Математическая физика, функциональный анализ

Сборник научных трудов

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

Математическая физика, функциональный анализ

Сборник научных трудов

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1986

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 517.9

Ф.А.Халилов, Е.Я.Хруслов

МАТРИЧНОЕ ОБОБЩЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА ДЕ ФРИЗА

Модифицированное уравнение Кортевега де Фриза (МКДФ)

$$\varphi_t + \alpha\varphi^2\varphi_x + \varphi_{xxx} = 0, \qquad (1)$$

возникающее при исследовании различного рода нелинейных физических процессов в средах с малой дисперсией, изучалось методом обратной задачи рассеяния в ряде работ [1 – 3]. При значениях параметра $\alpha > 0$ уравнение (1) имеет вещественные N-солитонные решения, затухающие на бесконечности, которые были найдены в работах [1 – 2]. При $\alpha < 0$ таких решений нет, но зато существуют солитоны "на пьедестале", стремящиеся к ненулевой константе при $x \to \pm\infty$. Эти солитоны получены в работе [3].

В данной работе рассматривается матричное уравнение

$$\varphi_t + 3[\varphi, \varphi_{xx}] - 6\varphi\varphi_x\varphi + \varphi_{xxx} = 0, \qquad (2)$$

где $\varphi(x,t)$ – вещественная квадратная матрица-функция размеров $n \times n$, $[\ ,\ ]$-коммутатор. Это уравнение в скалярном случае переходит в уравнение (1) с $\alpha < 0$. В работе найдена операторная пара Лакса, позволившая применить к уравнению (2) метод обратной задачи, и построены некоторые простейшие решения уравнения (2), из которых можно получить односолитонные решения для скалярного уравнения (1) как при $\alpha < 0$, так и при $\alpha > 0$. Исследована асимптотика двухсолитонного решения уравнения (2) и получена формула для сдвига фаз при взаимодействии двух солитонов.

1. Представление Лакса и прямая задача рассеяния

Будем предполагать, что матрица-функция $\varphi(x) \equiv \varphi(x,0)$ непрерывна и удовлетворяет условиям

$$\int_0^{\infty} x \max_{\xi \geq x} |\varphi(\xi)|\, dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} x \max_{\xi \leq x} |\varphi(\xi)|\, dx < \infty, \tag{3}$$

где под абсолютной величиной матрицы понимается корень квадратный из суммы квадратов ее элементов.

Теорема 1. Уравнение (2) равносильно операторному равенству

$$L_t = [A, L], \tag{4}$$

где

$$L = I \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\varphi \frac{\partial}{\partial x},$$

$$A = -4I \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 12\varphi \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 6\left(\varphi_x + \varphi^2\right) \frac{\partial}{\partial x},$$

I - единичная матрица.

Доказательство проводится непосредственной проверкой. Отметим, что в скалярном случае представление (4) отличается от известного представления Лакса для скалярного уравнения МКДФ [3].

Рассмотрим уравнение

$$U'' + 2\varphi(x) U' + k^2 U = 0. \tag{5}$$

Обозначим

$$\sigma_0^{\pm}(x) = \pm \int_x^{\pm\infty} |\varphi(\xi)|\, d\xi, \qquad \sigma_1^{+}(x) = \int_x^{\infty} \max_{\xi \geq \eta} |\varphi(\xi)|\, d\eta,$$

$$\sigma_1^{-}(x) = \int_{-\infty}^{x} \max_{\xi \leq \eta} |\varphi(\xi)|\, d\eta.$$

Теорема 2. Уравнение (5) имеет матричные решения $U^{\pm}(x, k)$, аналитичные в полуплоскости $Im\, k > 0$ и представимые с помощью операторов преобразования в виде

$$U^{\pm}(x,k) = e^{\pm ikx} I \pm ik \int_x^{\pm\infty} A^{\pm}(x,y) e^{\pm iky}\, dy, \tag{6}$$

где $Im\, k \geq 0$, а ядра $A^{\pm}(x, y)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left| A^{\pm}(x,y) \right| \leq \sigma_1^{\pm}\left(\frac{x+y}{2}\right) e^{3\sigma_0^{\pm}(x)} \tag{7}$$

и связаны с матрицей-функцией $\Phi(x)$ соотношениями

$$\Phi(x) = \frac{dA^{\pm}(x,x)}{dx}\left[I - A^{\pm}(x,x)\right]^{-1}. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Im\,k = 0$. После подстановки выражений (6) в уравнение (5) и отделения членов одинакового порядка по k при $k \to \infty$ получим задачи Гурса

$$\begin{cases} A^{\pm}_{xx}(x,y) - A^{\pm}_{yy}(x,y) + 2\Phi(x)A^{\pm}_{x}(x,y) = 0, \\ \frac{d}{dx}A^{\pm}(x,x) + \Phi(x)A^{\pm}(x,x) - \Phi(x) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

которые сводятся к интегродифференциальным уравнениям

$$A^{\pm}(x,y) = I - M^{\pm}\left(\frac{x+y}{2}\right) - 2\int_{0}^{\frac{y-x}{2}} d\beta \int_{\frac{x+y}{2}}^{\pm\infty} \Phi(\alpha-\beta)A^{\pm}_{x}(\alpha-\beta, \alpha+\beta)\,d\alpha,$$

где $M^{\pm}(x)$ – решения уравнения $M'(x) = -\Phi(x)M(x)$, удовлетворяющие условиям $M^{\pm}(x) \to I\ (x \to \pm\infty)$). Отсюда легко получить интегральные уравнения относительно $H^{\pm}(x,y) \equiv A^{\pm}_{x}(x,y)$

$$H^{\pm}(x,y) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x+y}{2}\right)M^{\pm}\left(\frac{x+y}{2}\right) +$$

$$+\int_{x}^{\pm\infty}\Phi(t)H^{\pm}(t, t+y-x)\,dt + \int_{x}^{\frac{x+y}{2}}\Phi(t)H^{\pm}(t, x+y-t)\,dt. \tag{10}$$

Решив уравнения (10) методом последовательных приближений, получим неравенства

$$|H^{+}(x,y)| \leq \frac{1}{2}\max_{t \geq \frac{x+y}{2}} |\Phi(t)|\, e^{3\sigma_0^{+}(x)};$$

$$|H^{-}(x,y)| \leq \frac{1}{2}\max_{t \leq \frac{x+y}{2}} |\Phi(t)|\, e^{3\sigma_0^{-}(x)},$$

после интегрирования которых приходим к оценкам (7). Формула (8) вытекает из условий на характеристике $y = x$ в задачах Гурса (9). Пользуясь выражениями (6) и оценками (7), решения $U^{\pm}(x,k)$ можно продолжить аналитически с вещественной оси в верхнюю полуплоскость k. Теорема доказана.

Введем в рассмотрение еще одно матричное уравнение

$$V'' + 2V'a(x)\Phi(x)a^{-1}(x) + k^2 V = 0, \qquad (11)$$

где $a(x)$ удовлетворяет уравнению $a'(x) = 2a(x)\Phi(x)$ и условию $a(x) \to I\ (k \to \infty)$. Аналогично теореме 2 можно показать, что уравнеnеи (11) имеет аналитическое в полуплоскости $Im k > 0$ решение $V(x,k)$ вида

$$V(x,k) = e^{ikx} I + ik \int_x^{\infty} D(x,y) e^{iky} dy, \qquad (12)$$

где

$$|D(x,y)| \leq \sigma_1^{\pm}\left(\frac{x+y}{2}\right) e^{3\sigma_0^{+}(x)}$$

<u>Лемма 1</u>. Если $U(x,k)$ и $V(x,k)$ – соответственно любые два решения уравнений (5) и (11), то выражение

$$\{V, a, U\} \equiv VaU' - V'aU.$$

не зависит от x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим уравнение (11) справа на aU и вычтем почленно из (5), умноженного предварительно слева на Va

$$VaU'' - V''aU + 2Va\Phi U' - 2V'a\Phi U = 0,$$

что, с учетом $a' = 2a\Phi$, равносильно равенству

$$\frac{d}{dx}\left(VaU' - V'aU\right) = 0.$$

Лемма доказана.

Заметим, что наряду с решениями $U^{\pm}(x,k)$ и $V(x,k)$ уравнения (5) и (11) дпускают также и решения $U^{\pm}(x,-k)$ и $V(x,-k)$. Кроме того, из леммы 1 и представлений (6) и (12) следует, что

$$\{V(\pm k), a, U^{+}(\pm k)\} = 0, \quad \{V(\pm k), a, U^{+}(\mp k)\} = \mp 2ikI. \qquad (13)$$

Матрицы-функции $U^{+}(x,k)$ и $U^{+}(x,-k)$ при вещественных k являются линейно независимыми решениями уравнения (5). Поэтому

$$U^{-}(x,k) = U^{+}(x,-k)A(k) + U^{+}(x,k)B(k); \qquad (14)$$

$$U^{-1}(x,k) = U^{+1}(x,-k)A(k) + U^{+1}(x,k)B(k), \qquad (15)$$

где $A(k)$, $B(k)$ – матрицы размеров $n \times n$, не зависящие от x.

Умножим соотношение (14) слева на Va и вычтем почленно из него (15), умноженное слева на $V'a$. В силу (13) при $k \neq 0$ получим

$$A(k) = -\frac{1}{2ik}\{V(x,k),\ a(x),\ U^{-}(x,k)\}. \qquad (16)$$

Аналогично

$$B(k) = \frac{1}{2ik}\left\{V(x-k),\ a(x),\ U^-(x,k)\right\}. \tag{17}$$

Формула (16) позволяет аналитически продолжить матрицу $A(k)$ в полуплоскость $Im\,k > 0$. Кроме того, можно показать, что матрицы-функции $A(k)$ и $B(k)$ сохраняют непрерывность и при $k=0$, причем

$$A(0) + B(0) = I. \tag{18}$$

Из формул (16) и (17) вытекают также и следующие свойства этих матриц:

$$A(-\bar{k}) = \overline{A(k)}\ \ (Im\,k \geqslant 0),\quad B(-k) = \overline{B(k)}\ \ (Im\,k = 0); \tag{19}$$

$$A(k) = \Omega_{-\infty}^{\infty}(\varphi) + O\left(\frac{1}{|k|}\right)\ \ (Im\,k \geqslant 0,\ \ |k| \to \infty); \tag{20}$$

$$B(k) = O\left(\frac{1}{|k|}\right)\qquad (Im\,k = 0,\ \ |k| \to \infty), \tag{21}$$

где $\Omega_{-\infty}^{\infty}(\varphi) = \lim\limits_{x \to -\infty} \Omega_x^{\infty}(\varphi)$, $\Omega_x^{\infty}(\varphi)$ – матрицант уравнения $X' = \varphi X$ на интервале $[x, \infty)$, и $\det \Omega_{-\infty}^{\infty}(\varphi) \neq 0$.

Лемма 2. Для того, чтобы $k_0\,(Im\,k_0 > 0)$ было собственным значением уравнения (5), необходимо и достаточно, чтобы $\det A(k_0) = 0$.

Доказательство. I. Необходимость. Пусть k_0 – собственное значение уравнения (5). Столбцы матрицы $U^+(x, k_0)$ являются единственными вектор-решениями уравнения (5), принадлежащими пространству $L_2[0, \infty)$, а столбцы $U^-(x, k_0)$ – единственными решениями из $L_2(-\infty, 0]$. Значит уравнение (5) имеет решения из $L_2(-\infty, \infty)$ лишь в том случае, если между столбцами $U^+(x, k_0)$ и $U^-(x, k_0)$ существует линейная зависимость, т.е. существуют ненулевые, не зависящие от x вектор-столбцы b и c такие, что

$$U^+(x, k_0)c = U^-(x, k_0)b. \tag{22}$$

Перепишем формулу (16) в виде

$$-2ik_0 A(k_0) = V(k_0)\,a\,U^{-\prime}(k_0) - V'(k_0)\,a\,U^-(k_0).$$

Умножим обе части последнего равенства справа на b и воспользуемся соотношениями (22) и (13)

$$-2ik_0 A(k_0)b = \left\{V(x, k_0),\ a(x),\ U^+(x, k_0)\right\}c = 0,$$

откуда $A(k_0)b = 0$ $(b \neq 0)$, т.е. $\det A(k_0) = 0$.

2. Достаточность. Пусть $\det A(k_0) = 0$. Тогда существует вектор-столбец $b \neq 0$ такой, что $A(k_0)b = 0$. В силу (16) это влечет $VaU^{-\prime}b - V'aU^-b = 0$. Обозначим $U^-b = u^-$. Тогда $Vau^{-\prime} - V'au^- = 0$. Отсюда следует, что если $u^-(x, k_0) = u_{\infty}^-(x, k_0 + O(1))$ $(x \to -\infty)$,

то $u^-_\infty(x,k_0)$ удовлетворяет уравнению $u^{-\prime}_\infty = ik_0 u^-_\infty$, откуда $u^-_\infty(x,k_0) = e^{ik_0x}c$, где c – некоторый постоянный вектор-столбец. Таким образом, $u^-(x,k_0) = e^{ik_0x}c + O(1)$ $(x \to \infty)$, что совпадает с асимптотикой вектора $U^+(x,k_0)c$. Из единственности функций Йоста с заданной асимптотикой делаем вывод, что $U^-(x,k_0)b = U^+(x,k_0)c$ $(b,\ c \neq 0)$. Это означает, что k_0 – собственное значение.

Лемма доказана.

Следствие. Соотношение (22) справедливо тогда и только тогда когда $A(k_0)b = 0$ $(b \neq 0)$.

Из леммы 2 и свойства (13) следует, что собственные значения уравнения (5) расположены в верхней полуплоскости симметрично относительно мнимой оси. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что матрица $A(k)$ неособенная на вещественной оси и нули ее определителя в верхней полуплоскости простые. Таким образом, уравнение (5) имеет не более конечного числа простых собственных значений, которые обозначим

$$k_1,\ k_2, \dots,\ k_{2l},\ k_{2l+1}, \dots, k_{2l+m}:$$

$$\operatorname{Re} k_j = -\operatorname{Re} k_{l+j} \quad (j = 1,\dots,l), \qquad k_{2l+j} = i\varkappa_j \quad (j = 1,\dots,m).$$

2. Обратная задача рассеяния

Перепишем соотношение (14) при $\operatorname{Im} k = 0$ в виде

$$W(x,k) = U^-(x,k)T(k) = U^+(x,-k) + U^+(x,k)R(k), \tag{23}$$

где $T(k) = A^{-1}(k)$, $R(k) = B(k)A^{-1}(k)$. Матрица-функция $W(x,k)$ является решением уравнения (5), имеющим асимптотики

$$W(x,k) \sim \begin{cases} e^{-ikx}I + R(k)e^{ikx}, & x \to \infty \\ T(k)e^{-ikx}, & x \to -\infty. \end{cases}$$

Поэтому матрицы $T(k)$ и $R(k)$ естественно назвать матрицами соответственно прохождения и отражения. Отметим некоторые их свойства, вытекающие из установленных ранее свойств (18)-(21) матриц-функций $A(k)$ и $B(k)$ и леммы 2:

1) $T(k)$ аналитична в верхней полуплоскости кроме конечного числа точек $k_1,\ k_2, \dots,\ k_{2l+m}$, в которых имеет простые полюсы, и непрерывна на вещественной оси;

2) $R(k)$ непрерывна при вещественных k и

$$T(0) = R(0) + I;$$

3) $T(-k)=\overline{T(k)}$ $(Im\, k\geqslant 0)$, $R(-k)=\overline{R(k)}$ $(Im\, k=0)$,

4) $R(k)=O\left(\frac{1}{|k|}\right)$ $(Im\, k=0, \quad |k|\to\infty)$,

$$T(k)=\left[\Omega_{-\infty}^{\infty}(\varphi)\right]^{-1}+O\left(\frac{1}{|k|}\right) \quad (Im\, k\geqslant 0,\ |k|\to\infty).$$

Запишем теперь равенство (23) в виде

$$U^-(x,k)\,T(k)=e^{-ikx}I-ik\int_x^\infty A^+(x,y)\,e^{-iky}\,dy+$$

$$+R(k)e^{ikx}+ik\int_x^\infty A^+(x,y)e^{iky}dy\,R(k).$$

Умножим обе части на $\frac{\sin\varepsilon k}{\varepsilon k}\,e^{ikz}$ $\left(z>x,\ 0<\varepsilon<\frac{z-x}{2}\right)$ и проинтегрируем по k от $-\infty$ до $+\infty$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\varepsilon k}{\varepsilon k}\,U^-(x,k)\,T(k)e^{ikz}dk=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\varepsilon k}{\varepsilon k}\,e^{ik(z-x)}\,dk\,I-$$

$$-\int_x^\infty A^+(x,y)\left\{\frac{i}{2\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\varepsilon k\; e^{-ik(y-z)}\,dk\right\}dy+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\varepsilon k}{\varepsilon k}\,R(k)\,e^{ik(x+z)}\,dk+$$

$$+\int_x^\infty A^+(x,y)\left\{\frac{i}{2\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\varepsilon k\,R(k)e^{ik(y+z)}\,dk\right\}dy. \tag{24}$$

Первый интеграл в правой части стремится при $\varepsilon\to 0$ и $\delta(z-x)$, а выражение в фигурных скобках под знаком второго интеграла – к $-\delta'(y-z)$. Поэтому после несложных преобразований предел правой части равенства (24) при $\varepsilon\to 0$ можно записать в виде

$$-\frac{\partial A^+(x,z)}{\partial z}+\beta_1(x+z)+\int_x^\infty A^+(x,y)\,\beta_1'(y+z)dy,$$

где

$$Q_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(k)e^{ikx}\,dk = \frac{1}{\pi}\,Re\int_{0}^{\infty} R(k)e^{ikx}\,dk.$$

Вычислим теперь предел левой части равенства (24) при $\varepsilon \to 0$. Применив к ней лемму Жордана, получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\varepsilon k}{\varepsilon k}\,U^-(x,k)\,T(k)\,e^{ikz}\,dk =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{2l+m} i\,\mathop{Res}_{k=k_j}\left\{\frac{\sin\varepsilon k}{\varepsilon k}\,U^-(x,k)\,T(k)\,e^{ikz}\right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2l+m} i\,U^-(x,k_j)\,T_j\,e^{ik_j z},$$

где $T_j = \mathop{Res}_{k=k_j} T(k)$. Разложим матрицу-функцию $T(k)$ в окрестности полюса k_j в ряд Лорана

$$T(k) = \frac{1}{k-k_j}\,T_j + T_j^{(0)} + \ldots \tag{25}$$

Умножив обе части (25) на $(k-k_j)\,A(k)$ сначала слева, потом справа и положив $k = k_j$, получим

$$A(k_j)\,T_j = T_j\,A(k_j) = 0,$$

откуда следует, что $rang\,T_j = n - rang\,A(k_j)$. Кроме того, если обозначить t_j^s $(s=1,\ldots,n)$ – столбцы матрицы T_j, то $A(k_j)\,t_j^s = 0$ и, в силу следствия из леммы 2,

$$U^-(x,k_j)\,t_j^s = U^+(x,k_j)\,q_j^s,$$

где q_j^s $(s=1,\ldots,n)$ – некоторые отличные от нуля вектор-столбцы. Последнее равенство равносильно соотношению

$$U^-(x,k_j)\,T_j = U^+(x,k_j)\,Q_j, \tag{26}$$

где ранг матрицы Q_j совпадает с рангом T_j.

Поскольку вычет матрицы $T(k)$ в точке $-\bar{k}_j$ равен $-\bar{T}_j$, то, с учетом (26), получим

$$\sum_{j=1}^{2l+m} iU^-(x,k_j)\,T_j\,e^{ik_j z} = 2Re\sum_{j=1}^{l} iU^+(x,k_j)\,Q_j\,e^{ik_j z} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} iU^+(x,i\varkappa_j)\,Q_{2l+j}\,e^{-\varkappa_j z}$$

Подставляя сюда выражение для $U^+(x, k_j)$ (6), находим выражение для предела левой части равенства (24) в виде

$$\rho_2(x+z) - \int_x^\infty A^+(x,y)\,\rho_2'(y+z)\,dy,$$

где

$$\rho_2(x) = Re\sum_{j=1}^{l} M_j e^{ik_j x} + \sum_{j=1}^{m} N_j e^{-\varkappa_j x},$$

$$M_j = -2iQ_j, \qquad N_j = -iQ_{2l+j}.$$

Заметим, что для чисто мнимых собственных значений k_j матрицы $U^+(x, k_j)$ вещественны, а T_j – чисто мнимая (поскольку $T_j = -\bar{T}_j$). Тогда, в силу (26), Q_{2l+j} – чисто мнимая, а N_j – вещественна. Таким образом, из равенства (24) выводим уравнение

$$-\frac{\partial A^+(x,z)}{\partial z} + \rho(x+z) + \int_x^\infty A^+(x,y)\,\rho'(y+z)\,dy = 0, \tag{27}$$

где $\rho(x) = \rho_1(x) + \rho_2(x)$. После интегрирования уравнения (27) по z в пределах от z до ∞ получаем окончательно

$$A^+(x,z) - \int_x^\infty A^+(x,y)\,\rho(y+z)\,dy + \int_{x+z}^\infty \rho(\xi)\,d\xi = 0, \tag{28}$$

где

$$\rho(x) = Re\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty R(k)e^{ikx}dk + \sum_{j=1}^{l} M_j e^{ik_j x}\right\} + \sum_{j=1}^{m} N_j e^{-\varkappa_j x}. \tag{29}$$

Набор величин

$$S = \left\{R(k),\quad M_j,\quad k_j\ (j=1,\dots,l),\quad N_\nu,\ \varkappa_\nu\quad (\nu=1,\dots,m)\right\}$$

назовем данными рассеяния уравнения (5).

