Додаток №1
до Положення щодо розробки силабусу
компонентів освітньо-наукової програми з
підготовки докторів філософії у
ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. ВЄРКІНА НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

З А Т В Е Р Д Ж У Ю

В.О. Директора
ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна
НАН України

_________________ М.І. Глущук

«07» ____07____ 2020 р.

СИЛАБУС
навчальної дисципліни
СУЧАСНІ МЕТОДИ АСИМПТОТИЧНОГО АНАЛІЗУ (ВБ 5)
2020-2021 навчальний рік

з галузі знань «11 Математика і статистика»
за спеціальністю «111 Математика»

РОЗРОБНИК:

Д.Г. Шепельський – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу математичної фізики ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України

Погоджено Вченою радою Математичного відділення ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України 06.07.2020 р., протокол № 4.

Затверджено Вченою радою Фізико–технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна Національної академії наук України, 07.07. 2020 р., протокол № 5.

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. ВЄРКІНА
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

СИЛАБУС
навчальної дисципліни
СУЧАСНІ МЕТОДИ АСИМПТОТИЧНОГО АНАЛІЗУ
2020-2021 навчальний рік

Назва п/п	*Коротка інформація*
Назва	**СУЧАСНІ МЕТОДИ АСИМПТОТИЧНОГО АНАЛІЗУ**
Адреса викладання	м. Харків, пр. Науки, 47
Рівень вищої освіти	Третій освітньо-науковий рівень
Галузі знань	11 «Математика і статистика
Шифр та назва спеціальності	111 Математика
Викладач /-чі/	д. ф.-м. н., с.н.с. Шепельский Д.Г. д. ф.-м. н., с.н.с. Єгорова І.Є. д. ф.-м. н., професор Котляров В.П.
Контактна інформація викладача (-ів)	shepelsky@yahoo.com iraegorova@gmail.com vkot44@gmail.com
Графік занять	За розкладом
Консультації по курсу відбуваються	Вівторок, четвер 12.00-14.00. пр. Науки, 47, корпус Біо, к. 213; он-лайн консультації через Skype або Wiber (для узгодження часу писати на електронну пошту)

Назва п/п	*Коротка інформація*
Сторінка курсу	https://
Інформація про навчальну дисципліну	Дисципліна «Сучасні методи асимптотичного аналізу» є дисципліною вільного вибору, яка входить до циклу професійної підготовки за спеціальністю 111 «Математика» на третьому /освітньо-науковому/ рівні підготовки доктора філософії з математики. Дана дисципліна викладається у 3-4 семестрах підготовки в обсязі 9 кредитів за Європейською кредитно-трансферною системою /ECTS/.
Анотація	Одним з сучасних методів дослідження асимптотичної поведінки різноманітних об'єктів у математичній фізиці (розв'язки нелінійних інтегровних рівнянь з частинними похідними та нелінійних інтегровних дискретних систем, випадкові матриці великого розміру, тощо) є нелінійний метод найшвидшого спуску. Його застосування базується на зображенні об'єкта дослідження в термінах розв'язку задачі аналітичної факторизації типу Рімана-Гільберта. Певною мірою, цей метод є нелінійним аналогом методів стаціонарної фази та найшвидшого спуску, які застосовуються для асимптотичного дослідження лінійних задач, де об'єкт дослідження зображується контурним інтегралом. Особливості застосування цього методу до розв'язків задач Коші для нелінійних інтегровних рівнянь будуть аналізуватись у курсі на прикладах (і) задач з нульовими крайовими умовами для рівняння Кортевега-де Фріза, нелінійного рівняння Шредингера, рівняння Камаси-Хольма та (іі) задач з ненульовими крайовими умовами (задачі «типу сходинки») для цих же рівнянь.
Мета та цілі	Метою курсу є висвітлення основних ідей дослідження асимптотичної поведінки розв'язків матричної задачі Рімана-Гільберта як нелінійного аналогу методу стаціонарної фази, для дослідження асимптотик розв'язків нелінійних інтегровних систем (дискретних та неперервних). Основними цілями є (і) ознайомлення з методами дослідження нелінійних рівнянь, що базуються на варіанті методу оберненої задачі розсіяння, який має вигляд задачі аналітичної факторизації типу Рімана-Гільберта; (іі) ознайомлення з основними ідеями асимптотичного аналізу задач Рімана-Гільберта, які відповідають як задачам на нульовому фоні, так і задачам з початковими даними типу «сходинки».
Загальний обсяг у кредитах Європейської кредитно-трансферної системи /ECTS/	9 кредитів
Загальна кількість годин	270 годин
Структура	54 години аудиторних: з них 36 годин лекцій, 18 годин семінарських занять, 216 годин самостійної роботи.

