

**ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. ВЕРКІНА  
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ**

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

В.о. директора  
ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України



М.І. Глушук

16 вересня 2020 р.



**РОБОЧА ПРОГРАМА**  
навчальної дисципліни  
**МЕТОДИ СУЧАСНОЇ СПЕКТРАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ОПЕРАТОРІВ (ВБ 1)**

з галузі знань «11 Математика і статистика»  
за спеціальністю «111 Математика»

<i>Рівень вищої освіти</i>	<u>третій (освітньо-науковий)</u>
<i>Освітня програма</i>	<u>доктор філософії</u>
<i>Форма навчання</i>	<u>денна</u>
<i>Загальний обсяг у кредитах</i>	
<i>Європейської кредитної трансферно-накопичувальної системи:</i>	9

Харків - 2020

РОЗРОБЛЕНО ТА ВНЕСЕНО:

Фізико–технічним інститутом низьких температур ім. Б. І. Веркіна  
Національної академії наук України

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**М.В. Щербина** – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, член-кор. НАН України, завідувач відділу математичної фізики ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України



Програма затверджена Вченою радою Фізико–технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Веркіна Національної академії наук України, 16 вересня 2020 р., протокол № 7.

## 1. Опис навчальної дисципліни

1.1 Метою курсу є ознайомлення студентів з поняттями та методами теорії нескінченновимірних несамоспряжених операторів у гільбертовому просторі та вивчення особливостей застосування цих методів для широкого класу прикладних задач, які виникають у фізиці і механіці.

### 1.2. Характеристики навчальної дисципліни

Форма навчання	Денна
Кількість кредитів	9
Загальна кількість годин	270 год.
Рік підготовки	2-й
Семестр	3,4
Лекції	36 год.
Практичні, семінарські заняття	18 год.
Самостійна робота	216 год.

### 1.3 Анотація навчальної дисципліни

Несамоспряжені оператори виникають у багатьох задачах теоретичної та математичної фізики, а також у численних прикладних задачах з інших розділів науки. Спектральні властивості таких операторів, зокрема, поведінка їх власних значень під впливом певних збурень грають величезну роль при вивченні рішень диференціальних та інтегральних рівнянь, дослідженні динамічних систем, вивченні поведінки випадкових матриць великих розмірів, тощо. Курс теорії несамоспряжених операторів в значною мірою буде присвячено вивченню методів спектрального аналізу компактних несамоспряжених операторів, зокрема, поведінки їх  $S$ -чисел під впливом адитивних та мультиплікативних збурень, а також аналізу ядерних операторів та операторів Гільберта-Шмідта.

**Пререквізити:** Комплексний аналіз, дійсний аналіз, елементи спектральної теорії операторів

## 2. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення курсу аспірант повинен знати:

- поняття компактного оператора;
- визначення резольвенти та спектру;
- поняття про голоморфну оператор-функцію
- поняття про  $s$ -числа компактних операторів та їх мінімаксні властивості;
- нерівності, що пов'язують власні значення та  $s$ -числа цілком неперервних операторів та їх збурення у випадках адитивної та мультиплікативної деформації операторів;
- поняття про ядерні оператори та оператори Гільберта-Шмідта
- теореми про залежність швидкості збігання власних значень до нуля від гладкості ядер інтегральних операторів;
- поняття про детермінанти Фредгольма та їх застосування при розв'язуванні інтегральних рівнянь

*розвинути загальні компетенції:*

- Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

- Здатність проводити дослідження на високому рівні.
- Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації.
- Здатність бути критичним і самокритичним.
- Здатність до практичного застосовування знань.
- Вміння виявляти, ставити та розв'язувати актуальні проблеми.
- Здатність генерувати нові ідеї.
- Здатність до наукового мислення, володіння загальнонауковими (філософськими) компетентностями, спрямованими на формування системного наукового світогляду, професійної етики та загального культурного кругозору
- Дотримання морально-етичних правил поведінки та принципів академічної доброчесності, притаманних академічному середовищу

