

## Полевые зависимости магнитной восприимчивости кристаллов в условиях вырождения их электронных энергетических зон

Г. П. Микитик, Ю. В. Шарлай

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины,  
Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47  
E-mail:mikitik@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 27 декабря 1995 г., после переработки 8 февраля 1996 г.

Полевые зависимости магнитной восприимчивости кристаллов теоретически исследованы для двух случаев вырождения их электронных энергетических зон, в которых эти зависимости сильные. В первом случае вырождение зон снимается линейно по волновому вектору  $\mathbf{k}$  при удалении от рассматриваемой точки Бриллюэна. Во втором случае вырождение зон происходит на линии, а в направлениях, перпендикулярных к ней, снимается линейно по  $\mathbf{k}$ . Для обоих случаев найдено точное решение задачи о спектре электрона в магнитном поле  $H$ . На его основе проведен анализ магнитной восприимчивости  $\chi$  при произвольной величине  $H$ . В частности, показано, что в сильных магнитных полях при химическом потенциале, близком к энергии вырождения,  $\chi$  пропорциональна  $\ln H$  для первого случая вырождения зон, и  $H^{-1/4}$  для второго.

Полеві залежності магнітної сприйнятливості кристалів теоретично досліджено для двох випадків виродження їх електронних енергетичних зон, в яких ці залежності сильні. В першому випадку виродження зон знімається лінійно по хвильовому вектору  $\mathbf{k}$  при віддаленні від розглядуваної точки зони Бриллюэна. В другому випадку виродження зон має місце на лінії, а у напрямках, перпендикулярних до неї, знімається лінійно по  $\mathbf{k}$ . Для обох випадків знайдено точне рішення задачі про спектр електрона в магнітному полі  $H$ . На цій підставі проведено аналіз магнітної сприйнятливості  $\chi$  при довільній величині  $H$ . Зокрема, показано, що в сильних магнітних полях при хімічному потенціалі, близькому до енергії виродження,  $\chi$  пропорційна  $\ln H$  для першого випадку виродження зон, та  $H^{-1/4}$  для другого.

### Введение

Если химический потенциал  $\zeta$  электронов в кристалле лежит вдали от критических точек их энергетического спектра, то плавная, не осциллирующая с изменением магнитного поля  $H$  часть магнитной восприимчивости электронов практически не зависит от  $H$  [1–6]\*. При достаточной близости химического потенциала к критическому значению энергии ( $|\zeta - \epsilon_{cr}| \sim \delta\epsilon_H$ ) характер полевой зависимости магнитной восприимчивости  $\chi$  определяется соотношением температуры  $T$  и  $\delta\epsilon_H$ . В слабых полях  $\delta\epsilon_H \ll T$  эта зависимость по-прежнему незначительная (полевые поправки порядка  $(\delta\epsilon_H/T)^2$ ). В сильных полях  $\delta\epsilon_H \gg T$  величина  $\chi$ , вообще говоря, заметно зависит от  $H$ , причем представление магнитной восприимчивос-

ти в виде суммы плавной и осциллирующей частей оказывается не возможным.

Существуют два типа критических точек спектра электронов в кристаллах. Во-первых, значения энергии, при которых происходят электронные топологические переходы  $2^{1/2}$  рода [7]. Второй тип критических точек спектра связан с вырождением электронных энергетических зон. Полевые зависимости магнитной восприимчивости в условиях близости  $\zeta$  к точкам электронного топологического перехода  $2^{1/2}$  рода теоретически исследованы в работах [3,4]. Что касается второго типа критических точек, то соответствующего изучения  $\chi$  не проводилось. Известны расчеты  $\chi(H)$  лишь для одной модели спектра [8], в которой может быть вырождение зон специального вида.

В [9] показано, что при некоторых типах вырождения зон возможны гигантские аномалии

\* Относительная величина полевых поправок в магнитную восприимчивость порядка  $\delta\epsilon_H^2/(\zeta - \epsilon_{cr})^2$ , где  $\delta\epsilon_H$  — характерное расстояние между энергетическими уровнями электрона в магнитном поле,  $\epsilon_{cr}$  — ближайшая к  $\zeta$  критическая точка спектра.

магнитной восприимчивости, т.е. при низкой температуре ( $T \rightarrow 0$ )  $\chi$ , рассчитанная в пределе слабого поля ( $H \rightarrow 0$ ), неограниченно возрастает по абсолютной величине по мере приближения уровня химического потенциала к энергии вырождения  $\epsilon_d$ . В этой же работе указаны все такие типы вырождения зон. Во всех этих случаях за гигантскую аномалию магнитной восприимчивости ответственны электронные состояния с энергиями близкими к  $\epsilon_d$ . Поскольку при  $\zeta \rightarrow \epsilon_d$  эти же состояния определяют и полевые зависимости магнитной восприимчивости, в тех случаях, когда возможны гигантские аномалии  $\chi$ , должны быть сильными и ее полевые зависимости. Примерами кристаллов, в которых вблизи уровня Ферми существуют точки вырождения зон соответствующих типов, являются алюминий, бериллий, графит, сплавы  $\text{Bi}_{0,96}\text{Sb}_{0,04}$  и  $\text{Pb}_{0,65}\text{Sn}_{0,35}\text{Te}$ . Отметим, что в висмуте и его сплавах с сурьмой сильные полевые зависимости  $\chi$  действительно наблюдались [10].

В настоящей работе теоретически исследуются полевые зависимости магнитной восприимчивости электронов для тех случаев вырождения зон, в которых возможны гигантские аномалии  $\chi$ . Для расчета этих зависимостей необходимо предварительно определить спектр электронов в магнитном поле. В разд. 1 приведен модельный спектр, описывающий все представляющие интерес случаи вырождения зон. В разд. 2 в рамках этого спектра получено точное решение задачи об уровнях электрона в магнитном поле. В разд. 3 с помощью полученного решения рассчитаны и проанализированы полевые зависимости магнитной восприимчивости кристаллов с различными типами вырождения зон.

### 1. Модельный спектр

Согласно [9], гигантские аномалии магнитной восприимчивости возможны для следующих случаев вырождения двух зон.

Случай I. Вырождение зон происходит в некоторой точке зоны Бриллюэна и снимается линейно по волновому вектору  $\mathbf{k}$  во всех направлениях ( $\mathbf{k}$  всюду отсчитываем от точки вырождения зон). Такая ситуация может возникнуть как при закономерном, так и при случайном вырождении зон, если спин-орбитальная связь не мала ( $\text{Bi}_{0,96}\text{Sb}_{0,04}$  и  $\text{Pb}_{0,65}\text{Sn}_{0,35}\text{Te}$ ). Кроме того, в кристаллах без центра инверсии, даже если спин-орбитальной связью допустимо пренебречь, случайное вырождение зон может иметь указанный тип.