Назва п/п	*Коротка інформація*
Очікувані результати навчання	У результаті вивчення курсу аспірант повинен знати: • властивості інтегралів типу Коші у різних випадках (біля кінців контуру інтегрування; у випадку особливостей різного типу); • теореми про розв'язання скалярної задачі Рімана-Гільберта; • теореми про розв'язання матричної задачі Рімана-Гільберта; • ідеї зображення пар Лакса для нелінійних інтегровних рівнянь; • конструкції розв'язків задач Рімана-Гільберта на системі контурів з постійними матрицями стрибка; • ідеї застосування g-функції для послідовностей трансформацій задачі Рімана-Гільберта вміти: • конструювати задачі аналітичної факторизації, виходячи з розв'язків Йоста лінійних рівнянь відповідних пар Лакса; • аналізувати «таблиці знаків» g-функцій та обирати послідовність трансформацій вихідної задачі Рімана-Гільберта; • конструювати параметрикси для асимптотичного аналізу задач Рімана-Гільберта; • доводити збіжність, за великим часом, розв'язків задач Рімана-Гільберта до розв'язків відповідних модельних (граничних) задач.
Ключові слова	Асимптотичних аналіз, задача Рімана-Гільберта, g-функція
Програма навчальної дисципліни	Програма навчальної дисципліни складається з **4-х розділів**: 1. Теорія граничних задач Рімана-Гільберта. 2. Теорія дослідження нелінійних рівнянь методом оберненої задачі розсіяння. 3. Асимптотичний аналіз задач Коші з початковими даними, що спадають на нескінченності. 4. Асимптотичний аналіз задач Коші з початковими даними, що не спадають на нескінченності
Короткий опис змісту тем	**Розділ 1. Теорія граничних задач Рімана-Гільберта**. **Тема 1.** Інтеграл типу Коші. Головне значення інтегралу типу Коші. Формули Сохоцького-Племеля. Властивості граничних значень інтегралу типу Коші. **Тема 2.** Скалярна гранична задача Рімана-Гільберта. Індекс задачі. Задача Рімана-Гільберта для однозв'язної області. Задача Рімана-Гільберта для багатозв'язної області **Тема 3**. Матрична гранична задача Рімана-Гільберта. Індекс задачі. Теореми про розв'язність задачі.

