

**ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. ВЕРКІНА  
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ**

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

В.о. директора  
ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України



М.І. Глушук

16 вересня 2020 р.



**РОБОЧА ПРОГРАМА**  
навчальної дисципліни  
**ВСТУП ДО РІМАНОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ (ВБ 9)**

з галузі знань «11 Математика і статистика»  
за спеціальністю «111 Математика»

*Рівень вищої освіти* третій (освітньо-науковий)

*Освітня програма* доктор філософії

*Форма навчання* денна

*Загальний обсяг у  
кредитах*

*Європейської*

*кредитної трансферно-*

*накопичувальної системи: 6*

Харків - 2020

РОЗРОБЛЕНО ТА ВНЕСЕНО:

Фізико–технічним інститутом низьких температур ім. Б. І. Веркіна  
Національної академії наук України

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ:

**О.А. Борисенко** – доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України, головний науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь та геометрії ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України



Програма затверджена Вченою радою Фізико–технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Веркіна Національної академії наук України, 16 вересня 2020 р., протокол № 7.

## 1. Опис навчальної дисципліни

1.1 Метою курсу є висвітлення основних фактів та ідей ріманової геометрії та її застосувань в суміжних математичних областях

### 1.2. Характеристики навчальної дисципліни

Форма навчання	Денна
Кількість кредитів	6
Загальна кількість годин	180 год.
Рік підготовки	2-й
Семестр	3,4
Лекції	36 год.
Практичні, семінарські заняття	18 год.
Самостійна робота	126 год.

### 1.3 Анотація навчальної дисципліни

Ріманова геометрія є узагальненням теорії поверхонь, яку розробив Гаус, на простори будь-якої вимірності. Вона вивчає властивості многовидів з внутрішньої точки зору, тобто ті властивості, що залежать лише від першої квадратичної форми поверхні. До числа таких властивостей входить кривина поверхні, поведінка геодезичних ліній та їх властивості. У курсі також вивчаються многовиди сталої кривини та їх особливості. До того ж розглядаються основні методи та ідеї роботи з рімановими многовидами.

**Пререквізити:** Аналітична геометрія, диференціальна геометрія

## 2. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення курсу аспірант повинен *знати:*

- фундаментальні поняття теорії загальних ріманових многовидів та многовидів з афінною зв'язністю;
- основи варіаційної теорії геодезичних;
- фундаментальні взаємозв'язки кривини та глобальних геометричних і топологічних властивостей ріманових многовидів;
- фундаментальні поняття, конструкції та результати теорії симетричних ріманових просторів;
- фундаментальні поняття, конструкції та результати теорії келерових просторів;
- фундаментальні поняття, конструкції та результати загальної теорії відносності як приклад застосування ідей та методів ріманової геометрії;
- фундаментальні поняття, конструкції та результати диференціальної геометрії підмноговидів та теорії шарувань ріманових просторів.

*вміти:*

- доводити основні факти ріманової геометрії;
- обчислювати базові конструкції ріманової геометрії (довжина кривої, кут між кривими, об'єм області, зв'язність, коваріантна похідна, паралельний перенос, геодезична лінія, тензор кривини, секційна кривина, кривина Річчі, скалярна кривина і т.д.);
- застосовувати базові методи ріманової геометрії в задачах математичної фізики та інших суміжних областей математики.

*розвинути загальні компетенції:*

- Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- Здатність проводити дослідження на високому рівні.
- Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації.
- Здатність бути критичним і самокритичним.
- Здатність до практичного застосування знань.
- Вміння виявляти, ставити та розв'язувати актуальні проблеми.
- Здатність генерувати нові ідеї.
- Здатність до наукового мислення, володіння загальнонауковими (філософськими) компетентностями, спрямованими на формування системного наукового світогляду, професійної етики та загального культурного кругозору
- Дотримання морально-етичних правил поведінки та принципів академічної доброчесності, притаманних академічному середовищу

