ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. ВЄРКІНА

НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

З А Т В Е Р Д Ж У Ю

В.о. директора
ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України

_________________ М.І. Глущук

16 вересня 2020 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА

навчальної дисципліни

РІМАНОВА ГЕОМЕТРІЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ (ВБ 3)

з галузі знань «11 Математика і статистика»
за спеціальністю «111 Математика»

Рівень вищої освіти	третій (освітньо-науковий)
Освітня програма	доктор філософії
Форма навчання	денна
Загальний обсяг у кредитах Європейської кредитної трансферно-накопичувальної системи:	9

Харків - 2020

РОЗРОБЛЕНО ТА ВНЕСЕНО:

<u>Фізико–технічним інститутом низьких температур ім. Б. І. Вєркіна</u>
<u>Національної академії наук України</u>

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

М.І. Нессонов – доктор фізико-математичних наук, доцент, провідний науковий співробітник відділу теорії функцій ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України

Програма затверджена Вченою радою Фізико–технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна Національної академії наук України, 16 вересня 2020 р., протокол № 7.

1. Опис навчальної дисципліни

1.1 Метою курсу є викладення класичної теорії зображень скінчених симетричних груп та скінченновимірних матричних груп. Далі планується висвітлення основних ідей дослідження зображень нескінченої симетричної групи S_∞ та нескінченновимірних ортогональної O_∞ та унітарної U_∞ груп. Завершальна частина курсу буде присвячена теорії характерів на S_∞, O_∞ та U_∞

1.2. Характеристики навчальної дисципліни

Форма навчання	Денна
Кількість кредитів	**9**
Загальна кількість годин	**270** год.
Рік підготовки	2-й
Семестр	3,4
Лекції	36 год.
Практичні, семінарські заняття	18 год.
Самостійна робота	216 год.

1.3 Анотація навчальної дисципліни

Теорія зображень є галуззю математики, що вивчає абстрактні алгебраїчні структури з допомогою представлення їх елементів лінійними перетвореннями векторних просторів. По суті, зображення робить алгебраїчний об'єкт більш конкретним, описуючи його елементи матрицями чи операторами. При цьому алгебраїчним операціям над елементами відповідають звичайні операції над матрицями чи операторами. Алгебраїчними об'єктами, для яких, як правіло, розвивається теорія зображень, є групи та алгебри різного походження. Зокрема, групи Лі та алгебри Лі. Класична теорії зображень була розпочата роботами Фробеніуса и Шура наприкінці 19 та початку 20 століть, у яких, зокрема, були знайдені усі незвідні зображення скінчених симетричних груп. Після цього Г. Вейль одержав повний опис незвідних зображень класичних матричних груп, зокрема для унітарної та ортогональної груп. Важливою сучасною галуззю теорії зображень є так звана асимптотична теорія зображень, у рамках якої будуються та досліджуються зображення нескінчених та нескінченновимірних груп. Зокрема, значні просування відбулися у вивчанні зображень нескінченої симетричної групи та індуктивних границь класичних матричних груп (великих груп). Відповідні постановки задач, методи і результати взаємодіють з окремими галузями аналізу і математичної фізики. Зокрема техніка, розвинена у теорії випадкових матриць вдало застосовується при конструкції зображень великих груп та побудові на них гармонічного аналізу.

Пререквізити: Алгебра, функціональний аналіз, елементи спектральної теорії операторів.

2. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення курсу аспірант повинен

знати:

- основні факти теорії *-алгебр (дуальний простір банахової *-алгебри та C^*-алгебри, позитивний функціонал (стан) на алгебрі, конструкція Гельфанда-Наймарка-Сигала, чистий стан, нерозкладний стан);
- теорію Петера-Вейля;
- доведення простоти схеми галуження для незвідних зображень ланцюжку симетричних груп;

- повний опис незвідних зображень скінчених симетричних груп та їхні реалізації з допомогою таблиць Юнга;
- властивість мультиплікативності для нерозкладних характерів та станів на великих групах;
- теореми Тома та Войкулеску;

вміти:

- доводити повноту списку незвідних зображень групи SU(2) та одержувати звідси класичні властивості поліномів Якобі та Лежандра;
- обчислювати матричні елементи незвідних зображень симетричних груп у базисі таблиць Юнга для коксетеровських твірних;
- доводити повноту списку незвідних ручних зображень для нескінченої симетричної групи;
- доводити теорему Тома.

