

**ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. ВЕРКІНА
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ**

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. директора
ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України



М.І. Глушук

16 вересня 2020 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА
навчальної дисципліни
АЛГЕБРАЇЧНА ТОПОЛОГІЯ (ВБ 10)

з галузі знань «11 Математика і статистика»
за спеціальністю «111 Математика»

Рівень вищої освіти третій (освітньо-науковий)

Освітня програма доктор філософії

Форма навчання денна

*Загальний обсяг у
кредитах*

Європейської

кредитної трансферно-

накопичувальної системи: 6

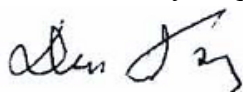
Харків - 2020

РОЗРОБЛЕНО ТА ВНЕСЕНО:

Фізико–технічним інститутом низьких температур ім. Б. І. Веркіна
Національної академії наук України

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ:

Д.В. Болотов – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь і геометрії ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України



Програма затверджена Вченою радою Фізико–технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Веркіна Національної академії наук України, 16 вересня 2020 р., протокол № 7.

1. Опис навчальної дисципліни

1.1 Метою курсу є ознайомлення аспірантів з базовими конструкціями та обчислювальними методами алгебраїчної топології в категорії гладких многовидів.

1.2. Характеристики навчальної дисципліни

Форма навчання	Денна
Кількість кредитів	6
Загальна кількість годин	180 год.
Рік підготовки	2-й
Семестр	3,4
Лекції	36 год.
Практичні, семінарські заняття	18 год.
Самостійна робота	126 год.

1.3 Анотація навчальної дисципліни

В курсі лекцій планується знайомство з основними конструкціями та обчислювальними методами алгебраїчної топології, які виникають в задачах геометрії та сучасній фізиці. Зокрема, в категорії гладких многовидів буде викладено конструкції подвійного комплексу Чеха- де Рама та спектральних послідовностей, які є основним обчислювальним апаратом груп гомологій та когомологій. Також планується знайомство з теорією характеристичних класів векторних розшарувань, які грають важливу роль в сучасній фізиці. Курс буде включати розгляд не тільки теоретичних питань алгебраїчної топології, а також велику увагу буде приділено розбору важливих прикладів та вирішенню задач

Пререквізити: Аналітична геометрія, диференціальна геометрія, ріманова геометрія, загальна алгебра

2. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення курсу аспірант повинен *знати:*

- поняття фундаментальної, гомотопічної та відносної гомотопічної груп;
- поняття сингулярних та клітинних гомологій;
- поняття гладкого многовиду та орієнтованості;
- поняття комплексу та когомологій де Рама;
- поняття подвійності Пуанкаре;
- основи теорії Морса та нерівність Морса.
- поняття розшарованого простору;
- поняття нормального розшарування та класу Тома;
- поняття комплексу Чеха –де Рама
- поняття спектральної послідовності фільтрованого комплексу.
- поняття характеристичного класу векторного розшарування
- формулу додатку характеристичних класів.
- вираз характеристичних класів через форму кривини зв'язності векторного розшарування.

вміти:

- Користуватися обчислювальними методами алгебраїчної топології, які включають в себе точні та спектральні послідовності.

розвинути загальні компетенції:

- Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- Здатність проводити дослідження на високому рівні.
- Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації.
- Здатність бути критичним і самокритичним.
- Здатність до практичного застосування знань.
- Вміння виявляти, ставити та розв'язувати актуальні проблеми.
- Здатність генерувати нові ідеї.
- Здатність до наукового мислення, володіння загальнонауковими (філософськими) компетентностями, спрямованими на формування системного наукового світогляду, професійної етики та загального культурного кругозору
- Дотримання морально-етичних правил поведінки та принципів академічної доброчесності, притаманних академічному середовищу

розвинути фахові компетенції:

- Вміння виявляти, чітко формулювати та розв'язувати математичні задачі.
- Здатність вибирати адекватний математичний апарат, використовувати відомі теоретичні поняття та факти для розв'язання конкретних дослідницьких задач.
- Здатність доводити математичні твердження, отримувати висновки.
- Здатність перевіряти коректність математичних тверджень.
- Вміння встановлювати зв'язки між абстрактними математичними структурами і конкретними математичними об'єктами.
- Вміння встановлювати зв'язки між ідеями та об'єктами з різних галузей математики.
- Знання та розуміння фундаментальних методів логіки, математичного, комплексного та функціонального аналізу, алгебри, геометрії, топології, диференціальних рівнянь, тощо.
- Здатність застосовувати сучасні математичні методи до прикладних задач, знання та розуміння методів побудови та якісного і кількісного аналізу математичних моделей природних, техногенних, економічних та соціальних об'єктів та процесів.
- Здатність користуватися існуючими програмними засобами для проведення обчислень, оформлення результатів роботи тощо.
- Здобуття компетентностей, достатніх для викладання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах.
- Здатність проведення самостійних досліджень на високому рівні.
- Вміння аналізувати математичні праці та виявляти мало досліджені та математично цікаві питання.
- Вміння будувати, досліджувати та застосовувати спеціальні математичні структури, використовувати їх у різних розділах математики.
- Знання фундаментальних праць провідних вітчизняних та закордонних учених у області дослідження.
- Здатність відслідковувати найважливіші праці, які з'являються у поточній спеціальній літературі.

Загальні програмні результати навчання:

- Мати високу загальну математичну ерудицію та фундаментальні знання в галузі спеціалізації.

- Знати методологічні принципи та методи математичного дослідження.
- Знати основи організації дослідницького наукового процесу.
- Формулювати робочі гіпотези досліджуваної проблеми, самостійно розв'язувати складні математичні задачі, доводити теореми, будувати приклади.
- Аналізувати математичні праці, визначати правильність викладених математичних фактів, оцінювати новизну та перспективність запропонованих ідей.
- Ініціювати, організовувати та проводити комплексні дослідження в галузі науково-дослідницької та інноваційної діяльності.
- Обирати нові перспективні напрямки досліджень.
- Представляти свої наукові результати англійською мовою в усній та письмовій формах.
- Розробляти наукові проекти та готувати заявки на наукові гранти (національні та міжнародні).
- Здатність працювати в команді.
- Здатність спілкуватися в діалоговому режимі з широкою науковою спільнотою, у тому числі, на міжнародному рівні.
- Здатність професійно презентувати результати своїх досліджень на наукових конференціях і семінарах (у тому числі, міжнародних), та кваліфіковано викладати результати досліджень у наукових статтях.
- Здатність презентувати свої результати широкій професійній аудиторії, яка не складається виключно зі спеціалістів у даній галузі.
- Здатність презентувати свою роботу нематематичній науковій та загальній (непрофесійній) аудиторіям
- Здатність діяти соціально відповідально та громадянсько свідомо, дотримуватись принципів академічної доброчесності.
- Здатність саморозвиватися і самовдосконалюватися, нести відповідальність за прийняття експертних рішень.
- Здатність приймати обґрунтовані рішення, мотивувати людей та рухатися до спільної мети

3. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Основи теорії гомотопій та гомологій

Тема 1. Теорія гомотопій

- Фундаментальна група. Накриття. Засоби обчислення.
- Старші та відносні гомотопічні групи. Точна гомотопічна послідовність пари.
- SW -комплекси. Лемма Борсука.
- Розшарування. Точна гомотопічна послідовність розшарування.

Тема 2. Теорія гомологій

- Симпліціальні та сингулярні гомології. Ланцюгова гомотопія та гомотопічна інваріантність сингулярних (ко)гомологій.
- Числа Бетті та ейлерова характеристика.
- Гомології пари. Точна послідовність пари та трійки.
- Клітинні (ко)гомології SW -просторів та їх збіг з сингулярними.
- Когомології. \cup та \cap -множення в когомологіях.

Тема 3. Гомології та когомології многовидів

- Гомології та когомології многовидів. Фундаментальний клас.
- Подвійність Пуанкаре та її узагальнення.
- Подвійність Александера-Понтрягіна.
- Основи теорія Морса. Нерівність Морса.

Розділ 2. Теорія де Рама

Тема 4. Комплекс де Рама

Функтори Ω^* та Ω^*_c .

Комплекс де Рама.

Послідовність Майера – В'єторіса для когомологій де Рама.

Тема 5. Подвійність Пуанкаре

Формула Стокса. Леми Пуанкаре.

Принцип Майера-В'єторіса та подвійність Пуанкаре.

Тема 6. Клас Ейлера та Ізоморфізм Тома

- Векторні розшарування. Глобальна кутова форма орієнтованого векторного розшарування.
- Визначення класу Ейлера через кутову форму.
- Форма Тома та її зв'язок з класом Ейлера. Ізоморфізм Тома.