*розвинути фахові компетенції:*

- Вміння виявляти, чітко формулювати та розв'язувати математичні задачі.
- Здатність вибрати адекватний математичний апарат, використовувати відомі теоретичні поняття та факти для розв'язання конкретних дослідницьких задач.
- Здатність доводити математичні твердження, отримувати висновки.
- Здатність перевіряти коректність математичних тверджень.
- Вміння встановлювати зв'язки між абстрактними математичними структурами і конкретними математичними об'єктами.
- Вміння встановлювати зв'язки між ідеями та об'єктами з різних галузей математики.
- Знання та розуміння фундаментальних методів логіки, математичного, комплексного та функціонального аналізу, алгебри, геометрії, топології, диференціальних рівнянь, тощо.
- Здатність застосовувати сучасні математичні методи до прикладних задач, знання та розуміння методів побудови та якісного і кількісного аналізу математичних моделей природних, техногенних, економічних та соціальних об'єктів та процесів.
- Здатність користуватися існуючими програмними засобами для проведення обчислень, оформлення результатів роботи тощо.
- Здобуття компетентностей, достатніх для викладання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах.
- Здатність проведення самостійних досліджень на високому рівні.
- Вміння аналізувати математичні праці та виявляти мало досліджені та математично цікаві питання.
- Вміння будувати, досліджувати та застосовувати спеціальні математичні структури, використовувати їх у різних розділах математики.
- Знання фундаментальних праць провідних вітчизняних та закордонних учених у області дослідження.
- Здатність відслідковувати найважливіші праці, які з'являються у поточній спеціальній літературі.

*Загальні програмні результати навчання:*

- Мати високу загальну математичну ерудицію та фундаментальні знання в галузі спеціалізації.
- Знати методологічні принципи та методи математичного дослідження.
- Знати основи організації дослідницького наукового процесу.
- Формулювати робочі гіпотези досліджуваної проблеми, самостійно розв'язувати складні математичні задачі, доводити теореми, будувати приклади.

- Аналізувати математичні праці, визначати правильність викладених математичних фактів, оцінювати новизну та перспективність запропонованих ідей.
- Ініціювати, організовувати та проводити комплексні дослідження в галузі науково-дослідницької та інноваційної діяльності.
- Обирати нові перспективні напрямки досліджень.
- Представляти свої наукові результати англійською мовою в усній та письмовій формах.
- Розробляти наукові проекти та готувати заявки на наукові гранти (національні та міжнародні).
- Здатність працювати в команді.
- Здатність спілкуватися в діалоговому режимі з широкою науковою спільнотою, у тому числі, на міжнародному рівні.
- Здатність професійно презентувати результати своїх досліджень на наукових конференціях і семінарах (у тому числі, міжнародних), та кваліфіковано викладати результати досліджень у наукових статтях.
- Здатність презентувати свої результати широкій професійній аудиторії, яка не складається виключно зі спеціалістів у даній галузі.
- Здатність презентувати свою роботу нематематичній науковій та загальній (непрофесійній) аудиторіям
- Здатність діяти соціально відповідально та громадянсько свідомо, дотримуватись принципів академічної доброчесності.
- Здатність саморозвиватися і самовдосконалюватися, нести відповідальність за прийняття експертних рішень.
- Здатність приймати обґрунтовані рішення, мотивувати людей та рухатися до спільної мети

### 3. Тематичний план навчальної дисципліни

#### Розділ 1. Основні відомості з теорії операторів.

**Тема 1.** Попередні відомості з теорії операторів:

норма оператора, резольвента оператора, резольвентна множина та спектр оператора, класифікація точок спектру

**Тема 2** Оператори Вальтера та їх властивості

**Тема 3.** Поняття про нормальні точки обмеженого оператора.

Стійкість кореневих кратностей оператора.

**Тема 4.** Теорема про голоморфну оператор-функцію та її наслідки.

**Тема 5.** Лема Шура про трикутну матрицю компактного оператора

#### Розділ 2. S-числа компактних операторів та їх властивості.

**Тема 6.** Основні спектральні властивості компактних операторів: точковий спектр, збігання власних значень до 0.

**Тема 7.** S-числа цілком неперервних операторів, їх мінімаксні та інші прості властивості.

**Тема 8.** Нерівності, які пов'язують s-числа, власні числа та діагональні елементи компактних операторів.

**Тема 9.** Нерівності для s-чисел суми та добутку цілком неперервних операторів.

#### Розділ 3. Класи ядерних операторів та операторів Гільберта-Шмідта.

**Тема 10.** Симетрично-нормовані ідеали у просторі операторів

**Тема 11.** Ознаки ядерності операторів та формули знаходження слідів.

**Тема 12.** Теореми про залежність швидкості збігання власних значень до нуля від гладкості ядер інтегральних операторів.