3. Эволюция данных рассеяния

Пусть теперь матрица-функция $\Phi(x,t)$ является решением уравнения (2). Найдем эволюцию данных рассеяния. При $x \to \pm\infty$ $A \to -4I\frac{\partial^3}{\partial x^3}$. Пусть $U^-(x, k, t)$ – собственная функция оператора L с собственным значением $-k^2$. Тогда с помощью операторного равенства (4) легко убедиться, что $AU^- - U_t^-$ – тоже собственная функция с тем же собственным значением. Но

$$U^-(x,k,t) \sim e^{-ikx} I\ (x \to -\infty) \quad \text{и} \quad AU^- - U_t^- \sim -4ik^3 e^{-ikx} I\ (x \to -\infty).$$

Из единственности функций Йоста с заданной асимптотикой заключаем что $AU^- - U^-_t = -4ik^3U^-$ или

$$U^-_t(x,k,t) = AU^-(x,k,t) + 4ik^3 U^-(x,k,t). \qquad (30)$$

В силу соотношения (14) при вещественных k

$$U^-(x,k,t) \sim A(k,t)e^{-ikx} + B(k,t)e^{ikx} \quad (x\to-\infty).$$

Подставив эту асимптотику в выражение (30), найдем

$A_t(k,t) = 0, \quad B_t(k,t) = 8ik^3 B(k,t)$, откуда

$A(k,t) = A(k,0), \quad B(k,t) = B(k,0)e^{8ik^3t}$. Кроме того, отсюда следует, что

$$k_j(t) = k_j(0) \quad (j=1,\dots,e), \quad \varkappa_\nu(t) = \varkappa_\nu(0) \quad (\nu=1,\dots,m),$$

$$T_j(t) = T_j(0), \quad T(k,t) = T(k,0), \quad R(k,t) = R(k,0)e^{8ik^3t}.$$

Запишем соотношение (26) в виде

$$U^-(x,k_j,t)T_j = \frac{i}{2}U^+(x,k_j,t)M_j(t),$$

откуда

$$U^-(x,k_j,t)T_j \sim \frac{i}{2}e^{ik_jx}M_j(t) \quad (x\to-\infty). \qquad (31)$$

Умножим обе части уравнения (30) справа на T_j и подставим затем асимптотику (31). В результате получим

$$M_j(t) = M_j(0)e^{8ik_j^3t}.$$

Аналогично $N_\nu(t) = N_\nu(0)e^{8\varkappa_\nu^3 t}$. Таким образом, эволюция данных рассеяния имеет вид

$$S(t) = \Big\{ R(k,0)e^{8ik^3t}, \quad M_j(0)e^{8ik_j^3t}, \quad k_j(0)$$

$$(j=1,\dots,e), \quad N_\nu(0)e^{8\varkappa_\nu^3 t}, \quad \varkappa_\nu(0)\,(\nu=1,\dots,m)\Big\}. \qquad (32)$$

Итак, чтобы найти решение уравнения (2), нужно, используя эволюцию (32), построить матрицу $\rho(x,t)$ (29), затем решить интегральное уравнение (28) и воспользоваться формулой (8)

4. Интегралы движения

Произведем в уравнении (5) замену

$$U(x,k) = e^{-ikx}\tilde{U}(x,k), \qquad (33)$$

где $\tilde{U}(x,k) = \mathfrak{R}^x_{-\infty}(X)$, а матрица-функция $X(x,k)$ в силу (5) и (33) удовлетворяет следующему уравнению Риккати:

$$X' + X^2 + 2(\Phi - ikI)X - 2ik\Phi = 0. \qquad (34)$$

Поскольку $U(x,k)=e^{-ikx}I+O(1)$ $(x\to\infty)$, то $U(x,k)=U^{-1}(x,k)$ и, в силу (14), при $Im\,k>0$ имеем $U(x,k)=e^{-ikx}A(k)+O(1)$ $(x\to\infty)$, откуда

$$\tilde{U}(x,k)=A(k)+O(1) \qquad (x\to\infty).$$

Переходя к определителям, находим отсюда

$$\det A(k)=\exp\left\{\int_{-\infty}^{x} sp\,X(\xi,k)\,d\xi\right\}+O(1) \qquad (x\to\infty)$$

или

$$\ln\det A(k)=\int_{-\infty}^{\infty} sp\,X(\xi,k)\,d\xi. \tag{35}$$

Решение уравнения (34) ищем в виде

$$X(x,k)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2ik)^{\nu}}X_{\nu}(x). \tag{36}$$

Подставив (36) в (34), получим

$$X_0(x)=-\Phi(x),$$

$$X_{\nu+1}=X_{\nu}'+2\Phi X_{\nu}+\sum_{j=0}^{\nu}X_j X_{\nu-j} \qquad (\nu=0,1,\dots).$$

При изменении $\Phi(x,t)$ во времени в силу уравнения (2) $A(k)$ от времени не зависит. Тогда, как это следует из (35) и (36), функционалы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} sp\,X_{\nu}(x)\,dx$$

сохраняются и являются интегралами движения уравнения (2). Выпишем несколько первых коэффициентов $X_{\nu}(x)$

$$X_0=-\Phi,\qquad X_1=-\Phi_x-\Phi^2,\qquad X_2=X_1'-[\Phi,\Phi_x];$$

$$X_3=X_2'-[\Phi,\Phi_{xx}]-[\Phi^2,\Phi_x]+\Phi_x^2+\Phi^4+2\Phi\Phi_x\Phi.$$

Поскольку след коммутатора двух матриц равен нулю, то след матрицы $X_2(x)$ есть полная производная. Это свойство справедливо для всех $X_{2s}(x)$ $(s=1,2,\dots)$. Действительно, полагая k в уравнении (34) вещественным, представим $X(x,k)$ в виде суммы действительной и мнимой частей: $X=X_r+iX_{im}$. Отделяя далее мнимую часть в (34), находим

$$X_{im}'+X_rX_{im}+X_{im}X_r+2\Phi X_{im}-2kX_r-2k\Phi=0.$$

Это равенство можно записать в виде

$$(X_{im}-kI)'+[X_r+2\Phi,\,X_{im}]+2(X_{im}-kI)(X_r+\Phi)=0.$$

откуда

$$X_r+\varphi=-\frac{1}{2}\left(X_{im}-kI\right)^{-1}\left(X_{im}-kI\right)'-\frac{1}{2}\left[\left(X_{im}-kI\right)^{-1}\left(X_r+2\varphi\right),X_{im}\right].$$

Поскольку

$$sp\left\{\left(X_{im}-kI\right)^{-1}\left(X_{im}-kI\right)'\right\}=\frac{d}{dx}\ln\det\left(X_{im}-kI\right),$$

то след $X_r+\varphi$ является полной производной.

Запишем представление (36) в виде

$$X(x,k)+\varphi=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2ik)^{\nu}}X_\nu(x),$$

откуда следует, что $X_{2s}(x)$ $(s=1,2,\ldots)$ являются коэффициентами в разложении $X_r+\varphi$ и, следовательно, их следы есть полные производные.

Обозначим

$$2J_0=\int_{-\infty}^{\infty}sp\,X_0(x)\,dx,$$

$$2J_\nu=\int_{-\infty}^{\infty}sp\,X_{2\nu-1}(x)\,dx\qquad(\nu=1,2,\ldots).$$

Выпишем несколько первых интегралов движения уравнения (2)

$$2J_0=-\int_{-\infty}^{\infty}sp\,\varphi(x)dx;$$

$$2J_1=-\int_{-\infty}^{\infty}sp\,\varphi^2(x)\,dx;$$

$$2J_2=\int_{-\infty}^{\infty}sp\left(\varphi_x^2+\varphi^4\right)dx.$$

5. Простейшие решения матричного уравнения МКДФ

1. Пользуясь изложенной выше схемой, построим односолитонные решения уравнения (2). Рассмотрим случай $n=2$. Положим

$$R(k,t)=0,\quad l=0,\quad m=1,\quad \varkappa_1=\varkappa,\quad N_1(t)=Ne^{8k^3t},$$

где N – неособенная постоянная матрица с элементами n_{ij}. Тогда формула для односолитонного решения имеет вид

$$\varphi(x,t)=\left(4\varkappa^2N-d^2e^{-4\varkappa y}N^{-1}\right)f(x,t),\qquad(37)$$

где

$$f(x,t)=\frac{8\varkappa^2 e^{-2\varkappa y}}{d^2 e^{-8\varkappa y}-4\varkappa^2\left(n_{11}^2+n_{22}^2+2n_{12}n_{21}\right)e^{-4\varkappa y}+16\varkappa^4}$$

$$d=\det N,\qquad y=x-4\varkappa^2 t. \tag{38}$$

Преобразуем эти формулы для некоторых частных случаев матрицы N.

а) Пусть $d>0$, $n_{11}^2+n_{22}^2+2n_{12}n_{21}=0$.

При $n_{11}n_{22}<0$ получаем односолитонное решение

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{ch(4\varkappa y+\varphi_0)}\begin{pmatrix} c_1 ch(2\varkappa y+\varphi_1) & c_2 ch(2\varkappa y+\varphi_2) \\ c_3 ch(2\varkappa y+\varphi_2) & c_4 ch(2\varkappa y+\varphi_3)\end{pmatrix},$$

где

$$c_1=4n_{11}\varkappa\sqrt{\frac{1}{d}\left|\frac{n_{22}}{n_{11}}\right|},\qquad c_2=4\varkappa n_{12}\sqrt{\frac{1}{d}},\quad c_3=4\varkappa n_{21}\sqrt{\frac{1}{d}},$$

$$c_4=4n_{22}\varkappa\sqrt{\frac{1}{d}\left|\frac{n_{11}}{n_{22}}\right|},\quad \varphi_0=\ln\frac{4\varkappa^2}{d},\qquad \varphi_1=\ln 2\varkappa\sqrt{\frac{1}{d}\left|\frac{n_{22}}{n_{11}}\right|},$$

$$\varphi_2=\ln\frac{2\varkappa}{\sqrt{d}},\qquad \varphi_3=\ln 2\varkappa\sqrt{\frac{1}{d}\left|\frac{n_{11}}{n_{22}}\right|}.$$

Если же $n_{11}n_{22}>0$, то соответствующее решение имеет вид

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{ch(4\varkappa y+\varphi_0)}\begin{pmatrix} c_1 sh(2\varkappa y+\varphi_1) & c_2 ch(2\varkappa y+\varphi_2) \\ c_3 ch(2\varkappa y+\varphi_2) & c_4 sh(2\varkappa y+\varphi_3)\end{pmatrix},$$

б) пусть $d>0$, $spN=n_{11}+n_{22}=0$. Тогда из выражений (36)-(37) получим

$$\Phi(x,t)=g(x,t)\,N=\frac{2\varkappa}{\sqrt{d}\;ch\left(2\varkappa y+\ln\frac{2\varkappa}{\sqrt{d}}\right)}N.$$

Матрица N в этом случае удовлетворяет соотношению $N^3=-dN$, и функция $g(x,t)$ является солитоном скалярного уравнения МКДФ (1) с $\alpha>0$;

в) уравнение (2) может иметь также и сингулярные решения. Пусть $d<0$, $spN=0$. Тогда

$$\Phi(x,t)=h_1(x,t)\,N=\frac{2\varkappa}{\sqrt{|d|}\;sh\left(2\varkappa y+\ln\frac{2\varkappa}{\sqrt{|d|}}\right)}N.$$

Если $N = I$, то

$$\Phi(x,t) = h_2(x,t) I = \frac{2\varkappa}{sh\,(2\varkappa y + ln\, 2\varkappa)}\, I .$$

Функции h_1 и h_2 являются решениями скалярного уравнения (I) с $\alpha < 0$.

2. Приведем формулы для асимптотик двухсолитонного матричного решения уравнения (2)

Пусть $N_j = \begin{pmatrix} 0 & a_j \\ b_j & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (a_j b_j < 0, \quad j = 1,2)$. Тогда с помощью уравнений (8), (28), (29), (32) можно получить двухсолитонное решение, асимптотика которого при $t \to \pm\infty$ имеет вид

$$\Phi(x,t) \sim \sum_{j=1}^{2} \frac{2\varkappa_j}{\sqrt{|a_j b_j|}\, ch\,[2\varkappa_j (y_j - \varphi_j^{\pm})]} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\varphi_1^- = -\frac{1}{2\varkappa_1} ln \frac{2\varkappa_1}{|a_1 b_1|}, \quad \varphi_1^{\pm} = -\frac{1}{2\varkappa_1} ln \frac{2\varkappa_1}{|a_1 b_1|} - \frac{1}{\varkappa_1} ln \left| \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\varkappa_1 - \varkappa_2} \right| ,$$

$$\varphi_2^- = \frac{1}{2\varkappa_2} ln \frac{2\varkappa_2}{|a_2 b_2|} - \frac{1}{\varkappa_2} ln \left| \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\varkappa_1 - \varkappa_2} \right| , \quad \varphi_2^+ = -\frac{1}{2\varkappa_2} ln \frac{2\varkappa_2}{|a_2 b_2|} ,$$

$$y_j = x - 4\varkappa_j^2 t, \qquad \varkappa_1 < \varkappa_2 .$$

Таким образом, в результате взаимодействия солитонов получаем сдвиг фаз

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_1^+ - \varphi_1^- = -\frac{1}{\varkappa_1} ln \left| \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\varkappa_1 - \varkappa_2} \right| ; \tag{39}$$

$$\Delta\varphi_2 = \varphi_2^+ - \varphi_2^- = \frac{1}{\varkappa_2} ln \left| \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\varkappa_1 - \varkappa_2} \right| , \tag{40}$$

т.е. более быстрый солитон, проходя через медленный, получает дополнительный сдвиг фазы вперед, а фаза медленного солитона при этом сдвигается соответственно назад.

Аналогичным образом можно проследить за взаимодействием регулярного и сингулярного солитонов.

Положим

$$N_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_2 b_2 < 0.$$

В этом случае асимптотика решения имеет вид

$$\varphi(x,t) \sim \begin{pmatrix} \dfrac{2\varkappa_1 a_1}{|a_1|\, sh\,[2\varkappa_1(y_1-\varphi_1^{\pm})]} & 0 \\ 0 & \dfrac{2\varkappa_1 b_1}{|b_1|\, sh\,[2\varkappa_1(y_1-\psi_1^{\pm})]} \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{2\varkappa_2}{\sqrt{|a_2 b_2|}\, ch\,[2\varkappa_2(y_2-\varphi_2^{\pm})]} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (t \to \mp\infty),$$

а для величин $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ $(\Delta\psi_1 = \Delta\varphi_1)$ справедливы выражения (39), (40), т.е. взаимодействие регулярного солитона с сингулярным происходит так же, как и двух регулярных солитонов.

1. M.Wadati. the Exact Solution of the Modified Korteveg-de Vries Equation. - J. Phys. Soc. Japan, 1972, 32, N 6, p. 1681.
2. M. Wadati The Modified Korteveg-de Vries Equation. - J. Phys. Soc. Japan, 1973, 34, N 5, p. 1289-1296.
3. Н.Н.Романова. N-солитонное решение "на пьедестале" модифицированного уравнения Кортевега де Фриза. - Теоретическая и математическая физика, 1979, 39, № 2, с. 205-214.

УДК 530.1

Л.А.Пастур, Б.А.Хоруженко

СУЩЕСТВОВАНИЕ ДАЛЬНЕГО ПОРЯДКА В НЕКОТОРЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

В работе [1] авторами был предложен метод строгого доказательства существования фазовых переходов - метод инфракрасных оценок. В дальнейшем мы будем называть его методом ФСС. С его помощью удалось строго обосновать возникновение спонтанной намагниченности при низких температурах в классической модели Гейзенберга с взаимодействием ближайших соседей. В работе [2] дана общая схема метода и его применения к дальнодействующим низкоразмерным системам. Попытки применить метод ФСС к квантовым системам наталкивается на определенные трудности. В работе [3] были изучены квантовая x-y модель и квантовый антиферромагнетик.

В настоящей работе с помощью этого метода показано наличие дальнего порядка в модели квантовых ротаторов и квантовой модели сегнетоэлектриков. Отличительной чертой обеих моделей является то, что квантовая часть соответствующих гомильтонианов представляет собой сумму одночастичных операторов - кинетической энергии вращательного движения в первом случае и колебательного движения - во втором. Это обстоятельство позволяет для получения так называемого гауссового мажорирования, на котором и основано доказательство существования дальнего порядка в методе ФСС, использовать аппарат винеровских интегралов. Речь идет, таким образом, об обобщении метода ФСС на коммутативные, но бесконечномерные объекты – траектории броуновского движения на соответствующем многообразии.

Пусть $V=\{x\in Z^d: 1\le x_i\le N_i,\ i=1,\dots,d\}$ – параллелепипед в Z^d и в каждой точке $x\in V$ задана копия S_x^2 двумерной сферы. Систему квантовых ротаторов зададим с помощью действующего в пространстве $\otimes L_2(S_x^2,\ d\sigma_x)$ оператора.

$$H=\frac{1}{2I}\sum_{x\in V} L_x^2-J\sum_{\langle x,y\rangle}\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_l} Q^{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}(\vec{S}_x)\, Q^{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}(\vec{S}_y), \qquad (1)$$

где $\vec{S}_x\in S_x^2$, $Q^{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}$ – мультипольный момент порядка l, известным образом выражающийся через компоненты единичного вектора (например, $Q^{\alpha}=S^{\alpha}$, $Q^{\alpha_1\alpha_2}=S^{\alpha_1}S^{\alpha_2}-\frac{1}{3}\delta_{\alpha_1\alpha_2}$) I – момент инерции ротаторов, J – константа взаимодействия; L_x^2 – оператор Лапласа – Бельтрами на сфере S_x^2, т.е. угловая часть обычного лапласиана. Символом $\sum_{\langle x,y\rangle}$ обозначено суммирование по парам ближайших соседей $\langle x,y\rangle, x,y\in V$ с учетом периодических граничных условий.

Классическая модель такого типа была рассмотрена, например, в работе [4] для описания плотных или переохлажденных жидкостей. Появление в гамильтониане мультипольных членов обусловлено тем, что в каждой точке решетки находится не частица, а группа частиц, жестко связанных друг с другом, обладающая некоторой симметрией. Поскольку речь идет о возникновении ориентационного порядка, то зависимость потенциала от расстояния обычно игнорируется. Но такой порядок возникает как правило при очень низких температурах. Поэтому весьма естественно рассмотреть квантовую задачу. Простейший способ учета квантовых эффектов и состоит в добавлении к классической энергии взаимодействия мультиполей суммы по точкам решетки операторов Лапласа – Бельтрами, описывающей квантовое вращение групп частиц в пространстве. Заметим, что твердый водород можно также описывать гамильтонианом подобного вида [5].

Другая (эквивалентная) форма гамильтониана квантовых ротаторов получается, если воспользоваться теоремой сложения для сферических функций [6]

$$H=-\frac{1}{2I}\sum_{x\in V} L_x^2 - JC\sum_{\langle x,y\rangle}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\vec{S}_x)\, Y_l^m(\vec{S}_y), \qquad (2)$$

где $Y_l^m(\vec{S}_x)$ – нормированные сферические функции, а C – константа, зависящая от l.

Обозначим символом $\langle \cdot \rangle_{\beta,V}$ гиббсовское среднее, соответствующее обратной температуре $\beta = \frac{1}{T}$, объему V и периодическим граничным условиям.

Теорема. Для систем с гамильтонианом (2), заданных на решетке Z^d при $d \geqslant 3$, существует такая температура T_0, что при $T < T_0$ и $IJ > D_l$, где D_l – абсолютная постоянная ($D_1 = 0{,}311$, $D_2 = 2{,}33$), имеет место соотношение

$$\lim_{|V| \to \infty} \left\langle \frac{1}{|V|^2} \sum_{x,y \in V} \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\vec{S}_x)\, Y_l^m(\vec{S}_y) \right\rangle_{\beta,V} > 0 \tag{3}$$

Замечание. Поскольку в силу симметрии $\left\langle \frac{1}{|V|} \sum_{x \in V} Y_l^m(\vec{S}_x) \right\rangle = 0$, то теорема свидетельствует о наличии в системах ориентационного дальнего порядка при низких температурах.

Чтобы не загромождать идейную сторону вопроса, теорема будет доказана нами в случае $l = 1$. Соответствующее доказательство для произвольного l отличается лишь большей громоздкостью выкладок и другими значениями оценочных констант.

Основным моментом в схеме метода ФСС, которой мы собираемся воспользоваться, является гауссово мажорирование обобщенной статистической суммы рассматриваемой системы. Именно в этом моменте содержится основное отличие рассматриваемого нами случая от уже известных. Поэтому сформулируем соответствующее утверждение в виде отдельной леммы.

Лемма. Пусть $\{\vec{h}_x\}_{x \in V}$ – произвольный набор векторов и

$$Z\left(\{\vec{h}_x\}\right) = \mathrm{Sp}\, \exp\left(\frac{\beta}{2I} \sum_{x \in V} L_x^2 - \frac{J\beta}{2} \sum_{\langle x,y \rangle} \left(\vec{S}_x - \vec{S}_y - \vec{h}_x + \vec{h}_y\right)^2\right), \tag{4}$$

тогда справедливо неравенство

$$Z\left(\{\vec{h}_x\}\right) \leqslant Z\left(\{0\}\right).$$

Доказательство леммы. $\exp\left(\beta \frac{1}{2I} L^2\right)$ порождает стандартным образом [7] обобщенную меру Винера в пространстве траекторий на сфере S^2. Оператор H является возмущением многомерного оператора Лапласа – Бельтрани ограниченным потенциалом, поэтому для него не трудно доказать формулу Феймана – Каца аналогично [7]. Таким образом, оператор

$$\exp\left(\frac{\beta}{2I} \sum_{x \in V} L_x^2 - \frac{\beta J}{2} \sum_{\langle x,y \rangle} \left(\vec{S}_x - \vec{S}_y - \vec{h}_x + \vec{h}_y\right)^2\right)$$

имеет непрерывное в $\otimes L_2\left(S_x^2, d\sigma_x\right)$ ядро, которое дается интегралом по условной мере Винера. Поэтому обобщенная статистическая сумма $Z\left(\{\vec{h}_x\}\right)$ из (4) представляется в виде

$$Z\left(\{\vec{h}_x\}\right) = \int \prod_{x \in V} d\sigma_x\, dP_{\vec{S}_x}\left(\vec{W}_x\right) \exp\left(-\frac{J}{2} \int_0^\beta \sum_{\langle x,y \rangle} \left(\vec{W}_x(\tau) - \vec{W}_y(\tau) - \vec{h}_x + \vec{h}_y\right)^2 d\tau\right), \tag{5}$$

где последний интеграл берется по пространству петель, т.е. замкнутых траекторий $\vec{W}(0)=\vec{W}(\beta)$; $d\rho_{\vec{S}_x}(\vec{W}_x)$ – условная мера Винера, сосредоточенная на траекториях, начинающихся и заканчивающихся в точке $\vec{S}_x$.

Теперь мы можем применить абстрактную схему отражательной положительности [2] к нашему конкретному случаю. Будем считать, что длины ребер V – четные числа. В качестве алгебры наблюдаемых выберем тензорное произведение $\otimes_{x\in V} L_2(Q_x, d\sigma_x\, d\rho_{\vec{S}_x})$. Буквой Q обозначено пространство петель. Пусть $\mathcal{N}$ – гиперплоскость, проходящая через точку $(\frac{N_1}{2}+\frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$ и перпендикулярная первой координатной оси Z^d. Эта плоскость делит параллелепипед V на две равные части V_+ и V_- и не содержит точек V. Соответственно этой гиперплоскости $\mathcal{N}$ введем основные объекты схемы – подалгебры U_+, U_- и комплексно антилинейный морфизм θ, переводящий U_+ в U_-

$$U_+=\otimes_{x\in V_+} L_2(Q_x, d\sigma_x\, d\rho_{\vec{S}_x}), \qquad U_-=\otimes_{x\in V_-} L_2(Q_x, d\sigma_x\, d\rho_{\vec{S}_x}),$$

$$\theta[f]\left(\{\vec{W}_x\}_{x\in V_-}\right) = \bar{f}\left(\{\vec{W}_{\theta_{\mathcal{N}}x}\}_{x\in V_+}\right),$$

где $\theta_{\mathcal{N}}: V_+\to V_-$ является отражением точек относительно плоскости. Среднее $\langle\cdot\rangle_0$ на этой алгебре введем как среднее по континуальной мере $\langle f\rangle_0 = \int \prod_{x\in V} d\sigma_x\, d\rho_{\vec{S}_x}(\vec{W}_x)\, f(\{\vec{W}_x\}_{x\in V})$.

