

Додаток №1
до Положення щодо розробки силябусу
компонентів освітньо-наукової програми з
підготовки докторів філософії у
ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. ВЕРКІНА
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.О. Директора
ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна
НАН України



М.І. Глушук

« 07 » 2020 р.

СИЛАБУС
навчальної дисципліни
АЛГЕБРАЇЧНА ТОПОЛОГІЯ (ВБ 10)
2020-2021 навчальний рік

з галузі знань «11 Математика і статистика»
за спеціальністю «111 Математика»

РОЗРОБНИК:

Д.В. Болотов – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь і геометрії ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України

Погоджено Вченою радою Математичного відділення ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України
06.07.2020 р., протокол № 4.

Затверджено Вченою радою Фізико-технічного інституту низьких температур
ім. Б. І. Веркіна Національної академії наук України, 07.07. 2020 р., протокол № 5.

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. ВЕРКІНА
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

СИЛАБУС
навчальної дисципліни
АЛГЕБРАЇЧНА ТОПОЛОГІЯ
2020-2021 навчальний рік

<i>Назва п/п</i>	<i>Короткі інформація</i>
Назва	АЛГЕБРАЇЧНА ТОПОЛОГІЯ
Адреса викладання	м. Харків, пр. Науки, 47
Рівень вищої освіти	Третій освітньо-науковий рівень
Галузі знань,	11 «Математика і статистика»
Шифр та назва спеціальності	111 Математика
Викладач /-чі/	доктор фіз.-мат. наук, професор, член-кор. НАН України Борисенко О. А. доктор фіз.-мат. наук, с.н.с. Болотов Д. В.
Контактна інформація викладача (-ів)	aborisenk@gmail.com d.v.bolotoff@gmail.com
Графік занять	За розкладом

<i>Назва п/п</i>	<i>Короткі інформація</i>
Консультації по курсу відбуваються	пр. Науки, 47, корпус Біо, к. 305 он-лайн консультації через Skype (для узгодження часу писати на email: aborisenk@gmail.com)
Сторінка курсу	https://
Інформація про навчальну дисципліну	Дисципліна «Алгебраїчна топологія» є дисципліною вільного вибору, яка входить до циклу професійної підготовки за спеціальністю 111 «Математика» на третьому /освітньо-науковому/ рівні підготовки доктора філософії з математики. Дана дисципліна викладається у 3-4 семестрах підготовки в обсязі 6 кредитів за Європейською кредитно-трансферною системою /ECTS/.
Анотація	В курсі лекцій планується знайомство з основними конструкціями та обчислювальними методами алгебраїчної топології, які виникають в задачах геометрії та сучасній фізиці. Зокрема, в категорії гладких многовидів буде викладено конструкції подвійного комплексу Чеха- де Рама та спектральних послідовностей, які є основним обчислювальним апаратом груп гомологій та когомологій. Також планується знайомство з теорією характеристичних класів векторних розшарувань, які грають важливу роль в сучасній фізиці. Курс буде включати розгляд не тільки теоретичних питань алгебраїчної топології, а також велику увагу буде приділено розбору важливих прикладів та вирішенню задач.
Мета та цілі	Метою курсу є ознайомлення аспірантів з базовими конструкціями та обчислювальними методами алгебраїчної топології в категорії гладких многовидів.
Загальний обсяг у кредитах Європейської кредитно-трансферної системи /ECTS/	6 кредитів
Загальна кількість годин	180 годин
Структура	54 години аудиторних: з них 36 годин лекцій, 18 годин практичних занять, 126 годин самостійної роботи.
Очікувані результати навчання	У результаті вивчення курсу аспірант повинен знати: <ul style="list-style-type: none"> - поняття фундаментальної, гомотопічної та відносної гомотопічної груп; - поняття сингулярних та клітинних гомологій; - поняття гладкого многовиду та орієнтованості;