**Розділ 4. Детермінанти Фредгольма інтегральних операторів****Тема 13.** Поняття про детермінанти Фредгольма інтегральних операторів**Тема 14.** Застосування детермінантів Фредгольма до вирішення інтегральних рівнянь**4. Структура навчальної дисципліни**

Назви розділів і тем	Кількість годин				
	Аудиторні години				Самост робота
	Усього	у тому числі			
лекц		сем	прак т		
1	2	3	4	5	6
<b>Розділ 1. Основні відомості з теорії операторів</b>					
<b>Тема 1.</b> Попередні відомості з теорії операторів.	16	2			14
<b>Тема 2.</b> Оператори Вальтера та їх властивості.	20	2	2		16
<b>Тема 3.</b> Поняття про нормальні точки обмеженого оператора.	20	4	2		14
<b>Тема 4.</b> Теорема про голоморфну оператор-функцію та її наслідки	20	2	2		16
<b>Тема 5.</b> Лема Шура про трикутну матрицю компактного оператора	16	2			14
<b>Разом за розділом 1</b>	<b>92</b>	<b>12</b>	<b>6</b>		<b>74</b>
<b>Розділ 2. S-числа компактных операторів та їх властивості</b>					
<b>Тема 6.</b> Основні спектральні властивості компактных операторів	20	2	2		16
<b>Тема 7.</b> S-числа цілком неперервних операторів, їх властивості.	16	2			14
<b>Тема 8.</b> Нерівності для s-чисел та власних чисел	22	2	2		16
<b>Тема 9.</b> Нерівності для s-чисел суми та добутку операторів	18	2	2		14
<b>Разом за розділом 2</b>	<b>76</b>	<b>10</b>	<b>6</b>		<b>60</b>
<b>Розділ 3. Класи ядерних операторів та операторів Гільберта-Шмідта</b>					
<b>Тема 10.</b> Симетрично-нормовані ідеали у просторі операторів.	20	2	2		16
<b>Тема 11.</b> Ознаки ядерності операторів та формули знаходження слідів.	18	4			14
<b>Тема 12.</b> Теореми про швидкості збігання власних значень до нуля.	20	2	2		16
<b>Разом за розділом 3</b>	<b>58</b>	<b>8</b>	<b>4</b>		<b>46</b>
<b>Розділ 4. Детермінанти Фредгольма інтегральних операторів</b>					
<b>Тема 13.</b> Поняття про детермінанти Фредгольма.	16	2			14
<b>Тема 14.</b> Застосування детермінантів Фредгольма.	22	4	2		16

<b>Разом за розділом 4</b>	<b>38</b>	<b>6</b>	<b>2</b>		<b>30</b>
Підготовка до екзамену.	6				6
<b>Усього годин</b>	<b>270</b>	<b>36</b>	<b>18</b>		<b>216</b>

### Теми семінарських занять

- Операторнозначні голоморфні функції . Теорема Коші для голоморфних функцій
- Ідеал компактних операторів та його властивості
- Власні та кореневі підпростори компактних операторів
- Мінімаксні властивості власних значень самоспряжених компактних операторів
- Нерівності для  $S$ -чисел суми та добутку операторів
- Нерівності для опуклих функцій від  $S$ -чисел компактних операторів
- Інтегральні оператори Гільберта-Шмідта у просторі  $L_2[a,b]$
- Ядерні оператори у просторі  $L_2[a,b]$
- Властивості детермінантів Фредгольма та їх використання в теорії випадкових матриць