Очевидно, что $\langle f\theta[f]\rangle_0 \geqslant 0$ для любых $f\in U_+$. Кроме того, подалгебры U_+ и U_- коммутируют между собой, поэтому мы можем применить обобщенное неравенство Коши [2]

$$\left|\left\langle \exp\left(f+\theta[g]+\int q(\tau)\theta[p(\tau)]d\tau\right)\right\rangle_0\right|^2 \leqslant$$

$$\left\langle \exp\left(f+\theta[f]+\int q(\tau)\theta[q(\tau)]d\tau\right)\right\rangle_0 \cdot \left\langle \exp\left(g+\theta[g]+\int p(\tau)\theta[p(\tau)]d\tau\right)\right\rangle_0. \quad (6)$$

Для этого запишем равенство (5) в этих новых обозначениях

$$Z\left(\{\vec{h}_x\}\right)=\left\langle \exp\left(-\frac{J}{2}\int_0^\beta \sum_{\langle x,y\rangle}\left(\vec{W}_x(\tau)-\vec{W}_y(\tau)-\vec{h}_x+\vec{h}_y\right)^2 d\tau\right)\right\rangle_0$$

и положим

$$f=-\frac{J}{2}\sum_{\substack{\langle x,y\rangle\\ y,x\in V_+}}\int_0^\beta\left(\vec{W}_x(\tau)-\vec{W}_y(\tau)-\vec{h}_x+\vec{h}_y\right)^2 d\tau-\frac{J}{2}\sum_{x\in L_+}\int_0^\beta\left(\vec{W}_x(\tau)-\vec{h}_x\right)^2 d\tau;$$

$$\theta[g]=-\frac{J}{2}\sum_{\substack{\langle x,y\rangle\\ x,y\in V_-}}\int_0^\beta\left(\vec{W}_x(\tau)-\vec{W}_y(\tau)-\vec{h}_x+\vec{h}_y\right)^2 d\tau-\frac{J}{2}\sum_{x\in L_-}\int_0^\beta\left(\vec{W}_x(\tau)-\vec{h}_x\right)^2 d\tau;$$

$$\int q(\tau)\theta[p(\tau)]d\tau=\frac{J}{2}\sum_{\substack{\langle x,y\rangle\\ x\in L_+,\, y\in L_-}}\int_0^\beta\left(\vec{W}_x(\tau)-\vec{h}_x\right)\left(\vec{W}_y(\tau)-\vec{h}_y\right)d\tau,$$

где $l_\pm$ – граничный гиперплоскости объемов $V_\pm$, перпендикулярные первой координатной оси.

Многократно применяя неравенство (6) и трансляционную инвариантность, получаем неравенство $Z(\{\vec{h}_x\}) \le Z(\{\vec{g}_x\})$, где у векторов $\vec{g}_x$ компоненты, соответствующие первой оси, постоянные и не зависят от $x \in V$. Проделав такую же процедуру над функцией $Z(\{\vec{g}_x\})$ во втором направлении, а затем и в остальных, получим, что функция $Z(\{\vec{h}_x\})$ достигает своего максимума на константе $\vec{h}_x \equiv \vec{h}$. Лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы. Перейдем от переменных $\vec{S}_x$ на V к их преобразованию Фурье $\vec{S}_p$, $p \in V^*$,
где

$$\vec{S}_p = \frac{1}{\sqrt{|V|}} \sum_{x \in V} e^{ipx} \vec{S}_x, \qquad \vec{S}_x = \frac{1}{\sqrt{|V|}} \sum_{p \in V^*} e^{-ipx} \vec{S}_p$$

$$V^* = \left\{ p \in [0, 2\pi]^d : \ p_i = \frac{2\pi}{N_i} x_i, \qquad i = 1, \dots, d, \quad x \in V \right\}.$$

Поскольку функция $Z(\{\lambda \vec{h}_x\})$ является гладкой функцией вещественного параметра λ, из утверждения леммы следует неравенство $\frac{d^2}{d\lambda^2}\Big|_{\lambda=0} Z_0(\{\lambda h_x\}) \le 0$. Вычислив производные, получим соотношение

$$\Big(\sum_{\langle x,y\rangle} (\vec{S}_x - \vec{S}_y)(\vec{h}_x - \vec{h}_y), \ \sum_{\langle x,y\rangle} (\vec{S}_x - \vec{S}_y)(\vec{h}_x - \vec{h}_y)\Big)_{\beta,V} \le \frac{1}{\beta J} \sum_{\langle x,y\rangle} |\vec{h}_x - \vec{h}_y|^2, \tag{7}$$

где круглые скобки – это скобки Дюамеля, задаваемые для операторов A и B равенством

$$(A, B)_{\beta,V} = \int_0^1 sp\left(exp(-(1-\tau)\beta H) A \, exp(-\tau\beta H) B\right) d\tau.$$

Подставив в соотношение (7) сначала $h_x^{(j)} = Re\, g_x^{(j)}$,
где

$$g_x^{(j)} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|V|}} e^{ipx} & \text{при } j = \alpha \\ 0 & \text{при } j \ne \alpha \end{cases} \qquad p \in V^*$$

а затем $h_x^{(j)} = Im\, g_x^j$, получим неравенство,

$$\left(S_p^{(\alpha)}, \ S_p^{(\alpha)} \right)_{\beta,V} \le \frac{1}{2\beta J E_p},$$

где

$$E_p = \sum_{j=1}^{d} (1 - cos\, p_j).$$

В классическом случае из этой оценки и равенства Парсеваля вытекает неравенство (3) после суммирования по $p \ne 0$. Характерной чертой квантового случая является то обстоятельство, что из неравенства

$Z(\{h_x\}) \leq Z(\{0\})$ получается оценка на скобку Дюамеля, в то время как условие наличия дальнего порядка (3) формулируется как в классическом, так и в квантовом случае с помощью корреляционных функций. Поэтому необходимо получить оценку сверху величины $\langle \vec{S}_p \vec{S}_{-p} \rangle_{\beta,V}$ через оценку сверху скобок Дюамеля $(\vec{S}_p, \vec{S}_{-p})$. В соответствии с идеей работы [3] для этого следует воспользоваться неравенством

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \langle S_p^{(\alpha)} S_{-p}^{(\alpha)} \rangle_{\beta,V} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3} b^{(\alpha)} \sum_{\alpha=1}^{3} c^{(\alpha)}} \, cth \sqrt{\frac{\sum_{\alpha=1}^{3} c^{(\alpha)}}{4 \sum_{\alpha=1}^{3} b^{(\alpha)}}}, \tag{8}$$

в котором $b^{(\alpha)}$ – оценка сверху выражения $(S_p^{(\alpha)}, S_{-p}^{(\alpha)})_{\beta,V}$ и $\sum_{\alpha=1}^{3} c^{(\alpha)}$ – оценка сверху двойного коммутатора $\beta \sum_{\alpha=1}^{3} \langle [S_p^{\alpha}; [H, S_{-p}^{(\alpha)}]] \rangle_{\beta,V}$. Двойной коммутатор мы посчитаем, перейдя к сферической системе координат

$$S^{(1)} = \sin\theta \cos\varphi, \qquad S^{(2)} = \sin\theta \sin\varphi, \qquad S^{(3)} = \cos\theta.$$

В этих координатах $L^2 = \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + ctg\,\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$. Легко убедиться, что

$$\frac{1}{2}\left[A(\theta,\varphi), [L^2, A[\theta,\varphi]]\right] = \frac{1}{\sin^2\theta} (A'_\varphi)^2 + (A'_\theta)^2$$

для любой гладкой функции $A(\theta,\varphi)$ на сфере. Поэтому $\sum_{\alpha=1}^{3} [S_p^{(\alpha)}, [H, S_{-p}^{(\alpha)}]] = \frac{2}{I}$*. Подставив полученные значения $b^{(\alpha)}$ и $\sum_{\alpha=1}^{3} c^{(\alpha)}$, найдем нужную оценку коррелятора

$$\langle \vec{S}_p \vec{S}_{-p} \rangle_{\beta,V} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{I \cdot J \cdot E_p}} \, ctg\, \beta \sqrt{\frac{J \cdot E_p}{3I}}.$$

Эта оценка вместе с равенством Парсеваля

$$\vec{S}_p \vec{S}_{-p} \Big|_{p=0} = \sum_{x \in V} \vec{S}_x \vec{S}_x - \sum_{\substack{p \in V^* \\ p \neq 0}} \vec{S}_p \vec{S}_{-p} \tag{9}$$

дает соотношение

$$\left\langle \frac{1}{|V|^2} \sum_{x,y} \vec{S}_x \vec{S}_y \right\rangle_{\beta,V} \geq 1 - \frac{1}{|V|} \sum_{\substack{p \in V^* \\ p \neq 0}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{I \cdot J \cdot E_p}} \, ctg\, \beta \sqrt{\frac{J \cdot E_p}{3I}}.$$

Перейдем в нем к пределу

$$\lim_{|V| \to \infty} \left\langle \frac{1}{|V|^2} \sum_{x,y \in V} \vec{S}_x \cdot \vec{S}_y \right\rangle_{\beta,V} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0,2\pi]^d} \sqrt{\frac{3}{I \cdot J \cdot E_p}} \, ctg\,\beta \sqrt{\frac{J \cdot E_p}{3I}} \, dp.$$

---

* Соответствующий двойной коммутатор вычисляется точно при всех значениях l. Так, при $l = 2$ он равен $\frac{15}{2\pi I}$.

При $d \geqslant 3$ стоящий справа интеграл сходится, поэтому, строгое неравенство будет иметь место при тех значениях параметров I и J, при которых выполнено неравенство

$$1 \geqslant \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0,2\pi]^d} \sqrt{\frac{3}{I \cdot J \cdot E_p}}\, dp$$

или $$I \cdot J > \frac{3}{4} \left[\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0,2\pi]^d} \frac{dp}{\sqrt{E_p}} \right]^2 = 0{,}311 \pm 10^{-4} \quad \text{при} \quad d = 3.$$

Теорема доказана.

Замечания. При доказательстве теоремы мы ограничились гамильтонианом с взаимодействием ближайших соседей. Однако эта теорема верна и в более общем случае трансляционно инвариантных, отражательно положительных взаимодействий [2], которые удовлетворяют условию

$$\int_{[0,2\pi]^d} \frac{dp}{\tilde{J}(0) - \tilde{J}(p)},$$

где $\tilde{J}(p)$ – преобразование Фурье потенциала.

Таким образом, если размерность пространства $d \geqslant 3$, в системе квантовых ротаторов при достаточно низких температурах имеет место дальний порядок. С помощью рассуждений, аналогичных используемым при доказательстве теоремы Мермина – Вагнера [8], нетрудно установить, что для рассматриваемых систем (2) с потенциалом, удовлетворяющим условию $\sum_{x \in Z^d} x^2 J(x) < \infty$, параметр порядка $\langle \frac{1}{|V|} \sum_{x \in V} Y_l^m(\vec{s}_x) \rangle_{\beta, V}$ равен нулю при всех ненулевых температурах.

Для доказательства достаточно в неравенство Н.Н.Боголюбова [3]

$$\frac{1}{2} \beta \langle AA^* + A^*A \rangle \langle [[C,H],C^*] \rangle \geqslant |\langle [C,A] \rangle|^2$$

подставить, например, при $l = 1$ $C^* = \sum_{x \in V} e^{-ipx} L_x$,

где

$$L_x = i \left(\sin \varphi_x \frac{\partial}{\partial \theta_x} + ctg\, \theta_x \cos \varphi_x \frac{\partial}{\partial \varphi_x} \right)$$

и

$$A = \frac{1}{i} \sum_{x \in V} e^{-ipx} s^2.$$

Одной из простых, но эффективных микроскопических моделей для описания структурных фазовых переходов в сегнетоэлектриках является модель, определяемая гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2m} \sum_{x \in V} \Delta_x + \frac{J}{2} \sum_{\langle x,y \rangle} (\vec{s}_x - \vec{s}_y)^2 + \sum_{x \in V} W(\vec{s}_x), \tag{10}$$

где m – масса частиц, $\vec{s}_x$ – смещение частицы в т. x от положения равновесия, $\vec{s}_x \in R_x^n$, $W(\vec{s})$ – одночастичный потенциал, H действует в пространстве $\otimes L_2(R_x^n, d^n s_x)$. Обычно потенциал выбирается в виде $W(\vec{s}) = \frac{a}{2} \vec{s}^2 + \frac{b}{4} \vec{s}^4$, $a < 0$, $b > 0$. Различают два случая. I. Функция $W(\vec{s}) + Jn\vec{s}^2$

имеет один минимум; таким гамильтонианом описываются сегнетоэлектрики типа смещения. 2. Функция $W(\vec{S}) + Jd\vec{S}^2$ имеет два минимума; таким гамильтонианом описываются сегнетоэлектрики типа порядок - беспорядок.

В соответствии с существующими физическими представлениями общепризнано, что при высоких температурах среднее смещение $\langle \vec{S}_x \rangle$ равно нулю, а при понижении температуры оно становится отличным от нуля. Этим объясняется, например, возникновение спонтанной поляризации, которая пропорциональна среднему смещению атомов от положения равновесия.

Метод ФСС к классической модели сегнетоэлектриков (формально отвечающей случаю $m=\infty$) был применен в работе [9]. Используя общую схему метода отражательной положительности, развитую в работе [2], можно доказать появление дальнего порядка при достаточно низких температурах опять таки с помощью техники интегралов Винера, как и в квантовой модели с гамильтонианом (2).

Как нетрудно убедиться, в данном случае лишь одно место требует других по сравнению с использованными выше аргументов. Этим местом является оценка снизу $\langle \vec{S}_x \cdot \vec{S}_x \rangle_{\beta,V}$ при $|V| \to \infty$ и достаточно больших β. В случае мультиполей величина $\sum_{m=-l} Y_l^m(\vec{S}_x)\, Y_l^m(\vec{S}_y) = P_l(l)$, где $P_l(x)$ - полином Лежандра. В нашем же случае значения переменных $S_x^{(\alpha)}$ неограничены, поэтому вопрос об оценке снизу соответствующего среднего становится нетривиальным. Воспользуемся для этой цели неравенством Н.Н.Боголюбова

$$\frac{Sp\,(B\exp(A))}{Sp\,\exp(A)} \le \ln sp\exp(A+B) - \ln sp\exp(A).$$

Подставим в него в качестве $A=-\beta H$, $B=-\beta\alpha\sum_{x\in V}\vec{S}_x^2$ и получим неравенство

$$\langle \vec{S}_x^2 \rangle_{\beta,V} \geqslant \frac{1}{\beta\alpha|V|}\left[\ln sp\exp(-\beta H) - \ln sp\exp\left(-\beta H - \beta\alpha\sum_{x\in V}\vec{S}_x^2\right)\right]. \qquad (11)$$

Найдем оценку снизу первого слагаемого. Для этого учтем, что

$$-\beta\frac{J}{2}\sum_{\langle x,y\rangle}(\vec{S}_x-\vec{S}_y)^2 = -\beta Jd\sum_{x\in V}\vec{S}_x^2 + \beta J\sum_{\langle x,y\rangle}\vec{S}_x\vec{S}_y =$$

$$= -\beta Jd\sum_{x\in V}\vec{S}_x^2 + \beta(\tilde{J}\vec{S},\vec{S}) \geqslant -\beta Jd\sum_{x\in V}\vec{S}_x^2 - \beta\|\tilde{J}\|\sum_{x\in V}\vec{S}_x^2 =$$

$$= -2\beta Jd\sum_{x\in V}\vec{S}_x^2,$$

где во втором равенстве под $\vec{S}$ понимается совокупность $\{\vec{S}_x\}_{x\in V}$, а под $\tilde{J}$ - матрица взаимодействия ближайших соседей. Норма этой матрицы проще всего вычисляется при переходе к преобразованию Фурье векторов $\vec{S}_x$. Окончательно получим, что

$$\frac{1}{\beta\alpha|V|} \ln sp\, exp(-\beta H) \geq \frac{1}{\beta\alpha} \ln sp\, exp\left(-\beta(-\Delta + W(\vec{S}) + 2J\alpha\vec{S}^2)\right),$$

где $\vec{S} \in R^n$, а $-\Delta + W(\vec{S}) + 2J\alpha\vec{S}^2$ – оператор в пространстве $L_2(R^n, d^nS)$. Второе слагаемое правой части (II) оценим снизу с помощью тривиального неравенства

$$-\frac{\beta J}{2}\sum_{\langle x,y\rangle}(\vec{S}_x - \vec{S}_y)^2 \leq 0$$

и получим опять равномерную по $|V|$ оценку

$$\ln sp\, exp\left(-\beta\left(H+\alpha\right)\sum_{x\in V} S_x^2\right) \leq \frac{1}{\beta\alpha} \ln sp\, exp\left(-\beta(-\Delta + W(\vec{S}) + \alpha\vec{S}^2)\right).$$

Учитывая это, мы можем, перейдя к пределу $|U| \to \infty$ $\beta \to \infty$, написать нужное нам неравенство

$$\lim_{\beta\to\infty} \lim_{|V|\to\infty} \langle \vec{S}_x^2 \rangle_{\beta,V} \geq \sup_{\alpha:\alpha>2Jd} \frac{E_0(\alpha) - E_0(2Jd)}{\alpha} > 0,$$

где $E_0(\alpha)$ – минимальное собственное значение оператора $-\Delta + W(\vec{S}) + \alpha\vec{S}^2$ в $L_2(R^n, d^nS)$.

1. Fröhlich J., Simon B., Spencer T. Infrared Bounds, Phase Transitions and Continuous Symmetry Breaking. – Commun. math.Phys., 1976, 50, N 1, p. 79-95.
2. Fröhlich J., Israel R., Lieb E.H., Simon B. Phase Transition and Reflection Positivity. 1.General Theory and Long Range Lattice Models. – Commun.math.Phys.,1978,62, N 1,p.1-34.
3. Dyson F.J., Lieb E.H., Simon B. Phase Transitions in Quantum Spin Systems with Isotropic and Nonisotropic Interactions. – J. Stat. Phys., 1978, 18, N 4, p. 335-383.
4. Haymet D.J. Orientational Freesing in 3^d dim.: Mean-Field Theory. – Phys. Rev., B, 1983, 27, N 3, p. 1725-1731.
5. Криокристаллы / Под редакцией Б.И. Веркина, А.Ф.Приходько. – Киев: Наук. думка, 1983. – 525 с.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. – М.: Мир, 1982. – 428 с.
8. Рюэль Д. Статистическая механика. – М.: Мир, 1971. – 367 с.
9. Sarbach S. Existance of Phase Transitions Neare the Displacive Limit of a Classical n-Component Lattice Model. – Phys. Rev. B, 1977, 15, p. 2694-2699.

УДК 512.55

В.Г.Дринфельд

О КВАДРАТИЧНЫХ КОММУТАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В работах [5,6] обращено внимание на важность изучения алгебр, порожденных образующими $x_1, \ldots, x_m$ и соотношениями вида $x_i x_j - x_j x_i = c_{ij}^{kl} x_k x_l$, где $c_{ij}^{kl} = -c_{ji}^{kl} = c_{ij}^{lk}$ (здесь и в дальнейшем подразумевается суммирование по повторяющимся индексам). В настоящей работе такие алгебры, а также их супераналоги исследуются в "квазиклассической" ситуации, т.е. когда c_{ij}^{kl} близки к нулю.

1. Пусть V – конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$, L_h векторное подпространство в $V\otimes V$, непрерывно зависящее от параметра $h\in\mathbb{R}$ (это означает, по определению, что $\dim L_h$ не зависит от h и что в L_h можно выбрать базис, непрерывно зависящий от h). Предположим, что $L_0=\Lambda^2 V$. Обозначим через A_h фактор тензорной алгебры пространства V по двустороннему идеалу I_h, порожденному подпространством L_h (в частности, $A_0=sym^* V$). Однородные компоненты идеала I_h и градуированной алгебры A_h обозначим $I_h^{(n)}$ и $A_h^{(n)}$.

При достаточно малых h, L_h является графиком линейного отображения $\varphi_h:\Lambda^2 V\to sym^2 V$. Выберем в V базис $x_1,\dots,x_m$. Тогда $\varphi_h(x_i\otimes x_j-x_j\otimes x_i)=c_{ij}^{kl}(h)\,x_k\otimes x_l$, где $c_{ij}^{kl}(h)$ непрерывно зависит от h, $c_{ij}^{kl}(h)=c_{ij}^{lk}(h)=-c_{ji}^{kl}(h)$, $c_{ij}^{kl}(0)=0$. Алгебра A_h порождена образующими x_i, $1\le i\le m$ и соотношениями

$$x_i x_j-x_j x_i=-c_{ij}^{kl}(h)\,x_k x_l\,. \qquad (1)$$

Таким образом, подпространство L_h – просто более инвариантная форма соотношений (I).

Для любого n существует $\varepsilon(n)$ такое, что при $|h|<\varepsilon(n)$ пространство $A_h^{(n)}$ порождается одночленами $x_1^{\alpha_1}\dots x_m^{\alpha_m}$, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=n$. Поэтому $\dim A_h^{(n)}\le\dim A_0^{(n)}$ при $|h|<\varepsilon(n)$.

<u>Определение</u>. Соотношения (1) называются n самосогласованными, если существует $\varepsilon'(n)$ такое, что $\dim A_h^{(n)}=\dim A_0^{(n)}$ при $|h|<\varepsilon'(n)$. Соотношения (1) называются самосогласованными, если они n-самосогласованы для любого n.

<u>Замечания.</u> Самосогласованность соотношений (1) эквивалентна самосогласованности соотношений $x_i x_j-x_j x_i=c_{ij}^{kl}(h)x_k x_l$, поскольку алгебры, определяемые этими системами соотношений, противоположны друг другу.

При $n\le 2$ n-самосогласованность выполняется автоматически.

n-Самосогласованность равносильна тому, что $\dim I_h^{(n)}=\dim I_0^{(n)}$ при малых h. Кроме того, из n-самосогласованности следует, что при малых h подпространство $I_h^{(n)}\subset V^{\otimes n}$ непрерывно зависит от h. Действительно,

$$I_h^{(n)}=\sum_{k+l=n-2}V^{\otimes k}\otimes L_h\otimes V^{\otimes l}, \qquad (2)$$

а L_h непрерывно зависит от h. Поэтому, если $\dim I_h^{(n)}$ не зависит от h, то $I_h^{(n)}$ непрерывно зависит от h.

Теорема 1. Из 3-самосогласованности соотношений (1) следует их самосогласованность.

Доказательство. Предположим, что $n>3$ и при $n'<n$ n'-самосогласованность уже доказана. Надо доказать, что $\dim I_h^{(n)}=$ $=\dim I_0^{(n)}$ при малых h. Из (2) следует, что $I_h^{(n)}=V\otimes I_h^{(n-1)}+L_h\otimes V^{\otimes(n-2)}$. Остается доказать, что $\dim(V\otimes I_h^{(n-1)}\cap L_h\otimes V^{\otimes(n-2)})=\dim(V\otimes I_0^{(n-1)}\cap$ $\cap L_0\otimes V^{\otimes(n-2)})$.

$$V\otimes I_h^{(n-1)}\cap L_h\otimes V^{\otimes(n-2)}\supset L_h\otimes I_h^{(n-2)}+M_h\otimes V^{\otimes(n-3)}, \qquad (3)$$

где $M_h=V\otimes L_h\cap L_h\otimes V$. В силу замечания 3 и предположения индукции $I_h^{(n-1)}$ и L_h непрерывно зависят от h при малых h. Кроме того, из 3-самосогласованности следует, что при малых h $\dim I_h^{(3)}=\dim I_0^{(3)}$, т.е. $\dim(V\otimes L_h+L_h\otimes V)=\dim(V\otimes L_0+L_0\otimes V)$. Поэтому при малых h $\dim M_h=\dim M_0$ и, следовательно, M_h непрерывно зависит от h.

Лемма. Пусть X_h, Y_h, Z_h, U_h – векторные подпространства некоторого конечномерного векторного пространства, непрерывно зависящие от h. Предположим, что

$$X_h\cap Y_h\supset Z_h+U_h \qquad (4)$$

и что при $h=0$ включение (4) превращается в равенство. Тогда $\dim(X_h\cap Y_h)=\dim(X_0\cap Y_0)$ при достаточно малых h.

