ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. ВЄРКІНА НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

З А Т В Е Р Д Ж У Ю

В.о. директора
ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України

__________________ М.І. Глущук

16 вересня 2020 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА
навчальної дисципліни
ГЕОМЕТРІЯ ПІДМНОГОВИДІВ (ВБ 8)

з галузі знань «11 Математика і статистика»
за спеціальністю «111 Математика»

Рівень вищої освіти	<u>третій (освітньо-науковий)</u>
Освітня програма	<u>доктор філософії</u>
Форма навчання	<u>денна</u>
Загальний обсяг у кредитах Європейської кредитної трансферно-накопичувальної системи:	6

Харків - 2020

РОЗРОБЛЕНО ТА ВНЕСЕНО:

<u>Фізико–технічним інститутом низьких температур ім. Б. І. Вєркіна
Національної академії наук України</u>

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ:

О.А. Борисенко – доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України, головний науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь та геометрії ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України

Програма затверджена Вченою радою Фізико–технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна Національної академії наук України, 16 вересня 2020 р., протокол № 7.

1. Опис навчальної дисципліни

1.1 Метою курсу є ознайомлення аспірантів з базовими конструкціями зовнішньої та внутрішньої геометрії підмноговидів у ріманових просторах

1.2. Характеристики навчальної дисципліни

Форма навчання	Денна
Кількість кредитів	**6**
Загальна кількість годин	**180** год.
Рік підготовки	1-й
Семестр	1,2
Лекції	36 год.
Практичні, семінарські заняття	18 год.
Самостійна робота	126 год.

1.3 Анотація навчальної дисципліни

Геометрія підмноговидів почала розвиватися як окремий розділ ріманової геометрії, який вивчає багатовимірні узагальнення класичної теорії поверхонь. Якщо, ріманова геометрія досліджує властивості многовидів з внутрішньої точки зору, тобто властивості, що залежать від першої квадратичної форми поверхні, то геометрія підмноговидів вивчає будову поверхонь в охоплюючому просторі. Зовнішні властивості підмноговидів залежать від першої та другої квадратичної форми підмноговиду, та від властивостей охоплюючого простору. У цьому курсі представлені основні рівняння геометрії та наведено багато модельних прикладів та сучасних результатів щодо ізометричного занурення підмноговидів у просторах постійної кривини.

Пререквізити: Аналітична геометрія, диференціальна геометрія, ріманова геометрія, рівняння у частинних похідних

2. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення курсу аспірант повинен

знати:

- основні поняття диференціальної топології: гладкий многовид, гладке відображення, дотичний простір, векторне поле, тензорне поле, диференціал відображення, субмерсія, занурення, вкладення, занурений та вкладений підмноговид, орієнтовний підмноговид;
- основні теореми: теорема Сарда, теореми про вкладення, в тому числі теорема Уітні;
- основні поняття та результати диференціальної геометрії підмноговидів: перша та друга фундаментальні форми, індукована зв'язність, нормальна зв'язність, середня кривина, розкладення Гаусса та Вайнгартена, формули Гаусса, Кодацці, Річчі у загальному випадку та у випадках гіперповерхні, поверхні, підмноговидів у просторах постійної кривини;
- визначення та властивості основних класів підмноговидів: цілком геодезичних, цілком омбілічних, з паралельним векторним полем середньої кривини, мінімальних;
- основні властивості опуклих гіперповерхонь евклідового простору;

вміти:

- доводити, що дане відображення многовидів є вкладенням або зануренням.
- обчислювати першу та другу фундаментальні форми, індуковану та нормальну

зв'язності, середню кривину.

- визначати, чи є даний підмноговид цілком геодезичним, цілком омбілічним, з паралельним векторним полем середньої кривини, мінімальним.
- застосовувати формули Гаусса, Кодацці, Річчі до вирішення задач.