Случай II. Вырождение зон происходит на некоторой линии зоны Бриллюэна, а в перпендикулярных этой линии направлениях снимается линейно по  $\mathbf{k}$ . Такой случай вырождения может осуществляться на осях симметрии зоны Бриллюэна (графит). Кроме того, в кристаллах с центром инверсии, если пренебречь спин-орбитальным взаимодействием, случайное вырождение зон практически всегда происходит именно на линиях (алюминий, бериллий). Подобное вырождение возможно и в плоскостях симметрии кристаллов без центра инверсии. Гигантская аномалия  $\chi$  определяется только теми точками линии вырождения зон, в которых энергия этих зон  $\epsilon_d$  достигает экстремумов. Только эти точки и будут интересовать нас в дальнейшем при изучении случая II.

В [9] указан еще один тип вырождения зон, при котором может наблюдаться гигантская аномалия  $\chi$ . Однако этот тип осуществляется, по-видимому, весьма редко. Во всяком случае в настоящее время нам не известно ни одного кристалла с данным типом вырождения зон. Поэтому в дальнейшем этот вариант не рассматривается.

Для всех перечисленных случаев электронные энергетические спектры в окрестностях интересующих нас точек вырождения могут быть описаны с помощью единой модели зонной структуры. Эта модель была сформулирована в [9] с использованием представления Латтинжера, Кона [11] для описания электронных состояний в кристалле. В этой модели гамильтониан электронов для двух рассматриваемых зон, обозначаемых индексами  $c, v$ , имеет вид (всюду  $\hbar^{-1} = 1$ )

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \Delta + K_c & R & 0 & S \\ R^* & -\Delta + K_v & -S & 0 \\ 0 & -S^* & \Delta + K_c & R^* \\ S^* & 0 & R & -\Delta + K_v \end{pmatrix} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} K_{c,v} &= \mathbf{v}_{c,v} \mathbf{k} + q_{c,v} k_3^2; \\ R &= \mathbf{r} \mathbf{k} + Q_r k_3^2; \\ S &= \mathbf{s} \mathbf{k} + Q_s k_3^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{v}_{c,v}$  — внутризонные, а  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{s}$  — межзонные матричные элементы оператора скорости, вычисленные при  $\mathbf{k} = 0$ . Члены с коэффициентами  $q_{c,v}$ ,  $Q_r$ ,  $Q_s$  учитывают влияние на спектр других зон. В (2) величины  $\mathbf{v}_{c,v}$ ,  $q_{c,v}$  действительные, а  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $Q_r$ ,  $Q_s$ , вообще говоря, комплексные. Энергию

(а в дальнейшем и химический потенциал) отсчитываем от энергии вырождения  $\epsilon_d(\mathbf{k} = 0)$ .

Для того чтобы иметь возможность рассмотреть, как наличие небольшой щели в спектре влияет на конечные результаты, в (1) введено расщепление зон, равное  $2\Delta$  в точке  $\mathbf{k} = 0$ . Такая щель в случае I может появиться из-за того, что концентрация сплава (например,  $\text{V}_{x-1}\text{Sb}_x$ ) слегка отличается от той, при которой имеет место вырождение зон. Подобная щель обязательно существует и в тех кристаллах с центром инверсии, в которых случайное вырождение зон на линии имеет место лишь в пренебрежении спин-орбитальным взаимодействием.

При записи (1) сделано предположение, что кристалл обладает центром инверсии, так что каждая из зон  $c, v$  двукратно вырождена. При этом учтена симметрия матричных элементов, следующая из свойств оператора обращения времени. Однако гамильтониан (1), (2) может быть использован при вычислении восприимчивости и для кристаллов без центра инверсии. В этом случае следует положить  $S = 0$ , а конечный результат для  $\chi$  разделить пополам, поскольку в такой ситуации истинный гамильтониан совпадает с любым из двумерных блоков, расположенных на главной диагонали (1).

Если спин-орбитальное взаимодействие невелико, и им можно пренебречь, то следует положить  $S = 0$ . При этом (1) учитывает двукратное вырождение зон по спину. Кроме того, при наличии центра инверсии величины  $\mathbf{r}, Q_r$  можно считать действительными.

Из (1), (2) находим законы дисперсии зон в окрестности точки вырождения:

$$\begin{aligned} \epsilon_{c,v} &= \mathbf{a}\mathbf{k} + Qk_3^2 + E_{c,v}, \\ E_{c,v} &= \pm \left\{ (\Delta + \mathbf{a}'\mathbf{k} + Q'k_3^2)^2 + |R|^2 + |S|^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) использованы обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_v}{2}; \quad \mathbf{a}' = \frac{\mathbf{v}_c - \mathbf{v}_v}{2}; \\ Q &= \frac{q_c + q_v}{2}; \quad Q' = \frac{q_c - q_v}{2}. \end{aligned}$$

В дальнейшем координатные оси условимся выбирать вдоль главных направлений квадратичной по компонентам вектора  $\mathbf{k}$  формы, входящей в  $E_{c,v}^2(\Delta = 0)$ . Пусть  $b_{ii}$  — ее главные значения (которые выражаются через компоненты векторов  $\mathbf{a}', \mathbf{r}, \mathbf{s}$ ), т.е.  $E_{c,v}^2(\Delta = 0) = b_{11}k_1^2 + b_{22}k_2^2 + b_{33}k_3^2$ . Если

одно из главных значений окажется равным нулю, как это имеет место в случае II, то будем считать его совпадающим с  $b_{33}$ . Именно поэтому из квадратичных по  $k_i$  членов в (2) оставлены лишь слагаемые вида  $k_3^2$ . Другие квадратичные члены относительно малы. В случае I все  $b_{ii}$  отличны от нуля и слагаемыми в (2) пропорциональными  $k_3^2$  можно пренебречь.

## 2. Спектр электронов в магнитном поле

Для описанного выше модельного спектра рассмотрим теперь задачу об уровнях электрона в магнитном поле  $H$ , направление которого будем задавать единичным вектором  $\mathbf{n}$ . Гамильтониан электрона в магнитном поле в координатном представлении получается из (1), (2) заменой [11]

$$k_i \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_i, \quad (4)$$

где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал магнитного поля;  $e$  — модуль заряда электрона. Прямым взаимодействием спина электрона с магнитным полем пренебрегаем, поскольку гигантская аномалия  $\chi$  имеет орбитальную природу, а чисто спиновый вклад в магнитную восприимчивость относительно мал. Пусть магнитное поле направлено вдоль оси  $x_3$ , т.е.  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ . Векторный потенциал выбираем в виде  $\mathbf{A} = (-Hx_2, 0, 0)$ , а решение уравнения на собственные значения

$$\hat{H} \vec{\Psi}_\mu = \epsilon_\mu \vec{\Psi}_\mu \quad (5)$$

ищем в виде

$$\vec{\Psi}_\mu(\mathbf{r}) = \exp \left\{ i(k_1x_1 + k_3x_3) \right\} \mathbf{f}_l(x_2), \quad (6)$$

