

**ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. ВЕРКІНА
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ**

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. директора
ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України



М.І. Глушук

16 вересня 2020 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА
навчальної дисципліни
МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСПЮВАННЯ (ВБ 4)

з галузі знань «11 Математика і статистика»
за спеціальністю «111 Математика»

<i>Рівень вищої освіти</i>	<u>третій (освітньо-науковий)</u>
<i>Освітня програма</i>	<u>доктор філософії</u>
<i>Форма навчання</i>	<u>денна</u>
<i>Загальний обсяг у кредитах</i>	
<i>Європейської кредитної трансферно- накопичувальної системи:</i>	9

Харків - 2020

РОЗРОБЛЕНО ТА ВНЕСЕНО:

Фізико–технічним інститутом низьких температур ім. Б. І. Веркіна
Національної академії наук України

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

І.Є. Єгорова – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу математичної фізики ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України



Програма затверджена Вченою радою Фізико–технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Веркіна Національної академії наук України, 16 вересня 2020 р., протокол № 7.

1. Опис навчальної дисципліни

1.1 Метою курсу є висвітлення основних ідей класичного МОЗР і його узагальнень на випадок неспадних початкових умов. Основними цілями є (i) ознайомлення з методами спектрального аналізу операторів Шредінгера та Якобі із коефіцієнтами типу сходінки, періодичними та скінченнозонними; (ii) інтегрування відповідних нелінійних рівнянь Кортевега- де Фріза та Тоди.

1.2. Характеристики навчальної дисципліни

Форма навчання	Денна
Кількість кредитів	9
Загальна кількість годин	270 год.
Рік підготовки	2-й
Семестр	3,4
Лекції	36 год.
Практичні, семінарські заняття	18 год.
Самостійна робота	216 год.

1.3 Анотація навчальної дисципліни

Метод оберненої задачі розсіювання (МОЗР) є одним з найбільш застосованих і ефективних методів дослідження нелінійних інтегровних рівнянь з точки зору їхньої розв'язності та встановлення єдиності розв'язку задач Коші з початковими умовами різної природи, у тому числі й з неспадними. Застосування цього методу базується перш за все на детальному вивченні прямих та обернених задач спектрального аналізу для лінійних диференціальних та різницевих операторів з зображення Лакса відповідних нелінійних рівнянь. У даному курсі ми детально вивчаємо теорію розсіювання для операторів із коефіцієнтами типу сходінки, що прямують до різних сталих на різних півосях, і розв'язуємо відповідну задачу Коші для рівняння Кортевега-де Фріза методом МОЗР. Ми також ознайомимся із спектральним аналізом деяких скінченнозонних та періодичних операторів і проінтегруємо методом МОЗР асоційовані нелінійні задачі

Пререквізити: Комплексний аналіз, дійсний аналіз, елементи спектральної теорії операторів.

2. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення курсу аспірант повинен знати:

- властивості даних розсіювання для оператора Шредінгера із потенціалом типу сходінки;
- властивості спектральних даних періодичного оператора Якобі;
- схеми розв'язання відповідних обернених задач;
- ідеї зображення пар Лакса для нелінійних інтегровних рівнянь;
- основи МОЗР у спадному випадку, а також для початкових даних типу сходінки;
- основи теорії гіпереліптичних ріманових поверхонь

вміти:

- описувати властивості розв'язків Йоста та Вейля;
- знаходити необхідні та достатні умови на спектральні дані;
- доводити єдиність розв'язків обернених задач спектрального аналізу та теорії розсіювання;
- виводити динаміку даних розсіювання за часом;
- описувати основні об'єкти скінченнозонного інтегрування

розвинути загальні компетенції:

- Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- Здатність проводити дослідження на високому рівні.
- Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації.
- Здатність бути критичним і самокритичним.
- Здатність до практичного застосування знань.
- Вміння виявляти, ставити та розв'язувати актуальні проблеми.
- Здатність генерувати нові ідеї.
- Здатність до наукового мислення, володіння загальнонауковими (філософськими) компетентностями, спрямованими на формування системного наукового світогляду, професійної етики та загального культурного кругозору
- Дотримання морально-етичних правил поведінки та принципів академічної доброчесності, притаманних академічному середовищу

розвинути фахові компетенції:

- Вміння виявляти, чітко формулювати та розв'язувати математичні задачі.
- Здатність вибирати адекватний математичний апарат, використовувати відомі теоретичні поняття та факти для розв'язання конкретних дослідницьких задач.
- Здатність доводити математичні твердження, отримувати висновки.
- Здатність перевіряти коректність математичних тверджень.
- Вміння встановлювати зв'язки між абстрактними математичними структурами і конкретними математичними об'єктами.
- Вміння встановлювати зв'язки між ідеями та об'єктами з різних галузей математики.
- Знання та розуміння фундаментальних методів логіки, математичного, комплексного та функціонального аналізу, алгебри, геометрії, топології, диференціальних рівнянь, тощо.
- Здатність застосовувати сучасні математичні методи до прикладних задач, знання та розуміння методів побудови та якісного і кількісного аналізу математичних моделей природних, техногенних, економічних та соціальних об'єктів та процесів.
- Здатність користуватися існуючими програмними засобами для проведення обчислень, оформлення результатів роботи тощо.
- Здобуття компетентностей, достатніх для викладання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах.
- Здатність проведення самостійних досліджень на високому рівні.
- Вміння аналізувати математичні праці та виявляти мало досліджені та математично цікаві питання.
- Вміння будувати, досліджувати та застосовувати спеціальні математичні структури, використовувати їх у різних розділах математики.
- Знання фундаментальних праць провідних вітчизняних та закордонних учених у області дослідження.
- Здатність відслідковувати найважливіші праці, які з'являються у поточній спеціальній

літературі.

Загальні програмні результати навчання:

- Мати високу загальну математичну ерудицію та фундаментальні знання в галузі спеціалізації.
- Знати методологічні принципи та методи математичного дослідження.
- Знати основи організації дослідницького наукового процесу.
- Формулювати робочі гіпотези досліджуваної проблеми, самостійно розв'язувати складні математичні задачі, доводити теореми, будувати приклади.
- Аналізувати математичні праці, визначати правильність викладених математичних фактів, оцінювати новизну та перспективність запропонованих ідей.
- Ініціювати, організовувати та проводити комплексні дослідження в галузі науково-дослідницької та інноваційної діяльності.
- Обирати нові перспективні напрямки досліджень.
- Представляти свої наукові результати англійською мовою в усній та письмовій формах.
- Розробляти наукові проекти та готувати заявки на наукові гранти (національні та міжнародні).
- Здатність працювати в команді.
- Здатність спілкуватися в діалоговому режимі з широкою науковою спільнотою, у тому числі, на міжнародному рівні.
- Здатність професійно презентувати результати своїх досліджень на наукових конференціях і семінарах (у тому числі, міжнародних), та кваліфіковано викладати результати досліджень у наукових статтях.
- Здатність презентувати свої результати широкій професійній аудиторії, яка не складається виключно зі спеціалістів у даній галузі.
- Здатність презентувати свою роботу нематематичній науковій та загальній (непрофесійній) аудиторіям
- Здатність діяти соціально відповідально та громадянсько свідомо, дотримуватись принципів академічної доброчесності.
- Здатність саморозвиватися і самовдосконалюватися, нести відповідальність за прийняття експертних рішень.
- Здатність приймати обґрунтовані рішення, мотивувати людей та рухатися до спільної мети

3. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Теорія розсіювання для оператора Шредінгера з потенціалом типу сходинок.

Тема 1. Розв'язки Йоста.

Оператори перетворення і оцінки на їхні ядра в залежності від гладкості потенціалу та швидкості його спадання до фонових констант. Аналітичні властивості розв'язків Йоста.

Тема 2. Властивості даних розсіювання.

Неперервний спектр і власні значення. Аналітичні властивості Вронскіану розв'язків Йоста. Зв'язок із нормувальними константами власних функцій. Матриця розсіювання.

Тема 3. Рівняння Марченка.

Виведення рівнянь Марченка. Оцінки на ядра в залежності від моменту збурення потенціалу.

Тема 4. Необхідні і достатні умови на дані розсіювання.

Властивості Вронскіану та коефіцієнтів відбиття за умов резонансу. Основні аналітичні властивості матриці розсіювання.

Тема 5. Оборнена задача розсіювання.

Єдиність розв'язків рівнянь Марченка. Схема побудови правого та лівого розв'язків оборненої задачі.

Тема 6. Теорема про єдиність розв'язку оборненої задачі.

Розділ 2. Інтегрування рівняння Кортевега-де Фріза в класі розв'язків типу сходинки.