*розвинути фахові компетенції:*

- Вміння виявляти, чітко формулювати та розв'язувати математичні задачі.
- Здатність вибирати адекватний математичний апарат, використовувати відомі теоретичні поняття та факти для розв'язання конкретних дослідницьких задач.
- Здатність доводити математичні твердження, отримувати висновки.
- Здатність перевіряти коректність математичних тверджень.
- Вміння встановлювати зв'язки між абстрактними математичними структурами і конкретними математичними об'єктами.
- Вміння встановлювати зв'язки між ідеями та об'єктами з різних галузей математики.
- Знання та розуміння фундаментальних методів логіки, математичного, комплексного та функціонального аналізу, алгебри, геометрії, топології, диференціальних рівнянь, тощо.
- Здатність застосовувати сучасні математичні методи до прикладних задач, знання та розуміння методів побудови та якісного і кількісного аналізу математичних моделей природних, техногенних, економічних та соціальних об'єктів та процесів.
- Здатність користуватися існуючими програмними засобами для проведення обчислень, оформлення результатів роботи тощо.
- Здобуття компетентностей, достатніх для викладання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах.
- Здатність проведення самостійних досліджень на високому рівні.
- Вміння аналізувати математичні праці та виявляти мало досліджені та математично цікаві питання.
- Вміння будувати, досліджувати та застосовувати спеціальні математичні структури, використовувати їх у різних розділах математики.
- Знання фундаментальних праць провідних вітчизняних та закордонних учених у області дослідження.
- Здатність відслідковувати найважливіші праці, які з'являються у поточній спеціальній літературі.

*Загальні програмні результати навчання:*

- Мати високу загальну математичну ерудицію та фундаментальні знання в галузі спеціалізації.
- Знати методологічні принципи та методи математичного дослідження.

- Знати основи організації дослідницького наукового процесу.
- Формулювати робочі гіпотези досліджуваної проблеми, самостійно розв'язувати складні математичні задачі, доводити теореми, будувати приклади.
- Аналізувати математичні праці, визначати правильність викладених математичних фактів, оцінювати новизну та перспективність запропонованих ідей.
- Ініціювати, організовувати та проводити комплексні дослідження в галузі науково-дослідницької та інноваційної діяльності.
- Обирати нові перспективні напрямки досліджень.
- Представляти свої наукові результати англійською мовою в усній та письмовій формах.
- Розробляти наукові проекти та готувати заявки на наукові гранти (національні та міжнародні).
- Здатність працювати в команді.
- Здатність спілкуватися в діалоговому режимі з широкою науковою спільнотою, у тому числі, на міжнародному рівні.
- Здатність професійно презентувати результати своїх досліджень на наукових конференціях і семінарах (у тому числі, міжнародних), та кваліфіковано викладати результати досліджень у наукових статтях.
- Здатність презентувати свої результати широкій професійній аудиторії, яка не складається виключно зі спеціалістів у даній галузі.
- Здатність презентувати свою роботу нематематичній науковій та загальній (непрофесійній) аудиторіям
- Здатність діяти соціально відповідально та громадянсько свідомо, дотримуватись принципів академічної доброчесності.
- Здатність саморозвиватися і самовдосконалюватися, нести відповідальність за прийняття експертних рішень.
- Здатність приймати обґрунтовані рішення, мотивувати людей та рухатися до спільної мети