Назва п/п	*Коротка інформація*
	Розділ 2. Теорія дослідження нелінійних рівнянь методом оберненої задачі розсіяння. **Тема 4.** Інтегровні нелінійні рівняння. Пара Лакса. Розв'язки Йоста лінійних рівнянь з пари Лакса. Задача розсіяння. Матриця розсіяння. Спектральні функції. **Тема 5.** Задача Рімана-Гільберта. Отримання сім’ї задач Рімана-Гільберта з задачі розсіяння. Задача Рімана-Гільберта у якості оберненої задачі для лінійних рівнянь з пари Лакса. Солітонні розв’язки як спеціальний випадок розв’язків задачі Рімана-Гільберта. **Розділ 3. Асимптотичний аналіз задач Коші з початковими даними, що спадають на нескінченності.** **Тема 6**. Асимптотичний аналіз задачі Коші в термінах асимптотичного аналізу задачі Рімана-Гільберта. Таблиця знаків фазової функції. Алгебраїчні (трикутні) факторизації матриці стрибків на дійсній осі. Деформації контуру вихідної задачі Рімана-Гільберта. **Тема 7**. Асимптотика у секторі подібності. Задача Рімана-Гільберта для диференціального рівняння параболічного циліндру. Апроксимація розв’язку вихідної (деформованої) задачі Рімана-Гільберта розв’язком задачі Рімана-Гільберта для рівняння параболічного циліндру. Отримання головного члена асимптотики. **Тема 8**. Асимптотики у перехідних зонах: зона Пенлеве. Задача Рімана-Гільберта для рівняння Пенлеве-II. Апроксимація розв’язку вихідної задачі розв’язком задачі Рімана-Гільберта для рівняння Пенлеве-II. **Тема 9.** Асимптотики у перехідних зонах: зона хвиль дисперсійного шоку. Задача Рімана-Гільберта на двох відрізках та її розв’язок у термінах еліптичних функцій. **Розділ 4. Асимптотичний аналіз задач Коші з початковими даними, що не спадають на нескінченності.** **Тема 10.** Задача Рімана-Гільберта для задачі Коші з початковими даними типу сходинки. Фонові розв'язки лінійних рівнянь з пари Лакса. Задача розсіяння та її трансформація у задачу Рімана-Гільберта. **Тема 11**. Секторальні асимптотики: зона Захарова-Манакова. Деформації вихідної задачі Рімана-Гільберта. Апроксимація розв’язку вихідної задачі розв’язком задачі Рімана-Гільберта для рівняння параболічного циліндру. **Тема 12**. Секторальні асимптотики: зона плоскої хвилі. Задача Рімана-Гільберта на одному відрізку. Розв’язок у термінах алгебраїчних функцій. Апроксимації. Задача про параметрикс.

Назва п/п	*Коротка інформація*
	Тема 13. Секторальні асимптотики: зона еліптичної хвилі. Алгебраїчні факторизації матриць стрибку. Задача Рімана-Гільберта на двох відрізках та її розв'язок у термінах еліптичних функцій. **Тема 14.** Локальні задачі: параметрикси. Розв'язки локальної задачі в термінах функцій параболічного циліндру. Локальні задачі в термінах функції Ейрі.
Теми семінарських занять	- Граничні значення інтегралів типу Коші - Скалярні граничні задачі Рімана-Гільберта для розімкнених контурів - Пара Лакса для лінійних рівнянь - Пари Лакса для нелінійних рівнянь - Асимптотика розв'язків задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза з початковими даними, що спадають до 0. - Векторні та матричні формулювання задач Рімана-Гільберта для рівнянь Кортевега-де Фріза та Камаси-Хольма. - Асимптотика розв'язків задачі Коші на нульовому фоні для рівняння Камаси-Хольма. - Асимптотика розв'язків задачі Коші для нелінійного рівняння Шредінгера з початковими даними типу сходинки.
Теми для самостійної роботи	- Скалярні задачі Рімана-Гільберта. - Векторні (матричні) задачі Рімана-Гільберта. - Аналітичні властивості розв'язків Йоста для одновимірного рівняння Шредінгера - Аналітичні властивості розв'язків Йоста для системи рівнянь Дірака - Нулі спектральних функцій. Умови на лишки для задач Рімана-Гільберта - Тета-функції Рімана. Рімановi поверхні. Базис циклів. Диференціали на ріманових поверхнях. Абелєві інтеграли. - g-функції. Конструкції g-функцій в термінах інтегралів типу Коші та в термінах абелєвих інтегралів. Задачі параметриксів
Підсумковий контроль, форма	Іспит/екзамен
Пререквізити	Комплексний аналіз, дійсний аналіз, елементи спектральної теорії операторів