<i>Назва п/п</i>	<i>Короткі інформація</i>
	<ul style="list-style-type: none"> - поняття комплексу та когомологій де Рама; - поняття подвійності Пуанкаре; - основи теорії Морса та нерівність Морса. - поняття розширеного простору; - поняття нормального розширення та класу Тома; - поняття комплексу Чеха –де Рама - поняття спектральної послідовності фільтрованого комплексу. - поняття характеристичного класу векторного розширення - формулу додатку характеристичних класів. - вираз характеристичних класів через форму кривини зв'язності векторного розширення. <p>уміти:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Користуватися обчислювальними методами алгебраїчної топології, які включають в себе точні та спектральні послідовності.
Ключові слова	Многовиди, когомології де Рама, спектральна послідовність, розширення, характеристичний клас.
Програма навчальної дисципліни	<p>Програма навчальної дисципліни складається з чотирьох розділів:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Основи теорій гомотопій та гомологій. 2. Теорія де Рама. 3. Спектральні послідовності. 4. Характеристичні класи.
Короткий опис змісту тем	<p><i>Розділ 1. Основи теорії гомотопій та гомологій</i></p> <p style="text-align: center;"><i>Тема 1. Теорія гомотопій.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Фундаментальна група. Накриття. Засоби обчислення. - Старші та відносні гомотопічні групи. Точна гомотопічна послідовність пари. - CW-комплекси. Лемма Борсука.

<i>Назва п/п</i>	<i>Короткі інформація</i>
	<ul style="list-style-type: none"> - Розшарування. Точна гомотопічна послідовність розшарування. <p style="text-align: center;">Тема 2. Теорія гомологій.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Симпліціальні та сингулярні гомології. Ланцюгова гомотопія та гомотопічна інваріантність сингулярних (ко)гомологій. - Числа Бетті та ейлерова характеристика. - Гомології пари. Точна послідовність пари та трійки. - Клітинні (ко)гомології CW-просторів та їх збіг з сингулярними. - Когомології. \cup та \cap -множення в когомологіях. <p style="text-align: center;">Тема 3. Гомології та когомології многовидів.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Гомології та когомології многовидів. Фундаментальний клас. - Подвійність Пуанкаре та її узагальнення. - Подвійність Александера-Понтрягіна. - Основи теорія Морса. Нерівність Морса. <p>Розділ 2. Теорія де Рама.</p> <p style="text-align: center;">Тема 4. Комплекс де Рама.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Функтори Ω^* та Ω^*_c. - Комплекс де Рама. - Послідовність Майера – В’єторіса для когомологій де Рама. <p style="text-align: center;">Тема 5. Подвійність Пуанкаре.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Формула Стокса. Леми Пуанкаре. - Принцип Майера-В’єторіса та подвійність Пуанкаре. <p style="text-align: center;">Тема 6. Клас Ейлера та Ізоморфізм Тома.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Векторні розшарування. Глобальна кутова форма орієнтованого векторного розшарування. - Визначення класу Ейлера через кутову форму. - Форма Тома та її зв’язок з класом Ейлера. Ізоморфізм Тома. <p style="text-align: center;">Тема 7. Сферичні розшарування.</p>

<i>Назва п/п</i>	<i>Короткі інформація</i>
	<ul style="list-style-type: none"> - Клас Ейлера орієнтованого сферичного розшарування. - Теорема Хопфа об індексі. - Інваріант Хопфа та методи його обчислення. Розшарування Хопфа. Група $\pi_3(S^2)$. <p>Розділ 3. Спектральні послідовності.</p> <p style="padding-left: 40px;">Тема 8. Узагальнений принцип Майера-В'єторіса.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Узагальнена послідовність Майера-В'єторіса. - Подвійний комплекс. - Когомології Чеха та їх збіг з когомологіями де Рама. <p style="padding-left: 40px;">Тема 9. Спектральна послідовність фільтрованого комплексу.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Точні пари. Побудова спектральної послідовності фільтрованого комплексу. - Спектральна послідовність подвійного комплексу. <p style="padding-left: 40px;">Тема 10. Спектральна послідовність розшарування.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Побудова спектральної послідовності розшарування. - Операція добутку в спектральної послідовності. Кольцова структура $H^*(CP^n)$. - Послідовність Гізіна. <p>Розділ 4. Характеристичні класи.</p> <p style="padding-left: 40px;">Тема 11. Класи Черна комплексного векторного розшарування.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Перший клас Черна лінійних розшарувань. - Проективізація векторного розшарування. - Властивості класу Черна. <p style="padding-left: 40px;">Тема 12. Принцип розкладення та многовиди прапорів.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Принцип розкладення. Формула добутку Уїтні. - Кільце когомологій многовиду прапорів. <p style="padding-left: 40px;">Тема 13. Класи Понтрягіна.</p>