розвинути загальні компетенції:

- Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- Здатність проводити дослідження на високому рівні.
- Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації.
- Здатність бути критичним і самокритичним.
- Здатність до практичного застосовування знань.
- Вміння виявляти, ставити та розв'язувати актуальні проблеми.
- Здатність генерувати нові ідеї.
- Здатність до наукового мислення, володіння загальнонауковими (філософськими) компетентностями, спрямованими на формування системного наукового світогляду, професійної етики та загального культурного кругозору
- Дотримання морально-етичних правил поведінки та принципів академічної доброчесності, притаманних академічному середовищу

розвинути фахові компетенції:

- Вміння виявляти, чітко формулювати та розв'язувати математичні задачі.
- Здатність вибирати адекватний математичний апарат, використовувати відомі теоретичні поняття та факти для розв'язання конкретних дослідницьких задач.
- Здатність доводити математичні твердження, отримувати висновки.
- Здатність перевіряти коректність математичних тверджень.
- Вміння встановлювати зв'язки між абстрактними математичними структурами і конкретними математичними об'єктами.
- Вміння встановлювати зв'язки між ідеями та об'єктами з різних галузей математики.
- Знання та розуміння фундаментальних методів логіки, математичного, комплексного та функціонального аналізу, алгебри, геометрії, топології, диференціальних рівнянь, тощо.
- Здатність застосовувати сучасні математичні методи до прикладних задач, знання та розуміння методів побудови та якісного і кількісного аналізу математичних моделей природних, техногенних, економічних та соціальних об'єктів та процесів.
- Здатність користуватися існуючими програмними засобами для проведення обчислень, оформлення результатів роботи тощо.
- Здобуття компетентностей, достатніх для викладання математичних дисциплін у

вищих навчальних закладах.
- Здатність проведення самостійних досліджень на високому рівні.
- Вміння аналізувати математичні праці та виявляти мало досліджені та математично цікаві питання.
- Вміння будувати, досліджувати та застосовувати спеціальні математичні структури, використовувати їх у різних розділах математики.
- Знання фундаментальних праць провідних вітчизняних та закордонних учених у області дослідження.
- Здатність відслідковувати найважливіші праці, які з'являються у поточній спеціальній літературі.

Загальні програмні результати навчання:

- Мати високу загальну математичну ерудицію та фундаментальні знання в галузі спеціалізації.
- Знати методологічні принципи та методи математичного дослідження.
- Знати основи організації дослідницького наукового процесу.
- Формулювати робочі гіпотези досліджуваної проблеми, самостійно розв'язувати складні математичні задачі, доводити теореми, будувати приклади.
- Аналізувати математичні праці, визначати правильність викладених математичних фактів, оцінювати новизну та перспективність запропонованих ідей.
- Ініціювати, організовувати та проводити комплексні дослідження в галузі науково-дослідницької та інноваційної діяльності.
- Обирати нові перспективні напрямки досліджень.
- Представляти свої наукові результати англійською мовою в усній та письмовій формах.
- Розробляти наукові проекти та готувати заявки на наукові гранти (національні та міжнародні).
- Здатність працювати в команді.
- Здатність спілкуватися в діалоговому режимі з широкою науковою спільнотою, у тому числі, на міжнародному рівні.
- Здатність професійно презентувати результати своїх досліджень на наукових конференціях і семінарах (у тому числі, міжнародних), та кваліфіковано викладати результати досліджень у наукових статтях.
- Здатність презентувати свої результати широкій професійній аудиторії, яка не складається виключно зі спеціалістів у даній галузі.
- Здатність презентувати свою роботу нематематичній науковій та загальній (непрофесійній) аудиторіям
- Здатність діяти соціально відповідально та громадянсько свідомо, дотримуватись принципів академічної доброчесності.
- Здатність саморозвиватися і самовдосконалюватися, нести відповідальність за прийняття експертних рішень.
- Здатність приймати обґрунтовані рішення, мотивувати людей та рухатися до спільної мети

3. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Загальна теорія зображень скінчених та компактних груп.
Тема 1. Групова алгебра скінченої групи.

