в случае 2). Теорема 2 полностью доказана.

З а м е ч а н и е 4. Пусть распределение μ и функция $\psi(y)$ те же, что и в теореме 2. Тогда, как следует из теоремы 2, если группа X не содержит подгруппы, изоморфной T, то $\exp\{\psi(y)\}$ — характеристическая функция некоторого гауссовского распределения на X. С другой стороны, если группа X содержит подгруппу, изоморфную T, то при любом натуральном $m > 2$ существует такой многочлен $\psi(y)$ степени m, что $\exp\{\psi(y)\}$ — характеристическая функция некоторого негауссовского распределения, и при любых $x_0 \in X$, $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, 2$, функция

$$\exp\{\lambda_1[(x_0, y) - 1] + \lambda_2[(-x_0, y) - 1] + \psi(y)\}$$

является характеристической. Это непосредственно вытекает из теоремы 1.

Я благодарю И. В. Островского, ответом на вопрос которого является теорема 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Marcinkiewicz J.* Sur une propriété de la loi de Gauss.— Math. Z., 1938, v. 44, p. 612—618.
2. *Партасарати К. Р., Ранга Рао Р., Варадхан С. Р.С.* Распределения вероятностей на локально компактных абелевых группах.— Математика (сб. перев), 1965, т. 9, в. 2, с. 115—146.
3. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959, 400 с.
4. *Фельдман Г. М.* О разложении гауссовского распределения на группах.— Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. XXII, в. 1, с. 136—143.
5. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975, 656 с.
6. *Lukacs E.* Some extension of a theorem of J. Marcinkiewicz.— Pacif. J. math., 1958, v. 8, № 3, p. 487—501.
7. *Островский И. В.* О целых функциях, удовлетворяющих некоторым специальным неравенствам, связанным с теорией характеристических функций вероятностных законов.— Записки мех.-матем. факультета ХГУ и ХМО, 1963, т. 29, с. 145—168.
8. *Островский И. В.* Арифметика вероятностных распределений.— Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 1, с. 3—30.

Поступила в редакцию
23.XII.1986