Доказательство. Из (4) следует, что $\dim(X_h\cap Y_h)\geq$ $\geq\dim(Z_h+U_h)$. С другой стороны, при достаточно малых h, $\dim(X_h\cap Y_h)\leq$ $\leq\dim(X_0\cap Y_0)=\dim(Z_0+U_0)\leq\dim(Z_h+U_h)$. ■

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно убедиться, что при $h=0$ включение (3) превращается в равенство, т.е. естественный комплекс

$$M_h\otimes A_h^{(n-3)}\to L_h\otimes A_h^{(n-2)}\to V\otimes A_h^{(n-1)} \qquad (5)$$

ацикличен при $h=0$. Действительно, при $h=0$ комплекс (5) превращается в $\Lambda^3V\otimes sym^{n-3}V\to\Lambda^2V\otimes sym^{n-2}V\to V\otimes sym^{n-1}V$, т.е. в отрезок комплекса Кошуля, который ацикличен. ■

Следствие. Если число образующих m равно 2, то соотношения (1) самосогласованы.

Доказательство. Достаточно доказать 3-самосогласованность. Для этого надо проверить, что $\dim(V\otimes L_h\cap L_h\otimes V)=\dim(V\otimes L_0\cap L_0\otimes V)$ при достаточно малых h. Но $V\otimes L_0\cap L_0\otimes V=\Lambda^3V=0$, поскольку $\dim V=2$. Поэтому $V\otimes L_h\cap L_h\otimes V=0$ при достаточно малых h. ■

2. Приведем критерий самосогласованности соотношений (1). Пусть $B(h):V\otimes V\otimes V\to V\otimes V\otimes V$ – оператор с матрицей $b_{i_1i_2i_3}^{j_1j_2j_3}(h)=c_{i_1s}^{j_1j_2}(h)\times$ $\times c_{i_2i_3}^{sj_3}(h)$.

Теорема 2. Для самосогласованности соотношений (1) необходимо и достаточно, чтобы при достаточно малых h

$$Alt(i_1, i_2, i_3)\, sym(j_1, j_2, j_3)\, a_{i_1 i_2 i_3}^{j_1 j_2 j_3}(h) = 0, \tag{6}$$

где $Alt(i_1, i_2, i_3)$ – альтернирование по i_1, i_2, i_3, $sym(j_1, j_2, j_3)$ – симметризация по j_1, j_2, j_3, $a_{i_1 i_2 i_3}^{j_1 j_2 j_3}(h)$ – матрица оператора $B(h)\,(1-\frac{1}{3}B(h))^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 1, самосогласованность соотношений (I) эквивалентна их 3-самосогласованности. Для 3-самосогласованности, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы при достаточно малых h

$$dim(L_h \otimes V \cap V \otimes L_h) = dim(L_0 \otimes V \cap V \otimes L_0). \tag{7}$$

Координаты тензора из $L_h \otimes V$ имеют вид $2u^{rst} + c_{ij}^{rs}(h)\, u^{ijt}$, где $u^{rst} = -u^{srt}$. Кооординаты тензора из $V \otimes L_h$ имеют вид $2v^{rst} + c_{ij}^{st}(h)\, v^{rij}$, где $v^{rst} = -v^{rts}$. Поэтому $dim(L_h \otimes V \cap V \otimes L_h)$ – это размерность пространства решений системы уравнений

$$2u^{rst} + c_{ij}^{rs}(h)\, u^{ijt} = 2v^{rst} + c_{ij}^{st}(h)\, v^{rij};$$

$$u^{rst} = -u^{srt}, \qquad v^{rst} = -v^{rts}. \tag{8}$$

Положим $\alpha^{rst} = u^{rst} - v^{tsr}$, $\beta^{rst} = u^{rst} + v^{tsr}$. Тогда $\alpha^{rst} = -\alpha^{srt}$, $\beta^{rst} = -\beta^{srt}$. Проальтернировав (8) по r, t, получим

$$2(\beta^{rst} - \beta^{tsr}) = c_{ij}^{ts}(h)\, \alpha^{ijr} - c_{ij}^{rs}(h)\, \alpha^{ijt}. \tag{9}$$

Симметризация (8) по r, t дает

$$2(\alpha^{rst} + \alpha^{tsr}) + c_{ij}^{rs}(h)\, \beta^{ijt} + c_{ij}^{ts}(h)\, \beta^{ijr} = 0. \tag{10}$$

Симметризовав теперь (10) по r, s, t, получим

$$c_{ij}^{rs}(h)\, \beta^{ijt} + c_{ij}^{ts}(h)\, \beta^{ijr} + c_{ij}^{tr}(h)\, \beta^{ijs} = 0. \tag{11}$$

Поэтому из (10) следует, что

$$2(\alpha^{rst} + \alpha^{tsr}) - c_{ij}^{tr}(h)\, \beta^{ijs} = 0. \tag{12}$$

Обратно, симметризовав (12), получим (11), а из (11) и (12) следует (10). Таким образом, (10) и (12) эквивалентны.

Перепишем (9) в виде

$$2(\beta^{rst} + \beta^{str}) = c_{ij}^{st}(h)\, \alpha^{ijr} - c_{ij}^{rs}(h)\, \alpha^{ijt}; \tag{13}$$

и совершим циклические перестановки индексов r, s, t:

$$2(\beta^{str} + \beta^{trs}) = c_{ij}^{tr}(h)\, \alpha^{ijs} - c_{ij}^{st}(h)\, \alpha^{ijr}; \tag{14}$$

$$2(\beta^{trs} + \beta^{rst}) = c_{ij}^{rs}(h)\, \alpha^{ijt} - c_{ij}^{tr}(h)\, \alpha^{ijs}. \tag{15}$$

Сложив (13) с (15) и вычтя из полученной суммы (14), получим

$$\beta^{rst} = \frac{1}{2}\left(c_{ij}^{st}(h)\alpha^{ijr} - c_{ij}^{rt}(h)\alpha^{ijs}\right). \tag{16}$$

Обратно, из (16) следует (9). Подстановка (16) в (12) дает

$$\alpha^{rst} + \alpha^{tsr} - \frac{1}{2} c_{ij}^{tr}(h) c_{kl}^{js}(h)\alpha^{kli} = 0. \tag{17}$$

Таким образом, $\dim(L_h \otimes V \cap V \otimes L_h)$ – это размерность пространства решений уравнения (17), удовлетворяющих условию $\alpha^{rst} = -\alpha^{srt}$.

Формулы

$$\mu^{rst} = \alpha^{rst} + \alpha^{tsr}, \quad \nu^{rst} = \alpha^{rst} + \alpha^{str} + \alpha^{trs},$$

$$\alpha^{rst} = \frac{1}{3}\left(\mu^{rst} - \mu^{srt} + \nu^{rst}\right) \tag{18}$$

определяют взаимно однозначное соответствие между множеством тензоров α^{rst}, кососимметричных по r, s, и множеством решений системы

$$\mu^{rst} = \mu^{tsr}, \tag{19}$$

$$sym(r,s,t)\,\mu^{rst} = 0; \tag{20}$$

$$\nu^{rst} = -\nu^{srt} = -\nu^{rts}. \tag{21}$$

Подставив (18) в (17), получим

$$\mu^{rst} - \frac{1}{3} c_{ij}^{tr}(h)\, c_{kl}^{js}(h)\mu^{kli} = \frac{1}{6} c_{ij}^{tr}(h) c_{kl}^{js}(h)\,\nu^{kli}. \tag{22}$$

Заметим, что (19) следует из (22). Таким образом, $\dim\left(L_h \otimes V \cap V \otimes L_h\right)$ это размерность пространства решений системы (20) – (22).

Из уравнения (22) можно μ выразить через ν. Действительно, (22) можно переписать в виде $\mu^{rst} - \frac{1}{3} b_{ikl}^{trs}(h)\mu^{kli} = \frac{1}{6} b_{ikl}^{trs}(h)\nu^{kli}$, откуда $\mu^{rst} = \frac{1}{6} a_{ikl}^{trs}(h)\nu^{kli}$. Поэтому $\dim(L_h \otimes V \cap V \otimes L_h)$ размерность пространства кососимметричных решений уравнения

$$sym(r,s,t)\, a_{ikl}^{trs}(h)\,\nu^{kli} = 0 \tag{23}$$

Поскольку $a_{ikl}^{trs}(0) = 0$, равенство (7) означает, что (23) выполняется для любого кососимметричного ν. Это эквивалентно формуле (6).

Замечание. "Классическим пределом" алгебры, порожденной самосогласованными соотношениями вида (1), является квадратичная алгебра скобок Пуассона (см. [5]). Такая алгебра задается соотношениями вида $\{x_i, x_j\} = c_{ij}^{kl} x_k x_l$, где $c_{ij}^{kl} = -c_{ji}^{kl} = c_{ij}^{lk}$. При этом классическим аналогом условия самосогласованности является тождество Якоби, а классический аналог теоремы 2 – очевидное утверждение об эквивалентности тождества Якоби соотношению

$$Alt(i_1, i_2, i_3)\, sym(j_1, j_2, j_3)\, b_{i_1 i_2 i_3}^{j_1 j_2 j_3} = 0,$$

где

$$b_{i_1 i_2 i_3}^{j_1 j_2 j_3} = c_{i_1 s}^{j_1 j_2} c_{i_2 i_3}^{s j_3}.$$

3. В этом пункте мы рассмотрим супераналог соотношений (1). При этом будет использоваться терминология обзора [4].

Пусть Λ – коммутативная локальная супералгебра над $\mathbb{C}$ (например, можно в качестве Λ взять грассманову алгебру над $\mathbb{C}$ или над кольцом ростков непрерывных функций). Супераналог соотношений (I) имеет вид

$$x_i x_j - (-1)^{\rho(i)\rho(j)} x_j x_i + x_k x_l c_{ij}^{kl} = 0, \tag{24}$$

где c_{ij}^{kl} принадлежат максимальному идеалу алгебры Λ. Здесь предполагается, что каждому индексу i, $1 \leq i \leq m$ приписана четность $\rho(i) \in \mathbb{Z}_2$, причем четность x_i равна $\rho(i)$. Кроме того, предполагается, что четность c_{ij}^{kl} равна $\rho(i)+\rho(j)+\rho(k)+\rho(l)$ и что $c_{ij}^{kl} = (-1)^{\rho(k)\rho(l)} \times c_{ij}^{lk} = (-1)^{\rho(i)\rho(j)+1} c_{ij}^{kl}$. Обозначим через A супералгебру над Λ, порожденную образующими x_i и соотношениями (24). Пусть $A = \bigoplus_n A^{(n)}$ – градуировка алгебры A такая, что $x_i \in A^{(1)}$ для всех i (эта градуировка не имеет отношения к $\mathbb{Z}_2$ -градуировке).

Определение. Соотношения (24) называются n-самосогласованными, если $A^{(n)}$ – свободный модуль над Λ. Соотношения (24) называются самосогласованными, если они n-самосогласованы для любого n.

Нетрудно показать, что если Λ – кольцо ростков непрерывных функций, причем все элементы Λ считаются четными, то приведенное определение эквивалентно определению из пункта 1.

Аналогично теоремам 1 и 2 доказывается.

Теорема 3. Следующие условия эквивалентны:

1) соотношения (24) 3-самосогласованы;

2) соотношения (24) самосогласованы;

3) $$Alt(i_1, i_2, i_3)\, sym(j_1, j_2, j_3)\, a_{i_1 i_2 i_3}^{j_1 j_2 j_3} = 0, \tag{25}$$

где $a_{i_1 i_2 i_3}^{j_1 j_2 j_3}$ – матрица оператора $B(1-\frac{1}{3}B)^{-1}$,

$$B(x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes x_{i_3}) \stackrel{def}{=} (x_{j_1} \otimes x_{j_2} \otimes x_{j_3})\, c_{i_1 s}^{j_1 j_2}\, c_{i_2 i_3}^{s j_3}\, (-1)^{\rho(j_3)(\rho(i_1)+\rho(s)+\rho(j_1)+\rho(j_2))}$$

Поясним, что в формуле (25) альтернирование и симметризация понимаются в суперсмысле. Например, член $a^{j_1 j_3 j_2}$ входит в левую часть (25) с коэффициентом $(-1)^{\rho(i_1)(\rho(i_2)+\rho(i_3))^{i_1 i_3 i_1}+\rho(i_2)\rho(j_3)+1}$.

Теорема 4 (принцип двойственности). Соотношения (24) самосогласованы тогда и только тогда, когда самосогласованы соотношения

$$\xi^k \xi^l - (-1)^{(\rho(k)+1)(\rho(l)+1)} \xi^l \xi^k + (-1)^{\rho(i)+\rho(k)} c_{ji}^{lk} \xi^i \xi^j = 0, \tag{26}$$

где четность ξ^k равна $\rho(k)+1$.

Эту теорему можно доказать прямым вычислением, если воспользоваться эквивалентностью условий 2) и 3) теоремы 3. Вот более идейное доказательство, которое мы для простоты изложим в частном случае, когда A – кольцо ростков непрерывных функций и $p(i)=0$ для всех i. В этом случае надо показать, что самосогласованность коммутационных соотношений (I) эквивалентна самосогласованности антикоммутационных соотношений

$$\xi^k\xi^l+\xi^l\xi^k-c_{ij}^{kl}(h)\xi^i\xi^j=0. \tag{27}$$

Обозначим через V векторное пространство с базисом $x_1, \ldots, x_m$. Тогда $\xi^1,\ldots,\xi^m$ образуют базис в V^*. Пусть $L_h\subset V\otimes V$ – подпространство, порожденное элементами $x_i\otimes x_j-x_j\otimes x_i+c_{ij}^{kl}(h)x_k\otimes x_l$. Тогда $L_h^\perp\subset V^*\otimes V^*$ порождено элементами $\xi^k\otimes\xi^l+\xi^l\otimes\xi^k-c_{ij}^{kl}(h)\xi^i\otimes\xi^j$. Самосогласованность соотношений (1) эквивалентна их J-самосогласованности, а для J-самосогласованности соотношений (1) необходимо и достаточно, чтобы $\dim\left(V\otimes L_h+L_h\otimes V\right)=\dim\left(V\otimes L_0+L_0\otimes V\right)$. Аналогично, самосогласованность (27) означает, что $\dim(V^*\otimes L_h^\perp+L_h^\perp\otimes V^*)=\dim\times$ $\times(V^*\otimes L_0^\perp+L_0^\perp\otimes V^*)$. Но $\dim(V\otimes L_h+L_h\otimes V)=\dim(V\otimes L_0+L_0\otimes V)\Leftrightarrow\dim\times$ $\times(V^*L_h^\perp\cap L_h^\perp\otimes V^*)=\dim(V^*\otimes L_0^\perp\cap L_0^\perp\otimes V^*)\Leftrightarrow\dim(V^*\otimes L_h^\perp+L_h^\perp\otimes V^*)=$ $=\dim(V^*\otimes L_0^\perp+L_0^\perp\otimes V^*)$.

4. Обсудим связь между постоянными решениями квантовых уравнений Янга – Бакстера [3] и самосогласованными соотношениями вида (I)

<u>Теорема 5.</u> Пусть $R_{ij}^{kl}(h)$ – матрица оператора $R(h): V\otimes V\to V\otimes V$, непрерывно зависящего от h и удовлетворяющего уравнениям

$$R^{12}(h)R^{13}(h)R^{23}(h)=R^{23}(h)R^{13}(h)R^{12}(h), \tag{28}$$

$$R^{12}(h)R^{21}(h)=1, \tag{29}$$

где R^{13}, R^{21} обозначают то же, что в работе [3]. Предположим, кроме того, что $R(0)=1$. Тогда соотношения

$$x_ix_j=R_{ij}^{kl}(h)x_lx_k \tag{30}$$

эквивалентны (при малых h) самосогласованным соотношениям вида (I).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma: V\otimes V\to V\otimes V$ – оператор перестановки сомножителей. Алгебра A_h, определяемая соотношениями (30), является фактором тензорной алгебры пространства V по двустороннему идеалу, порожденному подпространством $L_h\subset V\otimes V$, где $L_h=Im(1-\sigma R(h))$. Из выражения (29) вытекает, что $(\sigma R(h))^2=1$. Поэтому $\frac{1}{2}(1-\sigma R(h))$ – проектор и, следовательно, L_h непрерывно зависит от h. Ясно, что $L_0=\Lambda^2V$. Таким образом, соотношения (30) при малых h эквивалентны соотношениям вида (1) (где, как нетрудно доказать, $c_{ij}^{kl}(h)$ – матрица оператора $(1+\sigma)(1+R(h))^{-1}(1-\sigma))$. Пусть $A_h^{(n)}$ и $I_h^{(n)}$ обозначают то же, что в пункте I. Для доказательства самосогласованности соотношений (1), т.е. равенства $\dim A_h^{(n)} = \dim A_0^{(n)}$, воспользуемся следующей хорошо известной конструкцией. Для любого $i \in \{1,2,\ldots, n-1\}$ обозначим через $s_i(h)$ следующий оператор в $V^{\otimes n}$:

$$s_i(h) = \underbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}_{i-1} \otimes \sigma R(h) \otimes \underbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}_{n-1-i}.$$

Из (28) и (29) следует, что $s_i(h)^2 = 1$, $(s_i(h)s_{i+1}(h))^3 = 1$. Кроме того, $s_i(h)s_j(h) = s_j(h)s_i(h)$, если $|i-j| > 1$. Поэтому возникает представление π_h группы S_n в пространстве $V^{\otimes n}$, непрерывно зависящее от h. Легко видеть, что пространство $I_h^{(n)}$ порождено элементами вида $\pi_h(s)w - w$, где $s \in S_n$, $w \in V^{\otimes n}$. Поэтому размерность $A_h^{(n)}$ равна рангу проектора $\frac{1}{n!}\sum_{s\in S_n} \pi_h(s)$ и, следовательно, не зависит от h. ∎

Замечания. Аналогично доказывается, что в условиях теоремы 5 соотношения $\xi_i\xi_j = -R_{ij}^{kl}(h)\xi_l\xi_k$ эквивалентны самосогласованным соотношениям вида (27).

Теорема 5 и замечание 1 допускают суперобобщения.

"Классическим" аналогом теоремы 5 и замечания 1 является следующее легко доказываемое утверждение: если r_{ij}^{kl} – матрица оператора $r: V\otimes V \to V\otimes V$, удовлетворяющего классическим уравнениям треугольников и унитарности (т.е. $[r^{12}, r^{13}] + [r^{12}, r^{23}] + [r^{13}, r^{23}] = 0$, $r^{12} + r^{21} = 0$ то скобка $\{x_i, x_j\} = r_{ij}^{kl} x_k x_l$ удовлетворяет тождеству Якоби, а скобка $\{\xi_i, \xi_j\} = r_{ij}^{kl}\xi_k\xi_l$, где ξ_i – образующие грассмановой алгебры, удовлетворяет супертождеству Якоби.

По поводу решений уравнений (28), (29) (см. работу [2] и работу [1], теорему I).

Алгебра, определяемая соотношениями (30), тесно связана с алгеброй Замолодчикова (см. работы [3], [7]).

5. Согласно теореме 4, каждой алгебре, определяемой соотношениями вида (24) соответствует "двойственная" алгебра, определяемая соотношениями (26). Приведем теперь гомологическую интерпретацию "двойственной" алгебры, ограничившись для простоты случаем, когда алгебра Λ содержит только четные элементы и $p(x_i) = 0$ для всех i.

Пусть Λ – коммутативная локальная алгебра над $\mathbb{C}$ с максимальным идеалом I, $A = \widehat{\bigoplus}_{n=0} A^{(n)}$ – алгебра над Λ, определяемая самосогласованными соотношениями $x_i x_j - x_j x_i + c_{ij}^{kl} x_k x_l = 0$, $c_{ij}^{kl} \in I$. Положим $J = \bigoplus_{n>0} A^{(n)}$. Обозначим через B алгебру над Λ, определяемую соотношениями $\xi^k\xi^l + \xi^l\xi^k - c_{ij}^{kl}\xi^i\xi^j = 0$.

Теорема 6. B канонически изоморфна $\widehat{\bigoplus}_{n=0} \mathrm{Ext}^n(A/J, A/J)$ как градуированная алгебра над Λ. Здесь A/J рассматривается как левый

A-модуль, а структура алгебры на $Ext^*(A/J, A/J)$ определяется произведением Ионеды.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через V свободный Λ-модуль с базисом $\{x_i\}$. Тогда $A^{(1)} = V$, $B^{(1)} = V^*$. Поэтому отображение $A \otimes_\Lambda A \to A$, заданное формулой $a \otimes b \to ab$, индуцирует гомоморфизм Λ-модулей $A^{(k)} \otimes_\Lambda V \to A^{(k+1)}$, а аналогичное отображение $B \otimes_\Lambda B \to B$ индуцирует гомоморфизм $V^* \otimes_\Lambda B^{(l)} \to B^{(l+1)}$ и, следовательно, $(B^{(l+1)})^* \to V \otimes_\Lambda (B^{(l)})^*$. Композицию $A^{(k)} \otimes_\Lambda (B^{(l+1)})^* \to A^{(k)} \otimes_\Lambda V \otimes_\Lambda (B^{(l)})^* \to A^{(k+1)} \otimes_\Lambda (B^{(l)})^*$ обозначим через d.

<u>Лемма.</u> Последовательность

$$0 \to (B^{(n)})^* \xrightarrow{d} (A^{(1)} \otimes_\Lambda B^{(n-1)})^* \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} A^{(n-1)} \otimes_\Lambda (B^{(1)})^* \to A^{(n)} \to 0. \qquad (31)$$

точна для любого $n > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ядро гомоморфизма $V^* \otimes_\Lambda V^* = B^{(1)} \otimes B^{(1)} \to B^{(2)}$ является ортогональным дополнением ядра гомоморфизма $V \otimes_\Lambda V \to A^{(2)}$ (см. доказательство теоремы 4). Отсюда нетрудно вывести, что последовательность (31) является комплексом. Остается доказать, что последовательность (31) становится точной после тензорного умножения на Λ/I. Действительно, после тензорного умножения на Λ/I (31) превращается в комплекс Кошуля

$$0 \to \Lambda^n V_0 \to V_0 \otimes \Lambda^{n-1} V_0 \to Sym^2 V_0 \otimes \Lambda^{n-2} V_0 \to \ldots \to Sym^{n-1} V_0 \otimes V_0 \to Sym^n V_0 \to 0,$$

который, как известно, ацикличен. ■

Воспользовавшись для вычисления $Ext^n(A/J, A/J)$ построенной выше резольвентой

$$\ldots \to A \otimes_\Lambda (B^{(2)})^* \to A \otimes_\Lambda (B^{(1)})^* \to A \to A/J \to 0,$$

получим канонический изоморфизм $Ext^n(A/J, A/J) \cong B^{(n)}$. Нетрудно показать, что умножение Ионеды переходит при этом изоморфизме в умножение, имеющееся в алгебре B. ■

1. Дринфельд В.Г. Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга - Бакстера. - Докл. АН СССР, 1982, <u>268</u>, № 2, с. 285-287.
2. Дринфельд В.Г. О постоянных квазиклассических решениях квантового уравнения Янга - Бакстера. - Докл. АН СССР, 1983, <u>273</u>, № 3, с. 531-535.
3. Кулиш П.П., Склянин Е.К. О решениях уравнения Янга - Бакстера.- Записки научных семинаров ЛОМИ, 1980, <u>95</u>, с.129-160.
4. Лейтес Д.А. Введение в теорию супермногообразий. - Успехи мат. наук, 1980, <u>35</u>, № 1, с. 3-57.
5. Склянин Е.К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга - Бакстера. - Функц. анализ и его прилож., 1982, <u>16</u>, № 4, с. 27-34.
6. Склянин Е.К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга - Бакстера. - Представления квантовой алгебры. - Функц. анализ и его приложение, 1983, <u>17</u>, № 4, с. 34-48.