где  $\vec{\Psi}_\mu, \mathbf{f}_l$  — четырехмерные вектор-столбцы функций, а индекс  $\mu$  — набор целого  $l$  и вещественных  $k_1$  и  $k_3$ . Для существования дискретного спектра векторы  $\mathbf{f}_l$  должны удовлетворять граничному условию

$$\mathbf{f}_l(x_2) \rightarrow 0 \quad \text{ïðå} \quad |x_2| \rightarrow \infty.$$

Такие векторы действительно существуют, если

$$R_{\mathbf{x}_3} \equiv b_{11}b_{22}(1 - \tilde{a}_1^2) > 0, \quad (7)$$

где  $\tilde{a}_1^2 \equiv \tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2$ ,  $\tilde{a}_i \equiv a_i / \sqrt{b_{ii}}$ . Смысл (7) легко понять. Сечения изоэнергетических поверхностей, отвечающих закону дисперсии (3), плоскост-

тями  $k_3 = \text{const}$  представляют собой кривые второго порядка, которые описываются квадратичной формой относительно  $k_1, k_2$ . Величина  $R_{\mathbf{x}_3}$  есть один из инвариантов этой формы, так называемый дискриминант ее старших членов [12]. Положительность  $R_{\mathbf{x}_3}$  означает, что упомянутые кривые второго порядка замкнуты, т.е. представляют собой эллипсы. При выполнении (7) собственные функции  $\mathbf{f}_l$  ищем в виде

$$\mathbf{f}_l(x_2) = \exp\left(-\lambda_1 x_2^2 - \lambda_2 x_2\right) \times \left[ C_1 H_l(\lambda_3(x_2 - x_{20})) + C_2 H_{l-1}(\lambda_3(x_2 - x_{20})) \right], \quad (8)$$

где  $l \geq 0$ ;  $H_l(x)$  — полином Эрмита  $l$ -го порядка;  $H_{-1} = 0$ . При этом если  $\Delta \neq 0$  и  $\tilde{\mathbf{a}} \neq 0$ , то экстремумы зон достигаются в разных точках зоны Бриллюэна и в спектре существует непрямая щель, равная  $2\Delta_{\min} = 2\Delta(1 - \tilde{\mathbf{a}}^2)^{1/2}(1 - (\tilde{\mathbf{a}}')^2)^{1/2}$ , где  $\tilde{a}'_i \equiv a'_i / \sqrt{b_{ii}}$  (неравенство  $(\tilde{\mathbf{a}}')^2 < 1$  следует из определения величин  $b_{ii}$ ). Минимум  $\epsilon_c(\mathbf{k})$  равен  $\epsilon_0 + \Delta_{\min}$ , а максимум  $\epsilon_v(\mathbf{k})$  есть  $\epsilon_0 - \Delta_{\min}$ , где  $\epsilon_0 = -(\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{a}})\Delta$ .

$$S(\epsilon_l, k_3) = \frac{2\pi eH}{c} l, \quad (9)$$

где  $S(\epsilon, k_3)$  — площадь сечения изоэнергетической поверхности плоскостью  $k_3 = \text{const}$ . Отметим, что условие квантования (9) имеет квазиклассический вид. Однако в данном случае оно определяет точные собственные значения энергии электрона. Явный вид этих собственных значений приведен ниже для каждого случая вырождения зон отдельно. При этом, поскольку в случае I гамильтониан линеен по  $\mathbf{k}$ , приведенные выше результаты легко обобщаются на случай произвольно направленного магнитного поля. В случае II такое обобщение не возможно, но удастся найти приближенные выражения для уровней энергии электрона в магнитном поле, не слишком близком к плоскости  $(x_1, x_2)$ .

*Случай I.* При произвольном направлении  $\mathbf{H}$  условие существования дискретного спектра, обобщающее (7), имеет вид

$$R_{\mathbf{n}} = b_{11}b_{22}b_{33} \left\{ \tilde{\mathbf{n}}^2 - [\tilde{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{a}}]^2 \right\} > 0, \quad (10)$$

где вектор  $\tilde{\mathbf{n}}$  определен следующим образом:  $\tilde{n}_i \equiv n_i / \sqrt{b_{ii}}$ .

Смысл (10) тот же, что у (7). При выполнении (10) сечения изоэнергетических поверхностей плос-

костями перпендикулярными магнитному полю имеют вид эллипсов.

В работе [9] показано, что гигантская аномалия  $\chi$  существует, если

$$\tilde{\mathbf{a}}^2 \equiv \tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2 < 1. \quad (11)$$

Это требование является более сильным, чем условие существования дискретного спектра для данного направления  $\mathbf{H}$  (10). Нетрудно показать, что при выполнении (11) неравенство (10) справедливо для любого  $\mathbf{n}$ , т.е. изоэнергетические поверхности являются эллипсоидами. Условие (11) можно сформулировать иначе как требование того, чтобы законы дисперсии  $\epsilon_c(\mathbf{k})$  и  $\epsilon_v(\mathbf{k})$  имели точки соответственно минимума и максимума по  $\mathbf{k}$ . При этом если  $\Delta \neq 0$  и  $\tilde{\mathbf{a}} \neq 0$ , то экстремумы зон достигаются в разных точках зоны Бриллюэна и в спектре существует непрямая щель, равная  $2\Delta_{\min} = 2\Delta(1 - \tilde{\mathbf{a}}^2)^{1/2}(1 - (\tilde{\mathbf{a}}')^2)^{1/2}$ , где  $\tilde{a}'_i \equiv a'_i / \sqrt{b_{ii}}$  (неравенство  $(\tilde{\mathbf{a}}')^2 < 1$  следует из определения величин  $b_{ii}$ ). Минимум  $\epsilon_c(\mathbf{k})$  равен  $\epsilon_0 + \Delta_{\min}$ , а максимум  $\epsilon_v(\mathbf{k})$  есть  $\epsilon_0 - \Delta_{\min}$ , где  $\epsilon_0 = -(\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{a}})\Delta$ .

