ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. ВЄРКІНА
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

З А Т В Е Р Д Ж У Ю

В.о. директора
ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України

________________ М.І. Глущук

16 вересня 2020 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА
навчальної дисципліни
СУЧАСНІ МЕТОДИ АСИМПТОТИЧНОГО АНАЛІЗУ (ВБ 5)

з галузі знань «11 Математика і статистика»
за спеціальністю «111 Математика»

Рівень вищої освіти	третій (освітньо-науковий)
Освітня програма	доктор філософії
Форма навчання	денна
Загальний обсяг у кредитах Європейської кредитної трансферно-накопичувальної системи:	9

Харків - 2020

РОЗРОБЛЕНО ТА ВНЕСЕНО:

Фізико–технічним інститутом низьких температур ім. Б. І. Вєркіна
Національної академії наук України

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ:

Д.Г. Шепельський – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу математичної фізики ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України

Програма затверджена Вченою радою Фізико–технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна Національної академії наук України, 16 вересня 2020 р., протокол № 7.

1. Опис навчальної дисципліни

1.1 Метою курсу є висвітлення основних ідей дослідження асимптотичної поведінки розв'язків матричної задачі Рімана-Гільберта як нелінійного аналогу методу стаціонарної фази, для дослідження асимптотик розв'язків нелінійних інтегровних систем (дискретних та неперервних). Основними цілями є (і) ознайомлення з методами дослідження нелінійних рівнянь, що базуються на варіанті методу оберненої задачі розсіяння, який має вигляд задачі аналітичної факторизації типу Рімана-Гільберта; (іі) ознайомлення з основними ідеями асимптотичного аналізу задач Рімана-Гільберта, які відповідають як задачам на нульовому фоні, так і задачам з початковими даними типу «сходинки».

1.2. Характеристики навчальної дисципліни

Форма навчання	Денна
Кількість кредитів	**9**
Загальна кількість годин	**270** год.
Рік підготовки	2-й
Семестр	3,4
Лекції	36 год.
Практичні, семінарські заняття	18 год.
Самостійна робота	216 год.

1.3 Анотація навчальної дисципліни

Одним з сучасних методів дослідження асимптотичної поведінки різноманітних об'єктів у математичній фізиці (розв'язки нелінійних інтегровних рівнянь з частинними похідними та нелінійних інтегровних дискретних систем, випадкові матриці великого розміру, тощо) є нелінійний метод найшвидшого спуску. Його застосування базується на зображенні об'єкта дослідження в термінах розв'язку задачі аналітичної факторизації типу Рімана-Гільберта. Певною мірою, цей метод є нелінійним аналогом методів стаціонарної фази та найшвидшого спуску, які застосовуються для асимптотичного дослідження лінійних задач, де об'єкт дослідження зображується контурним інтегралом. Особливості застосування цього методу до розв'язків задач Коші для нелінійних інтегровних рівнянь будуть аналізуватись у курсі на прикладах (і) задач з нульовими крайовими умовами для рівняння Кортевега-де Фріза, нелінійного рівняння Шредингера, рівняння Камаси-Хольма та (іі) задач з ненульовими крайовими умовами (задачі «типу сходинки») для цих же рівнянь.

Пререквізити: Комплексний аналіз, дійсний аналіз, елементи спектральної теорії операторів.

2. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення курсу аспірант повинен
знати:

- властивості інтегралів типу Коші у різних випадках (біля кінців контуру інтегрування; у випадку особливостей різного типу);
- теореми про розв'язання скалярної задачі Рімана-Гільберта;
- теореми про розв'язання матричної задачі Рімана-Гільберта;
- ідеї зображення пар Лакса для нелінійних інтегровних рівнянь;
- конструкції розв'язків задач Рімана-Гільберта на системі контурів з постійними матрицями стрибка;
- ідеї застосування g-функції для послідовностей трансформацій задачі Рімана-Гільберта;

вміти:

- конструювати задачі аналітичної факторизації, виходячи з розв'язків Йоста лінійних рівнянь відповідних пар Лакса;
- аналізувати «таблиці знаків» g-функцій та обирати послідовність трансформацій вихідної задачі Рімана-Гільберта;
- конструювати параметрикси для асимптотичного аналізу задач Рімана-Гільберта;
- доводити збіжність, за великим часом, розв'язків задач Рімана-Гільберта до розв'язків відповідних модельних (граничних) задач.