### 3. Тематичний план навчальної дисципліни

#### **Розділ 1. Базові поняття ріманової геометрії.**

**Тема 1.** Ріманові многовиди – базові конструкції

**Тема 2.** Многовиди з афінною зв'язністю – базові конструкції

**Тема 3.** Кривина ріманових многовидів та многовидів з афінною зв'язністю

**Тема 4.** Відображення та перетворення ріманових многовидів та многовидів з афінною зв'язністю

#### **Розділ 2. Геодезичні лінії на ріманових многовидах**

**Тема 5.** Варіаційний підхід до визначення геодезичних

**Тема 6.** Спряжені точки та множина розділу

**Тема 7.** Вплив кривини на поведінку геодезичних: теореми порівняння

**Тема 8.** Ріманові многовиди із замкнутими геодезичними

#### **Розділ 3. Вплив кривини на глобальні геометричні та топологічні властивості ріманових многовидів**

**Тема 9.** Простори сталої кривини та їх класифікація

**Тема 10.** Ріманові многовиди з обмеженнями на секційну кривину

**Тема 11.** Теорема Картана-Адамара.

**Тема 12.** Радіус ін'єктивності. Межа розділу. Теореми Клінгенберга.

**Тема 13.** Теорема про сферу.

**Тема 14.** Ріманові многовиди з обмеженнями на кривину Річчі або на скалярну кривину

**Тема 15.** Теореми Бонне і Майерса.

#### **Розділ 4. Однорідні та симетричні ріманові простори**

Тема 16. Базові конструкції. Приклади. Питання класифікації.

Тема 17. Многовиди Грассмана.

#### 4. Структура навчальної дисципліни

Назви модулів і тем	Кількість годин				
	Аудиторні години				
	Усього	у тому числі			Самост робота
лекц		сем	практ		
1	2	3	4	5	6
<b>Розділ 1. Базові поняття ріманової геометрії</b>					
<b>Тема 1.</b> Ріманові многовиди – базові конструкції.	10	2	1		7
<b>Тема 2.</b> Многовиди з афінною зв'язністю – базові конструкції.	10	2	1		7
<b>Тема 3.</b> Кривина ріманових многовидів та многовидів з афінною зв'язністю.	12	2	1		9
<b>Тема 4.</b> Відображення та перетворення ріманових многовидів та многовидів з афінною зв'язністю.	13	3	1		9
<b>Разом за розділом 1</b>	<b>45</b>	<b>9</b>	<b>4</b>		<b>32</b>
<b>Розділ 2. Геодезичні лінії на ріманових многовидах</b>					
<b>Тема 5.</b> Варіаційний підхід до визначення геодезичних.	10	2	1		7
<b>Тема 6.</b> Спряжені точки та множина розділу.	10	2	1		7
<b>Тема 7.</b> Вплив кривини на поведінку геодезичних: теореми порівняння.	12	2	1		9
<b>Тема 8.</b> Ріманові многовиди із замкнутими геодезичними.	13	3	1		9
<b>Разом за розділом 2</b>	<b>45</b>	<b>9</b>	<b>4</b>		<b>32</b>
<b>Розділ 3. Вплив кривини на глобальні геометричні та топологічні властивості ріманових многовидів</b>					
<b>Тема 9.</b> Простори сталої кривини та їх класифікація.	9	2	1		6
<b>Тема 10.</b> Ріманові многовиди з обмеженнями на секційну кривину.	9	2	1		6
<b>Тема 11.</b> Теорема Картана-Адамара.	9	2	1		6
<b>Тема 12.</b> Радіус ін'єктивності. Межа розділу. Теореми Клінгенберга.	9	2	1		6
<b>Тема 13.</b> Теорема про сферу.	10	2	2		6
<b>Тема 14.</b> Ріманові многовиди з обмеженнями на кривину Річчі або на скалярну кривину.	9	2	1		6
<b>Тема 15.</b> Теореми Бонне і Майерса.	10	3	1		6
<b>Разом за розділом 3</b>	<b>65</b>	<b>15</b>	<b>8</b>		<b>42</b>

<b>Розділ 4. Однорідні та симетричні ріманові простори</b>					
<b>Тема 16.</b> Базові конструкції. Приклади. Питання класифікації.	14	2	1		11
<b>Тема 17.</b> Многовиди Грассмана.	11	1	1		9
<b>Разом за розділом 4</b>	<b>25</b>	<b>3</b>	<b>2</b>		<b>20</b>
<b>Усього годин</b>	<b>180</b>	<b>36</b>	<b>18</b>		<b>126</b>