При условии (10) уровни энергии электрона в магнитном поле описываются выражением

$$\epsilon_l^{c,v}(\delta k_{\mathbf{n}}) = \epsilon_0 + v\delta k_{\mathbf{n}} \pm \left\{ \frac{eH\alpha}{c} l + L(\delta k_{\mathbf{n}})^2 + \Delta_{\mathbf{n}}^2 \right\}^{1/2}, \quad (12)$$

где

$$\delta k_{\mathbf{n}} = k_{\mathbf{n}} - k_{\mathbf{n}}^0, \quad k_{\mathbf{n}} = \mathbf{k}\mathbf{n}, \quad k_{\mathbf{n}}^0 = -\Delta(\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{n}}),$$

$$v = \frac{(\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{n}})}{\tilde{\mathbf{n}}^2}, \quad \alpha = \frac{2R_{\mathbf{n}}^{3/2}}{b_{11}b_{22}b_{33}\tilde{\mathbf{n}}^2}, \quad (13)$$

$$L = \frac{R_{\mathbf{n}}}{b_{11}b_{22}b_{33}\tilde{\mathbf{n}}^4}, \quad \Delta_{\mathbf{n}}^2 = \Delta^2 \frac{R_{\mathbf{n}}[1 - (\tilde{\mathbf{a}}')^2]}{b_{11}b_{22}b_{33}\tilde{\mathbf{n}}^2},$$

а  $l$  — целое неотрицательное число. Два знака в (12) отвечают двум ветвям спектра. Отметим, что хотя  $\Delta_{\mathbf{n}} \geq \Delta_{\min}$ , но при выполнении (11)  $L > v^2$  и по-прежнему минимальное значение  $\epsilon_0^c(\delta k_{\mathbf{n}})$  равно  $\epsilon_0 + \Delta_{\min}$ , а  $\epsilon_0 - \Delta_{\min}$  — максимальная величина  $\epsilon_0^v(\delta k_{\mathbf{n}})$ .

*Случай II.* В этом случае  $b_{33} = 0$ . Пусть магнитное поле направлено вдоль оси  $x_3$ , т.е. по касательной к линии вырождения зон в данной точке зоны Бриллюэна. Гигантская аномалия в  $\chi$  связана только с теми точками этой линии, в которых, помимо (7), выполнено условие [9]

$$a_3 = 0.$$

Явное выражение для собственных значений энергии электронных состояний из окрестностей этих точек получаем из (9):

$$\varepsilon_l^{c,v}(k_3) = Bk_3^2 \pm \left\{ \frac{eH\alpha}{c} l \right\}^{1/2}, \quad (14)$$

где  $l$  — целое неотрицательное число, два знака отвечают двум ветвям спектра;

$$\alpha = \frac{2R_{x_3}^{3/2}}{b_{11}b_{22}}; \quad B = Q - Q'(\tilde{\mathbf{a}}_{\perp}\tilde{\mathbf{a}}'_{\perp}) - Q_r(\tilde{\mathbf{a}}_{\perp}\tilde{\mathbf{r}}'_{\perp}); \quad (15)$$

$\tilde{\mathbf{r}}_{\perp}$  — перпендикулярный оси  $x_3$  вектор:  $\tilde{\mathbf{r}}_{\perp} = (r_1/\sqrt{b_{11}}, r_2/\sqrt{b_{22}}, 0)$ , аналогично определены  $\tilde{\mathbf{a}}_{\perp}$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}'_{\perp}$ . Другое, но эквивалентное (15), выражение для коэффициента  $B$  приведено в [9].

Если в кристалле с центром инверсии вырождение зон на некоторой линии имеет место лишь в пренебрежении спин-орбитальным взаимодействием, то учет этого взаимодействия приведет не только к тому, что в (1) появится  $\Delta \neq 0$ , но изменятся и значения параметров, входящих в (2). Однако изменения эти таковы, что в главном порядке по  $\Delta$  величины  $\mathbf{a}$  и  $Q$  остаются теми же, что и при  $\Delta = 0$ , а  $E_{c,v}^2(\Delta, \mathbf{k}) = \Delta^2 + E_{c,v}^2(\Delta = 0, \mathbf{k})$ . Минимальная непрямая щель будет равна  $2\Delta_{\min} = 2\Delta(1 - \tilde{a}_{\perp}^2)^{1/2}$ . Что касается спектра в магнитном поле, то он описывается выражением

$$\varepsilon_l^{c,v}(k_3) = Bk_3^2 \pm \left\{ \frac{eH\alpha}{c} l + \Delta_{\min}^2 \right\}^{1/2} \quad (16)$$

с прежними значениями параметров  $B$  и  $\alpha$ .

Пусть теперь магнитное поле направлено под углом  $\theta$  к оси  $x_3$ , решить точно при этом уравнение на собственные значения энергии не удается. Это связано с наличием в (2) квадратичных по  $k_3$  членов. После замены (4) и простых

преобразований они дают вклады в гамильтониан вида  $q(eH/c)^2 \sin^2 \theta x_3^2$ , где  $q$  — некоторая комбинация  $q_{c,v}$ ,  $Q_f$ ,  $Q_s$ . Однако эти вклады малы по параметру  $\eta^2$ , где  $\eta = \text{tg } \theta (\varepsilon/E_0)^{1/2}$ , а  $E_0$  — характерное расстояние по энергии от двух рассматриваемых зон до других явно не учитываемых в (1). Пренебрегая всеми членами, малыми по параметру  $\eta$ , приходим к формулам (14), (16), в которых вместо  $H$  надо использовать  $H \cos \theta$ . Отметим, что сама модель электронной зонной структуры (1), (2) справедлива в главном порядке по  $(\varepsilon/E_0)^{1/2}$ , что предполагает малость этого параметра. Поэтому полученные приближенные результаты достаточно хорошо описывают  $\varepsilon_l^{c,v}(k_3)$  практически при всех углах  $\theta$ , за исключением сравнительно небольшой окрестности  $\theta = \pi/2$ .

В заключение раздела укажем, что полученные выше формулы (9), (12), (16) полностью согласуются с результатами работ [8,13–15], в которых изучались энергетические уровни электрона в магнитном поле для конкретных кристаллических структур.

### 3. Вычисление магнитной восприимчивости

В случае близости химического потенциала к энергии вырождения зон магнитную восприимчивость кристалла можно представить как сумму особого вклада, связанного с электронными состояниями, близкими к точке вырождения, и фонового слагаемого, обусловленного всеми остальными состояниями. Именно особый вклад определяет зависимости  $\chi$  от  $T$ ,  $|\mathbf{H}|$ ,  $\zeta$  в то время как фоновое слагаемое практически не зависит от величины магнитного поля, температуры и фактически остается постоянным при изменениях  $\zeta$  в окрестности энергии вырождения. Для вычисления особого вклада в магнитную восприимчивость кристалла (которым только и интересуемся далее) используем следующее выражение для  $\Omega$  — потенциала, отнесенного к единице объема:

$$\Omega(\mathbf{H}) = -\frac{eHT}{4\pi^2 c} \sum_{c,v} \sum_{l=0}^{\infty} \int d(\delta k_{\mathbf{n}}) \ln \left\{ 1 + \exp \left( \frac{\zeta - \varepsilon_l^{c,v}(\delta k_{\mathbf{n}})}{T} \right) \right\}. \quad (17)$$

В (17) пределы интегрирования по  $\delta k_{\mathbf{n}}$  и суммирования по  $l$  находятся из условия  $\varepsilon_l^{c,v}(\delta k_{\mathbf{n}}) \geq -\zeta_0$ , где относительно параметра обрезания спектра  $\zeta_0$  предполагается, что  $E_0 \gg \zeta_0 \gg T$ ,  $\delta\varepsilon_H$ ,  $\zeta$ ,  $\Delta$ . Штрих у знака суммы по  $l$  означает, что слагаемые с  $l > 0$  должны быть удвоены.