Тема 7. Пара Лакса і формалізм МОЗР для інтегрування рівняння КдФ в класі швидкоспадних розв'язків

Тема 8. Застосування та обґрунтування МОЗР для початкових умов типу сходинки.

Динаміка даних розсіювання за часом. Розв'язання рівнянь Марченка залежних від часу.

Обґрунтування можливості розв'язання оборненої задачі у певному класі потенціалів типу сходинки залежних від часу.

Розділ 3. Спектральний аналіз оператора Якобі з періодичними коефіцієнтами

Тема 9. Пряма задача спектрального аналізу.

Розв'язки Вейля і розв'язки Флоке. Функції Вейля і мультиплікатори Флоке. Функція Ляпунова. Квазіімпульс як конформне відображення і його зв'язок із неперервним спектром задачі. Додатковий спектр Діріхле.

Тема 10. Періодичні розв'язки рівняння ланцюжка Тоди

Формули слідів. Рівняння Дубровіна. Проблема оборнення Якобі.

Розділ 4. Вступ до скінченнозонного інтегрування ланцюжка Тоди

Тема 11. Гіпереліптичні ріманові поверхні, асоційовані із скінченнозонним оператором Якобі.

Мероморфні функції на ріманових поверхнях. Голоморфні та мероморфні Абелеві диференціали.

Квазіімпульс.

Тема 12. Функція Бейкера-Ахієзера, проблема оборнення Якобі та формули слідів.

Тета-функції. Теорема Рімана про нулі тета-функцій. Функція Бейкера-Ахієзера, залежна від часу, і її зв'язок із розв'язками Вейля. Проблема оборнення Якобі і динаміка дивізору Діріхле. Формули слідів.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин				
	Аудиторні години				
	Усього	у тому числі			Самост робота
лекц		сем	практ		
1	2	3	4	5	6
Розділ 1. Теорія розсіювання для оператора Шредінгера з потенціалом типу сходинки.					
Тема 1. Розв'язки Йоста.	8	2			6
Тема 2. Властивості даних розсіювання.	12	2	2		8
Тема 3. Рівняння Марченка.	8	2	2		4

Тема 4. Необхідні і достатні умови на дані розсіювання	12	2			10
Тема 5. Обернена задача розсіювання.	20	4	2		14
Тема 6. Єдиність розв'язку оберненої задачі	16	2			14
Разом за розділом 1	76	14	6		56
Розділ 2. Інтегрування рівняння Кортевега-де Фріза в класі розв'язків типу сходінки					
Тема 7. Пара Лакса і формалізм МОЗР для інтегрування рівняння КдФ в класі швидкоспадаючих розв'язків	26	2			24
Тема 8. Застосування та обґрунтування МОЗР для початкових умов типу сходінки.	38	6	2		30
Разом за розділом 2	64	8	2		54
Розділ 3. Спектральний аналіз оператора Якобі з періодичними коефіцієнтами					
Тема 9. Пряма задача спектрального аналізу.	18	4	2		12
Тема 10. Періодичні розв'язки рівняння Тоди	10	2			8
Разом за розділом 3	28	6	2		20
Розділ 4. Вступ до скінченнозонного інтегрування ланцюжка Тоди					
Тема 11. Гіпереліптичні ріманові поверхні, асоційовані із скінченнозонним оператором Якобі.	46	4	4		38
Тема 12. Функція Бейкера-Ахієзера, проблема обернення Якобі та формули слідів.	50	4	4		42
Разом за розділом 4	96	8	8		80
Підготовка до екзамену.	6				6
Усього годин	270	36	18		216

Теми семінарських занять

- Оператори перетворення і властивості розв'язків Йоста для рівняння Якобі.
- Властивості даних розсіювання оператора Якобі з коефіцієнтами типу сходінки.
- Обернена спектральна задача для періодичного оператора Якобі.
- Многovid Якобі. Теорема Абеля.
- Означення і найпростіші властивості загальних тета-функцій.
- Дивізори на рімановій поверхні. Теорема Рімана-Роха.
- Функція Бейкера-Ахієзера для оператора Якобі із скінченнозонними коефіцієнтами.

Обчислення коефіцієнтів скінченнозонного оператора Якобі.

Теми для самостійної роботи

- Компактифікація ріманової поверхні. Локальні координати. Обчислення роду гіпереліптичної поверхні.