<i>Назва п/п</i>	<i>Короткі інформація</i>
	<ul style="list-style-type: none"> - Комплексифікація. - Класи Понтрягіна речового розшарування. - Застосування до занурень многовидів у евклідові простір. <p style="text-align: center;">Тема 14. Універсальне розшарування.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Грасманіани. - Класифікація векторних розшарувань. <p style="text-align: center;">Тема 15. Геометрія векторних розшарувань.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Структурна група векторного розшарування. Її редукція до ортогональної групи. - Зв'язність. Кривина зв'язності. - Вираз характеристичних класів через форму кривини зв'язності.
Теми практичних занять	<ul style="list-style-type: none"> - Фундаментальна група. Теорема Зейферта-ван-Кампена. - Старші гомотопічні групи. - Точна гомотопічна послідовність розшарування. - Групи сингулярних та клітинних гомологій та когомологій - Послідовність Майера-В'єсторіса. - Подвійність Пуанкаре. - Клас Ейлера векторного розшарування. - Інваріант Хопфа. - Подвійний комплекс Чеха-де Рама. - Спектральна послідовність розшарування. - Кільце когомологій. - Характеристичні класи Ейлера, Черна, Понтрягіна, Штифеля - Уитни векторних розшарувань.
Теми для самостійної роботи	<ul style="list-style-type: none"> - Гомотопічна еквівалентність. Деформаційна ретракція. - Ланцюговий комплекс та його (ко)гомології. - Послідовність Майера-Вісторіса з компактним носієм. - Існування доброго покриття. - Формула Кюннета та теорема Лере-Хірша. - Подвійний по Пуанкаре клас до замкнутого та компактного підмноговидам.

<i>Назва п/п</i>	<i>Короткі інформація</i>																							
	<ul style="list-style-type: none"> - Скручений комплекс де Рама. - Подвійність Пуанкаре в неорієнтованому випадку. - Предпучки та когомології Чеха. Монодромія. - Ізоморфізм Тома в неорієнтованому випадку. - Конструкція Лере. - Застосування спектральних послідовностей в теорії гомотопій. - Теорія перешкод та характеристичні класи 																							
Підсумковий контроль, форма	Іспит/ екзамен																							
Пререквізити	Аналітична геометрія, диференціальна геометрія, ріманова геометрія, загальна алгебра																							
Постреквізити	Оволодіння основними положеннями навчальної дисципліни дозволить застосовувати їх до дослідження різноманітних задач геометрії та фізики, пов'язаних з топологією гладких многовидів.																							
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу	В процесі навчання використовуються лекції, методичні матеріали та спеціальна література.																							
Необхідне обладнання	Аудиторія з дошкою та крейдою																							
Шкала оцінювання	Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою: <table border="1" data-bbox="745 1034 1966 1417" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th data-bbox="745 1034 1014 1145" rowspan="2">СУМА БАЛІВ</th> <th data-bbox="1014 1034 1294 1145" rowspan="2">ОЦІНКА ЄКТС</th> <th colspan="2" data-bbox="1294 1034 1966 1090">ОЦІНКА ЗА НАЦІОНАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ</th> </tr> <tr> <th data-bbox="1294 1090 1641 1145">екзамен</th> <th data-bbox="1641 1090 1966 1145">залік</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="745 1145 1014 1201">90-100</td> <td data-bbox="1014 1145 1294 1201">A</td> <td data-bbox="1294 1145 1641 1201">відмінно</td> <td data-bbox="1641 1145 1966 1417" rowspan="6" style="text-align: center; vertical-align: middle;">зараховано</td> </tr> <tr> <td data-bbox="745 1201 1014 1257">82-89</td> <td data-bbox="1014 1201 1294 1257">B</td> <td data-bbox="1294 1201 1641 1313" rowspan="2" style="text-align: center; vertical-align: middle;">добре</td> </tr> <tr> <td data-bbox="745 1257 1014 1313">75-81</td> <td data-bbox="1014 1257 1294 1313">C</td> </tr> <tr> <td data-bbox="745 1313 1014 1369">64-74</td> <td data-bbox="1014 1313 1294 1369">D</td> <td data-bbox="1294 1313 1641 1417" rowspan="2" style="text-align: center; vertical-align: middle;">задовільно</td> </tr> <tr> <td data-bbox="745 1369 1014 1417">60-63</td> <td data-bbox="1014 1369 1294 1417">E</td> </tr> </tbody> </table>				СУМА БАЛІВ	ОЦІНКА ЄКТС	ОЦІНКА ЗА НАЦІОНАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ		екзамен	залік	90-100	A	відмінно	зараховано	82-89	B	добре	75-81	C	64-74	D	задовільно	60-63	E
СУМА БАЛІВ	ОЦІНКА ЄКТС	ОЦІНКА ЗА НАЦІОНАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ																						
		екзамен	залік																					
90-100	A	відмінно	зараховано																					
82-89	B	добре																						
75-81	C																							
64-74	D	задовільно																						
60-63	E																							