розвинути загальні компетенції:

- Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- Здатність проводити дослідження на високому рівні.
- Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації.
- Здатність бути критичним і самокритичним.
- Здатність до практичного застосовування знань.
- Вміння виявляти, ставити та розв'язувати актуальні проблеми.
- Здатність генерувати нові ідеї.
- Здатність до наукового мислення, володіння загальнонауковими (філософськими) компетентностями, спрямованими на формування системного наукового світогляду, професійної етики та загального культурного кругозору
- Дотримання морально-етичних правил поведінки та принципів академічної доброчесності, притаманних академічному середовищу

розвинути фахові компетенції:

- Вміння виявляти, чітко формулювати та розв'язувати математичні задачі.
- Здатність вибирати адекватний математичний апарат, використовувати відомі теоретичні поняття та факти для розв'язання конкретних дослідницьких задач.
- Здатність доводити математичні твердження, отримувати висновки.
- Здатність перевіряти коректність математичних тверджень.
- Вміння встановлювати зв'язки між абстрактними математичними структурами і конкретними математичними об'єктами.
- Вміння встановлювати зв'язки між ідеями та об'єктами з різних галузей математики.
- Знання та розуміння фундаментальних методів логіки, математичного, комплексного та функціонального аналізу, алгебри, геометрії, топології, диференціальних рівнянь, тощо.
- Здатність застосовувати сучасні математичні методи до прикладних задач, знання та розуміння методів побудови та якісного і кількісного аналізу математичних моделей природних, техногенних, економічних та соціальних об'єктів та процесів.
- Здатність користуватися існуючими програмними засобами для проведення обчислень, оформлення результатів роботи тощо.
- Здобуття компетентностей, достатніх для викладання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах.
- Здатність проведення самостійних досліджень на високому рівні.
- Вміння аналізувати математичні праці та виявляти мало досліджені та математично цікаві питання.
- Вміння будувати, досліджувати та застосовувати спеціальні математичні структури, використовувати їх у різних розділах математики.

- Знання фундаментальних праць провідних вітчизняних та закордонних учених у області дослідження.
- Здатність відслідковувати найважливіші праці, які з'являються у поточній спеціальній літературі.

Загальні програмні результати навчання:

- Мати високу загальну математичну ерудицію та фундаментальні знання в галузі спеціалізації.
- Знати методологічні принципи та методи математичного дослідження.
- Знати основи організації дослідницького наукового процесу.
- Формулювати робочі гіпотези досліджуваної проблеми, самостійно розв'язувати складні математичні задачі, доводити теореми, будувати приклади.
- Аналізувати математичні праці, визначати правильність викладених математичних фактів, оцінювати новизну та перспективність запропонованих ідей.
- Ініціювати, організовувати та проводити комплексні дослідження в галузі науково-дослідницької та інноваційної діяльності.
- Обирати нові перспективні напрямки досліджень.
- Представляти свої наукові результати англійською мовою в усній та письмовій формах.
- Розробляти наукові проекти та готувати заявки на наукові гранти (національні та міжнародні).
- Здатність працювати в команді.
- Здатність спілкуватися в діалоговому режимі з широкою науковою спільнотою, у тому числі, на міжнародному рівні.
- Здатність професійно презентувати результати своїх досліджень на наукових конференціях і семінарах (у тому числі, міжнародних), та кваліфіковано викладати результати досліджень у наукових статтях.
- Здатність презентувати свої результати широкій професійній аудиторії, яка не складається виключно зі спеціалістів у даній галузі.
- Здатність презентувати свою роботу нематематичній науковій та загальній (непрофесійній) аудиторіям
- Здатність діяти соціально відповідально та громадянсько свідомо, дотримуватись принципів академічної доброчесності.
- Здатність саморозвиватися і самовдосконалюватися, нести відповідальність за прийняття експертних рішень.
- Здатність приймати обґрунтовані рішення, мотивувати людей та рухатися до спільної мети

3. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Теорія граничних задач Рімана-Гільберта.
Тема 1. Інтеграл типу Коші.
Головне значення інтегралу типу Коші. Формули Сохоцького-Племеля. Властивості граничних значень інтегралу типу Коші.
Тема 2. Скалярна гранична задача Рімана-Гільберта.
Індекс задачі. Задача Рімана-Гільберта для однозв'язної області. Задача Рімана-Гільберта для багатозв'язної області
Тема 3. Матрична гранична задача Рімана-Гільберта.
Індекс задачі. Теореми про розв'язність задачі.