7. Zamolodchikov A.B., Zamolodchikov Al.B. Relativistic factorized S-matrices with O(N)-symmetry. - Nuclear Phys., 1978, B133, N 3, p. 525-535.

УДК 519.9 + 513.8

С.А.Молчанов, М.В.Новицкий

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТАХ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА ТОРЕ

1°. Изучение систем спектральных инвариантов оператора Шредингера на компактном римановом многообразии М с фиксированной метрикой - важный этап в решении задачи восстановления (хотя бы частичного) потенциала V по спектру $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ оператора $H = -\Delta_M + V$ [1], [2].

В данной работе изучается полнота некоторой системы спектральных инвариантов оператора Шредингера $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$ на эвклидовом торе $M = T^\nu$, $\nu \geq 2$, которую, следуя работе [3], естественно назвать системой обобщенных коэффициентов Минакшисандарама. В предположении вещественной аналитичности потенциала V мы показываем (теорема 1), что система обобщенных коэффициентов Минакшисандарама является полной. Это позволяет доказать основной результат работы - утверждение о том, что по спектру оператора H можно восстановить спектры одномерных периодических операторов Штурма - Лиувилля, потенциалы которых получаются из V осреднением по семейству замкнутых геодезических (теорема 2).

Краткое изложение результатов этой работы содержится в работе [4]. Для простоты изложения мы ограничиваемся случаем двумерного "прямоугольного" тора T^2.

2°. Обобщенные коэффициенты Минакшисандарама. Пусть $T^2 = R^2/\Gamma$ - двумерный эвклидов тор, где Γ - прямоугольная решетка $\{g = (a_1 k_1, a_2 k_2), k_1, k_2 \in Z\}$, $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$ - оператор Шредингера на T^2, $V(x)$ - вещественно-аналитическая функция, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ - спектр оператора H в $L^2(T^2, dx)$, dx - мера Лебега на T^2, $\theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n t)$ - θ-функция оператора h на T^2, $w(u)$ - "винеровский мост", т.е. двумерный условный винеровский процесс, определяемый условиями 1) $w(0) = w(1) = 0$; 2) компоненты $w_k(u)$, к = 1,2 суть независимые гаусовские процессы с нулевыми средними и корреляционными функциями

$$B_k(s,t) = (s \wedge t)(1 - s \vee t), \qquad 0 \leq s, \ t \leq 1.$$

Определение 1. Систему функционалов $\{F_\alpha(V)\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ будем называть полной системой спектральных инвариантов для оператора $H = -\frac{1}{2}\Delta + V(x)$, $x \in T^2$, если из равенства $F_\alpha(V_1) = F_\alpha(V_2)$, справедливого для всех значений $\alpha \in \mathfrak{A}$, вытекает, что совпадают спектры операторов $H = -\frac{1}{2}\Delta + V_i(x)$, $x \in T^2$ и наоборот.

При этом существенную роль играет обобщенная формула Якоби /5/

$$\theta(t,V)=\sum_{g\in\Gamma}\theta_g(t,V),$$

где

$$\theta_g(t)=\frac{exp\left(-\frac{|g|^2}{2t}\right)}{2\pi t}\int_{T^2}M\left(exp\left(-t\int_0^1 V(x+ug+\sqrt{t}\,w(u))\,du\right)dx.\right. \qquad (1)$$

Здесь $|g|=((k_1\alpha_1)^2+(k_2\alpha_2)^2)^{1/2}$ – длина замкнутой геодезической, отвечающей элементу $g=(k_1\alpha_1,\ k_2\alpha_2)$. Соотношение (1) непосредственно следует из формулы Каца – Фейнмана. Обозначим через $[g]$ множество элементов решетки Г, имеющих одинаковое значение $|g|$. Пусть

$$\theta_{[g]}(t,V)=\sum_{g\in[g]}\theta_g(t,V).$$

Согласно (1) функции $\theta_g(t,V)$ и $\theta_{[g]}(t,V)$ допускают при $t\downarrow 0$ асимптотические разложения

$$\theta_g(t,V)=\frac{exp\left(-\frac{|g|^2}{2t}\right)}{2\pi t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n^g t^n\right),\ \theta_{[g]}(t,V)\frac{exp\left(-\frac{|g|^2}{2t}\right)}{2\pi t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{[g]}t^n\right), \qquad (2)$$

где

$$b_n^g=\int_{T^2}M\frac{(-1)^n}{n!}\left(\int_0^1 V(x+ug+\sqrt{t}\,w(u))\,du\right)^n dx.$$

Определение 2. Коэффициенты $b_n^{[g]}$ разложения (2) будем называть обобщенными коэффициентами Минакшисандарама для оператора $H=-1/2\Delta+V(x)$ на торе T^2.

Основная серия этих коэффициентов $\{b_n^0\}_{n=0}^{\infty}$ была введена в рассмотрение /3/.

Лемма I. Имеют место следующие вычислительные формулы

$$b_n^g=\int_{T^2}\left[\sum_{2r_2+3r_3+\ldots+nr_n=n}M\prod_{l=2}^{n}\frac{\xi_{l-2,g}^{r_l}}{r_l!}\right]dx, \qquad (3)$$

где $\{r_i\}_{i=2}^{n}$ – всевозможные наборы неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих соотношению $2r_2+3r_3+\ldots+nr_n=n$, а

$$\xi_{l,g}=-\sum_{p_1+p_2=l}\int_0^1\frac{\partial^{p_1+p_3}}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}}(x+ug)\,w_1^{p_1}(u)\,w_2^{p_2}(u)\,du.$$

Доказательство этой леммы непосредственно следует из формулы (I).

Коэффициенты $\{b_n^g\}$ удобно вычислять в терминах преобразования Фурье потенциала V. Приведем явные выражения для первых четырех коэффициентов $[b_n^g]$, $n=0,1,2,3$ в каждой g – серии, $g\in\Gamma$. Пусть Γ^* – решетка, двойственная к Г и $V(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma^*}c_\gamma\,exp(2\pi i(\gamma,x))$

Пусть функции $\{V_g(x)\}$, $g\in\Gamma$ определены равенствами

$$V_g(x)=\sum_{(\gamma,g)=0}c_\gamma\,exp(2\pi i(\gamma,x)).$$

Тогда

$$b_0^g = a_1 a_2 = vol\, T^2, \qquad b_1^g = -\int_{T^2} V(x)\,dx = -c_0;$$

$$b_2^g = \frac{1}{2}\int_{T^2} |V_g(x)|^2 dx, \quad b_3^g = \frac{1}{6}\int_{T^2} V_g^3(x)\,dx - \frac{1}{24}\int_{T^2} |grad\, V_g(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{(\gamma, g)\neq 0} \frac{|c_\gamma|^2 |\gamma|^2}{|(g,\gamma)|^2}.$$

Структура коэффициентов $\{b_n^g\}$ достаточно хорошо изучена в одномерном случае $\nu = 1$. Здесь основная серия $\{b_n^0\}$ совпадает с полиномиальной серией первых интегралов уравнения КдФ [6], а остальные коэффициенты $\{b_n^g\}$, $g \neq 0$ являются полиномами от основной серии $\{b_n^0\}$ [7]. Вопрос о сведении старших коэффициентов $\{b_n^g\}$, $g \neq 0$ к коэффициентам основной серии $\{b_n^0\}$ при $\nu \geq 2$ остается открытым.

3⁰. Полнота системы $\{b_n^g\}_{n=1}^{\infty}$, $g \in \Gamma$. Для решения вопроса о полноте системы обобщенных коэффициентов Минакшисандарама воспользуемся формулой преобразования

$$\theta_g(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{s^2}{2t}\right) e_g(s)\,ds, \tag{4}$$

где $e_g(s) = \int_{T^2} e(s, x, x+g)\,dx$, а $e(t, x_1, x_2)$ – фундаментальное решение гиперболической задачи

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = \tilde{H}e = \left(-\frac{1}{2}\Delta + \tilde{V}\right)e, \quad e\Big|_{t=0} = \delta_{x_1}(x_2), \quad \frac{\partial e}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,$$

$t \geq 0$, $x = (x_1, x_2) \in R^2$. Потенциал $\tilde{V}(x)$ получается периодическим продолжением потенциала V с T^2 на R^2. Свойства функции $e_g(s)$ в предположении вещественной аналитичности потенциала $V(x)$ описаны в следующей лемме.

<u>Лемма 2.</u> Функция $e_g(s)$ представима в виде

$$e_g(s) = \chi_{(|g|,\infty)} (\Phi_g(s) + \varphi_g(s)), \tag{5}$$

где $\Phi_g(s)$ – обобщенная функция вида

$$\Phi_g(s) = \alpha_0^g \frac{d}{ds} \Gamma_{-\frac{1}{2}}(s^2 - |g|^2) + \alpha_1^g b_1^g \frac{s}{\sqrt{s^2 - |g|^2}},$$

а $\varphi_g(s)$ – аналитическая функция при $s > |g|$ с не более чем экспоненциальным ростом при $s \to \infty$ и разложением при $s \downarrow |g|$ вида

$$\varphi_g(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n^g b_n^g (s^2 - |g|^2)^n. \tag{6}$$

Здесь $\Gamma_\lambda(s)$ $(\lambda = -\frac{1}{2})$ – обобщенная функция вида $\frac{s_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$, понимаемая при $Re\,\lambda > 0$ как обычная функция и продолжаемая на остальные λ с помощью аналитического продолжения, $\{\alpha_n^g\}_{n=1}^{\infty}$ фиксированная последовательность положительных чисел, не зависящая от V.

Доказательство утверждения этой леммы использует метод последовательных приближений, который применялся в работе [8] для построения фундаментального решения гиперболической задачи, утверждение (6) следует из результатов Адамара [9].

Теорема I. Обобщенные коэффициенты Минакшисандарама $\{ b_n^{[g]} \}_{n=1}^{\infty}$, $g \in \Gamma$ образуют полную систему спектральных инвариантов оператора $H = -1/2\,\Delta + V$ в классе вещественно-аналитических потенциалов.

Доказательство. Заметим, что формулы (4) - (6) остаются справедливыми, если индекс g заменить на $[g]$. Поэтому, если известна $[g]$ - серия $\{ b_n^{[g]} \}_{n=1}^{g}$, то согласно лемме 2 можно последовательно восстановить $\varphi_{[g]}(t), e_{[g]}(t), \theta_{[g]}(t)$. Суммируя функции $\theta_{[g]}$ по множеству классов $[g]$, получаем $\theta(t)$, а следовательно, и набор $\{ \lambda_k \}_{k=1}$ - спектр оператора H.

4^{0}. Интегралы от потенциала V вдоль замкнутых геодезических. Каждому элементу g решетки Г сопоставим семейство геодезических $\{ y \in T^2 : y = x + ug, \quad 0 \leq u < 1, \quad x \in T^2 \}$. С ними связана использованная ранее функция

$$V_g(x) = \int_0^1 V(x + ug)\,du = \sum_{(\gamma, g) = 0} c_\gamma \exp(2\pi i\, (\gamma, x)).$$

Без ограничения общности будем далее считать $c_0 = 0$. Тогда потенциал $V(x)$ выражается через набор $\{ V_g \}$ по формуле

$$V(x) = \sum_{g \in \Phi} V_g(x),$$

где Φ - набор индексов, параметризующих всевозможные прямые в Γ, проходящие через $g = 0$. Например, пусть

$\Phi = \{ g \in \Gamma : g = (k_1 a_1, \ k_2 a_2), \quad k_1$ и k_2 - взаимно простые, $k_1 \geq 0$.

Затем полагаем

$$V_{[g]}(x) = \sum_{g \in [g]} V_g(x)$$

и сопоставим функциям $V_g(x)$ и $V_{[g]}(x)$, $g \in \Phi$ операторы Шредингера

$$H_g = -\frac{1}{2}\Delta + V_g(x), \qquad H_{[g]} = -\frac{1}{2}\Delta + V_{[g]}(x).$$

Пусть $\gamma(g)$ - минимальный по норме элемент в $\{ \gamma : (\gamma, g) = 0 \}$. Сопоставим функции $V_g(x)$, $g \in \Phi$ функцию $v_g(t)$, заданную на окружности единичной длины и имеющей те же коэффициенты Фурье, что и $V_g(x)$

$$v_g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n\gamma(g)}\, e^{2\pi i n t}$$

Пусть

$$h_g = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2} + \frac{v_g(t)}{|g|^2}$$

периодический оператор Штурма – Лиувилля, заданный на окружности единичной длины.

Прежде чем изучать связь между спектрами операторов H, $H_{[g]}$ и h_g докажем утверждение, которое представляет самостоятельный интерес.

Лемма 2. Имеет место соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \theta_{[\gamma+kg]}(V,t)\exp\frac{|\gamma+kg|^2}{2t} = \theta_{[\gamma]}(V_{[g]},t)\exp\frac{|g|^2}{2t}. \qquad (7)$$

Доказательство.

$$\lim_{k\to\infty} \theta_{[\gamma+kg]}(V,t)\exp\frac{|\gamma+kg|^2}{2t} =$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_{T^2}\Big[\sum_{g\in[g]} M\exp\Big\{-t\int_0^1 V(x+\gamma u+kgu+\sqrt{t}\,w(u))\,du\Big\}\Big]dx =$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_{T^2}\Big[\sum_{g\in[g]} M\exp\Big\{-t\sum_{(\xi,g)=0} c_\xi\int_0^1 e^{2\pi i(\xi,\,x+\gamma u+\sqrt{t}\,w(u))}du\Big\}\times$$

$$\times\exp\Big\{-t\sum_{(\xi,g)\neq 0} c_\xi\int_0^1 e^{2\pi i(\xi,\,x+\gamma u+\sqrt{t}\,w(u))}e^{2\pi i(\xi,\,kg)u}du\Big\}\Big]dx.$$

В силу быстрой осциляции множителя $\exp(2\pi i(\xi,kg))$ при $(\xi,g)\neq 0$ и непрерывности $w(u)$, второй множитель стремится к 1 при $k\to\infty$ и искомый предел совпадает с правой частью соотношения (7).

Отметим, что при доказательстве соотношения (7) вещественная аналитичность потенциала V не используется.

Теорема 2. 1) по спектру оператора Шредингера H та T^2 можно восстановить спектры операторов $H_{[g]}$, $g\in\Gamma$;

2) если решетка $\Gamma=\{g=(k_1a_1,\ k_2a_2)\}$ удовлетворяет условию несоизмеримости чисел a_1 и a_2, то по спектру оператора H на T^2 можно восстановить спектры операторов h_g;

Доказательство. Потенциал $V(x)$ предполагается вещественно-аналитическим. Поэтому по функции $\theta(t,V)$, однозначно определяемой спектром оператора $H=-\frac{1}{2}\Delta+V$, можно найти все функции $\theta_{[g]}(t,V)$. Действительно, обозначая множество всех классов $[g]$ через $\mathfrak{N}$, имеем

$$\theta(t,V)=\sum_{[g]\in\mathfrak{N}}\theta_{[g]}(t,V). \qquad (8)$$

Рассматривая асимптотическое разложение $\theta(t,V)$ при $t\downarrow 0$, можно найти 0 – серию коэффициентов $\{b_n^0\}_{n=1}^{\infty}$. По лемме 1 набор $\{b_n^*\}_{n=1}^{\infty}$

восстанавливает $\theta_0(t,V)$. Применяя к разности $\theta-\theta_0$ – аналогичные рассуждения, находим согласно (8) функцию $\theta_{[g]}(t,V)$, где $[g]$ – класс, которому отвечают замкнутые геодезические минимальной положительной длины. Повторяя этот процесс и учитывая, что различным классам $[g]$ отвечают различные длины замкнутых геодезических, последовательно найдем все функции $\theta_{[g]}(t,V)$. Используя лемму 2, найдем все функции вида $H_{[g]}, g\in\Gamma$. Суммируя эти функции по множеству $\mathcal{H}$, по формуле (8) получим функцию $\theta(t,V_{[g]})$, по которой однозначно восстанавливается спектр оператора $H_{[g]}, g\in\Gamma$.

Чтобы доказать утверждение 2 теоремы, заметим, что если решетка Г удовлетворяет указанному ограничению, то множество $[g]$ состоит всегда из четырех элементов. Кроме того, ненулевые коэффициенты Фурье потенциала $V_{[g]}(x)$ сосредоточены на двух ортогональных прямых, проходящих через 0. Поэтому потенциал $V_{[g]}(x)$ допускает "разделение переменных" и значит по спектру оператора $H_{[g]}$ можно восстановить спектр оператора h_g. Учитывая часть 1 этой теоремы, получаем нужное утверждение.

Замечание. Рассматривая частный случай потенциала $V(x_1,x_2)=V_1(x_1)+V_2(x_2)$, легко обнаружить, что в этом случае теорема 2 допускает обращение – по спектрам операторов $\{h_g\}$ можно восстановить спектр оператора Н. Верно ли это в общем случае – открытый вопрос.

1. Маккин Г., Зингер И. Кривизна и собственные значения оператора Лапласа.- Математика, 1969, 13, № 6, с. 138-161.
2. Weinstein A. Eigenvalues of the Laplacian Plus a Potential. - Proc. Int. Congr. of Math. Hels., 1978, 2, p. 803-805.
3. Minakhisundaram S. Eigenfunctions on Riemannian manifold. - J. Indian Math. Soc., 1953, 17, c. 158-165.
4. Молчанов С.А., Новицкий М.В. Спектральные инварианты оператора Шредингера на торе. - Успехи мат. наук, 1983, 38, № 5, с.135-136.
5. Молчанов С.А. Диффузионные процессы и риманова геометрия. - Успехи мат. наук, 1976, 30, № 1, с. 3-59.
6. McKean H.P., Moerbeke van P. The Spectrum of Hill's equation.- Inventiones math., 1975, 30, p. 217-274.
7. Sunada T. Trace formula for Hill's operators. - Duke Math. J., 1980, 47, N 3, p. 529-546.
8. Левитан Б.М. Об асимптотическом поведении спектральной функции и разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u+\{\lambda-q(x_1,x_2,x_3)\}u=0$. - Тр. Моск.матем. об-ва, 1955, 4, с. 237-290.
9. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. - М.: Наука, 1978. - 240 с.

УДК 519.9

М.В.Новицкий

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СИСТЕМАХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ ОПЕРАТОРА ХИЛЛА

1. <u>Введение.</u> В работе изучаются дискретные и континуальные системы спектральных инвариантов оператора Хилла. Основные вопросы, возникающие при изучении таких систем, это вопросы полноты, минимальности и эквивалентности различных систем. Среди дискретных систем самой известной является система $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ первых интегралов уравнения КдФ [1]. Мы доказываем что различные дискретные системы (см. п. 2–5) эквивалентны системе $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ (теорема 1). Затем указываем на связь системы $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ с проблемой моментов, что позволяет сформулировать критерий конечнозонности потенциала в терминах некоторой полной континуальной системы спектральных инвариантов (теорема 2). В заключение (п. 8) приводятся соответствующие обобщения на случай оператора Шредингера с почти периодическим (п.п.) потенциалом.

2. Система $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ первых интегралов уравнения КдФ Пусть $u(x)\in C^{\infty}(R)$ – периодическая с периодом 1 функция на вещественной оси. Оператор Хилла – это оператор $H=-\frac{d^2}{dx^2}+u(x)$. Обозначим через $G(\lambda,x,y)$ ядро резольвенты $(H-\lambda I)$ в пространстве $L^2(R)$. Используя интегральное уравнение, связывающее $G(\lambda,x,y)$ и функцию

$$G_0(\lambda,x,y)=\frac{1}{2\sqrt{-\lambda}}\,e^{-\sqrt{-\lambda}\,|x-y|},$$

которая является ядром резольвенты оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ несложно получить асимптотическое разложение

$$G(\lambda,x,x)\sim\frac{1}{2\sqrt{-\lambda}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n(x)}{\lambda^n}\right),\quad \lambda\to-\infty. \tag{1}$$

Функция $G(\lambda,x,x)$ удовлетворяет уравнению

$$-2GG''+(G')^2+4(u-\lambda)G^2=1. \tag{2}$$

Дифференцируя соотношение (2), получаем $LG=4\lambda DG$, где

$$L=-D^3+4uD+2Du,\qquad D=\frac{d}{dx}.$$

Это влечет рекурентное соотношение

$$Lg_k=4Dg_{k+1},\qquad k=0,1,2,\dots,\qquad g_0\equiv 1.$$

Введем обозначение

$$I_n(u)=\frac{1}{2n+1}\int_0^1 g_{n+1}(x)\,dx,\qquad n=0,1,2,\dots \tag{3}$$

Система $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется системой первых интегралов уравнения КдФ.

3. Система $\{b_k^n\}$ коэффициентов Минакшисандарама. Пусть $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ спектр оператора H в $L^2[0,1]$ с периодическими граничными условиями, $\theta(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\exp(-\lambda_i t)$, $e(t,x,y)$ – фундаментальное решение уравнения $\frac{\partial e}{\partial t}=-He$ на вещественной прямой. Функция $\theta(t)$ может быть представлена в виде

$$\theta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\theta_n(t), \tag{4}$$

где

$$\theta_n(t)=\int_0^1 e(t,x,x+n)\,dx=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{n^2}{4t}\right)f_n(t).$$

Функция $f_n(t)$ имеет вид

$$f_n(t)=\int_0^1\left[M\exp\left(-t\int_0^1 u(x+ns+\sqrt{t}\,w(s)\,ds\right]dx,$$

где $w(s)$ – "винеровский мост", т.е. одномерный условный винеровский процесс, определяемый условиями $i)$ $w(0)=w(1)=0$; $ii)$ $w(s)$ – гаусовский процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $B(s,t)=(s\wedge t)(1-s\vee t)$, $0\le s,t\le 1$. Соотношение (4) следует из формулы Каца – Фейнмана. Имеет место асимптотическая формула при $t\downarrow 0$

$$e(t,x,x+n)\sim\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{n^2}{4t}\right)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}e_k^n(x)\,t^k\right),\quad n=0,1,\dots, \tag{5}$$

где $e_k^n(x)$ – дифференциальные многочлены от u, u', u'',... удовлетворяющие соотношению

$$e_k^n(x,\lambda,u,\dots,\lambda^{1+\frac{r}{2}}u^{(r)},\dots)=\lambda^k e^{\frac{n}{\sqrt{\lambda}}}(x,u,u',\dots). \tag{6}$$

Правая часть имеет смысл, если надлежащим образом определить e_n^s при всех $s\geqslant 0$. В частности, из (6) получим

$$e_k^0(x,\lambda,u,\dots,\lambda^{1+\frac{r}{2}}u^{(r)},\dots)=\lambda^k e_k^0(x,u,u',u'',\dots). \tag{7}$$

Коэффициенты

$$b_k^n=\int_0^1 e_k^n(x,u,u',\dots)\,dx,\qquad k=1,2,\dots$$

будем называть n – серией коэффициентов Минакшисандарама. Поскольку

$$\int_0^1 G(\lambda,x,x)\,dx=\int_0^{\infty}e^{\lambda t}\int_0^1 e(t,x,x)\,dx\,dt,$$

то во-первых, из (4) и (5) получим, что

$$b_k^0=\frac{(-1)^k 2^{k-1}}{(2k-3)!!}I_{k-1},\qquad k=1,2,\dots, \tag{8}$$

во-вторых, выражение $2^k(1)^k g_k(x)-(2k-1)!!\,e_k^0(x)$ при всех $k=1,2$ ... есть многочлен от u, u', ... , являющейся производной от некоторой периодической функции. В формуле (8) мы использовали обозначение $(2k-3)!!=(2k-3)(2k-5)\ldots 3\cdot 1$, которое полагаем равным 1 при $k=0,1$.