<i>Назва п/п</i>	<i>Короткі інформація</i>															
	35-59	FX	незадовільно	не зараховано												
	1-34	F														
Критерії оцінювання	<table border="0"> <tr> <td style="text-align: center;">Кількість балів</td> <td style="text-align: center;">Критерії оцінювання</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">90-100</td> <td>У відповіді повністю розкрито зміст питання. Матеріал викладено логічно, аргументовано, мова є грамотною, науковий стиль викладення матеріалу, вільне володіння термінологічним апаратом дисципліни. У відповіді продемонстровано високий рівень володіння матеріалом, що входить до навчальної програми, та продемонстровано високі практичні навички.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">75-89</td> <td>Відповідь досить повно розкриває зміст питання або розкриває основні (найважливіші) аспекти у запитанні, слухач володіє термінологічним апаратом дисципліни. У викладеному матеріалі слухач має помилки із аргументацією відповіді, недостатня логічність та послідовність викладення матеріалу. У відповіді продемонстровано високий рівень володіння матеріалом, що було викладено на лекціях, та середній рівень володіння практичним матеріалом.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">60-74</td> <td>Відповідь на контрольне питання є неповною, розкриває тільки деякі аспекти навчального матеріалу. Слухач припускається помилок у використанні термінології навчальної дисципліни. Рівень володіння матеріалом, що було викладено на лекціях, додатковим та практичним матеріалом є середнім.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">35-59</td> <td>У відповіді допущено суттєві помилки, які свідчать про незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; слухач слабо володіє термінологією дисципліни.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1-34</td> <td>Відповідь практично відсутня, слухач демонструє незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; не володіє термінологією</td> </tr> </table>				Кількість балів	Критерії оцінювання	90-100	У відповіді повністю розкрито зміст питання. Матеріал викладено логічно, аргументовано, мова є грамотною, науковий стиль викладення матеріалу, вільне володіння термінологічним апаратом дисципліни. У відповіді продемонстровано високий рівень володіння матеріалом, що входить до навчальної програми, та продемонстровано високі практичні навички.	75-89	Відповідь досить повно розкриває зміст питання або розкриває основні (найважливіші) аспекти у запитанні, слухач володіє термінологічним апаратом дисципліни. У викладеному матеріалі слухач має помилки із аргументацією відповіді, недостатня логічність та послідовність викладення матеріалу. У відповіді продемонстровано високий рівень володіння матеріалом, що було викладено на лекціях, та середній рівень володіння практичним матеріалом.	60-74	Відповідь на контрольне питання є неповною, розкриває тільки деякі аспекти навчального матеріалу. Слухач припускається помилок у використанні термінології навчальної дисципліни. Рівень володіння матеріалом, що було викладено на лекціях, додатковим та практичним матеріалом є середнім.	35-59	У відповіді допущено суттєві помилки, які свідчать про незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; слухач слабо володіє термінологією дисципліни.	1-34	Відповідь практично відсутня, слухач демонструє незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; не володіє термінологією
Кількість балів	Критерії оцінювання															
90-100	У відповіді повністю розкрито зміст питання. Матеріал викладено логічно, аргументовано, мова є грамотною, науковий стиль викладення матеріалу, вільне володіння термінологічним апаратом дисципліни. У відповіді продемонстровано високий рівень володіння матеріалом, що входить до навчальної програми, та продемонстровано високі практичні навички.															
75-89	Відповідь досить повно розкриває зміст питання або розкриває основні (найважливіші) аспекти у запитанні, слухач володіє термінологічним апаратом дисципліни. У викладеному матеріалі слухач має помилки із аргументацією відповіді, недостатня логічність та послідовність викладення матеріалу. У відповіді продемонстровано високий рівень володіння матеріалом, що було викладено на лекціях, та середній рівень володіння практичним матеріалом.															
60-74	Відповідь на контрольне питання є неповною, розкриває тільки деякі аспекти навчального матеріалу. Слухач припускається помилок у використанні термінології навчальної дисципліни. Рівень володіння матеріалом, що було викладено на лекціях, додатковим та практичним матеріалом є середнім.															
35-59	У відповіді допущено суттєві помилки, які свідчать про незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; слухач слабо володіє термінологією дисципліни.															
1-34	Відповідь практично відсутня, слухач демонструє незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; не володіє термінологією															
Питання до іспиту/заліку	<ol style="list-style-type: none"> 1. Фундаментальна група/ теорема Зейферта-ван Кампена. 2. Накриття. Класифікація накриттів. Універсальне накриття. 3. Старші та відносні гомотопічні групи. Точна гомотопічна послідовність пари. 4. CW-комплекси. Лемма Борсука. 5. Точна гомотопічна послідовність розшарування. 6. Ланцюговий комплекс. Ланцюгова гомотопія. 7. Симпліціальні та сингулярні гомології. 8. Точна послідовність пари та трійки. 9. Клітинні (ко)гомології CW-просторів та їх збіг з сингулярними. 10. Когомології. Множення в когомологіях. 11. Многовиди. Подвійність Пуанкаре. Подвійність Александера-Понтрягіна. 12. Функції Морса. Нерівність Морса. 															