Тема 7. Сферичні розшарування

- Клас Ейлера орієнтованого сферичного розшарування.
- Теорема Хопфа об індексі.
- Інваріант Хопфа та методи його обчислення. Розшарування Хопфа. Група $\pi_3(S^2)$.

Розділ 3. Спектральні послідовності

Тема 8. Узагальнений принцип Майера-В'єторіса

- Узагальнена послідовність Майера-В'єторіса.
- Подвійний комплекс.
- Когомології Чеха та їх збіг з когомологіями де Рама.

Тема 9. Спектральна послідовність фільтрованого комплексу

- Точні пари. Побудова спектральної послідовності фільтрованого комплексу.
- Спектральна послідовність подвійного комплексу.

Тема 10. Спектральна послідовність розшарування

- Побудова спектральної послідовності розшарування.
- Операція добутку в спектральній послідовності. Кольцова структура $H^*(\mathbb{C}P^n)$.
- Послідовність Гізіна.

Розділ 4. Характеристичні класи

Тема 11. Класи Черна комплексного векторного розшарування

- Перший клас Черна лінійних розшарувань.
- Проективізація векторного розшарування.
- Властивості класу Черна.

Тема 12. Принцип розкладення та многовиди прапорів

- Принцип розкладення. Формула добутку Уїтні.
- Кільце когомологій многовиду прапорів.

Тема 13. Класи Понтрягіна

- Комплексифікація.

- Класи Понтрягіна речового розшарування.
- Застосування до занурень многовидів у евклідові простір.

Тема 14. Універсальне розшарування

- Грасманіани.
- Класифікація векторних розшарувань

Тема 15. Геометрія векторних розшарувань

- Структурна група векторного розшарування. Її редукція до ортогональної групи.
- Зв'язність. Кривина зв'язності.
- Вираз характеристичних класів через форму кривини зв'язності.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви модулів і тем	Кількість годин				
	Аудиторні години				
	Усього	у тому числі			Самостійна робота
лекц.		практ.	сем.		
1	2	3	4	5	6
Розділ 1. Основи теорії гомотопій та гомологій					
Тема 1. Теорія гомотопій	12	4			8
Тема 2. Теорія гомологій	14	4	2		8
Тема 3. Гомології та когомології многовидів	14	4	2		8
Разом за розділом 1	40	12	4		24
Розділ 2. Теорія де Рама					
Тема 4. Комплекс де Рама.	12	2	2		8
Тема 5. Подвійність Пуанкаре.	10	2			8
Тема 6. Клас Ейлера та Ізоморфізм Тома.	12	2	2		8
Тема 7. Сферичні розшарування.	10	2			8
Разом за розділом 2	44	8	4		32
Розділ 3. Спектральні послідовності					
Тема 8. Узагальнений принцип Майера-В'єторіса	14	2	2		10
Тема 9. Спектральна послідовність фільтро-ваного комплексу	14	2	2		10
Тема 10. Спектральна послідовність розшарування	14	2	2		10
Разом за розділом 3	42	6	6		30
1	2	3	4	5	6
Розділ 4. Характеристичні класи					
Тема 11. Класи Черна комплексного вектор-ного розшарування	10	2			8

Тема 12. Принцип розкладення та многовиди прапорів	12	2	2		8
Тема 13. Класи Понтрягіна	10	2			8
Тема 14. Універсальне розшарування	12	2	2		8
Тема 15. Геометрія векторних розшарувань	10	2			8
Разом за розділом 4	54	10	4		40
Усього годин	180	36	18	-	126

Теми семінарських занять

- Фундаментальна група. Теорема Зейферта-ван-Кампена.
- Старші гомотопічні групи.
- Точна гомотопічна послідовність розшарування.
- Групи сингулярних та клітинних гомологій та когомологій
- Послідовність Майера-В'єторіса.
- Подвійність Пуанкаре.
- Клас Ейлера векторного розшарування.
- Інваріант Хопфа.
- Подвійний комплекс Чеха-де Рама.
- Спектральна послідовність розшарування.
- Кільце когомологій.
- Характеристичні класи Ейлера, Черна, Понтрягіна, Штифеля - Уитни векторних розшарувань.