### Теми для самостійної роботи

- Функції від операторів та побудова розкладання одиниці.
- Простота спектру та циклічні вектори.
- Інваріантні підпростори для операторів. Існування інваріантного підпростору для компактних операторів.
- Нерівності для власних значень компактних самоспряжених операторів.
- Характеристичний детермінант для ядерного оператора.
- Регуляризовані характеристичні детермінанти ядерних операторів

## 5. Методи контролю

поточний (домашні завдання); підсумковий екзамен (у формі письмової роботи)

## 6. Схема нарахування балів

Поточний контроль					Екзамен	Сума
Розділ 1 Теми 1-5	Розділ 2 Теми 6-9	Розділ 3 Теми 10-12	Розділ 4 Теми 13-14	Разом		
15	20	15	10	60	40	100

## 7. Методи навчання

В процесі навчання використовуються лекції, презентації, методичні матеріали та спеціальна література. Технічні засоби - необхідні для демонстрації презентацій, загально вживані програми.

## 8. Шкала оцінювання

Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою:

СУМА БАЛІВ	ОЦІНКА ЄКТС	ОЦІНКА ЗА НАЦІОНАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ	
		екзамен	залік
90-100	A	відмінно	зараховано
82-89	B	добре	
75-81	C		
64-74	D	задовільно	
60-63	E		
35-59	FX	незадовільно	не зараховано

## 9. Критерії оцінювання

**Кількість балів**

**Критерії оцінювання**

90-100	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
75-89	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
60-74	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
35-59	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, у роботі допущено суттєві помилки, які свідчать про незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; слухач слабо володіє термінологією дисципліни.
1-34	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, Відповідь практично відсутня, слухач демонструє незнання лекційного матеріалу або обов'язкової літератури; не володіє термінологією

## 10. Орієнтовні питання до іспиту

1. Норма операторів та її властивості. Кільце обмежених операторів.
2. Резольвента оператора, резольвентна множина та спектр оператора.
3. Класифікація точок спектру оператора.
4. Нормальні точки обмеженого оператора. Теорема про стійкість кореневих кратностей операторів.



5. Теорема про голоморфну оператор-функцію та її наслідки.
6. Основні спектральні властивості компактних операторів: їхній точковий спектр, збігання власних значень до 0.
7. Оператори Вольтера та їх властивості.
8. Лема Шура про трикутну матрицю компактних операторів.
9. Спектральна теорема для самоспряжених компактних операторів.
10. Мінімаксні властивості власних значень самоспряжених компактних операторів.
11. S-числа компактних операторів та їх простіші властивості.
12. Мінімаксні властивості s-чисел компактних операторів.
13. Розкладання Шмідта для компактних операторів.
14. Нерівності, які пов'язують s-числа, власні числа та діагональні елементи компактних операторів.
15. Нерівності для s-чисел суми та добутку компактних операторів.
16. Нерівності для функцій від власних значень операторів.
17. Симетрично-нормовані ідеали у просторі операторів та їх властивості.
18. Ядерні оператори та оператори Гільберта-Шмідта.
19. Теорема про вигляд оператора Гільберта-Шмідта в  $L_2[a,b]$ .
20. Ознаки ядерності операторів та формули знаходження слідів.
21. Теореми про залежність швидкості збігання власних значень до нуля від гладкості ядер інтегральних операторів.
22. Детермінанти Фредгольма інтегральних операторів та їх простіші властивості  
Теорема про застосування детермінантів Фредгольма до розв'язання інтегральних рівнянь

## 11. Література

### Основна:

1. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, «Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве», Наука, Москва, 1965.
2. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. «Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве» М.: Наука, Физматлит, 1966. — 544 с.
3. Рид М., Саймон Б. «Методы современной математической физики». Том 1. М.: Мир, 1977. — 357 с.

### Додаткова:

1. Y. Eidelman, V. Milman, A. N. Solomitis. Functional Analysis. An Introduction. Graduate Studies in Mathematics. Volume 66. American Mathematical Society: Providence, Rhode Island (2017N).
2. Danford and J. T. Schwartz, Linear operators, Interscience Publishers, New York, Part 1: 1958, Part 2: 1963
3. A. B. Antonevich, P. N. Knyazev and Ya. V. Radyno, Problems and exercises on functional analysis, Vysheisha Shkola, Minsk, 1978 (Russian).