розвинути загальні компетенції:

- Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- Здатність проводити дослідження на високому рівні.
- Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації.
- Здатність бути критичним і самокритичним.
- Здатність до практичного застосовування знань.
- Вміння виявляти, ставити та розв'язувати актуальні проблеми.
- Здатність генерувати нові ідеї.
- Здатність до наукового мислення, володіння загальнонауковими (філософськими) компетентностями, спрямованими на формування системного наукового світогляду, професійної етики та загального культурного кругозору
- Дотримання морально-етичних правил поведінки та принципів академічної доброчесності, притаманних академічному середовищу

розвинути фахові компетенції:

- Вміння виявляти, чітко формулювати та розв'язувати математичні задачі.
- Здатність вибирати адекватний математичний апарат, використовувати відомі теоретичні поняття та факти для розв'язання конкретних дослідницьких задач.
- Здатність доводити математичні твердження, отримувати висновки.
- Здатність перевіряти коректність математичних тверджень.
- Вміння встановлювати зв'язки між абстрактними математичними структурами і конкретними математичними об'єктами.
- Вміння встановлювати зв'язки між ідеями та об'єктами з різних галузей математики.
- Знання та розуміння фундаментальних методів логіки, математичного, комплексного та функціонального аналізу, алгебри, геометрії, топології, диференціальних рівнянь, тощо.
- Здатність застосовувати сучасні математичні методи до прикладних задач, знання та розуміння методів побудови та якісного і кількісного аналізу математичних моделей природних, техногенних, економічних та соціальних об'єктів та процесів.
- Здатність користуватися існуючими програмними засобами для проведення обчислень, оформлення результатів роботи тощо.
- Здобуття компетентностей, достатніх для викладання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах.
- Здатність проведення самостійних досліджень на високому рівні.
- Вміння аналізувати математичні праці та виявляти мало досліджені та математично цікаві питання.
- Вміння будувати, досліджувати та застосовувати спеціальні математичні структури, використовувати їх у різних розділах математики.
- Знання фундаментальних праць провідних вітчизняних та закордонних учених у області дослідження.
- Здатність відслідковувати найважливіші праці, які з'являються у поточній спеціальній літературі.

Загальні програмні результати навчання:

- Мати високу загальну математичну ерудицію та фундаментальні знання в галузі спеціалізації.
- Знати методологічні принципи та методи математичного дослідження.
- Знати основи організації дослідницького наукового процесу.
- Формулювати робочі гіпотези досліджуваної проблеми, самостійно розв'язувати складні математичні задачі, доводити теореми, будувати приклади.
- Аналізувати математичні праці, визначати правильність викладених математичних фактів, оцінювати новизну та перспективність запропонованих ідей.
- Ініціювати, організовувати та проводити комплексні дослідження в галузі науково-дослідницької та інноваційної діяльності.
- Обирати нові перспективні напрямки досліджень.
- Представляти свої наукові результати англійською мовою в усній та письмовій формах.
- Розробляти наукові проекти та готувати заявки на наукові гранти (національні та міжнародні).
- Здатність працювати в команді.
- Здатність спілкуватися в діалоговому режимі з широкою науковою спільнотою, у тому числі, на міжнародному рівні.
- Здатність професійно презентувати результати своїх досліджень на наукових конференціях і семінарах (у тому числі, міжнародних), та кваліфіковано викладати результати досліджень у наукових статтях.
- Здатність презентувати свої результати широкій професійній аудиторії, яка не складається виключно зі спеціалістів у даній галузі.
- Здатність презентувати свою роботу нематематичній науковій та загальній (непрофесійній) аудиторіям
- Здатність діяти соціально відповідально та громадянсько свідомо, дотримуватись принципів академічної доброчесності.
- Здатність саморозвиватися і самовдосконалюватися, нести відповідальність за прийняття експертних рішень.
- Здатність приймати обґрунтовані рішення, мотивувати людей та рухатися до спільної мети

3. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Основні поняття геометрії підмноговидів

Тема 1. Многовиди

- Гладкий многовид, гладке відображення, дотичний простір, гладке відображення, диференціал відображення.
- Векторне поле, дужка Лі. Тензорне поле, диференційні форми.