Теми для самостійної роботи

- Гомотопічна еквівалентність. Деформаційна ретракція.
- Ланцюговий комплекс та його (ко)гомології.
- Послідовність Майера-Вієторіса з компактним носієм.
- Існування доброго покриття.
- Формула Кюннета та теорема Лере-Хірша.
- Подвійний по Пуанкаре клас до замкнутого та компактного підмноговидам.
- Скручений комплекс де Рама.
- Подвійність Пуанкаре в неорієнтованому випадку.
- Предпучки та когомології Чеха. Монодромія.
- Ізоморфізм Тома в неорієнтованому випадку.
- Конструкція Лере.
- Застосування спектральних послідовностей в теорії гомотопій.
- Теорія перешкод та характеристичні класи

5. Методи контролю

поточний (домашні завдання); підсумковий екзамен (у формі письмової роботи)

6. Схема нарахування балів

Поточний контроль					Екзамен	Сума
Розділ 1 Теми 1-3	Розділ 2 Теми 4-7	Розділ 3 Теми 8-10	Розділ 4 Теми 11-15	Разом		
10	15	15	20	60	40	100

7. Методи навчання

В процесі навчання використовуються лекції, методичні матеріали та спеціальна література.

8. Шкала оцінювання

Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою:

СУМА БАЛІВ	ОЦІНКА ЄКТС	ОЦІНКА ЗА НАЦІОНАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ	
		екзамен	залік
90-100	A	відмінно	зараховано
82-89	B	добре	
75-81	C		
64-74	D	задовільно	
60-63	E		
35-59	FX	незадовільно	не зараховано

9. Критерії оцінювання

Кількість балів

Критерії оцінювання

90-100	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
75-89	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
60-74	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
35-59	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, у роботі допущено суттєві помилки, які свідчать про незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; слухач слабо володіє термінологією дисципліни.

- 1-34 Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, Відповідь практично відсутня, слухач демонструє незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; не володіє термінологією

10. Орієнтовні питання до іспиту

1. Фундаментальна група/ теорема Зейферта-ван Кампена.
2. Накриття. Класифікація накриттів. Універсальне накриття.
3. Старші та відносні гомотопічні групи. Точна гомотопічна послідовність пари.
4. CW-комплекси. Лемма Борсука.
5. Точна гомотопічна послідовність розшарування.
6. Ланцюговий комплекс. Ланцюгова гомотопія.
7. Симпліціальні та сингулярні гомології.
8. Точна послідовність пари та трійки.
9. Клітинні (ко)гомології CW-просторів та їх збіг з сингулярними.
10. Когомології. Множення в когомологіях.
11. Многовиди. Подвійність Пуанкаре. Подвійність Александра-Понтрягіна.
12. Функції Морса. Нерівність Морса.
13. Комплекс де Рама. Послідовність Майера – В'єторіса.
14. Формула Стокса.
15. Когомології де Рама з компактними носіями. Подвійність Пуанкаре.
16. Глобальна кутова форма та клас Ейлера.
17. Форма Тома. Ізоморфізм Тома
18. Клас Ейлера орієнтованого сферичного розшарування. Теорема Хопфа об індексі.
19. Інваріант Хопфа. Група $\pi_3(S^2)$.
20. Комплекс Чеха де Рама. Когомології Чеха та їх збіг з когомологіями де Рама.
21. Спектральна послідовність фільтрованого комплексу. Приклад подвійного комплексу.
22. Спектральна послідовність розшарування.
23. Спектральна послідовність розшарування Хопфа та кільцева структура $H^*(CP^n)$.
24. Послідовність Гізіна.
25. Класи Черна комплексного векторного розшарування.
26. Проективізація векторного розшарування. Властивості класів Черна.
27. Принцип розкладення. Формула добутку Уїтні. Еквівалентність старшого класу Черна та Ейлера.
28. Многовид прапорів та його когомології.
29. Комплексифікація речового розшарування. Класи Понтрягіна.
30. Універсальне розшарування. Грасманіан. Класифікація векторних розшарувань.
31. Зв'язність. Кривина зв'язності. Вираз характеристичних класів через форму кривини зв'язності.

11. Література

Основна:

1. Р. Ботт, В. Л. Ту. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. М.: Наука, 1989.
2. А. Хэтчер. Алгебраическая топология. М.: МЦНМО, 2011.
3. А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. – М.: Наука, 1989.

Додаткова:

1. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия. Методы теории гомологий. – М.: Наука, 1984.
2. Э. Спеньер. Алгебраическая топология. – М., Мир, 1971.
3. G.E. Bredon. Topology and geometry. – NY: Springer, 1997.
4. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко Современная геометрия. Методы и приложения. – М.: Наука, 1986.