#### **Теми семінарських занять**

- Базові задачі ріманової геометрії, знаходження кривин та зв'язності
- Варіаційна теорія геодезичних
- Властивості геодезичних в залежності від кривини многовиду
- Глобальні властивості многовидів в залежності від їх кривини
- Однорідні та симетричні ріманові простори

#### **Теми для самостійної роботи**

- Базові поняття ріманової геометрії
- Варіаційна теорія геодезичних
- Теореми порівняння в рімановій геометрії
- Вплив кривини на топологічні властивості ріманових многовидів
- Однорідні та симетричні ріманові простори

#### **5. Методи контролю**

підсумковий екзамен (у формі письмової роботи)

#### **6. Схема нарахування балів**

Підсумковий семестровий контроль	Сума
100	100

#### **7. Методи навчання**

В процесі навчання використовуються лекції, методичні матеріали та спеціальна література.

#### **8. Шкала оцінювання**

Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою:

СУМА БАЛІВ	ОЦІНКА ЄКТС	ОЦІНКА ЗА НАЦІОНАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ
------------	-------------	-------------------------------

		екзамен	залік
90-100	A	відмінно	зараховано
82-89	B	добре	
75-81	C		
64-74	D	задовільно	
60-63	E		
35-59	FX	незадовільно	не зараховано

## 9. Критерії оцінювання

**Кількість балів**

**Критерії оцінювання**

90-100	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
75-89	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
60-74	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
35-59	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, у роботі допущено суттєві помилки, які свідчать про незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; слухач слабо володіє термінологією дисципліни.
1-34	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, Відповідь практично відсутня, слухач демонструє незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; не володіє термінологією

## 10. Орієнтовні питання до іспиту

1. Тензори.
2. Визначення многовидів. Дотичний простір.
3. Ріманова метрика на многовиді. Ізометричне відображення.
4. Афінна зв'язність, зв'язність Леві-Чивіта.
5. Геодезичні лінії. Перша варіація довжини кривої.
6. Експоненційне відображення.
7. Друга варіація довжини кривої. Рівняння Якобі. Спряжені точки. Теорема порівнювання для довжин полів Якобі.
8. Радіус ін'єктивності. Межа розділу
9. Теорема Сінга. Теорема Маєрса. Теорема Бонне.



10. Тензори кривини, секційна кривина, кривина Річчі, скалярна кривина. Тотожність Б'янки.
11. Модельні простори ріманової геометрії.
12. Повні многовиди. Теорема Хопфа-Рінова.
13. Плоскі многовиди.
14. Многовиди постійної кривини.
15. Простір Лобачевського, модель Келі-Клейна, модель Пуанкаре.
16. Фундаментальна група многовидів від'ємної кривини.
17. Фундаментальна група многовидів додатної кривини Річчі.
18. Теорема о сфері.
19. Ріманова метрика на однорідних просторах та групах Лі. Ріманова субмерсія.
20. Лапласіан.. Базові приклади. Зв'язок з кривиною.
21. Чігера, Соболева та ізопериметричні нерівності.
22. Теорема порівняння і оцінки градієнта.
23. Гармонічні функції на ріманових многовидах з невід'ємною кривиною Річчі.
24. Власні значення оператора Лапласу на рімановому многовиді.

## 11. Література

### Основна:

1. Эйзенхарт Л. П. *Риманова геометрия*. – М.: ГИИЛ, 1948.
2. Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. *Введение в риманову геометрию*. – С.-П.: Наука, 1994.
3. Громолл Д., Клингенберг В., Мейер В. *Риманова геометрия в целом*. - М.: Мир, 1971.

### Додаткова:

1. Schoen R., Yau S.T., *Lectures on Differential Geometry*, - International Press, Boston, 1994.
2. Манфредо П. до Кармо, Риманова геометрия, — М.-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2015.
3. J. Lee, Springer, *Riemannian Manifolds*, NY, 1997.
4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы и приложения*. - М.: Наука, 1986.
5. J. Cheeger, D. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, 1975.
6. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, NY, Academic prec., 1984.