В случае слабых магнитных полей,  $\delta\epsilon_H \ll T$ , после интегрирования (17) по частям и использования формулы суммирования Эйлера–Маклорена получаем для магнитной восприимчивости результаты, полностью согласующиеся с формулами [9]. В связи с этим далее подробно анализируем только случай сильных магнитных полей  $\delta\epsilon_H \gg T$ . Этот случай легко достигим в окрестностях точек вырождения зон. Действительно, согласно (12), (16),  $\delta\epsilon_H \sim (eH\alpha/c)^{1/2}$ . Поэтому сильными следует считать поля  $H \gg H_T \equiv (cT^2/e\alpha)$ . Полагая  $T = 4$  К и исполь-

зуя типичные значения для матричных элементов оператора скорости ( $m\alpha \sim 1$  эВ, где  $m$  — масса электрона), находим  $H_T \sim 10$  Э.

При анализе выражения (17) интегрируем его необходимое число раз по частям, используем формулу суммирования Пуассона, и полагаем  $T = 0$  ( $\delta\epsilon_H \gg T$ ). В итоге получаем следующие результаты.

*Случай 1.* Пусть  $|\zeta - \epsilon_0| < \Delta_{\min}$ , т.е. химический потенциал лежит внутри щели спектров (3), (12). Тогда имеем

$$\Omega(\mathbf{H}) = \frac{1}{24\pi^2} \left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{\alpha}{\sqrt{L}} H^2 \left\{ \ln \left( \frac{2\zeta_0}{\Delta_{\min}} \right) + 3 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \left[ \sin \varphi_l \operatorname{si} \varphi_l + \cos \varphi_l \operatorname{Ci} \varphi_l \right] \right\}, \quad (18)$$

где  $\varphi_l = 2\pi l(H_{\Delta}/H)$ ,  $H_{\Delta} \equiv (c\Delta_{\min}^2/e\alpha)$  — характерное магнитное поле, при котором  $\delta\epsilon_H \sim \Delta_{\min}$ ,  $\operatorname{si} \varphi$  и  $\operatorname{Ci} \varphi$  — интегральные синус и косинус, определяемые выражениями [16]:

$$\operatorname{si} \varphi = \int_{\infty}^{\varphi} \frac{\sin t}{t} dt, \quad \operatorname{Ci} \varphi = \int_{\infty}^{\varphi} \frac{\cos t}{t} dt.$$

В (18) опущен не зависящий от магнитного поля вклад, а также члены малые по параметру  $(\delta\epsilon_H/\zeta_0)^*$ .

Еще одно представление  $\Omega(\mathbf{H})$ , удобное для исследования предельных случаев, получается, если воспользоваться формулой [16]

$$\sin \varphi \operatorname{si} \varphi + \cos \varphi \operatorname{Ci} \varphi = \ln \varphi - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t^2 + \varphi^2) dt. \quad (19)$$

С помощью (18), (19) можно показать, что тензор магнитной восприимчивости, определяемый как

$$\chi_{ij} = - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial H_i \partial H_j},$$

является монотонно убывающей функцией  $H$ . При  $H \ll H_{\Delta}$  находим для него выражение

$$\chi_{ij} = - \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{1}{(b_{11} b_{22} b_{33})^{1/2}} \left\{ \kappa^{ij} \ln \left( \frac{2\zeta_0}{\Delta_{\min}} \right) - \frac{\pi^2}{20} \frac{H^2}{H_{\Delta}^2} \varphi^{ij} \right\}, \quad (20)$$

где

$$\varphi^{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \frac{\kappa^{ij} \kappa^{kl} + 2\kappa^{ik} \kappa^{jl}}{3R_{\mathbf{n}}} n_k n_l, \quad \kappa^{ij} = \frac{b_{11} b_{22} b_{33}}{(b_{ii} b_{jj})^{1/2}} \left\{ (1 - \tilde{\mathbf{a}}^2) \delta_{ij} + \tilde{a}_i \tilde{a}_j \right\}.$$

Введенный в [9] тензор  $\kappa^{ij}$  получен здесь с помощью (10) из определяющего  $\kappa^{ij}$  соотношения  $R_{\mathbf{n}} \equiv \sum_{i,j} \kappa^{ij} n_i n_j$ . Первый член в (20) совпадает с магнитной восприимчивостью в слабом магнитном поле [9]<sub>1,j</sub> которая оказывается конечной величиной из-за наличия щели в спектре, а второй дает первую полевую поправку к ней. При  $H \gg H_{\Delta}$  получаем для  $\chi_{ij}$

\* Среди последних есть и осциллирующие по  $(1/H)$  члены с большой частотой пропорциональной  $\zeta_0^2$ . Хотя они могли бы дать большой вклад в магнитную восприимчивость, однако их появление есть следствие искусственного введения резкой границы электронных состояний по энергии равной  $-\zeta_0$ .

$$\chi_{ij} = -\frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{1}{(b_{11}b_{22}b_{33})^{1/2}} \left\{ \kappa^{ij} \ln \left[ \frac{2\zeta_0}{\Delta_{\min}} \left(\frac{H_{\Delta}}{H}\right)^{1/2} \right] + A\kappa^{ij} - \frac{3}{4} \varphi^{ij} \right\}, \quad (21)$$

где

$$A = \frac{1}{2} (\ln(2\pi) + C_{EM}) + \frac{3}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\ln l}{l^2} \approx 1,50,$$

а  $C_{EM} \approx 0,58$  — постоянная Эйлера — Маскерони. С помощью (13) находим, что

$$\sqrt{H_{\Delta}}/\Delta_{\min} = \left( \frac{c}{2e\sqrt{R_{\mathbf{n}}}(1-\tilde{\mathbf{a}}^2)} \right)^{1/2}, \quad (22)$$

т.е. в этой области полей  $\chi_{ij}$  не зависит от величины щели в спектре. При  $T = 0$  формулы (21), (22) описывают магнитную восприимчивость кристалла с точкой вырождения зон. Общий вид зависимости  $\chi_{ij}$  от  $H$  схематически представлен на рис. 1. Отметим, если  $T \neq 0$  и  $\Delta < T$ , то вид зависимости  $\chi_{ij}(H)$  будет примерно такой же, как при  $T = 0$ ,  $\Delta \neq 0$ . Следует только заменить  $H_{\Delta}$  на  $H_T$ . Но восприимчивость  $\chi_{ij}$  при  $H \gg H_T$  будет по-прежнему описываться формулой (21), в которую подставлена (22).