Розділ 2. Теорія дослідження нелінійних рівнянь методом оберненої задачі розсіяння.
Тема 4. Інтегровні нелінійні рівняння.
Пара Лакса. Розв'язки Йоста лінійних рівнянь з пари Лакса. Задача розсіяння. Матриця розсіяння. Спектральні функції.
Тема 5. Задача Рімана-Гільберта.
Отримання сім'ї задач Рімана-Гільберта з задачі розсіяння. Задача Рімана-Гільберта у якості оберненої задачі для лінійних рівнянь з пари Лакса. Солітонні розв'язки як спеціальний випадок розв'язків задачі Рімана-Гільберта.

Розділ 3. Асимптотичний аналіз задач Коші з початковими даними, що спадають на нескінченності.
Тема 6. Асимптотичний аналіз задачі Коші в термінах асимптотичного аналізу задачі Рімана-Гільберта.
Таблиця знаків фазової функції. Алгебраїчні (трикутні) факторизації матриці стрибків на дійсній осі. Деформації контуру вихідної задачі Рімана-Гільберта.
Тема 7. Асимптотика у секторі подібності.
Задача Рімана-Гільберта для диференціального рівняння параболічного циліндру. Апроксимація розв'язку вихідної (деформованої) задачі Рімана-Гільберта розв'язком задачі Рімана-Гільберта для рівняння параболічного циліндру. Отримання головного члена асимптотики.
Тема 8. Асимптотики у перехідних зонах: зона Пенлеве.
Задача Рімана-Гільберта для рівняння Пенлеве-II. Апроксимація розв'язку вихідної задачі розв'язком задачі Рімана-Гільберта для рівняння Пенлеве-II.
Тема 9. Асимптотики у перехідних зонах: зона хвиль дисперсійного шоку.
Задача Рімана-Гільберта на двох відрізках та її розв'язок у термінах еліптичних функцій.

Розділ 4. Асимптотичний аналіз задач Коші з початковими даними, що не спадають на нескінченності.
Тема 10. Задача Рімана-Гільберта для задачі Коші з початковими даними типу сходинки.
Фонові розв'язки лінійних рівнянь з пари Лакса. Задача розсіяння та її трансформація у задачу Рімана-Гільберта.
Тема 11. Секторальні асимптотики: зона Захарова-Манакова.
Деформації вихідної задачі Рімана-Гільберта. Апроксимація розв'язку вихідної задачі розв'язком задачі Рімана-Гільберта для рівняння параболічного циліндру.
Тема 12. Секторальні асимптотики: зона плоскої хвилі.
Задача Рімана-Гільберта на одному відрізку. Розв'язок у термінах алгебраїчних функцій. Апроксимації. Задача про параметрикс.
Тема 13. Секторальні асимптотики: зона еліптичної хвилі.
Алгебраїчні факторизації матриць стрибку. Задача Рімана-Гільберта на двох відрізках та її розв'язок у термінах еліптичних функцій.
Тема 14. Локальні задачі: параметрикси.
Розв'язки локальної задачі в термінах функцій параболічного циліндру. Локальні задачі в термінах функції Ейрі.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин				
	Аудиторні години				
	Усього	у тому числі			Самост робота
		лекц	сем	практ	
1	2	3	4	5	6