Повна приводимість. Лема Шура. Регулярне зображення. Дуальне зображення. Незвідне зображення та його характер. Тензорний добуток зображень. Позитивний стан (функціонал) на груповій алгебрі. Конструкція Гельфанда-Наймарка-Сигала.

Тема 2. Групова алгебра локально компактної групи.

Міра Хаара. Існування інваріантного скалярного добутку на просторі представлення. Теорія Петера-Вейля.

Розділ 2. Опис незвідних зображень для скінчених симетричних груп та класичних груп (унітарна група, ортогональна група, симплектична група).

Тема 3. Простота схеми галуження для ланцюжку груп $S_1 < S_2 < S_3 < \ldots$. Вироджена алгебра Гекке. Алгебра Гельфанда-Цетліна та елементи Юциса-Мьорфі. Спектр елементів Юциса-Мьорфі та таблиці Юнга. Дія коксетеровських твірних на таблицях Юнга.

Тема 4. Класифікація простих комплексних алгебр Лі: діаграми Динкіна, опис діаграм Динкіна, відбудова алгебри Лі по її діаграмі Динкіна. Зв'язок між зображеннями групи Лі та її алгебри Лі. Зображення комплексних простих груп Лі. Розкладення Брюа. Незвідні зображення унітарної, симплектичної та ортогональної груп. Спінорні зображення ортогональної групи. Двоїстість Шура-Вейля.

Розділ 3. Класифікація ручних зображень нескінченої симетричної групи та нескінченновимірних унітарної і ортогональної груп.

Тема 5 Група скінчених підстановок нескінченої лічильної множини та повна симетрична група. Автоматична неперервність унітарного зображення повної симетричної групи. Опис незвідних зображень повної симетричної групи. Напівгрупа часткових бієкцій.

Тема 6. Розширення ручного зображення нескінченновимірної унітарної групи до зображення напівтрупи стиснень. Класифікація незвідних ручних зображень унітарної та ортогональної груп.

Тема 7. Теорема мультиплікативності для нерозкладних характерів. Нерозкладні характери на $\mathbf{S}_\infty$ та тотально позитивні матриці. Теорема Тома. Операторний підхід А.Ю. Окунькова. Реалізації фактор зображень скінченого типу групи S_∞.

Тема 8. Нерозкладні характери на U_∞. Теорема Д. Войкулеску. Реалізації фактор зображень скінченого типу групи U_∞.

Тема 9. Класифікація допустимих зображень пари ($S_\infty \times S_\infty$, diag S_∞): матричні реалізації, аналог двоїстості Шура-Вейля. Звуження незвідного представлення групи $S_\infty \times S_\infty$ на компоненти $S_\infty \times e$ та $e \times S_\infty$.

Стабільні зображення групи. Опис стабільних фактор зображень групи $\mathbf{S}_\infty$.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин				
	Аудиторні години				
	Усього	у тому числі			Самост робота
		лекц	сем	практ	
1	2	3	4	5	6
Розділ 1. Загальна теорія зображень скінчених та компактних груп					
Тема 1. Групова алгебра скінченої групи. Повна приводимість. Лема Шура. Регулярне зображення. Дуальне зображення. Незвідне зображення та його характер. Тензорний добуток зображень. Позитивний стан (функціонал) на груповій алгебрі.	24	4	2		18