Пусть теперь  $|\zeta - \epsilon_0| > \Delta_{\min}$ . В этом случае  $\Omega$ -потенциал (17) можно представить как

$$\Omega(\mathbf{H}, \zeta) = \Omega(\mathbf{H}) + \delta\Omega(\mathbf{H}, \zeta), \quad (23)$$

где  $\Omega(\mathbf{H})$  описывается формулой (18), а добавка  $\delta\Omega$  — сумма конечного числа членов:

$$\delta\Omega(\mathbf{H}, \zeta) = -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{\alpha H^2}{\sqrt{L}} \sum_{m=0}^M \left\{ x \sqrt{x^2 - x_m^2} - x_m^2 \ln \left[ \frac{x + \sqrt{x^2 - x_m^2}}{x_m} \right] \right\}. \quad (24)$$

Здесь

$$x_m^2 \equiv m + H_{\Delta}/H; \quad x \equiv \frac{|\zeta - \epsilon_0|}{\Delta_{\min}} \left(\frac{H_{\Delta}}{H}\right)^{1/2};$$

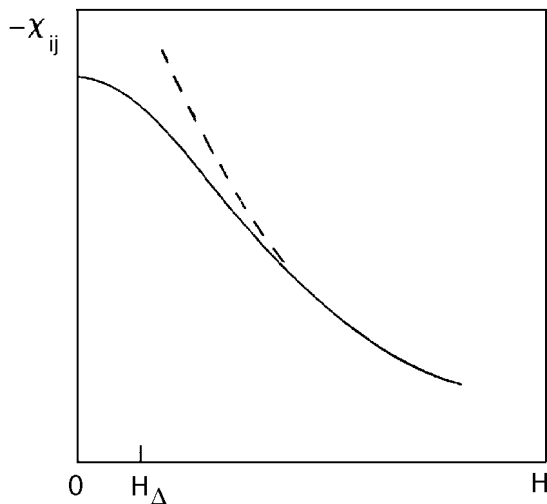


Рис. 1. Схематический вид зависимости тензора магнитной восприимчивости кристалла  $\chi_{ij}$  от  $H$  для случая I.  $T = 0$ , а  $\zeta$  лежит внутри щели спектра (3). Пунктирная кривая ( $\Delta = 0$ ), сплошная линия ( $\Delta \neq 0$ ).

$M$  — максимальное целое число, при котором  $x_M^2 \leq x^2$ . Из (24) следует, что магнитная восприимчивость — симметричная функция  $|\zeta - \epsilon_0|$ . При больших  $x$  уравнения (18), (23), (24) приводят к хорошо известному результату, что намагниченность кристалла есть сумма  $\chi(H \rightarrow 0)H$  и осциллирующей составляющей де Гааза-ван Альфена. На качественном уровне это утверждение остается справедливым и при  $x \sim x_1$ . При этом с уменьшением  $x$  абсолютная величина плавной части намагниченности увеличивается, а амплитуда осциллирующей уменьшается, и при  $x \sim x_1$  первая заметно превосходит вторую. В бесщелевом случае (или  $H \gg H_{\Delta}$ ) при  $0 < x < x_1$ , согласно (23), имеем для намагниченности кристалла  $\mathbf{M}$ :  $\mathbf{M}(\mathbf{H}, \zeta) = \mathbf{M}(\mathbf{H}) + \delta\mathbf{M}(\mathbf{H}, \zeta)$ . Здесь  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$  не зависит от  $\zeta$  и получается из (18):  $M_i(H) \propto H \ln H$  (см. (21)). Добавка

$$\delta M_i(\mathbf{H}, \zeta) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{e}{c} \frac{\kappa^{ij} n_j}{(b_{11}b_{22}b_{33})^{1/2}} \frac{\zeta^2}{(1-\tilde{\mathbf{a}}^2)\sqrt{R_{\mathbf{n}}}}$$

описывает поведение намагниченности при изменении  $\zeta$  в окрестности энергии вырождения зон. Если же  $H \ll H_{\Delta}$ , то при  $x_0 \leq x < x_1$  эта добавка пропорциональна  $(|\zeta - \epsilon_0| - \Delta_{\min})^{3/2}$  и согласуется

с результатом, вытекающим из формул (41), (42) работы [3].

Химический потенциал электронов в кристалле, вообще говоря, сам зависит от магнитного поля. Эта зависимость находится из условия постоянства полного числа электронов. Если, помимо двух рассматриваемых зон в кристалле, есть другие не полностью заполненные зоны с достаточно большой плотностью состояний, т.е. мы имеем дело с металлом, то  $\zeta$  практически постоянен, и можно непосредственно использовать полученные выше формулы. Рассмотрим теперь случай, когда других незаполненных зон нет, и, следовательно, кристалл представляет собой бесщелевой (или с малой запрещенной щелью) полупроводник. В этом случае плотность носителей заряда (электронов или дырок) описывается выражением

$$v = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{e}{c}\right)^{3/2} \frac{\alpha^{1/2} H^{3/2}}{\sqrt{L - v^2}} \sum_{m=0}^M \sqrt{x^2 - x_m^2}, \quad (25)$$

из которого и находится зависимость  $x(v, \mathbf{H})$ . Чтобы вычислить теперь намагниченность или магнитную восприимчивость электронов, необходимо от  $\Omega$ -потенциала перейти к свободной энергии. В результате получаем

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}, v) = \mathbf{M}(\mathbf{H}, x) \Big|_{x=x(v, \mathbf{H})},$$

$$\chi_{ij}(\mathbf{H}, v) = \left[ \chi_{ij}(\mathbf{H}, x) - \frac{\partial v}{\partial H_i} \frac{\partial v}{\partial H_j} \left( \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right)^{-1} \right]_{x=x(v, \mathbf{H})}.$$

Для собственного полупроводника ( $v = 0$ ) из (25) следует, что  $x = 0$  при любом  $\mathbf{H}$ , и  $\chi_{ij}(\mathbf{H}, v)$  по-прежнему описывается формулами (20), (21). При  $v \neq 0$  ограничимся анализом случая  $H > H_0 = (c/e)[4\pi^4 v^2(L - v^2)\alpha^{-1}]^{1/3}$ . В таких полях  $x < x_1$ , и суммы в (24) и (25) сводятся к одному слагаемому. Если щель в спектре отсутствует или  $H \gg H_\Delta$ , то магнитная восприимчивость  $\chi_{ij}(\mathbf{H}, v)$  будет описываться формулой, которая получается из (21), если в фигурных скобках последней добавить член  $1,5 (H_0/H)^3 (9\varphi^{ij} - 5\kappa^{ij})$ . Если же  $H_0 < H \ll H_\Delta$ , то добавочный член пропорционален  $(H_0/H)^4$ , что находится в согласии с [1].