Тема 2. Індукована метрика та зв'язність

- Ізометричні відображення.
- Перша фундаментальна форма підмноговиду.
- Індукована зв'язність, друга фундаментальна форма підмноговиду, розкладення Гаусса.
- Нормальна зв'язність, оператор Вайнгартена, розкладення Вайнгартена
- Поле середньої кривини. Приклади обчислення.

Тема 3. Рівняння Гаусса, Кодацці та Річчі

- Рівняння Гаусса у загальному випадку та у випадках гіперповерхні, поверхні, підмноговидів у просторах постійної кривини.
- Рівняння Кодацці у загальному та часткових випадках.

• Рівняння Річчі у загальному та часткових випадках.
• Векторні розшарування.
• Фундаментальна теорема для підмноговидів просторів постійної кривини.

Розділ 2. Класифікація підмноговидів та підмноговиди евклідового простору

Тема 1. Основні класи підмноговидів
• Цілком геодезичні підмноговиди.
• Цілком омбілічні підмноговиди.
• Аксіоми площин та сфер Картана.

Тема 2. Мінімальні підмноговиди та підмноговиди з паралельним полем середньої кривини
• Мінімальний підмноговид, означення, приклади.
• Перша та друга варіації об'єму.
• Стійкість мінімальних підмноговидів. Критерії. Поля Якобі.
• Підмноговиди з паралельним векторним полем середньої кривини.
• Поверхні постійної кривини. Стійкість.

Тема 3. Гіперповерхні евклідового простору
• Цілком омбілічні гіперповерхні.
• Ейнштейнові гіперповерхні.
• Опуклі гіперповерхні.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин				
	Аудиторні години				
	Усього	у тому числі			Самост робота
		лекц	сем	практ	
1	2	3	4	5	6
Розділ 1. ***Основні поняття геометрії підмноговидів***					
Тема 1. Многовиди.	24	4	1		19
1.1. Гладкий многовид, гладке відображення, дотичний простір, гладке відображення, диференціал відображення.	9	1	0		8
1.2. Векторне поле, дужка Лі. Тензорне поле, диференційні форми.	15	3	1		11
Тема 2. Індукована метрика та зв'язність.	33	7	4		22
2.1. Ізометричні відображення.	6	2	0		4
2.2. Перша фундаментальна форма підмноговиду.	6	1	1		4
2.3.Індукована зв'язність, друга фундаментальна форма підмноговиду, розкладення Гаусса.	6	1	1		4
2.4. Нормальна зв'язність, оператор Вайнгартена, розкладення Вайнгартена.	6	1	1		4
2.5. Поле середньої кривини. Приклади обчислення.	9	2	1		6

Тема 3. Рівняння Гаусса, Кодацці та Річчі**.**	33	7	4		22
3.1. Рівняння Гаусса у загальному випадку та у випадках гіперповерхні, поверхні, підмноговидів у просторах постійної кривини.	6	2	0		4
3.2. Рівняння Кодацці у загальному та часткових випадках.	6	1	1		4
3.3. Рівняння Річчі у загальному та часткових випадках.	6	1	1		4
3.4. Векторні розшарування.	6	1	1		4
3.5. Фундаментальна теорема для підмноговидів просторів постійної кривини.	9	2	1		6
Разом за розділом 1	**90**	**18**	**9**		**63**
Розділ 2. ***Класифікація підмноговидів та підмноговиди евклідового простору***					
Тема 1. Основні класи підмноговидів.	30	6	3		21
1.1. Цілком геодезичні підмноговиди.	10	2	1		7
1.2. Цілком омбілічні підмноговиди.	10	2	1		7
1.3. Аксіоми площин та сфер Картана.	10	2	1		7
Тема 2. Мінімальні підмноговиди та підмноговиди з паралельним полем середньої кривини.	30	6	3		21
2.1. Мінімальний підмноговид, означення, приклади.	6	1	1		4
2.2. Перша та друга варіації об’єму.	6	1	1		4
2.3. Стійкість мінімальних підмноговидів. Критерії. Поля Якобі.	6	1	1		4
2.4. Підмноговиди з паралельним векторним полем середньої кривини.	6	2	0		4
2.5. Поверхні постійної кривини. Стійкість.	6	1	0		5
Тема 3. Гіперповерхні евклідового простору	30	6	3		21
3.1. Цілком омбілічні гіперповерхні.	10	2	1		7
3.2. Ейнштейнові гіперповерхні.	10	2	1		7
3.3. Опуклі гіперповерхні.	10	2	1		7
Разом за розділом 2	**90**	**18**	**9**		**63**
Усього годин	**180**	**36**	**18**		**126**