Конструкція Гельфанда-Наймарка-Сигала.					
Тема 2. Групова алгебра локально компактної групи. Міра Хаара. Існування інваріантного скалярного добутку на просторі представлення. Теорія Петера-Вейля.	30	4	2		24
Разом за розділом 1	54	8	4		42
Розділ 2. Опис незвідних зображень для скінчених симетричних груп та класичних груп (унітарна група, ортогональна група, симплектична група).					
Тема 3. Простота схеми галуження для ланцюжку груп $S_1 < S_2 < S_3 < \ldots$. Вироджена алгебра Гекке. Алгебра Гельфанда-Цетліна та елементи Юциса-Мьорфі. Спектр елементів Юциса-Мьорфі та таблиці Юнга. Дія коксетеровських твірних на таблицях Юнга.	32	4	4		24
Тема 4. Класифікація простих комплексних алгебр Лі: діаграми Динкіна, опис діаграм Динкіна, відбудова алгебри Лі по її діаграмі Динкіна. Зв'язок між зображеннями групи Лі та її алгебри Лі. Зображення комплексних простих груп Лі. Розкладення Брюа. Незвідні зображення унітарної, симплектичної та ортогональної груп. Спінорні зображення ортогональної групи. Двоїстість Шура-Вейля.	48	4	2		42
Разом за розділом 2	80	8	6		66
Розділ 3. Класифікація ручних зображень нескінченої симетричної групи та нескінченновимірних унітарної і ортогональної груп					
Тема 5 Група скінчених підстановок нескінченої лічильної множини та повна симетрична група. Автоматична неперервність унітарного зображення повної симетричної групи. Опис незвідних зображень повної симетричної групи. Напівгрупа часткових бієкцій.	14	2			12
Тема 6. Розширення ручного зображення нескінченновимірної унітарної групи до зображення напівтрупи стиснень. Класифікація	12	2			10

незвідних ручних зображень унітарної та ортогональної груп.					
Разом за розділом 3	26	4			22
Розділ 4. Опис характерів на S_∞, O_∞ та U_∞. (теореми Тома і Войкулеску). Класифікація допустимих зображень пари ($S_\infty \times S_\infty$, diag S_∞)					
Тема 7. Теорема мультиплікативності для нерозкладних характерів. Нерозкладні характери на $\mathbf{S}_\infty$ та тотально позитивні матриці. Теорема Тома. Операторний підхід А.Ю. Окунькова. Реалізації фактор зображень скінченого типу групи S_∞.	40	6	4		30
Тема 8. Нерозкладні характери на U_∞. Теорема Д. Войкулеску. Реалізації фактор зображень скінченого типу групи U_∞.	38	6	2		30
Тема 9. Класифікація допустимих зображень пари ($S_\infty \times S_\infty$, diag S_∞): матричні реалізації, аналог двоїстості Шура-Вейля. Звуження незвідного представлення групи $S_\infty \times S_\infty$ на компоненти $S_\infty \times e$ та $e \times S_\infty$. Стабільні зображення групи. Опис стабільних фактор зображень групи $\mathbf{S}_\infty$.	26	4	2		20
Разом за розділом 4	104	16	8		80
Підготовка до екзамену.	6				6
Усього годин	**270**	36	18		**216**

Теми семінарських занять

- Дія унітарної групи на алгебрі матриць спряженнями та розкладення її тензорних степенів на незвідні компоненти. Звуження цієї дії на симетричну підгрупу.
- Матричне представлення перестановочної дії симетричної групи на тензорній степені простору.
- Міри Хаара на унітарній та ортогональній групах. Формула Вейля для характеру.
- Зв'язок між характеруми симетричної групи та загальної лінійної групи.
- Реалізації ручних зображень нескінченої симетричної групи. Асимптотичні проектори.
- Параметри Тома і асимптотика діаграм Юнга.
- Граничний перехід від формули Вейля до формули Войкулеску для характеру групи U_∞.

Теми для самостійної роботи

- Форма Кіллінга і критерій Картана.
- Повна приводимість та розкладення Жордана.
- Існування картанівської підалгебри. Структура напівпростих алгебр Лі.
- Спряженість картанівських підалгебр. Група Вейля.
- Основні симетричні поліноми та співвідношення між ними.
- Доведення детермінантних тотожностей.
- Алгебра Кліффорда та спінорне зображення ортогональної групи

5. Методи контролю

поточний (домашні завдання); підсумковий екзамен (у формі письмової роботи)

6. Схема нарахування балів

Поточний контроль					Екзамен	Сума
Розділ 1	**Розділ 2**	**Розділ 3**	**Розділ 4**	Разом		
15	15	10	20	60	40	100

7. Методи навчання

В процесі навчання використовуються лекції, презентації, методичні матеріали та спеціальна література. Обладнання - аудиторія з дошкою та крейдою; технічні засоби, необхідні для демонстрації презентацій.