- Цикли на рімановій поверхні, канонічний базис циклів.
- Періоди нормованих Абелевих диференціалів і співвідношення між ними.
- Виведення формул для скінченнозонних розв'язків рівняння ланцюжка Тоди
- Оцінки на розв'язки рівнянь Марченка для оператора Шредінгера із потенціалом типу сходинки
- Аналітичні властивості коефіцієнтів відображення в залежності від гладкості потенціалу типу сходинки і кількості скінченних моментів збурень

5. Методи контролю

поточний (домашні завдання); підсумковий екзамен (у формі письмової роботи)

6. Схема нарахування балів

Поточний контроль					Екзамен	Сума
Розділ 1 Теми 1-6	Розділ 2 Теми 7-8	Розділ 3 Теми 9-10	Розділ 4 Теми 11-12	Разом		
20	16	8	16	60	40	100

7. Методи навчання

В процесі навчання використовуються лекції, презентації, методичні матеріали та спеціальна література.

8. Шкала оцінювання

Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою:

СУМА БАЛІВ	ОЦІНКА ЄКТС	ОЦІНКА ЗА НАЦІОНАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ	
		екзамен	залік
90-100	A	відмінно	зараховано
82-89	B	добре	
75-81	C		
64-74	D	задовільно	
60-63	E		
35-59	FX	незадовільно	не зараховано

9. Критерії оцінювання

Кількість
балів

Критерії оцінювання

90-100	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
75-89	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
60-74	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
35-59	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, у роботі допущено суттєві помилки, які свідчать про незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; слухач слабо володіє термінологією дисципліни.
1-34	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, Відповідь практично відсутня, слухач демонструє незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; не володіє термінологією

10. Орієнтовні питання до іспиту

1. Оператор перетворення (прив'язаний до нескінченності) для оператора Шредінгера
2. Розв'язок Йоста, його аналітичні властивості і зв'язок із розв'язком Вейля
3. Вронскіан розв'язків Йоста оператора Шредінгера з потенціалом типу сходинок
4. Матриця розсіювання, означення і властивості її елементів
5. Виведення правого та лівого рівнянь Марченка
6. Оцінки на ядра рівнянь Марченка
7. Необхідні і достатні умови на дані розсіювання для оператора Шредінгера з потенціалом типу сходинок
8. Існування та єдиність розв'язків рівнянь Марченка
9. Теорема єдиності розв'язку оберненої задачі розсіювання
10. Алгоритм і обґрунтування застосування МОЗР для рівняння КдФ з початковими умовами типу сходинок
11. Еволюція даних розсіювання за часом
12. Солітони для рівняння КдФ
13. Функції Вейля і мультиплікатори Флоке для періодичної матриці Якобі
14. Функція Ляпунова і спектр
15. Конформне відображення породжене квазіімпульсом, характеристика спектру
16. Алгоритм розв'язання оберненої задачі розсіювання для періодичної матриці Якобі
17. Рівняння Дубровіна і формули слідів
18. Компактифікація ріманової поверхні. Локальні координати. Обчислення роду гіпереліптичної ріманової поверхні
19. Голоморфні функції і голоморфні диференціали на рімановій поверхні. Періоди замкнутих диференціалів
20. Канонічний базис циклів на гіпереліптичній рімановій поверхні. Співвідношення між періодами замкнутих диференціалів

21. Білінійні співвідношення Рімана для періодів голоморфних диференціалів. Матриця періодів. Еліптичні функції
22. Мероморфні диференціали, їх лишки та періоди
23. Многовид Якобі та теорема Абеля
24. Постановка проблеми обернення Якобі. Означення та найпростіші властивості тета-функцій
25. Теорема Рімана про нулі тета-функцій
26. Функція Бейкера – Ахієзера для оператора Якобі. Зв'язок з розв'язками Вейля
27. Скінченнозонні розв'язки рівняння Года

11. Література

Основна:

1. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – К.: Наук. думка, 1977.
2. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. – М.: Наука, 1984.
3. Дубровин Б.А. Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Москва-Ижевск, 2001.
4. G. Teschl. Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices. – AMS, Math. Surveys and Monographs, 2000
5. I. Egorova, Z. Gladka, T.-L. Lange and G. Teschl. Inverse scattering theory for Schrödinger operators with steplike potential. – Zh. Math. Phys. Anal. Geom., 2015

Додаткова:

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. – М.: Мир, 1987.
2. Farkas H.M., Kra I. Riemann surfaces. – Graduate texts in Mathematics, Springer, 1992
3. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи.– М.: Наука, 1980.