<i>Назва п/п</i>	<i>Короткі інформація</i>
	<p>13. Комплекс де Рама. Послідовність Майера – В’єторіса. 14. Формула Стокса. 15. Когомології де Рама з компактними носіями. Подвійність Пуанкаре. 16. Глобальна кутова форма та клас Ейлера. 17. Форма Тома. Ізоморфізм Тома 18. Клас Ейлера орієнтованого сферичного розшарування. Теорема Хопфа об індексі. 19. Інваріант Хопфа. Група $\pi_3(S^2)$. 20. Комплекс Чеха де Рама. Когомології Чеха та їх збіг з когомологіями де Рама. 21. Спектральна послідовність фільтрованого комплексу. Приклад подвійного комплексу. 22. Спектральна послідовність розшарування. 23. Спектральна послідовність розшарування Хопфа та кільцева структура $H^*(CP^n)$. 24. Послідовність Гізіна. 25. Класи Черна комплексного векторного розшарування. 26. Проективізація векторного розшарування. Властивості класів Черна. 27. Принцип розкладення. Формула добутку Уїтні. Еквівалентність старшого класу Черна та Ейлера. 28. Многovid прапорів та його когомології. 29. Комплексифікація речового розшарування. Класи Понтрягіна. 30. Універсальне розшарування. Грасманіан. Класифікація векторних розшарувань. 31. Зв’язність. Кривина зв’язності. Вираз характеристичних класів через форму кривини зв’язності.</p>
Література для вивчення дисципліни:	<ol style="list-style-type: none"> 1. Р. Ботт, В. Л. Ту. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. М.: Наука, 1989. 2. А. Хэтчер. Алгебраическая топология. М.: МЦНМО, 2011. 3. А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. – М.: Наука, 1989.
Додаткова література:	<ol style="list-style-type: none"> 1. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия. Методы теории гомологий. – М.: Наука, 1984. 2. Э. Спеньер. Алгебраическая топология. – М., Мир, 1971. 3. G.E. Bredon. Topology and geometry. – NY: Springer, 1997. 4. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко Современная геометрия. Методы и приложения. – М.: Наука, 1986.

<i>Назва п/п</i>	<i>Короткі інформація</i>
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.