8. Шкала оцінювання

Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою:

СУМА БАЛІВ	ОЦІНКА ЄКТС	ОЦІНКА ЗА НАЦІОНАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ	
		екзамен	залік
90-100	A	відмінно	зараховано
82-89	B	добре	
75-81	C		
64-74	D	задовільно	
60-63	E		
35-59	FX	незадовільно	не зараховано

9. Критерії оцінювання

Кількість балів	Критерії оцінювання
90-100	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
75-89	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
60-74	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним

	матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
35-59	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, у роботіі допущено суттєві помилки, які свідчать про незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; слухач слабо володіє термінологією дисципліни.
1-34	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, Відповідь практично відсутня, слухач демонструє незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; не володіє термінологією

10. Орієнтовні питання до іспиту

1. Повна приводимість зображень компактної групи.
2. Співвідношення ортогональності між матричними елементами унітарних незвідних зображень компактної групи.
3. Позитивно визначені функції на групі, позитивні функціонали на груповій алгебрі і конструкція Гельфанда-Наймарка-Сигала.
4. Групи і алгебри Лі. Алгебра Лі групи SU(2).
5. Матричні елементи групи SU(2) та поліноми Якобі (Лежандра).
6. Діаграми Динкіна алгебри Лі. Класифікація Картана.
7. Простота схеми галуження для ланцюжку симетричних груп $S_1< S_2< S_3<\ldots$ ..
8. Оператори Юциса-Мьорфі та базис Гельфанда-Цетліна для ланцюжку симетричних груп $S_1< S_2< S_3<\ldots$
9. Спектр операторів Юциса-Мьорфі та числа заповнення діаграм Юнга.
10. Матричні елементи для дій коксетеровскіх твірних на таблицях Юнга.
11. Елементи Юциса-Мьорфі, симетричні функції та центр групової алгебри симетричної групи.
12. Незвідні зображення групи GL(2,Fq), де Fq - поле з q елементів.
13. Двоїстість Шура-Вейля для унітарної та загально лінійної груп.
14. Двоїстість Шура-Вейля для унітарної групи у випадку змішаних тензорів.
15. Класифікація усіх незвідних зображень унітарної групи та їхня параметризація.
16. Алгебра Кліффорда і спінорне зображення ортогональної групи.
17. Міра Хаара на унітарній та ортогональній групах.
18. Функції Шура да формула Вейля для характеру.
19. Характеристичне відображення між простором центральних функцій на симетричній групі та простором симетричних функцій.
20. Визначення ручного зображення групи. Приклади.
21. Напівгрупа подвійних класів суміжності для нескінченної симетричної групи.
22. Група скінчених підстановок та повна симетрична група, як група її автоморфізмів. Ручні незвідні зображення нескінченої симетричної групи та зображення відповідної напівгрупи подвійних класів суміжності.
23. Ручні зображення нескінченновимірних унітарної та ортогональної груп. Напівгрупи подвійних класів суміжності для цих груп та напівтрупи стиснень.
24. Класифікація незвідних ручних зображень нескінченновимірних унітарної та ортогональної груп.
25. Нерозкладні характери на S_∞. Параметри Тома.
26. Асимптотика діаграм Юнга і параметри Тома.
27. Тотально позитивні матриці і характери Тома.

28. Матричні реалізації фактор представлень S_∞ скінченого типу.

11. Література

Основна:

1. W.Fulton, J. Harris, Representations Theory. A First Course – Springer, 1991, 551 pp.
2. I.G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials. OXFORD MATHEMATICAL MONOGRAPHS, 1995.
3. У. Фултон, Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии (перевод с английского). МЦНМО, 2006.
4. А.А. Кириллов, Элементы теории представлений. М. Наука, 1972, 1078.

Додаткова:

1. Д. П. Желобенко, Компактные группы и их представления. МЦНМО, 2007.
2. Д. П. Желобенко, А.И. Штерн, Представления групп Ли. М. Наука, 1983.
3. F. Bruhat, Lectures on Lie groups and representations of locally compact groups, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay,1958