4. Спектральные инварианты $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ специальное конформное отображение $\psi(\lambda)$ и проблема моментов. Пусть

$$\Delta(\lambda)=\frac{1}{2}\left[c(1,\lambda)+s'(1,\lambda)\right],$$

где $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ – решения уравнения $Hu=\lambda u$ при условии $c(0,\lambda)=s'(0,\lambda)=1$ и $c'(0,\lambda)=s(0,\lambda)=0$. Мультипликаторы $\rho(\lambda)$ решений Флоке уравнения $Hy=\lambda y$, где

$$y(x+1,\lambda)=\rho(\lambda)\,y(x,\lambda)$$

удовлетворяют уравнению Ляпунова $\rho^2-2\Delta(\lambda)\rho+1=0$. Поэтому один из этих мультипликаторов $\rho_1(\lambda)$ удовлетворяет условию при $Im\,\lambda>0\,|\rho_1(\lambda)|$ Мы полагаем $\psi(\lambda)=i\ln\rho_1(\lambda)$. Функция $\psi(\lambda)$ – конформное отображение специального вида (см. ниже пункт 6). Свойства функции $\psi(\lambda)$ подробно изучены в работе [2]. Отметим также, что при этом имеет место соотношение $\Delta(\lambda)=\cos\psi(\lambda)$. Непосредственной проверкой (см. работу [3]) устанавливается формула

$$\int_0^{\infty}e^{\lambda t}\theta_n(t)dt=\begin{cases}\dfrac{d}{d\lambda}\log\rho_1(\lambda), & n=0,\quad \lambda\in(-\infty,\lambda_1).\\ -\dfrac{1}{|n|}\dfrac{d}{d\lambda}\left(\dfrac{1}{\rho_1}\right)^{|n|}, & n=\pm1,\pm2,\ldots\end{cases}\tag{9}$$

В частности, при $n=0$ имеем

$$-i\psi'(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{\lambda t}\theta_0(t)dt=\int_0^1 G(\lambda)x,x)\,dx.\tag{10}$$

Учитывая (1) и (3) из (10), получаем, что

$$\psi(\lambda)\sim\sqrt{\lambda}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I_n}{\lambda^{n+1}}\right),\qquad \text{при } \lambda\to-\infty.$$

Следовательно

$$\psi(\lambda^2)\sim\lambda-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I_n}{\lambda^{2n+1}},\qquad \lambda=i\nu,\quad \nu\to+\infty.\tag{11}$$

Функция $\psi(\lambda^2)$ является неванлинновской функцией [2], поэтому по теореме Гамбургера – Неванлинны ([4]. с. 121) получим, что

$$I_n=\int_{-\infty}^{\infty}t^{2n}d\sigma(t),\tag{12}$$

где мера $d\sigma(t)$ имеет специальный вид

$$d\sigma(t)=\frac{1}{\pi}Im\,\psi(t^2)dt.$$

5. Набор $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Имеется еще одна серия спектральных инвариантов оператора Хилла $H=-\frac{d^2}{dx^2}+u(x)$, которая возникает из асимптотического разложения собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ периодической задачи.

Имеем

$$\sqrt{\lambda_k} \sim 2\pi k + \frac{a_0}{k} + \frac{a_1}{k^3} + \dots + \frac{a_n}{k^{2n+1}} + \dots \tag{13}$$

<u>Лемма.</u> Существует взаимнооднозначное соответствие между любыми конечными наборами спектральных инвариантов $\{I_m\}_{m=0}^{n}$ и $\{a_m\}_{m=0}^{n}$, задаваемое соотношениями

$$a_n = R_n^1 (I_0, \dots, I_n), \quad I_n = R_n^2 (a_0, \dots, a_n),$$

где $\{R_m^i\}_{m=0}^{\infty}$, $i =$ 1,2 универсальные многочлены, удовлетворяющие условию

$$R_m^i (\lambda \xi_0, \dots, \lambda^{k+1} \xi_k, \dots, \lambda^{m+1} \xi_m) = \lambda^{m+1} R_m^i (\xi_0, \dots, \xi_m), \quad i = 1,2. \tag{14}$$

З а м е ч а н и е. Свойство (14) многочленов $\{R_m^i\}$ аналогично свойству (7) многочленов $\{e_n^0 (x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы. Функция $\Psi(\lambda^2)$ допускает асимптотическое разложение (11) не только на положительной полупрямой мнимой оси, но и во всей замкнутой полуплоскости $Im\,\lambda \geqslant 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Этот результат, по существу, содержится в теореме 2.5 работы [2]. В точках $\gamma_k = \sqrt{\lambda_k}$ имеем $\Psi(\gamma_k^2) = 2\pi k$. Следовательно, подставляя $\lambda = \gamma_k$ в (11), получаем

$$2\pi k = \gamma_k - \frac{I_0}{\gamma_k} - \dots - \frac{I_n}{\gamma_k^{2n+1}} + O\left(\frac{1}{\gamma_k^{2n+2}}\right). \tag{15}$$

Для подсчета коэффициентов $\{a_k\}$ асимптотического разложения (13) подставим (13) в (15) и установим правило вычисления $\{a_k\}$ по $\{I_k\}$. Прежде всего отметим, что имеет место равенство

$$\frac{1}{\gamma_k^{2n+1}} = \frac{1}{k^{2n+1}} \left(\rho_n^0 + \frac{\rho_n^1 (a_0)}{k} + \frac{\rho_n^2 (a_0, a_1)}{k^3} + \frac{\rho_n^s (a_0, \dots, a_{s-1})}{k^{2s+1}} + \dots \right. \tag{16}$$

где $\{\rho_n^s\}$ – некоторые многочлены от $a_0, a_1, \dots, a_{s-1}$, причем $\rho_n^0 \equiv 1$. Многочлены ρ_n^s удовлетворяют условию однородности

$$\rho_n^s (\lambda a_0, \lambda^2 a_1, \dots, \lambda^{k+1} a_k, \dots) = \lambda^s \rho_n^s (a_0, \dots, a_k, \dots), \tag{17}$$

что непосредственно следует из того факта, что функция $f_n(k, a_0, a_1, \dots) = \frac{1}{\gamma_k^{2n+1}}$ удовлетворяет соотношению

$$f_n(k, \lambda a_0, \dots, \lambda^{s+1} a_s, \dots) = \lambda^{-\frac{2n+1}{2}} f_n\left(\frac{k}{\sqrt{\lambda}}, a_0, \dots, a_s, \dots\right), \quad \lambda > 0$$

Подставляя (16) в (15), получаем

$$\gamma_k \sim 2\pi k + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^{2n+1}} \left[\sum_{k=0}^{n} I_n \rho_n^{n-k} (a_0, \dots, a_{n-k-1}) \right].$$

Следовательно,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} I_k \, p_n^{n-k} (a_0, \ldots, a_{n-k-1}). \tag{18}$$

Поскольку $p_n^0 = 1$, то система (17), является, по существу, треугольной и значит по набору $\{I_m\}_{m=0}^{\infty}$ можно найти набор $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$. Свойство (14) многочленов R_m^i будем доказывать по индукции. При $n = 1,2$ имеем $a_0 = I_0$; $a_1 = I_1 - I_0$. Пусть (14) верно для к = $n - 1$, докажем что верно для к = n. По предположению индукции $a_k = R_k^1 (I_0, \ldots, I_k)$, к = 0, ..., $n - 1$ удовлетворяет условию (14). Тогда

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} I_k p_n^{n-k} (I_0, R_1^1 (I_0, I_1), \ldots, R_{n-k-1}^1 (I_0, \ldots, I_{n-k-1}). \tag{19}$$

Поэтому, делая подстановку $\lambda^{k+1} I_k$ в (19), мы можем в каждом из выражений R_k^1, к = 0,1 ...$n - 1$ вынести λ^{k+1} как множитель перед функцией R_k^1. Далее, используя свойства (17) для многочленов p_n^{n-k}, получаем требуемое свойство (14) для R_n^1. Аналогичная проверка делается и для R_m^2. Лемма доказана.

Непосредственным следствием соотношений (8) и этой леммы является

<u>Теорема 1.</u> Следующие три системы спектральных инвариантов оператора Хилла: коэффициенты Минакшисандарама $\{b_n^0\}_{n=0}^{\infty}$, первые интегралы $\{I_n(u)\}_{n=0}^{\infty}$ уравнения КдФ, коэффициенты $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ асимптотического разложения собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора Хилла с периодическими граничными условиями являются эквивалентными.

<u>Замечания 1.</u> Согласно результатам работы [3] коэффициенты каждой n-серии $\{b_k^n\}_{k=0}^{n}$ могут быть выражены полиномиальным образом через коэффициенты основной серии $\{b_k^0\}_{k=1}^{\infty}$. Ответ на вопрос, является ли система $\{b_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ минимальной, пока не известен.

2. Автором полностью решен вопрос о полноте системы $\{I_n\}$. Ответ дается в терминах функции $I(r)$, которая строится стандартным способом по заданной последовательности m_n. Для того, чтобы в классе периодических потенциалов, удовлетворяющих условию $|I_n| \leq C m_n$, спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ однозначно восстанавливался по набору $\{I_n\}$, необходимо и достаточно

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln I(r)}{1+r^{3/2}} dr = \infty .$$

3. Согласно формуле (9) континуальная система спектральных инвариантов $\{F_n(t,u),\ t>0\}$, n - фиксировано, всегда является полной системой.

6. Критерий конечнозонности потенциала u. В этом и следующем пунктах нам понадобится более детальная информация о свойствах

конформного отображения $\varphi(\lambda)$. Известно [1], что спектр оператора Хилла в пространстве $L^2(R)$ имеет зонную структуру. Обозначим через $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ границы зон спектра этого оператора. При этом спектр периодической задачи совпадает с множеством E_0, E_{2k+3}, E_{2k+4}, к = =0,1,2,...,а спектр антипериодической задачи есть оставшиеся точки E_{2k+1}, E_{2k+2} к = 0, 1, 2, ... Зоны (лакуны) в спектре оператора H есть отрезки вида (E_{2k}, E_{2k-1}), $(-\infty, E_0)$, к = 1,2 ... Потенциал называется конечнозонным, если, начиная с некоторого номера n, выполняются равенства $E_{2k}=E_{2k-1}$ при $n\geq k$. Конформное отображение $\varphi(x^2)$ при условии $E_0 = 0$ отображает $\{x: Im\, x>0\}$ на "гребенку", т.е. область $\{x: Im\, x>0\}$,из которой выброшены отрезки $\{x=2\pi k,\ 0\leq y\leq h_k,\ h_{-k}=h_k, h_0=0\}$. При этом прообраз каждого из этих отрезков есть отрезок $(\sqrt{E_{2k-1}}, \sqrt{E_{2k}})$ при k = 1,2, ... и ему симметричный при к = -1, -2, ... Следовательно,

$$supp\, Im\, \varphi(x^2)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\left(\sqrt{E_{2k-1}}, \sqrt{E_{2k}}\right)\cup\left(-\sqrt{E_{2k}}, -\sqrt{E_{2k-1}}\right)\right]. \tag{20}$$

Теорема 2. Для того, чтобы потенциал $u(x)$ был конечнозонным, необходимо и достаточно, чтобы $F_0(t)$ была целой функцией экспоненциального конечного типа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Если $u(x)$ конечнозонный, то $Im\,\varphi(\lambda^2)$ - финитная функция. В силу (12) $\{I_n\}$ растут не более, чем степенным образом. Поэтому в силу (8) коэффициенты $\{b_n^0\}_{n=0}^{\infty}$ тейлоровского разложения функции $F_0(t)$ удовлетворяют оценке

$$|b_n^0| \leq \frac{C^n}{n!}, \qquad n\to\infty,$$

что влечет нужное свойство $F_0(t)$. Для доказательства достаточности заметим, что предыдущие рассуждения допускают обращение.

7. Восстановление спектра $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ по набору $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ для вещественно-аналитического потенциала. Представляет значительный интерес дать условия восстановления $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ по набору $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ в терминах аналитических свойств потенциала u. Мы здесь рассмотрим частный случай этой ситуации.

Теорема 3. Если потенциал u вещественно-аналитический, то проблема моментов (12) однозначно разрешима и, следовательно, спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ однозначно восстанавливается по набору $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [5], что для вещественно-аналитического потенциала длины лакун $E_{2n}-E_{2n-1}$ оператора H экспоненциально убывают, т.е.

$$E_{2n}-E_{2n-1} \leq C\exp(-\gamma n), \qquad \gamma>0. \tag{21}$$

Используя (21), оценим сверху $|I_n|$ и затем к проблеме моментов (12) применим критерий Карлемана. Согласно (20) имеем

$$I_n = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\sqrt{E_{2n-1}}}^{\sqrt{E_{2n}}} t^{2n}\, Im\,\Psi(t^2)\,dt.$$

При $\sqrt{E_{2n-1}} \le t \le \sqrt{E_{2n}}$ выполняется неравенство $0 \le Im\,\Psi(t^2) \le h_n$. Поэтому

$$\int_{\sqrt{E_{2n}}}^{\sqrt{E_{2n}}} t^{2m}\, Im\,\Psi(t^2)dt \le (E_{2n})^m h_n \left(\sqrt{E_{2n}} - \sqrt{E_{2n-1}}\right). \tag{22}$$

Известны [2] следующие неравенства: если $\sup\limits_{-\infty<n<\infty} h_n < \infty$, то

$$h_n \le C_1\left(\sqrt{E_{2n}} - \sqrt{E_{2n-1}}\right),\ \sqrt{E_n} \le C_2\, n \tag{23}$$

с некоторыми постоянными $C_1\,C_2 > 0$, не зависящими от потенциала u. Неравенства (21), (22), (23) влекут оценку

$$|\,I_n(u)\,| \le C_3^n\,(2n)!$$

Критерий Карлемана для моментной последовательности $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет вид условия

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{S_{2n}}} = \infty,$$

гарантирующего однозначную разрешимость проблемы моментов для $\{S_n'\}$. В нашем случае $s_{2n} = I_n$, поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{I_n}} \ge C_4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +,\infty,$$

что и доказывает теорему 3.

8. Спектральные инварианты одномерного оператора Шредингера $H = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ с почти периодическим (для краткости далее п.п.) потенциалом $u(x)$. Пусть $u(x) \in C^{\infty}(R)$ -п.п. по Бору функция. В этом пункте мы указываем на то, в какой форме результаты предыдущих пунктов 2-7 могут быть перенесены на п.п. случай.

Все построения п. 2 дословно переносятся на п.п. случай. При этом интеграл по периоду в (3) нужно заменить на среднее: $I_n(u) = \frac{1}{2n+1} M_x\, g_{n+1}(x)$. Что касается п. 3, то функция $\theta(t)$ смысла не имеет, однако можно рассмотреть функцию

$$\theta_0(t) = M_x\,(e(t,x,x)).$$

и серию $\{b_n^0\}_{n=0}^{\infty}$ коэффициентов Минакшисандарама. Коэффициенты $\{b_n^0\}$ связаны с $\{I_n\}$ соотношением (8). Доказательство соотношения (8) аналогично периодическому случаю. Аналога систем спектральных инвариантов $\{b_n^k\}$ при к $\ne 0$ и $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ в п.п. случае нет. Вместо конформного отображения $\Psi(\lambda)$ для п.п. случая имеется функция числа вращений $w(\lambda)$, введенная Джонсоном и Мозером [6]

$$w(\lambda) = M(x)\left(\frac{1}{2G(x,x,\lambda)}\right),$$

где λ принадлежит резольвентному множеству оператора H. Для периодического случая функции $w(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ связаны соотношением $w(\lambda) = -i\,\varphi(\lambda)$. В работе [6] доказано соотношение $-M_x G(x,x,\lambda) = w'(\lambda)$, которое аналогично (10). Связь $\{I_n(u)\}$ с проблемой моментов устанавливается с помощью соотношения

$$w(\lambda) \sim \sqrt{-\lambda}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^{n+1}}\right), \quad \lambda \to -\infty.$$

Здесь все $u^k(x)$ предполагаются п.п. функциями и, следовательно, набор $\{I_n(u)\}$ имеет смысл. Тогда

$$I_n(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n}\, Re\, w(t^2, u)\, dt.$$

Аналогом для п.п. случая является

Теорема 4. Спектр оператора Шредингера $H = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ с п.п. потенциалом $u(x)$ абсолютно непрерывен на отрезке $[c, +\infty)$, где c – некоторое число, тогда и только тогда, когда $f_0(t) = \sqrt{4\pi t}\, M_x\, e(t,x,x)$ является целой функцией экспоненциального конечного типа.

Для доказательства отметим, (см. работу [7]), что условие $Re\, w(t^2, u) = 0$ на интервале (a, b) является критерием того, что спектр оператора H на (a, b) абсолютно непрерывен. Оставшаяся часть доказательства аналогична периодическому случаю.

Таким образом, все утверждения этого пункта переносятся на случай оператора Шредингера со случайным метрически транзитивным потенциалом.

1. McKean H.P., Moerbeke van P. She Spectrum of Hill's equation. Invent. math., 1975, 30, p. 217-274.
2. Марченко В.А., Островский И.В. Характеристика спектра оператора Хилла. - Матем. сб., 1975, 97, с. 540-606.
3. Sunada T. Trace formula for Hill's operators. - Duke Math. J. 1980, 47, N 3, p. 529-546.
4. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов. - М. : Физматгиз, 1961.
5. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potential. - Comm. Pure Appl. Math., 1977, 30, p. 321-337.
6. Johnson R., Moser I., The rotation number for almost periodic potentials. - Comm. Math. Phys., 1982, 84, N 3, p. 403-438.
7. Kotany S. Lyaponov indices determine absolutely continuous spectra of stationary random one-dimensional Schrödinger operators. - Proc. Kyoto Stoch. Conf., 1982.

УДК 519.4

Н.И.Нессонов

ПРИМЕРЫ ФАКТОР-ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $GL(\infty)$

Пусть H – комплексное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$; $GL(H)$ – множество ограниченных и ограниченно обратимых операторов в H, $GL(n) = \{g \in GL(H) : g^{\#}e_i = e_i$ для всех $i > n\}$, $GL(\infty)$ – индуктивный предел групп $GL(n)$ $(n = 1, 2, \dots)$ по отношению к естественному вложению $GL(k) \subset GL(n)(k<n)$, $U(\infty)$ – унитарная подгруппа $GL(\infty)$. Здесь знак $\#$ – сопряжение или его отсутствие.

В этой работе на примере группы $GL(\infty)$ предложен вариант метода индуцирования с унитарной подгруппы представлений $GL(\infty)$, что дало возможность построить большой класс фактор-представлений $GL(\infty)$, в том числе типов II и III, которые ранее не были известны. Если проводить аналогию с локально компактным случаем (группы $GL(n)$ $(n < \infty)$ (см. работу [1]), то здесь роль группы треугольных матриц Z_n с мерой Хаара на ней играет бесконечная группа треугольных матриц Z_∞ с мерой Гаусса. При этом выбор гауссовской меры не случаен, а связан с ее квазиинвариантностью по отношению к действиям $U(\infty)$ на Z_∞, определяемым левым и правым умножениями элементов $z \in Z_\infty$ на $u \in U(\infty)$.

Все построенные в работе представления $GL(\infty)$ не имеют $U(\infty)$-неподвижных векторов и не расширяются по непрерывности на группу $U_0(H)$, которая является замыканием $U(\infty)$ по операторной норме, а представления типов II и III индуцируются с фактор-представлений группы $U(\infty)$ соответствующих типов (см. работу [2]).

Отметим, что все неразложимые сферические функции на $GL(\infty)$ и фактор-представления $GL(\infty)$, расширяющиеся на группу $U_0(H)$, полностью автором описаны и соответствующие результаты будут в скором времени опубликованы. Интересно то, что в этом случае все представления имеют тип I и содержат неподвижные векторы по отношению к группам $U(k, \infty) = \{u \in U(\infty) : ue_i = e_i \ (i > k)\}$ для достаточно больших k.

Метод индуцирования, рассматриваемый в этой работе в применении к конкретной ситуации группы $GL(\infty)$, допускает обобщение на другие бесконечномерные группы, являющиеся индуктивными пределами локально-компактных групп.

Регулярное представление бесконечномерной группы треугольных матриц.

Пусть Z_k – подгруппа $GL(\infty)$, состоящая из матриц вида

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1k} & & \\ 0 & \varepsilon_2 & x_{23} & \cdots & x_{2k} & & \bigcirc \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & \cdots & x_{3k} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon_k & \cdot & \cdot \\ & \bigcirc & & & & I_\infty & \end{bmatrix}$$, где $\varepsilon_i > 0$, x_∞ – индуктивный предел $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$, Δ_∞ – пространство, состоящее из всевозможных матриц δ вида

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} & \cdots \\ 0 & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0\,\delta_{nn} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \qquad (\delta_{ii} > 0),$$

$$\Delta_\infty = \prod_{1 \le i \le k} \Delta_{ik} \quad (\Delta_{ik} = \mathbb{C}).$$

Обозначим через μ_{ik} вероятностную меру на Δ_{ik}, плотность которой по отношению к мере Лебега равна $\frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{|z|^2}{2}\right\}$. Положим $\mu = \prod_{1 \le i \le k} \mu_{ik}$. Тогда действие $\tau_x\,(x \in Z_\infty)$, определяемое отображением $\tau_x \delta = \delta x$, оставляет меру μ квазиинвариантной. Для $g \in GL(n)\delta g = u(\delta, g)\delta g$, где δ_g, $\delta \in \Delta_\infty$, $g \in GL(n)$, $u(\delta, g) \in U(n) = GL(n) \cap U(\infty)$ и $u(\delta, g)$, δ_g определяются однозначно. При этом действие, задаваемое отображением $\tau(\tau_g \delta = \delta_g)$, оставляет меру μ квазиинвариантной. Следовательно, на (Δ_∞, μ) определено действие τ группы $GL(\infty)$.

<u>Лемма I.1.</u> Действие τ группы Z_∞ на (Δ_∞, μ) эргодично.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим (Δ_∞, μ) в виде $(\Delta_n, \mu_n) \times (\Delta_{n,\infty}, \mu_{n,\infty})$, где $\Delta_n = \prod_{1 \le i \le k \le n} \Delta_{ik}$, $\Delta_{n,\infty} = \prod_{\substack{1 \le i \le k \\ k > n}} \Delta_{ik}$. Предположим, что $\rho(\delta)\ (\delta \in \Delta_\infty)$ – неподвижная функция из $L^2(\Delta_\infty, \mu)$. Тогда $\rho(\delta) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i(\delta_n) e_i(\delta_{n\infty})$, где $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в $L^2(\Delta_{n\infty}, \mu_{n\infty})$, $\{\rho_i(\delta_n)\}_{i=1}^{\infty} \subset L^2(\Delta_n, \mu_n)$. Из соотношения $\rho(\delta x) = \rho(\delta)\,(x \in Z_n)$ получаем $\rho_i(\delta_n x) = \rho_i(\delta_n)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Поэтому транзитивность действия $\tau_x\,(x \in Z_\infty)$ на Δ_n влечет, что $\rho_i(\delta_n) = const$. Поскольку n – произвольно и μ – продакт-мера, то $\rho(\delta) = const$. Лемма I.1 доказана.

Обозначим через X_k подгруппу Z_∞, порожденную матрицами $\begin{bmatrix} I_k & x_k \\ 0 & I_\infty \end{bmatrix}$, где x_k – комплексная матрица из бесконечного числа столбцов и k строк, у которой все элементы, кроме конечного числа, равны 0 – $[\mathcal{B}]$ – подпространство гильбертова пространства H, натянутое на некоторое множество $\mathcal{B}$ векторов из H, – $I(\delta)$ – функцию из $L^2(\Delta_\infty, \mu)$, тождественно равную единице.