Розділ 1. ***Теорія граничних задач Рімана-Гільберта***					
Тема 1. Інтеграл типу Коші.	20	2			18
Тема 2. Скалярна гранична задача Рімана-Гільберта.	10	2	2		6
Тема 3. Матрична гранична задача Рімана-Гільберта**.**	16	2	2		12
Разом за розділом 1	**46**	**6**	**4**		**36**
Розділ 2. ***Теорія дослідження нелінійних рівнянь методом оберненої задачі розсіяння***					
Тема 4. Інтегровні нелінійні рівняння**.**	30	4	2		24
Тема 5. Задача Рімана-Гільберта для інтегровних нелінійних рівнянь.	30	4	2		24
Разом за розділом 2	**60**	**8**	**4**		**48**
Розділ 3. ***Асимптотичний аналіз задач Коші з початковими даними, що спадають на нескінченності.***					
Тема 6. Асимптотичний аналіз задачі Коші в термінах асимптотичного аналізу задачі Рімана-Гільберта.	20	2			18
Тема 7. Асимптотика у секторі подібності.	18	4	2		12
Тема 8. Асимптотики у перехідних зонах: зона Пенлеве.	19	2	2		15
Тема 9. Асимптотики у перехідних зонах: зона хвиль дисперсійного шоку.	19	2	2		15
Разом за розділом 3	**76**	**10**	**6**		**60**
Розділ 4. ***Асимптотичний аналіз задач Коші з початковими даними, що не спадають на нескінченності.***					
Тема 10. Задача Рімана-Гільберта для задачі Коші з початковими даними типу сходинки.	22	4			18
Тема 11. Секторальні асимптотики: зона Захарова-Манакова.	14	2			12
Тема 12. Секторальні асимптотики: зона плоскої хвилі.	14	2			12
Тема 13. Секторальні асимптотики: зона еліптичної хвилі.	16	2	2		12
Тема 14. Локальні задачі: параметрикси.	16	2	2		12
Разом за розділом 4	**82**	**12**	**4**		**66**
Підготовка до екзамену.	**6**				**6**
Усього годин	**270**	**36**	**18**		**216**

Теми семінарських занять

- Граничні значення інтегралів типу Коші

- Скалярні граничні задачі Рімана-Гільберта для розімкнених контурів
- Пара Лакса для лінійних рівнянь
- Пари Лакса для нелінійних рівнянь
- Асимптотика розв'язків задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза з початковими даними, що спадають до 0.
- Векторні та матричні формулювання задач Рімана-Гільберта для рівнянь Кортевега-де Фріза та Камаси-Хольма.
- Асимптотика розв'язків задачі Коші на нульовому фоні для рівняння Камаси-Хольма.
- Асимптотика розв'язків задачі Коші для нелінійного рівняння Шредінгера з початковими даними типу сходинки.

Теми для самостійної роботи

- Скалярні задачі Рімана-Гільберта.
- Векторні (матричні) задачі Рімана-Гільберта.
- Аналітичні властивості розв'язків Йоста для одновимірного рівняння Шредінгера
- Аналітичні властивості розв'язків Йоста для системи рівнянь Дірака
- Нулі спектральних функцій. Умови на лишки для задач Рімана-Гільберта
- Тета-функції Рімана. Ріманові поверхні. Базис циклів. Диференціали на ріманових поверхнях. Абелєві інтеграли.
- g-функції. Конструкції g-функцій в термінах інтегралів типу Коші та в термінах абелєвих інтегралів.
- Задачі параметриксів

5. Методи контролю

поточний (домашні завдання); підсумковий екзамен (у формі письмової роботи)

6. Схема нарахування балів

Поточний контроль					Екзамен	Сума
Розділ 1 Теми 1-3	**Розділ 2 Теми 4-5**	**Розділ 3 Теми 6-9**	**Розділ 4 Теми 10-14**	Разом		
15	10	15	20	60	40	100

7. Методи навчання

В процесі навчання використовуються лекції, презентації, методичні матеріали та спеціальна література. Технічні засоби - необхідні для демонстрації презентацій, загально вживані програми.

8. Шкала оцінювання

Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою:

СУМА БАЛІВ	ОЦІНКА ЄКТС	ОЦІНКА ЗА НАЦІОНАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ	
		екзамен	залік

90-100	A	відмінно	зараховано
82-89	B	добре	
75-81	C		
64-74	D	задовільно	
60-63	E		
35-59	FX	незадовільно	не зараховано

9. Критерії оцінювання

Кількість балів	Критерії оцінювання
90-100	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
75-89	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
60-74	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
35-59	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, у роботіі допущено суттєві помилки, які свідчать про незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; слухач слабо володіє термінологією дисципліни.
1-34	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, Відповідь практично відсутня, слухач демонструє незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; не володіє термінологією