В заключение отметим, что если рассматривать  $-\zeta_0$  как значение химического потенциала, для которого известен (например, из эксперимента) тензор магнитной восприимчивости в слабом магнитном поле, то полученные выше формулы непосредственно дают  $\chi_{ij}(\mathbf{H}, \zeta) - \chi_{ij}(0, -\zeta_0)$ . Выбор другого значения  $\zeta_0$ , согласно (20)–(24), приведет к изменению магнитной восприимчивости на постоянную величину, и в этом смысле он совершенно не влияет на зависимости этой величины от  $H$  и  $\zeta$ .

*Случай II.* В этом случае для  $\Omega$ -потенциала при  $T = 0$  и  $\mathbf{H}$ , направленном вдоль оси  $x_3$ , находим

$$\Omega(\mathbf{H}, \zeta) = \frac{1}{\pi^3} \left(\frac{e}{c}\right)^{7/4} |B|^{-1/2} H^{7/4} \alpha^{3/4} \times \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left[ I_l + \int_{\max(|x|, (H_\Delta/H)^{1/2})}^{\infty} dt (t+x)^{1/2} \sin [2\pi l(t^2 - H_\Delta/H)] \right] \right\}, \quad (26)$$

где  $x \equiv \text{sgn}(B) \zeta(c/e\alpha H)^{1/2}$ ,  $H_\Delta \equiv (c\Delta_{\min}^2/e\alpha)$ ,  $\text{sgn}(B) = \pm 1$  в зависимости от знака  $B$ , а слагаемое  $I_l$  отлично от нуля только при положительных  $x > (H_\Delta/H)^{1/2}$  и равно

$$I_l = \int_{(H_\Delta/H)^{1/2}}^x dt \left[ (x+t)^{1/2} - (x-t)^{1/2} \right] \sin [2\pi l(t^2 - H_\Delta/H)].$$

При выводе (26) ввиду сходимости всех интегралов опущен не зависящий от  $H$  вклад в  $\Omega$ -потенциал и  $|\zeta_0| \rightarrow \infty$ . Проанализируем теперь с помощью (26) различные предельные случаи.



Рассмотрим прежде всего случай бесщелевого спектра, т.е.  $H_{\Delta} = 0$ . Тогда из (26) следует, что намагниченность кристалла (особый вклад в нее) можно представить в виде

$$M_3 = -\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{e}{c}\right)^{7/4} |B|^{-1/2} \alpha^{3/4} H^{3/4} f(x), \quad (27)$$

где функция одного аргумента  $f(x)$  не зависит от параметров спектра, т.е. является универсальной для всех кристаллов с данным типом вырождения зон. Вычисляя сумму по  $l$  в (26) и дифференцируя по  $H$ , получаем следующее выражение для  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{1}{4} \int_{-x}^{\infty} dt \left(\frac{1}{2} - \{t^2\}\right) \operatorname{sgn}(t) \frac{7t + 6x}{\sqrt{x+t}}, \quad (28)$$

где  $\{t^2\}$  — дробная часть числа  $t^2$ . Можно показать, что при  $|x| \gg 1$  формулы (27), (28) описывают вклад в намагниченность, совпадающий с полученным в [9], и осциллирующую составляющую, которая с учетом (9) может быть найдена по формуле Лифшица — Косевича [17]. Кроме того, из (28) следует, что, в отличие от случая I, намагниченность не симметрична по  $x$ , и амплитуда осцилляций  $M_3$  при  $x \sim 1$  порядка плавной части намагниченности (этот результат остается справедливым и при наличии щели в спектре). В области  $|x| \ll 1$  для  $f(x)$  можно получить разложение

$$f(x) = f_0 + f_1 x - \frac{2}{3} x^{3/2} \sigma(x) + O(x^2), \quad (29)$$

где  $\sigma(x) = 1$  при  $x > 0$  и  $\sigma(x) = 0$  при  $x < 0$ , а

$$f_0 = \frac{7 \cos(\pi/8) \zeta(7/4)}{2^{13/4} \pi^{3/4} \Gamma(1/4)} \approx 0,156$$

и

$$f_1 = \frac{5 \sin(\pi/8) \zeta(5/4)}{2^{15/4} \pi^{1/4} \Gamma(3/4)} \approx 0,40.$$

Здесь  $\Gamma(y)$  — гамма-функция, а  $\zeta(y)$  — дзета-функция Римана. Член в (29), пропорциональный  $x^{3/2}$ , описывает особенность в намагниченности, связанную с рассматриваемой точкой вырождения зон.

Формулы (27)–(29) дают зависимость намагниченности электронов от химического потенциала при различных значениях  $H$ . С их помощью не-

трудно получить и зависимости  $M_3(H)$  при фиксированных  $\zeta$ . В частности, при  $|x| \ll 1$  имеем для магнитной восприимчивости  $\chi_{33}$

$$\chi_{33}(H) \approx -\frac{3}{4\pi^2} \left(\frac{e}{c}\right)^{7/4} \frac{\alpha^{3/4} f_0}{|B|^{1/2}} H^{-1/4}. \quad (30)$$

Отметим, что для сильных магнитных полей зависимость  $\chi \propto H^{-1/4}$  получалась ранее и в [8], хотя рассматривавшийся в этой работе спектр и не относится к случаю II (но он в некотором смысле близок к нему: вырождение в двух направлениях снимается линейно по  $\mathbf{k}$ , а в третьем — квадратично).

Рассмотрим теперь, как наличие щели в спектре влияет на полученные результаты. Из (26) следует, что это влияние мало при  $|\zeta| \gg \Delta_{\min}$ . Поэтому проанализируем только случай  $|\zeta| \sim \Delta_{\min}$ , т.е.  $|x| \sim (H_{\Delta}/H)^{1/2}$ . При  $H \gg H_{\Delta}$ , и, следовательно,  $|x| \ll 1$  этим влиянием по-прежнему можно пренебречь (коэффициенты  $f_0$  и  $f_1$  в (29) изменятся на величины порядка  $(H_{\Delta}/H)$ , а член  $x^{3/2} \sigma(x)$  заменится на  $[x_+^{3/2} \sigma(x_+) + x_-^{3/2} \sigma(x_-)]/2$ , где  $x_{\pm} = x \pm (H_{\Delta}/H)^{1/2}$ . Только при  $H \lesssim H_{\Delta}$  и  $|\zeta| \lesssim \Delta_{\min}$  результаты будут заметно отличаться от представленных выше. Действительно, для  $H \ll H_{\Delta}$  везде, за исключением малых окрестностей точек  $\zeta = \pm \Delta_{\min}$ , плавная часть магнитной восприимчивости описывается теми же формулами, что и в слабых полях ( $H \ll H_T$ ):

$$\chi_{33} - \chi_{33}^{\text{os}} = -\frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{e}{c}\right)^{7/4} \alpha^{3/4} |B|^{-1/2} \frac{1}{H_{\Delta}^{1/4}} \times \left\{ \zeta_+^{1/2} \sigma(\zeta_+) - \zeta_-^{1/2} \sigma(\zeta_-) \right\}, \quad (31)$$