<table>
<tr><th>Назва п/п</th><th>Коротка інформація</th></tr>
<tr><td>Постреквізити</td><td>Оволодіння основними положеннями навчальної дисципліни дозволить застосовувати їх до дослідження різноманітних асимптотичних задач математичної фізики</td></tr>
<tr><td>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</td><td>В процесі навчання використовуються лекції, презентації, методичні матеріали та спеціальна література.</td></tr>
<tr><td>Необхідне обладнання</td><td>Технічні засоби, необхідні для демонстрації презентацій, загально вживані програми.</td></tr>
<tr><td>Шкала оцінювання</td><td>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою:
<table>
<tr><th rowspan="2">СУМА БАЛІВ</th><th rowspan="2">ОЦІНКА ЄКТС</th><th colspan="2">ОЦІНКА ЗА НАЦІОНАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ</th></tr>
<tr><th>екзамен</th><th>залік</th></tr>
<tr><td>90-100</td><td>A</td><td>відмінно</td><td rowspan="5">зараховано</td></tr>
<tr><td>82-89</td><td>B</td><td rowspan="2">добре</td></tr>
<tr><td>75-81</td><td>C</td></tr>
<tr><td>64-74</td><td>D</td><td rowspan="2">задовільно</td></tr>
<tr><td>60-63</td><td>E</td></tr>
<tr><td>35-59</td><td>FX</td><td rowspan="2">незадовільно</td><td rowspan="2">не зараховано</td></tr>
<tr><td>1-34</td><td>F</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Критерії оцінювання</td><td>
<table>
<tr><th>Кількість балів</th><th>Критерії оцінювання</th></tr>
<tr><td>90-100</td><td>У відповіді повністю розкрито зміст питання. Матеріал викладено логічно, аргументовано, мова є грамотною, науковий стиль викладення матеріалу, вільне володіння термінологічним апаратом дисципліни. У відповіді продемонстровано високий рівень володіння матеріалом, що входить до навчальної програми, та продемонстровано високі практичні навички.</td></tr>
<tr><td>75-89</td><td>Відповідь досить повно розкриває зміст питання або розкриває основні (найважливіші) аспекти у запитанні, слухач володіє термінологічним апаратом дисципліни. У викладеному матеріалі слухач має помилки із аргументацією відповіді, недостатня логічність та послідовність викладення матеріалу. У відповіді продемонстровано високий рівень</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Назва п/п	*Коротка інформація*
	володіння матеріалом, що було викладено на лекціях, та середній рівень володіння практичним матеріалом. 60-74 Відповідь на контрольне питання є неповною, розкриває тільки деякі аспекти навчального матеріалу. Слухач припускається помилок у використанні термінології навчальної дисципліни. Рівень володіння матеріалом, що було викладено на лекціях, додатковим та практичним матеріалом є середнім. 35-59 У відповіді допущено суттєві помилки, які свідчать про незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; слухач слабо володіє термінологією дисципліни. 1-34 Відповідь практично відсутня, слухач демонструє незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; не володіє термінологією
Питання до іспиту/заліку	1. Види задач Рімана-Гільберта. 2.Інтеграл типу Коші. Граничні (сингулярні) інтеграли. Головне значення інтеграла. 3.Формули Сохоцького-Племеля. 4.Адитивна скалярна задача Рімана-Гільберта для однозв'язної області. 5. Мультиплікативна скалярна задача Рімана-Гільберта. Індекс задачі. 6. Неоднорідна скалярна задача Рімана-Гільберта. 7. Задача РГ для відкритого контуру. 8. Матрична гранична задача Рімана-Гільберта. Задача РГ зі сталою матрицею стрибка. 9. Трикутні задачі РГ. 10. Лінеарізоване нелінійне рівняння Шредінгера (ЛНШ): задача Коші, пара Лакса. 11. Адитивна задача РГ для ЛНШ: розв'язки Йоста; динаміка спектральної функції; задача РГ. 12. Інший варіант застосування формалізму задачі РГ для ЛНШ: фонова пара Лакса; одночасні розв'язки обох рівнянь пари Лакса. 13. Асимптотика за великим часом розв'язку задачі Коші для ЛНШ. 14. Інтегровні нелінійні рівняння. Пара Лакса. 15. Задача Коші для рівняння НШ. Пара Лакса. 16. Розв'язки Йоста лінійних рівнянь з пари Лакса для рівняння НШ: аналітичність; асимптотика. 17. Задача розсіяння. Матриця розсіяння, її властивості. 18. Формулювання задачі РГ на основі задачі розсіяння. 19. Нулі спектральної функції a(k). Кусково-мероморфна задача РГ: додаткові умови на лишки. 20. Єдиність розв'язку задачі РГ у випадку з умовами на лишки. 21. Солітони. Стоячий солітон. Солітони, що рухаються.