10. Орієнтовні питання до іспиту

1. Види задач Рімана-Гільберта.
2.Інтеграл типу Коші. Граничні (сингулярні) інтеграли. Головне значення інтеграла.
3.Формули Сохоцького-Племеля.
4.Адитивна скалярна задача Рімана-Гільберта для однозв'язної області.
5. Мультиплікативна скалярна задача Рімана-Гільберта. Індекс задачі.
6. Неоднорідна скалярна задача Рімана-Гільберта.
7. Задача РГ для відкритого контуру.
8. Матрична гранична задача Рімана-Гільберта. Задача РГ зі сталою матрицею стрибка.
9. Трикутні задачі РГ.
10. Лінеаризоване нелінійне рівняння Шредінгера (ЛНШ): задача Коші, пара Лакса.
11. Адитивна задача РГ для ЛНШ: розв'язки Йоста; динаміка спектральної функції; задача РГ.

12. Інший варіант застосування формалізму задачі РГ для ЛНШ: фонова пара Лакса; одночасні розв'язки обох рівнянь пари Лакса.
13. Асимптотика за великим часом розв'язку задачі Коші для ЛНШ.
14. Інтегровні нелінійні рівняння. Пара Лакса.
15. Задача Коші для рівняння НШ. Пара Лакса.
16. Розв'язки Йоста лінійних рівнянь з пари Лакса для рівняння НШ: аналітичність; асимптотика.
17. Задача розсіяння. Матриця розсіяння, її властивості.
18. Формулювання задачі РГ на основі задачі розсіяння.
19. Нулі спектральної функції a(k). Кусково-мероморфна задача РГ: додаткові умови на лишки.
20. Єдиність розв'язку задачі РГ у випадку з умовами на лишки.
21. Солітони. Стоячий солітон. Солітони, що рухаються.
22. Задача РГ у сенсі L^p: контури Карлесона; класи Смірнова аналітичних функцій.
23. Формули Сохоцького-Племеля для інтегралів Коші у сенсі L^2.
24. Задача РГ у сенсі L^2. Інтегральні рівняння, що пов'язані з задачею РГ.
25. Теорема про зведення задачі РГ до (сингулярного) інтегрального рівняння.
26. Теорема про еквівалентність розв'язності інтегрального рівняння та розв'язності задачі РГ.
27. Наближення в задачах РГ.
28. Зведення нерегулярної задачі РГ (з умовами на лишки) до регулярної задачі РГ: перший варіант.
29. «Таблиця знаків». Зведення задачі РГ з матрицями стрибка, що ростуть, до задачі РГ з матрицями стрибка, що прямують до I.
30. Деформація задачі РГ: деформація контуру; деформація матриць стрибка.
31. Трикутні факторизації матриці стрибка на дійсній вісі.
32. Що робити з діагональним фактором: допоміжна скалярна задача РГ для δ(k).
33. Лінзи; зведення вихідної задачі РГ до задачі на «хресті».
34. Зведення (асимптотичне) до задачі РГ, яка має явний розв'язок (функції параболічного циліндра).
35. Асимптотична формула для розв'язку задачі Коші для рівняння НШ.
36. Зона Пенлеве. Апроксимація розв'язку вихідної задачі розв'язком задачі Рімана-Гільберта для рівняння Пенлеве-II.
37. Зона хвиль дисперсійного шоку. Асимптотична формула.
38. Задача Рімана-Гільберта для задачі Коші з початковими даними типу сходинки.
39. Зона Захарова-Манакова. Деформації задачі Рімана-Гільберта. Асимптотична формула.
40. Зона плоскої хвилі. Асимптотична формула.
41. Зона еліптичної хвилі. Деформації задачі Рімана-Гільберта. Асимптотична формула.
42. Локальні задачі Рімана-Гільберта як параметрикси.

11. Література

Основна:

1.Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Физматгиз, 1963.

2.T.Trogdon and S.Olver, Riemann-Hilbert problems, their numerical solutions, and the computation of nonlinear special functions. – SIAM, Philadelphia, 2012.

3.Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986.

4.Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – К.: Наук. думка, 1986.

Додаткова:

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. – М.: Мир, 1987.
2.Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи.– М.: Наука, 1980.
3.Deift P. Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach. Courant Lecture Notes in Mathematics, New York, AMS, 2000.
4.Miller P. Applied Asymptotic Analysis. Graduate Studies in Mathematics. Providence, Rhode Island, AMS, 2006.
5.Clancy K., Gohberg I. Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators. Basel, Birkhauser, 1981