Теми семінарських занять

- Гладкий многовид, тензорні та векторні поля
- Перша і друга квадратичні форми підмноговиду, зв'язність
- Рівняння Гаусса, Кодацці та Річчі для окремих випадків
- Цілком геодезичні т цілком омбілічні підмноговиди
- Мінімальні підмноговиди, стійкість
- Гіперповерхні евклідового простору

Теми для самостійної роботи

- Субмерсія, занурення, вкладення,теорема Сарда, теорема Фробеніуса
- Зв'язність, поле середньої кривини
- Рівняння Гаусса, Кодацці та Річчі, векторні розшарування
- Цілком геодезичні т цілком омбілічні підмноговиди
- Мінімальні підмноговиди та підмноговиди з паралельним полем середньої кривини
- Гіперповерхні евклідового простору

5. Методи контролю

підсумковий екзамен (у формі письмової роботи)

6. Схема нарахування балів

Підсумковий семестровий контроль	Сума
100	100

7. Методи навчання

В процесі навчання використовуються лекції, методичні матеріали та спеціальна література.

8. Шкала оцінювання

Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою:

<table>
<tr><th rowspan="2">СУМА БАЛІВ</th><th rowspan="2">ОЦІНКА ЄКТС</th><th colspan="2">ОЦІНКА ЗА НАЦІОНАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ</th></tr>
<tr><th>екзамен</th><th>залік</th></tr>
<tr><td>90-100</td><td>A</td><td>відмінно</td><td rowspan="5">зараховано</td></tr>
<tr><td>82-89</td><td>B</td><td rowspan="2">добре</td></tr>
<tr><td>75-81</td><td>C</td></tr>
<tr><td>64-74</td><td>D</td><td rowspan="2">задовільно</td></tr>
<tr><td>60-63</td><td>E</td></tr>
<tr><td>35-59</td><td>FX</td><td>незадовільно</td><td>не зараховано</td></tr>
</table>

9. Критерії оцінювання

Кількість балів	Критерії оцінювання
90-100	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
75-89	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
60-74	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
35-59	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, у роботії допущено суттєві помилки, які свідчать про незнання лекційного матеріалу або обов’язкової літератури; слухач слабо володіє термінологією дисципліни.
1-34	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, Відповідь практично відсутня, слухач демонструє незнання лекційного матеріалу або обов’язкової літератури; не володіє термінологією

10. Орієнтовні питання до іспиту

1. Гладкий многовид, гладке відображення, дотичний простір, диференціал відображення.
2. Субмерсія, занурення, вкладення, занурений та вкладений підмноговид. Приклади.
3. Теорема Сарда.
4. Підмноговиди. Дотичне розшарування. Теореми про вкладення, теорема Уітні.
5. Векторне поле, дужка Лі. Інволютивні розшарування. Теорема Фробеніуса.
6. Перша фундаментальна форма підмноговиду ріманового многовиду.
7. Рівняння Гаусса, Кодацці, Річчі для підмноговидів ріманового многовиду та многовидів постійної кривин.
8. Розкладення Гаусса і Вейнгартена. Індукована зв’язність, друга фундаментальна форма підмноговиду
9. Нормальні і головні кривини, вектор середньої кривини.
10. Координати Фермі.
11. Будова поверхонь нульової Гаусової кривини у тривимірному евклідовому просторі.
12. Цілком геодезичні підмногвиди. Приклади.
13. Зовнішній нуль-індекс. Ранг другої квадратичної форми. k-параболічні та сильно k-параболічні підмноговиди. Тип точки. Приклади.
14. Будова сильно параболічних підмноговидів у n-вимірному евклідовому (рімановому) просторі.
15. Локальна будова сильно параболічної поверхні у евклідовому просторі.
16. Повні сильно параболічні підмноговиди евклідового простору. Лемма Борисенко.