Лемма 1.2. $L^2(\Delta_n, \mu_n) \otimes L^2(\Delta'_n, \mu'_n) = [\pi_T(X_n) I(\delta)]$, где $(\Delta'_n, \mu'_n) = \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ k > n}} (\Delta_{ik}, \mu_{ik})$, π_T – представление $GL(\infty)$, определяемое формулой

$$(\pi_T(g)f)(\delta) = \left[\frac{d\mu(\tau_g \delta)}{d\mu(\delta)}\right]^{\frac{1}{2}} f(\tau_g \delta) \quad (f \in L^2(\Delta_\infty, \mu)).$$

Доказательство. Переходя от функций из $L^2(\Delta'_n, \mu'_n)$ к их преобразованиям Фурье $L^2(\hat{\Delta}'_n, \hat{\mu}'_n)$, где $\hat{\mu}'_n = \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ k > n}} \hat{\mu}_{ik}$ и $\hat{\mu}_{ik}$ имеет ту же плотность по отношению к мере Лебега на $\hat{\Delta}'_{ik} = \mathbb{C}$, что и μ_{ik}, мы перепишем действие операторов $\pi_T(x)$ $(x \in X_k)$ на $L^2(\Delta_n \times \hat{\Delta}'_n, \mu_n \times \hat{\mu}'_n)$ в виде $i \operatorname{Re} Tr(\delta_n x_n \hat{\delta}'_n)$

$$(\pi_T(x)\hat{f})(\delta_n, \hat{\delta}'_n, \delta'_{n\infty}) = e \hat{f}(\delta_n, \hat{\delta}'_n, \delta'_{n\infty}).$$

Здесь $\hat{\delta}'_n$ – произвольная матрица из n столбцов и бесконечного числа строк; Tr – след на полной матричной алгебре размера $n \times n$, $f \in L^2(\Delta_n, \mu_n) \otimes L^2(\hat{\Delta}'_n, \hat{\mu}'_n) \otimes L^2(\Delta'_{n\infty}, \mu'_{n\infty})$, где $(\Delta'_{n\infty}, \mu'_{n\infty}) = \prod_{n < i < k} (\Delta_{ik}, \mu_{ik})$. В силу закона больших чисел семейство функций $\{exp[i \operatorname{Re} Tr(\delta_n x_k \hat{\delta}'_n)]\}$ порождает $L^2(\Delta_n, \mu_n)$, а следовательно, и $L^2(\Delta_n \times \hat{\Delta}'_n, \mu_n \times \hat{\mu}'_n)$. Применяя обратное преобразование Фурье, мы получаем утверждение леммы.

Поскольку элементы $L^2(\Delta_n, \mu_n) \otimes \mathbb{C}$ при этом остаются неподвижными, то из этой леммы получаем

Следствие 1.3. Алгебра фон Неймана, порожденная операторами $\pi_1(X_n)$, содержит $L^\infty(\Delta_n, \mu_n)$.

Теорема 1.4. Сужение представления π_T на группу Z_∞ в гильбертовом пространстве $L^2(\Delta_\infty, \mu)$ неприводимо.

Доказательство. В силу следствия 1.3 неймановская алгебра, порожденная $\pi_T(X_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, совпадает с $L^\infty_{\mathbb{C}}(\Delta_\infty, \mu)$. Теперь утверждение теоремы является элементарным следствием леммы 1.1.

Представления $GL(\infty)$, индуцированные с $U(\infty)$.

Пусть $\mathfrak{A}_U$ – множество фактор-представлений группы $U(\infty)$, $T \in \mathfrak{A}_U$, H_T – гильбертово пространство, в котором действует T. Определим представление π_T группы $GL(\infty)$ формулой

$$(\pi_T(g)f)(\delta) = T(u(\delta, g)) \left[\frac{d\mu(\tau_g \delta)}{d\mu(\delta)}\right]^{1/2} f(\tau_g \delta)$$

$$(g \in GL(\infty),\ f \in L^2(H_T, \Delta_\infty, \mu)). \tag{1}$$

Лемма 2.1. Коммутант представления $\pi_T(g)$ $(g \in GL(\infty))$ совпадает с алгеброй фон Неймана, порожденной в гильбертовом пространстве $L^2(H_T, \Delta_\infty, \mu) = H_T \otimes L^2(\Delta_\infty, \mu)$ операторами $A \otimes I$, где A принадлежит коммутанту представления T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть B – ограниченный оператор для которого $B\mathcal{T}_T(g)=\mathcal{T}_T(g)B\,(g\in GL(\infty))$. Поскольку неймановская алгебра, порожденная $\mathcal{T}_T\,(Z_\infty)$, содержит $L^\infty(\Delta_\infty,\mu)$ (см.следствие 1.3) и $\mathcal{T}_T(Z_\infty)$ – неприводимо, то $B=B_T\otimes I$, где B_T – оператор, действующий в H_T. Учитывая вид операторов $\mathcal{T}_T$, получаем утверждение леммы.

Следствие 2.2. Если $T\in\mathcal{O}\!\mathcal{l}_U$ имеет тип II, III или является неприводимым, то $\mathcal{T}_T$ – также представление типа II, III или соответственно I.

Предложение 2.3. Представление $\mathcal{T}_T$ не содержит единичных подпредставлений групп $U(k,\infty)$ для любых $k<\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем наше утверждение для группы $U(\infty)$. Пусть $\xi\in H_T\otimes L^2(\Delta_\infty,\mu)$ – неподвижный вектор относительно операторов $\mathcal{T}_T(u)\;(u\in U(\infty))$. Для произвольного $\varepsilon>0$ существует n и вектор $\xi_n\in H_T\otimes L^2(\Delta_n,\mu_n)\otimes L^2(\Delta_n',\mu_n')$ такие, что

$$\|\xi-\xi_n\otimes I_{n\infty}(\delta_{n\infty}')\|<\varepsilon, \tag{2}$$

где $I_{n\infty}(\delta_{n\infty}')$ – функция, тождественно равная единице на $(\Delta_{n\infty}',\mu_{n\infty}')$. Из вида операторов $\mathcal{T}_T$ (см. [1]) получаем

$$\|\mathcal{T}_T(u_n)(\xi_n\otimes I_{n\infty}(\delta_{n\infty}'))-\xi_n\otimes I_{n\infty}(\delta_{n\infty}')\|^2=$$

$$\int_{\Delta_\infty}\left\|\left[\frac{d\mu_{n\infty}'(\tau_{u_n}\delta_{n\infty}')}{d\mu_{n\infty}'(\delta_{n\infty}')}\right]^{1/2}T(u(\delta,u_n))\,\xi_n(\delta_n,\delta_n')-\right.$$

$$\left.-\xi_n(\delta_n,\delta_n')\right\|_{H_T}^2 d\mu(\delta)\geqslant\|\xi_n\|^2$$

$$\int_{\Delta_\infty}\left|\left[\frac{d\mu_{n\infty}'(\tau_{u_n}\delta_{n\infty}')}{d\mu_{n\infty}'(\delta_{n\infty}')}\right]^{1/2}-1\right|^2 d\mu=\gamma(u_n,\xi_n)$$

$$(u_n\in U(n,\infty)).$$

Далее заметим, что существует независящее от n $c>0$, для которого всегда найдется u_n со свойством $\gamma(u_n,\xi_n)>c$. Теперь из произвольности ε, соотношения $\mathcal{T}_T(u_n)\xi=\xi$ и из неравенства (2) получаем противоречие. Поскольку n в приведенном доказательстве можно брать как угодно большим, то предложение 2.3 доказано.

Учитывая описание представлений $U_0(H)$ (см. [3]) и только что доказанное утверждение, получаем

Следствие 2.4. Представления $\mathcal{T}_T\;(T\in\mathcal{O}\!\mathcal{l}_U)$ не расширяются на группу $U_0(H)$.

Действительно, в силу результатов работы [3], любое представление $U_0(H)$ содержит векторы, неподвижные по отношению к группе $U(k,\infty)$, где k – достаточно большое.

1. Гельфанд И.М., Наймарк М.А., Унитарные представления классических групп. – Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1950, 36, с.1-407.
2. Voiculescu D., Representations factorielles de type II de $U(\infty)$.- J. Math. Pures Appl., ser. 9, 1976, 55, N 1, p. 1-20.
3. Кириллов А.А., Представления бесконечномерной унитарной группы. – Докл. АН СССР, 1973, 212, вып. 2, с. 288-290.

УДК 519.4

С.Л.Гефтер, В.Я.Голодец

ДЕЙСТВИЯ Γ-ГРУПП И ФАКТОРЫ ТИПА II_1 СО СВОЙСТВОМ Γ

<u>Введение.</u> Пусть G – локально компактная группа. G обладает свойством Γ ([1]), если ее одномерное тривиальное представление является изолированной точкой в пространстве классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений. Дискретная группа обладает Γ-свойством тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ и конечное множество $K \subset G$ такие, что для любого унитарного представления π, если существует вектор $\eta \in \mathcal{H}_\pi$, $\|\eta\| = 1$, ε – неподвижный для K, т.е. $\|\pi(g)\eta - \eta\| < \varepsilon$, $g \in K$, то найдется вектор $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, $\xi \neq 0$, неподвижный для G: $\pi(g)\xi = \xi$, $g \in G$ [2].

Используя аналог этого условия, в работе [3] автор ввел понятие свойства Γ для фактора типа II_1 (определение дано в п. 1). Легко видеть, что фактор, построенный по регулярному представлению Γ-группы, у которой нетривиальные классы сопряженности бесконечны (ΓICC-группы) обладает свойством Γ. С другой стороны, стандартным способом построения II_1-факторов является также скрещенное произведение. Возникает вопрос о том, можно ли строить Γ-факторы как скрещенные произведения. В настоящей статье показано, что фактор со свойством Γ может быть получен как скрещенное произведение действия Γ-группы на пространстве с мерой, гиперфинитном факторе и полном факторе (см. примеры 3.1, 3.2, 3.4). Кроме того, рассмотрен вопрос о сохранении Γ-свойства при редуцировании (теорема 2.2) и при расширении с помощью Γ-группы (теорема 2.3).

Нетрудно установить (так же, как в работе [4]), что у факторов со свойством Γ и сепарабельным предуалом группа внешних автоморфизмов счетна. Оказывается, что подобным свойством обладают не только Γ-факторы (пример 4.1). Аналогично строится эргодическое, сохраняющее конечную инвариантную меру действие дискретной группы

G на пространстве Лебега S, не обладающее Γ-свойством, но имеющее счетную группу когомологий $H^1(S\times G, \mathbb{T})$ (предложение 4.2). Этот пример интересен в связи с результатами Р. Зиммера [6] и К.Шмидта [7] о когомологиях действий со свойством Γ.

1. Пусть N – фактор типа II_1 с точным нормальным конечным следом τ, $\bar{N}$ – алгебра, сопряженная к N, т.е. операция $(\lambda,x)\to\lambda x$ заменяется на $(\lambda,x)\to\bar{\lambda}x$, а остальные сохраняются. Гильбертовым N-бимодулем называется гильбертово пространство $\mathcal{H}$, в котором действуют нормальные представления ρ и ρ^* алгебр N и $\bar{N}$, причем образы этих представлений коммутируют.

Фактор N обладает свойством Γ ([3]), если существуют элементы $x_1,\dots,x_n\in N$ такие, что для любого N-бимодуля $(\mathcal{H},\rho,\rho^*)$, из существования вектора $\eta\in\mathcal{H}$ такого, что $\|\eta\|=1$, $\|\rho(x_k)\eta-\rho^*(x_k^*)\eta\|<1$, $k=\overline{1,n}$, следует существование вектора $\xi\in\mathcal{H}$, $\xi\neq0$: $\rho(x)\xi=\rho^*(x^*)\xi$, $x\in N$ (см. также эквивалентное определение в работе [5], § 1).

Докажем необходимое и достаточное условие Γ-свойства [8; теорема 6.2], которое является аналогом соответствующего критерия для групп.

Тривиальным N-бимодулем называется пространство $L^2(N,\tau)$ и представления ρ_0, ρ_0^*: $\rho_0(x)=x$, $\rho_0^*(x)=JxJ$, $x\in N$, J – унитарная инволюция, отвечающая τ. Будем говорить, что N-бимодуль $(\mathcal{H},\rho,\rho^*)$ слабо содержит тривиальный N-бимодуль, если существуют вектора $\xi_{k\alpha}\in\mathcal{H}$ такие, что $\lim\limits_\alpha\sum\limits_{k=1}^{n(\alpha)}(\rho(x)\rho^*(x)\xi_{k\alpha}\mid\xi_{k\alpha})=\tau(x,x^*)$, $x\in N$. N-бимодуль сильно содержит тривиальный бимодуль, если найдется вектор $\xi\in\mathcal{H}$, $\xi\neq0$ и такой, что $\rho(x)\xi=\rho^*(x^*)\xi$, $x\in N$. В этом случае подпространство $\mathcal{H}_0$, порожденное векторами $\rho(x)\xi$, $x\in N$, с представлениями $\rho_0=\rho|_{\mathcal{H}_0}$, $\rho_0^*=\rho^*|_{\mathcal{H}_0}$ будет тривиальным N-бимодулем (с точностью до унитарной эквивалентности), а $\tau(x)=(\rho(x)\xi\mid\xi)$, $x\in N$ (см. [5], § 1).

Лемма 1.1. Фактор N типа II_1 обладает свойством Γ тогда и только тогда, когда любой N-бимодуль, слабо содержащий тривиальный, содержит его сильно.

Замечание 1.2. Мы будем рассматривать N-бимодули $(\mathcal{H},\rho,\rho^*)$, для которых найдутся вектора $\xi_\alpha\in\mathcal{H}$ такие, что $\lim\limits_\alpha(\rho(x)\rho^*(x)\xi_\alpha\mid\xi_\alpha)=\tau(xx^*)$, $x\in N$. Общий случай получается (как и для групп) с помощью перехода к прямой сумме.

Доказательство леммы 1.1. Пусть N обладает свойством Γ, а для N-бимодуля $(\mathcal{H},\rho,\rho^*)$ и направленности векторов $\xi_\alpha\in\mathcal{H}$ выполняется соотношение $\lim\limits_\alpha(\rho(x)\rho^*(x)\xi_\alpha\mid\xi_\alpha)=\tau(xx^*)$, $x\in N$. Если $u\in U(N)$, то $\lim\limits_\alpha(\rho(u)\rho^*(u)\xi_\alpha\mid\xi_\alpha)=1$, или $\lim\limits_\alpha\|\rho(u)\xi_\alpha-\rho^*(u^*)\xi_\alpha\|=0$, поскольку $\|\rho(u)\xi_\alpha-\rho^*(u^*)\xi_\alpha\|^2=2\|\xi_\alpha\|^2-2\mathrm{Re}(\rho(u)\rho^*(u)\xi_\alpha\mid\xi_\alpha)$ и

$\lim\limits_{\alpha}\|\xi_\alpha\| = 1$. Следовательно, $\lim\limits_{\alpha}\|\rho(x)\xi_\alpha - \rho^*(x^*)\xi_\alpha\| = 0$, $x \in N$. В силу Γ-свойства существует $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \neq 0$, $\rho(x)\xi = \rho^*(x^*)\xi$, $x \in N$, т.е. N-бимодуль $(\mathcal{H}, \rho, \rho^*)$ сильно содержит тривиальный N-бимодуль. Докажем утверждение в обратную сторону. Предположим, что N не обладает свойством Γ. Пусть $\Lambda = (0,1) \times K$, где K – множество конечных наборов элементов из N. Тогда для любого $\lambda = (\varepsilon, k) \in \Lambda$ найдется N-бимодуль $(\mathcal{H}_\lambda, \rho_\lambda, \rho_\lambda^*)$ и $\eta_\lambda \in \mathcal{H}_\lambda$ с такими свойствами: $\|\eta_\lambda\| = 1$, $\|\rho_\lambda(x)\eta_\lambda - \rho_\lambda^*(x^*)\eta_\lambda\| < \varepsilon$ $x \in k$, но $(\mathcal{H}_\lambda, \rho_\lambda, \rho_\lambda^*)$ не содержит тривиальный N-бимодуль.

Рассмотрим N-бимодуль $(\mathcal{H}, \rho, \rho^*) = \oplus(\mathcal{H}_\lambda, \rho_\lambda, \rho_\lambda^*)$ и вектора $\xi(\lambda) = \{\xi(\lambda)_{\lambda'}\} \in \mathcal{H}$: $\xi(\lambda)_{\lambda'} = \begin{cases} \eta_\lambda, & \lambda = \lambda' \\ 0, & \lambda \neq \lambda' \end{cases}$. Множество Λ является направленным $(\varepsilon_1, k_1) \succ (\varepsilon_2, k_2) \Longleftrightarrow \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, $k_1 \supset k_2$, и семейство $\{\xi(\lambda)\}$ есть направленность в $\mathcal{H}$. По построению направленности $\{\xi(\lambda)\}$ имеем

$$\lim_{\lambda}\|\rho(x)\xi(\lambda) - \rho^*(x^*)\xi(\lambda)\| = 0, \quad x \in N. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь множество состояний $\{\varphi_\lambda\}$: $\varphi_\lambda(x) = (\rho(x)\xi(\lambda) \mid \xi(\lambda))$. В силу $\sigma(M^*, M)$-компактности единичного шара в M^*, у $\{\varphi_\lambda\}$ существует сходящаяся поднаправленность $\varphi_\alpha \to \varphi$, т.е. $\varphi(x) = \lim\limits_{\alpha}(\rho(x)\xi(\alpha))$, $x \in N$. Из равенства (1) получаем $\varphi(x^* x) = \lim\limits_{\alpha}(\rho(x^*)\rho(x)\xi(\alpha) \mid \xi(\alpha)) = \lim\limits_{\alpha}(\rho(x^*)\rho^*(x^*)\xi(\alpha) \mid \xi(\alpha)) = \lim\limits_{\alpha}(\rho(x^*)\xi(\alpha) \mid \rho^*(x)\xi(\alpha)) = \lim\limits_{\alpha}(\rho(x^*)\xi(\alpha) \mid \rho(x^*)\xi(\alpha)) = \lim\limits_{\alpha}(\rho(x x^*)\xi(\alpha) \mid \xi(\alpha)) = \varphi(x x^*)$, $x \in N$.
Но φ – состояние, поэтому $\varphi(x) = \tau(x)$ и $\lim\limits_{\alpha}(\rho(x)\rho^*(x)\xi(\alpha) \mid \xi(\alpha)) = \lim\limits_{\alpha}(\rho(x)\rho(x^*)\xi(\alpha) \mid \xi(\alpha)) = \tau(x x^*)$, $x \in N$. Следовательно, N-бимодуль $(\mathcal{H}, \rho, \rho^*)$ слабо, а значит и сильно содержит тривиальный N-бимодуль. Мы приходим к заключению, что найдется $\lambda_0 \in \Lambda$, для которого N-бимодуль $(\mathcal{H}_{\lambda_0}, \rho_{\lambda_0}, \rho^*_{\lambda_0})$ сильно содержит тривиальный. Это заключение противоречит свойствам бимодулей $(\mathcal{H}_\lambda, \rho_\lambda, \rho_\lambda^*)$.

Лемма доказана.

Очевидным примером фактора со свойством Γ является II_1-фактор, порожденный унитарным представлением дискретной Γ-группы. Как показано в [2,5], для проективного регулярного представления верно и обратное утверждение. Аналогично можно доказать и более общий факт

<u>Теорема 1.3.</u> Пусть M – конечная алгебра Неймана; α – действие ICC-группы G на M, эргодическое на центре $Z(M)$ алгебры M и сохраняющее точный нормальный вероятностный след, $\sigma \in Z^2_\alpha(G, U(Z(M)))$. Если II_1-фактор $W^*_\sigma(M, \alpha, G)$, являющийся скрещенным произведением M на G с 2-коциклом σ обладает свойством Γ, то и группа G обладает свойством Γ.

2. Перейдем к рассмотрению вопроса о сохранении Γ-свойства при редуцировании и расширении с помощью Γ-группы.

Лемма 2.1. Пусть N, N_1, N_2 – факторы типа II_1 и $N = N_1 \otimes N_2$. Тогда

(а) N – Γ -фактор $\Longleftrightarrow$ и N_1 – Γ -факторы;

(в) N – Γ -фактор $\Longleftrightarrow$ $N \otimes M_n$ – Γ -фактор, где M_n – n-мерная матричная алгебра.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что из Γ-свойства N следует Γ-свойство N_1. Пусть N_1-бимодуль $(\mathcal{H}_1, \rho_1, \rho_1^*)$ слабо содержит тривиальный. Тогда N-бимодуль $(\mathcal{H}, \rho, \rho^*)$, где $\mathcal{H} = L^2(N_2, \tau)$, $\rho_1(x_1 \otimes x_2) = \rho_1(x_1) \otimes x_2$, $\rho^*(x_1 \otimes x_2) = \rho_1^*(x_1) \otimes Jx_2J$ также слабо содержит тривиальный. Применяя 1.1, находим $\eta \in \mathcal{H}$, $\eta \neq 0$, $\rho(x)\eta = \rho^*(x^*)\eta$, $x \in N$. Выберем в $L^2(N_2, \tau)$ ортонормированный базис $\{\delta_n\}$. Тогда $\eta = \sum \xi_n \otimes \delta_n$, $\xi_n \in \mathcal{H}_1$ и для $x = x_1 \otimes 1$, $x \in N$ будем иметь $\sum \rho_1(x_1)\xi_n \otimes \delta_n = \sum \rho_1^*(x_1^*)\xi_n \otimes \delta_n$. Отсюда $\rho_1(x_1)\xi_n = \rho_1^*(x_1^*)\xi_n$, $x_1 \in N_1$. Но $\eta \neq 0$, а значит существует $n_0 : \xi_{n_0} \neq 0$. В силу 1.1 N_1 обладает свойством Γ. Остальные утверждения леммы очевидны.

Теорема 2.2. Пусть N – II_1 -фактор, N_λ – редуцированный фактор, $\lambda \in (0, 1)$. Фактор N обладает свойством Γ тогда и только тогда, когда N_λ обладает свойством Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p – проектор из N и $\tau(p) = \lambda$. Используя рассуждение из доказательства теоремы 2 [10], находим $t \in (0, 1)$ такое, что $N_\lambda \otimes N_t \otimes M_{n+1} \approx N \otimes N$. Теперь утверждение теоремы следует из леммы 2.1.

В качестве следствия 2.2 и работы [4] получаем

Предложение 2.3. Существуют неизоморфные II_1-факторы со свойством Γ.