где  $\zeta_{\pm} = (\operatorname{sgn}(B) \zeta / \Delta_{\min}) \pm 1$ , а  $\chi_{33}^{\text{os}}$  — осциллирующая составляющая, которая существует только при  $|\zeta| > \Delta_{\min}$ , и выражение для которой здесь явно не выписываем. Отметим, что, в отличие от случая I, магнитная восприимчивость в области  $|\zeta| < \Delta_{\min}$  сильно зависит от химического потенциала. По мере роста магнитного поля от  $H \ll H_{\Delta}$  к  $H \gg H_{\Delta}$  происходит постепенный переход от выражения (31) к (30). При этом в зависимости от значения  $\zeta$ , лежащего в пределах  $|\zeta| < \Delta_{\min}$ , может иметь место как монотонное (рис. 2, кривая 1) так и немонотонное (рис. 2, кривая 2) поведение магнитной восприимчивости. Напомним, полевые зависимости  $\chi_{ij}$  в случае I всегда монотонны при  $|\zeta| < \Delta_{\min}$ .

Если магнитное поле направлено под углом  $\theta$  к оси  $x_3$ , то, как следует из результатов второго

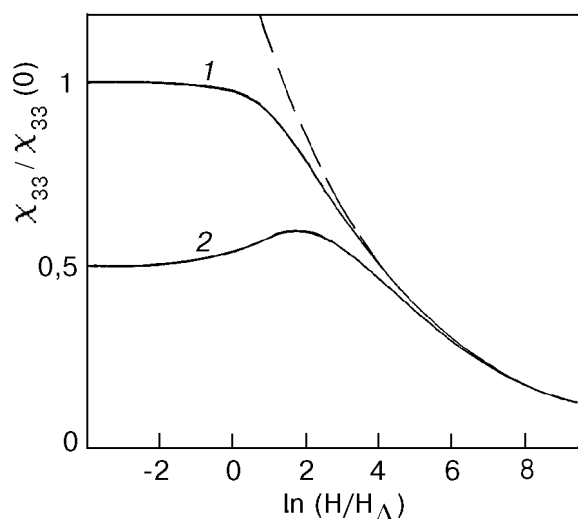


Рис. 2. Полевые зависимости  $\chi_{33}$  для случая II при  $T = 0$ . Пунктирная линия ( $\Delta = 0$ ), сплошные линии ( $\Delta \neq 0$ ) (кривая 1 построена для  $\zeta = 0$ , а кривая 2 для  $\zeta = -0,75\Delta$ );  $\chi_{33}(0)$  — значение  $\chi_{33}$  в слабом поле ( $H \rightarrow 0$ ) при  $\zeta = 0$  и  $\Delta \neq 0$ .

раздела, все полученные выше формулы для  $\Omega$ -потенциала,  $M_3$ ,  $\chi_{33}$  остаются справедливыми, если в них заменить  $H$  на  $H_3 = H \cos \theta$ . Тем самым определяются зависимости всех этих величин от направления  $H$  (при условии  $\eta \ll 1$ ). Другие компоненты намагниченности и тензора магнитной восприимчивости относительно малы, поскольку в них отсутствует гигантская аномалия [9]. Что касается зависимости  $\zeta$  от  $H$ , то для рассматриваемого случая вырождения зон плотность состояний достаточно велика при любом  $\zeta$ , и этой зависимостью можно пренебречь.

В заключение отметим, что в настоящей работе спектр электронов в магнитном поле и магнитная восприимчивость рассчитывались в одноэлектронном приближении (проявления многочастичных эффектов в орбитальной части намагниченности пока экспериментально не установлены). В то же время известно [18], что при некоторых типах вырождения зон учет взаимодействия электронов может сильно повлиять на их спектр, а значит, и магнитную восприимчивость. Исследование этого вопроса предполагается провести отдельно.

Эта работа была частично поддержана грантом № GSUO42073 Международной программы Сороса в области образования.

1. Ю. Б. Румер, *ЖЭТФ* **18**, 1081 (1948).
2. М. Я. Азбель, Е. Г. Скроцкая, *ЖЭТФ* **47**, 1958 (1964).
3. С. С. Недорезов, *ФНТ* **2**, 1047 (1976).
4. С. С. Недорезов, *ФНТ* **4**, 198 (1978).
5. Г. П. Микитик, С. С. Недорезов, *ФНТ* **6**, 1163 (1980).
6. Г. П. Микитик, С. С. Недорезов, *ФНТ* **8**, 732 (1982).
7. И. М. Лифшиц, *ЖЭТФ* **38**, 1569 (1960).
8. С. Д. Бенеславский, Л. А. Фальковский, *ЖЭТФ* **69**, 1063 (1975).
9. Г. П. Микитик, И. В. Свечкарев, *ФНТ* **15**, 295 (1989).
10. Н. Б. Брандт, М. В. Семенов, *ЖЭТФ* **69**, 1072 (1975).
11. J. M. Luttinger and W. Kohn, *Phys. Rev.* **97**, 869 (1955).
12. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1977), с. 64.
13. С. Д. Бенеславский, Л. А. Фальковский, *ФНТ* **16**, 1360 (1974).
14. Э. И. Рашба, *ФТТ* **2**, 1224 (1960).
15. Л. А. Фальковский, А. В. Бродовой, Г. В. Лашкарев, *ЖЭТФ* **80**, 334 (1981).
16. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, т. 1, Наука, Москва (1969), с. 125, 333.
17. И. М. Лифшиц, А. М. Косевич, *ЖЭТФ* **29**, 730 (1955).
18. А. А. Абрикосов, С. Д. Бенеславский, *ЖЭТФ* **59**, 1280 (1970).

### Field dependences of magnetic susceptibility of crystals under conditions of degeneracy of their electron energy bands

G. P. Mikitik and Yu. V. Sharlai

Field dependences of magnetic susceptibility of crystals are studied theoretically for two cases of degeneracy of their energy bands in which these dependences are strong. In the first case, the energy gap between bands increases linearly as a distance of the wave vector  $\mathbf{k}$  from the degeneracy point increases in the Brillouin zone. In the second case, the band degeneracy occurs along a line and the band gap increases linearly with the distance of  $\mathbf{k}$  from the line. In both cases, the exact solution of the problem of the electron energy levels in the magnetic field  $H$  is obtained. Using this solution, an analysis of the magnetic susceptibility  $\chi$  has been carried out for all values of  $H$ . In particular, it is shown that  $\chi$  is proportional to  $\ln H$  for the first case and  $H^{-1/4}$  for the second one providing the magnetic field is strong and chemical potential is near the degeneracy energy.