17. Зв'язок кривини Річчі з типом точки для підмноговидів евклідового простору.
18. Параболічні підмноговиди. Приклади параболічних, але не сильно параболічних підмноговидів. Локальна будова k-параболічних підмноговидів в евклідовому просторі.
19. Ізометричне занурення підмноговидів нульової зовнішньої кривини у евклідовому просторі.
20. Ізометричне занурення підмноговидів від’ємної зовнішньої кривини у евклідовому просторі.
21. Узагальнення теореми Топоногова. Ізометричне занурення у вигляді великої сфери у n-вимірному сферичному просторі.
22. Перша та друга варіація кривої. Поля Якобі. Спряжені точки. Індекс замкненої геодезичної.
23. Клітинний комплекс. Функція Морса. Теорія Морса.
24. k-опіклі та k-сідлові підмноговиди.
25. Теорема Франкеля та її узагальнення для сідловин підмноговидів.
26. Сідлові поверхні сферичного простору.
27. Зв’язність у нормальному розшаруванні. Плоска нормальна зв’язність. Підмноговиди з плоскою нормальною зв’язністю у просторах постійної кривини.
28. Перше нормальний простір та точкова коразмірність. Редукція корозмірності. Повністю геодезичне омбілічне ізометричне занурення.
29. Опуклі гіперповерхні, зв’язок з другою квадратичною формою.
30. Теорема Мура про занурення у вигляді зв’язної суми
31. Рівняння Дарбу для двовимірних ріманових многовидів. Розв’язки для різних випадків.
32. Рівняння нескінченно малих згинань. Рішення для випадку додатної гауссової кривини.
33. Еліптичні лінійні та нелінійні рівняння у часткових похідних. Принцип максимума для еліптичних рівнянь у часткових похідних. Теорема Хопфа.
34. Теореми Александрова. Теореми єдиності для поверхонь в цілому.

11. Література

Основна:

1. А.А. Борисенко. Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий. – М.: Экзамен, 2003.
2. Ю.А. Аминов. Геометрия подмногообразий. – К.: Наукова думка, 2002.
3. M. Dajczer. Submanifolds and isometric immersions. – Houston: Publish or Perish, 1990.
4. B.-Y. Chen. Geometry of submanifolds and its applications. – Tokyo, 1981

Додаткова:

1. С. Стернберг, Лекции по дифференциальной геометрии, М., “Мир”, 1970, 412 с.
2. М. Хирш. Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1979.
3. Дж. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. Начальный курс. – М.: Мир, 1972.
4. Дж. Милнор. Теория Морса. М., “Мир”, 1965.
5. М.М. Постников. Гладкие многообразия. – М.: Наука, 1988.
6. Д. Громол, В. Клингенберг, В. Майер. Риманова геометрия в целом, М., “Мир”, 1971.
7. С. Стернберг. Лекции по дифференциальной геометрии. – М.: Мир, 1970.
8. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко Современная геометрия. Методы и приложения. – М.: Наука, 1986.
9. Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы дифференциальной геометрии, том 2. – М.: Наука, 1981.

10. А.А. Тужилин, А.Т. Фоменко. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. – М.: Наука, 1991.
11. T.H. Colding, W.P. Minicozzi II. Minimal surfaces. – NY: Courant Institute, 1999.
12. В. Бляшке. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна, ГРОНИЛ, 1935.
13. А. Д. Александров, Некоторые теоремы о дифференциальных уравнениях в частных производных второго порядка, Вестник ЛГУ. 1954. № 8. Сер. математики, физики и химии. Вып. 3. с. 3–17.