Назва п/п	*Коротка інформація*
	22. Задача РГ у сенсі L^p: контури Карлесона; класи Смірнова аналітичних функцій. 23. Формули Сохоцького-Племеля для інтегралів Коші у сенсі L^2. 24. Задача РГ у сенсі L^2. Інтегральні рівняння, що пов’язані з задачею РГ. 25. Теорема про зведення задачі РГ до (сингулярного) інтегрального рівняння. 26. Теорема про еквівалентність розв’язності інтегрального рівняння та розв’язності задачі РГ. 27. Наближення в задачах РГ. 28. Зведення нерегулярної задачі РГ (з умовами на лишки) до регулярної задачі РГ: перший варіант. 29. «Таблиця знаків». Зведення задачі РГ з матрицями стрибка, що ростуть, до задачі РГ з матрицями стрибка, що прямують до I. 30. Деформація задачі РГ: деформація контуру; деформація матриць стрибка. 31. Трикутні факторизації матриці стрибка на дійсній вісі. 32. Що робити з діагональним фактором: допоміжна скалярна задача РГ для $\delta(k)$. 33. Лінзи; зведення вихідної задачі РГ до задачі на «хресті». 34. Зведення (асимптотичне) до задачі РГ, яка має явний розв’язок (функції параболічного циліндра). 35. Асимптотична формула для розв’язку задачі Коші для рівняння НШ. 36. Зона Пенлеве. Апроксимація розв’язку вихідної задачі розв’язком задачі Рімана-Гільберта для рівняння Пенлеве-II. 37. Зона хвиль дисперсійного шоку. Асимптотична формула. 38. Задача Рімана-Гільберта для задачі Коші з початковими даними типу сходинки. 39. Зона Захарова-Манакова. Деформації задачі Рімана-Гільберта. Асимптотична формула. 40. Зона плоскої хвилі. Асимптотична формула. 41. Зона еліптичної хвилі. Деформації задачі Рімана-Гільберта. Асимптотична формула. 42. Локальні задачі Рімана-Гільберта як параметрикси.
Література для вивчення дисципліни:	1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Физматгиз, 1963. 2. T.Trogdon and S.Olver, Riemann-Hilbert problems, their numerical solutions, and the computation of nonlinear special functions. – SIAM, Philadelphia, 2012. 3. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. 4. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – К.: Наук. думка, 1986.
Додаткова література:	1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. – М.: Мир, 1987. 2. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи.– М.: Наука, 1980. 3. Deift P. Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach. Courant Lecture Notes in Mathematics, New York, AMS, 2000.

Назва п/п	*Коротка інформація*
	4. Miller P. Applied Asymptotic Analysis. Graduate Studies in Mathematics. Providence, Rhode Island, AMS, 2006. 5. Clancy K., Gohberg I. Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators. Basel, Birkhauser, 1981
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.