Теорема 2.4. Пусть N – II_1 фактор со свойством Γ, α – действие дискретной Γ-группы G на N, $\sigma \in Z^2(G, \mathbb{T})$. Предположим, что скрещенное произведение $W_\sigma^*(N, \alpha, G) = M$ – фактор типа II_1. Тогда M обладает свойством Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фактор M порождается операторами $\pi(x)$ и $\lambda_\sigma(g)$, $(x \in N,\ g \in G)$, действие которых в пространстве $l^2(G; \mathcal{H}_0)$ задается соотношениями $(\pi(x)\xi)(h) = \alpha_{h^{-1}}(x)\xi(h)$, $(\lambda_\sigma(g)\xi)(h) = \sigma(h^{-1}, g)\xi(g^{-1}h)$, где $\xi \in l^2(G; \mathcal{H}_0)$ и фактор N действует в пространстве $\mathcal{H}_0$. Пусть $\varepsilon_1 > 0$, $y_1, \dots, y_m \in N$, $k > 0$ определяются Γ-свойством N (см.1 [5]), а $\varepsilon_2 > 0$, $g_1, \dots, g_n \in G$ – Γ -свойством G. Положим $\{z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_{m+n}\} = \{\pi(y_1), \dots, \pi(y_m), \lambda_\sigma(g_1), \dots, \lambda_\sigma(g_n)\}$, $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2 / 2k + 1\}$. Рассмотрим теперь M-бимодуль $(\mathcal{H}, \rho, \rho^*)$ такой, что для $\xi \in \mathcal{H}$: $\|\xi\| = 1$,

$$\|\rho(z_i)\xi - \rho^*(z_i^*)\xi\| < \varepsilon, \qquad (2)$$

и введем подпространство $\mathcal{H}_1 = \{\eta \in \mathcal{H} : \rho(\pi(x))\eta = \rho^*(\pi(x^*))\eta,\ x \in N\}$. Фактор N обладает свойством Γ, поэтому $\mathcal{H}_1 \neq \{0\}$. Кроме того, $\mathcal{H}_1$

инвариантно для представления $u(g)=\rho(\lambda_G(g))\,\rho^*(\lambda_G(g))$ группы G. В силу [5] существует $\eta\in\mathcal{H}_1:\|\xi-\eta\|<k\varepsilon$. Тогда из выражения (2) получаем $\|u(g_i)\eta-\eta\|<2k\varepsilon+\varepsilon\leq\varepsilon_2$, $i=\overline{1,n}$, а следовательно, найдется $\zeta\in\mathcal{H}_1$, для которого $u(g)\zeta=\zeta\neq 0$, $g\in G$. Отсюда $\rho(x)\zeta=\rho^*(x^*)\zeta$, $x\in M$. Теорема доказана.

3. В этом пункте мы построим примеры действий группы $SL(3,\mathbb{Z})$ на пространстве Лебега (пример 3.1), гиперфинитном II_1-факторе (пример 3.2) и полном II_1-факторе без Γ-свойства (пример 3.4), таких, что скрещенные произведения будут T-факторами.

Пример 3.1. Группа $SL(3,\mathbb{Z})$ естественно действует на $\mathbb{Z}^3$. Возникает действие $SL(3,\mathbb{Z})$ на $\mathbb{T}^3=\hat{\mathbb{Z}}^3$ и на алгебре $A=L^\infty(\mathbb{T}^3,\nu)$, где ν – мера Хаара на $\mathbb{T}^3$. Легко показать (используя двойственность $\mathbb{Z}^3$ и $\mathbb{T}^3$), что скрещенное произведение $N=W^*(A,\alpha,SL(3,\mathbb{Z}))$ изоморфно групповому фактору $R(SL(3,\mathbb{Z})\circledast\mathbb{Z}^3)$ полупрямого произведения $\mathbb{Z}^3$ на $SL(3,\mathbb{Z})$. Но $SL(3,\mathbb{Z})\circledast\mathbb{Z}^3$ T-группа [9, 4.4], а значит фактор N обладает свойством T.

Пример 3.2. Пусть $\gamma\in\mathbb{T}$ и $\gamma^n\neq 1$, $n\in N$. Зададим эргодическое действие $\mathbb{Z}^3$ на $\mathbb{T}^3$: $\alpha_n(z_1,z_2,z_3)=(\gamma^{n_1}z_1,\gamma^{n_2}z_2,\gamma^{n_3}z_3)$, $n\in\mathbb{Z}^3$, $z\in\mathbb{T}^3$.

Рассмотрим гиперфинитный II_1-фактор $R=W^*(A,\alpha,\mathbb{Z}^3)$, где $A=L^\infty(\mathbb{T}^3,\nu)$. На R внешними автоморфизмами действует группа $SL(3,\mathbb{Z})$: $\beta_g(\lambda_n)=\lambda_{gn}$, $\beta_g(\pi(x))=\pi(\theta_g(x))$, $g\in SL(3,\mathbb{Z})$. Здесь θ – естественное действие $SL(3,\mathbb{Z})$ на A, λ_n и $\pi(x)$ – операторы, порождающие R, $n\in\mathbb{Z}^3$, $x\in A$.

<u>Предложение 3.3.</u> Скрещенное произведение $W^*(R,\beta,SL(3,\mathbb{Z}))=N$ обладает свойством T.

Доказательство. Рассмотрим действие группы $\Gamma=SL(3,\mathbb{Z})\circledast\mathbb{Z}^3$ на $\mathbb{T}^3$: $\omega_{(n,g)}=\alpha_n\theta_g$, $n\in\mathbb{Z}^3$, $g\in G=SL(3,\mathbb{Z})$. Очевидно, что $N\cong W^*(A,\omega,\Gamma)$ и N порождается операторами $\lambda_{(n,g)}=\lambda_n\lambda_g$ и $\pi(\hat{m})$, где $g\in G=SL(3,\mathbb{Z})$, $m,n\in\mathbb{Z}^3$, а $\hat{m}$ – характер $\mathbb{T}^3$. Пусть N-бимодуль $(\mathcal{H},\rho,\rho^*)$ слабо содержит тривиальный. Введем в рассмотрение подпространства в $\mathcal{H}$ $\mathcal{H}_0=\{\eta\in\mathcal{H}:\rho(\lambda_{(n,g)})\rho^*(\lambda_{(n,g)})\eta=\eta,(n,g)\in\Gamma\}$, $\mathcal{H}_1$ – подпространство, порожденное векторами $\rho(\pi(\hat{m}))\rho^*(\pi(\hat{m}))\eta$, где $\eta\in\mathcal{H}_0$, $m\in\mathbb{Z}^3$. Пространство $\mathcal{H}_0\neq\{0\}$, поскольку $\Gamma=SL(3,\mathbb{Z})\circledast\mathbb{Z}^3$ обладает свойством T [9, 4.4]. Ясно, что $\mathcal{H}_1$ инвариантно для представления $\rho(\lambda_g)\rho^*(\lambda_g)$, $g\in G$. Кроме того, $\alpha_n(\hat{m})=z(n,m)\hat{m}$, $z(n,m)\in\mathbb{T}$, $n,m\in\mathbb{Z}^3$. Отсюда для $\eta\in\mathcal{H}_0$ получаем $\rho(\lambda_n)\rho^*(\lambda_n)\rho(\pi(\hat{m}))\rho^*(\pi(\hat{m}))\eta=$
$=\rho(\pi(\alpha_n(\hat{m})))\rho^*(\pi(\alpha_n(\hat{m})))\eta=z(n,m)\overline{z(n,m)}\rho(\pi(\hat{m}))\rho^*(\pi(\hat{m}))\eta=$
$=\rho(\pi(\hat{m}))\rho^*(\pi(\hat{m}))\eta$, $n,m\in\mathbb{Z}^3$.
Следовательно, операторы $\rho(\lambda_n)\rho^*(\lambda_n)$ оставляют все вектора из $\mathcal{H}_1$ неподвижными. Рассмотрим теперь группу $V=\{z\pi(\hat{m})\lambda_{(n,g)}:z\in\mathbb{T},m\in\mathbb{Z}^3,(n,g)\in\Gamma\}$ и ее унитарное представление $\sigma(v)=\rho(\pi(\hat{m}))\rho^*(\pi(\hat{m}))\rho(\lambda_{(n,g)})\rho^*(\lambda_{(n,g)})$,

$v=z(\pi(\hat m)\lambda_{(n,g)})$. Представление σ слабо содержит тривиальное представление, а подпространство $\mathcal{H}_1$ инвариантно для σ. Но сужение σ на $\mathcal{H}_1^{\perp}$ не может слабо содержать тривиальное представление V, поскольку $\Gamma\subset V$ и Γ обладает свойством T, а $\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H}_1$. Таким образом, сужение σ на $\mathcal{H}_1$ слабо содержит тривиальное представление. Далее, операторы $\rho(\pi(\hat m))\rho^*(\pi(\hat m))\rho(\lambda_g)\rho^*(\lambda_g)$ задают также представление полупрямого произведения $\mathbb{Z}^3$ на $SL(3,\mathbb{Z})$, если действие определено следующим образом: $g(n)=g'^{-1}n$, $g\in SL(3,\mathbb{Z})$, $n\in\mathbb{Z}^3$, g' – транспонированная матрица. Такое полупрямое произведение обладает свойством T, поэтому существует $\xi\in\mathcal{H}_1$, $\xi\neq 0$ и $\rho(\pi(\hat m))\rho^*(\pi(\hat m))\rho(\lambda_g)\rho^*(\lambda_g)\xi=\xi$, $g\in G$, $m\in\mathbb{Z}^3$. Поскольку операторы $\rho(\lambda_n)\rho^*(\lambda_n)$ тривиальны в $\mathcal{H}_1$, имеем $\rho(\pi(\hat m)\lambda_{(n,g)})\xi=\rho^*((\pi(\hat m)\lambda_{(n,g)})^*)\xi$, $m\in\mathbb{Z}^3$, $(n,g)\in\Gamma$. Отсюда $\rho(a)\xi=\rho^*(a^*)\xi$ для всех $a\in N$, т.е. N-бимодуль $(\mathcal{H},\rho,\rho^*)$ сильно содержит тривиальный. В силу 1.1. фактор N обладает свойством T.

Пример 3.4. Рассмотрим диагональное действие $SL(5,\mathbb{Z})$ на $\mathbb{Z}^5\oplus\mathbb{Z}^5\oplus\mathbb{Z}^5\oplus\mathbb{Z}^5$ и пусть $\Gamma=SL(5,\mathbb{Z})\circledS(\mathbb{Z}^5\oplus\mathbb{Z}^5\oplus\mathbb{Z}^5\oplus\mathbb{Z}^5)$ – полупрямое произведение. Γ-ICC – группа, и так же, как и в теореме 4.3 [9] доказывается, что Γ имеет свойство T. Диагональное действие на $\mathbb{Z}^{20}$ задается матрицами $g\otimes 1$, $g\in SL(5,\mathbb{Z})$. Для $h\in SL(4,\mathbb{Z})$, $g\otimes 1$ и $1\otimes h$ коммутируют, поэтому действие $SL(4,\mathbb{Z})$ на $\mathbb{Z}^{20}$ поднимается до действия внешними автоморфизмами на Γ, а значит и на $R(\Gamma)$. В качестве подгруппы, образованной матрицами $\begin{pmatrix}1 & 0\ 0\ 0\\ \vdots & \boxed{}\end{pmatrix}$, в $SL(4,\mathbb{Z})$ вкладывается группа $H=SL(3,\mathbb{Z})\circledS\mathbb{Z}^3$. Положим $M=W^*(R(\Gamma),\alpha,\mathbb{Z}^3)$. M – полный II_1-фактор без Т-свойства, изоморфный $R(\mathbb{Z}^3\circledS\Gamma)$. Пусть α – действие H на Γ. Возникает внешнее действие β группы $SL(3,\mathbb{Z})$ на факторе M: $\beta_g(\lambda_{(\gamma,n)})=\lambda_{(\alpha_g(\gamma),g(n))}$, $g\in SL(3,\mathbb{Z})$, $(\gamma,n)\in\mathbb{Z}^3\circledS\Gamma$. Если $N=W^*(M,\beta,SL(3,\mathbb{Z}))$, то N изоморфен $R(H\circledS\Gamma)$ и обладает свойством T, поскольку H и Γ – T-группы.

4. Пусть M – алгебра Неймана. На группе $Aut\,M$ автоморфизмов M введем топологию с помощью базы окрестностей единицы

$$\mathcal{U}_{\varphi,\varepsilon}=\left\{\theta\in Aut\,M:\|\varphi_0\theta-\varphi\|<\varepsilon\right\},\quad \varphi\in M_*,\quad \varepsilon>0. \tag{3}$$

Если M имеет сепарабельный предцуал M_*, то $Aut\,M$ с топологией (3) является польской группой (т.е. топологической группой, пространство которой – полное сепарабельное метрическое пространство). Через $Out\,M$ будем обозначать группу $Aut M/Int M$ внешних автоморфизмов M.

Как известно, подгруппа внутренних автоморфизмов $Int\,N$ фактора N типа II_1 со свойством T открыта в $Aut\,N$ [4].

Приведем пример II_1-фактора без T-свойства, но с открытой подгруппой внутренних автоморфизмов и счетной группой внешних автоморфизмов.

Пример 4.1. Рассмотрим диагональное действие $SL(3,\mathbb{Z})$ на $\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}^3$. Положим $\Gamma = SL(3,\mathbb{Z}) \circledS (\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}^3)$. Как и в примере 3.4, Γ - $TICC$ -группа и на Γ действует внешними автоморфизмами группа $H = SL(2,\mathbb{Z})$. Пусть $M = W^*(R(\Gamma), \alpha, H)$. Поскольку $H/[H,H]$ конечна (см. 1/[1]), то в силу 4 [10] $Int\,M$ открыта и $Out\,M$ дискретна и счетна. С другой стороны, M изоморфен групповому фактору $R(H \circledS \Gamma)$. Но $H = SL(2,\mathbb{Z})$, а значит $H \circledS \Gamma$ не обладает свойством T. Следовательно, и фактор M не обладает свойством T (см. 2 [5]).

Используем пример 4.1 для построения слабо перемешивающего действия группы G без T-свойства на пространстве S со счетной группой когомологий $H^1(S \times G, \mathbb{T})$.

Пусть (S, μ) - пространство Лебега, на котором действует дискретная группа G. Мы будем рассматривать соответствующее действие α на алгебре $A = L^\infty(S,\mu)$. Напомним, что I-коциклом со значениями в группе $\mathbb{T}$ называется функция $c: G \to U(A)$ такая, что $c_{gh} = c_g \alpha_g(c_h)$, $c_{g^{-1}} = \alpha_{g^{-1}}(c_g^*)$, $g, h \in G$. Множество 1-коциклов образует группу $Z^1(S \times G, \mathbb{T})$. Тривиальные 1-коциклы (1-кограницы), т.е. 1-коциклы вида $c_g = b\alpha_g(b^*)$, $b \in U(A)$ образуют подгруппу $B^1(S \times G, \mathbb{T})$. Факторгруппа $H^1(S \times G, \mathbb{T}) = Z^1(S \times G, \mathbb{T}) / B^1(S \times G\mathbb{T})$ называется одномерной группой когомологий действия G на (S,μ) с коэффициентами в $\mathbb{T}$. Для действия со свойством T (см. 2.I [6] и 6.1 [8]) Р. Зиммер в 2.11 [6] и К. Шмидт в 3.4 [7] доказали, что $H^1(S \times G, \mathbb{T})$ счетна (К. Шмидт даже доказал, что счетность $H^1(S \times G, \mathbb{T})$ для всех эргодических G -пространств (S,μ) с конечной инвариантной мерой эквивалентна T-свойству группы G).

Пусть $M = W^*(A, \alpha, G)$ - скрещенное произведение. Каждый $c \in Z^1(S \times G, \mathbb{T})$ порождает автоморфизм θ_c алгебры M: $\theta_c(\pi(x)) = \pi(x)$, $\theta_c(\lambda_g) = \pi(c_g)\lambda_g$, $x \in A$, $g \in G$. При этом, если $c_g = v\alpha_g(v^*)$, $v \in U(A)$, то $\theta_c = Ad\,\pi(v)$. В случае свободного действия верно и обратное: любой автоморфизм, оставляющий на месте элементы из $\pi(A)$, порождается коциклом. Коцикл будет тривиальным тогда и только тогда, когда автоморфизм внутренний. Таким образом, для свободного действия мы имеем вложение $H^1(S \times G, \mathbb{T})$ в $Out\,W^*(L^\infty(S,\mu), \alpha, G)$.

Рассмотрим теперь группу $G = SL(2,\mathbb{Z}) \times SL(3,\mathbb{Z})$ и пространство $S = \mathbb{T}^6$. Действие α зададим, как дуальное к действию G на $\mathbb{Z}^6$: $(g,h)(m) = (g \oplus h)m$, $(g,h) \in G$, $m \in \mathbb{Z}^6$.

Предложение 4.2. Действие α не обладает свойством T, но группа $H^1(S \times G, \mathbb{T})$ счетна.

Доказательство. Очевидно, что действие свободное и слабо перемешивающее. Группа G не обладает свойством T и в силу 2.4 [6] действие α не имеет T-свойства. Далее, нетрудно показать, что фактор $M=W^*(L^\infty(S,\mu),\ \alpha,\ G)$ изоморфен групповому фактору $R(H \circledS \Gamma)$, где $\Gamma = SL(3,\ \mathbb{Z}) \circledS (\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}^3)$, $H=SL(2,\mathbb{Z})$, и, следовательно, $Out\,M$ счетна (см. пример 4.1). Группа когомологий $H^1(S\times G,\ \mathbb{T})$ вкладывается в $Out\ M$ и также счетна.

1. Каждан Д.А. О связи дуального пространства группы со строением ее замкнутых подгрупп. - Функц. анализ и его приложение, 1967, вып. I, № 1, с. 71-74.
2. Delaroche C., Kirillov A.A. Sur les relations entre l'espase dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermes. - Séminaire Bourbaki, Exposé 343, 1968. Lecture Notes Math. 180. Berlin-Heidelberg-New York. Springer, 1972, p. 22.
3. Connes A. Classification des facteurs. - Proc. of Symposia in Pure Math., 1982, 38, part 2, p. 43-109.
4. Connes A. A factor of type II with countable fundamental group.- J. Operator Theory, 1980, 4, N 1, p. 151-153.
5. Connes A., Jones V. Property T for von Neumann Algebras, preprint, 1983. Univ. of Pennsylvania. - 14 p.
6. Zimmer R. On the cohomology of ergodic actions of semisimple Lie groups and discrete subgroups. - Amer. J. Math., 1981, 103, N 5, p. 937-951.
7. Schmidt K. Amenability, Kazhdan's property T, strong ergodicity and invariant means for ergodic group-actions. - Ergod. Th.and Dynam. Syst., 1981, 1, N 2, p. 223-236.
8. Moore C.C. Ergodic theory and von Neumann algebras. - Proc. of Symposia in Pure Math., 1982, 38, part 2, p. 179-226.
9. Wang P.S. On isolated points in the dual spaces of locally compact groups. - Math. Ann., 1975, 218, p. 19-34.
10. Enomoto M., Watatani Y. Some remarks of II_1 - factors whose inner automorphism groups are open. - Math. Jap., 1981, 26, N 3, p. 345-347.
11. Hua L.K., Reiner I. Automorphisms of the unimodular group. - Trans. Amer. Math. Soc., 1951, 71, N 3, p. 331-348.

УДК 519.4

С.И.Безуглый

ВНЕШНЯЯ СОПРЯЖЕННОСТЬ ДЕЙСТВИЙ СЧЕТНЫХ АМЕНАБЕЛЬНЫХ ГРУПП

Пусть T - эргодический автоморфизм пространства с мерой (пространства Лебега) $(X,\mathcal{B},\mu)$, $U_i(G)\ (i=1,2)$ - действия счетной аменабельной группы G автоморфизмами на $(X,\mathcal{B},\mu)$ такие, что $U_i(G)\subset N[T]$, где $N[T]$ - нормализатор полной группы $[T]$.* Действия $U_1(G)$ и $U_2(G)$ называются внешне сопряженными относительно $[T]$, если существует автоморфизм $R\in N[T]$ такой, что для любого $g\in G$

$$U_1(g)=R^{-1}U_2(g)\,t\,R, \text{ где } t=t(g)\in[T].$$

* Определения всех используемых в настоящей статье понятий можно найти в работах [1,2].

Нахождению полной системы инвариантов внешнего сопряжения был посвящен ряд работ по эргодической теории. Вначале А.Кон и В.Кригер [3] нашли необходимые и достаточные условия внешнего сопряжения двух автоморфизмов из $N[\Gamma]$, когда Γ сохраняет меру. В работе [4] подобная задача решена для случая, когда Γ меру не сохраняет. В работе [1] были исследованы уже действия счетных аменабельных групп и найдена полная система инвариантов внешнего сопряжения таких действий из $N[\Gamma]$ в предположении, что Γ сохраняет меру.

В настоящей заметке приведены необходимые и достаточные условия внешнего сопряжения действий счетной аменабельной группы, лежащих в нормализаторе автоморфизма Γ типа $\mathrm{III}_\lambda (0<\lambda<1)$ или III_1.

Коциклы и массивы. Из результатов статьи [5] вытекает.

Теорема 2.1. Пусть Γ - эргодический автоморфизм пространства с мерой $(X,\mathcal{B},\mu)$, $U(G)$ - действие аменабельной счетной группы G на $(X,\mathcal{B},\mu)$ такое, что $U(g)\in N[\Gamma]$ для любого $g\in G$. Тогда группа автоморфизмов, построенная по $U(G)$ и $[\Gamma]$ будет аппроксимируемой, т.е. слабо эквивалентной группе, порожденной одним автоморфизмом.

Пусть Γ - свободная аппроксимируемая группа автоморфизмов $(X, \mathcal{B},\mu)$, H - счетная группа, $\alpha : X\times\Gamma\to H$ - коцикл, т.е. измеримое отображение, удовлетворяющее соотношению

$$\alpha(x, gh)=\alpha(hx, g)\alpha(x, h)$$

для любых $g, h\in\Gamma$ и п.в. $x\in X$.

Через $\Gamma(\alpha)$ обозначим группу автоморфизмов $X\times H$ (так называемое "косое произведение"), образующие которой имеют вид $\gamma(\alpha)$: : $(x,h)\to(\gamma x,\alpha(x,\gamma)h)$, $\gamma\in\Gamma$, $(x,h)\in X\times H$.

Если $\Gamma(\alpha)$ - эргодическая группа, то H обязательно аменабельная группа [6].

Пусть $\xi=(A,\mathcal{P},A(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ - Γ - массив множества A. Через $\mathcal{G}(\xi)$ обозначим конечную группу автоморфизмов, порожденную автоморфизмами $\gamma(\cdot,\cdot)$, а через $\mathcal{P}(\xi)$ - набор множеств вида $\cup_{i\in\Delta} A(i)$, $\Delta\subset\mathcal{P}$.

Будем говорить, что коцикл $\alpha : X\times\Gamma\to H$ принимает постоянные значения на элементах Γ-массива ξ, если $\alpha(x,\gamma(i,j))=const$ для п.в. $x\in A(i)$ и любых $i,j\in\mathcal{P}$.

Теорема 2.2. Пусть Γ - эргодическая свободная аппроксимируемая группа автоморфизмов $(X,\mathcal{B},\mu)$ типа III_λ $(0<\lambda<1)$ или III_1, причем коцикл Радона-Никодима группы Γ

$$r(x,\gamma)=\frac{d\mu(\gamma x)}{d\mu(x)},\qquad \gamma\in\Gamma$$

обладает свойством: $r(x,\gamma)\in\{\lambda^n : n\in\mathbb{Z}\}$ в случае III_λ и $r(x,\gamma)\in K$ в случае III_1, где K – счетная группа плотная в $\mathbb{R}_+$. Пусть G – счетная аменабельная группа и $\alpha : X\times\Gamma\to G$ коцикл такой, что $\Gamma(\alpha)$ – эргодическая группа автоморфизмов $X\times G$. Предположим также, что группа автоморфизмов

$$S=\{\gamma\in[\Gamma] : \alpha(x,\gamma)=1,\ r(x,\gamma)=1 \quad \text{для п.в. } x\in X\}$$

эргодична в $(X,\mathcal{B},\mu)$. Тогда существует последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ Γ-массивов, которая обладает следующими свойствами: ξ_{n+1} есть измельчение ξ_n, $n=1,2,\ldots$; $\Gamma x=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{G}(\xi_n)x$ для п.в. $x\in X$; σ – алгебра $\mathcal{B}(X)$ порождена $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{G}(\xi_n)$; коциклы α и r постоянны на любом элементе массива ξ_n, $n=1,2,\ldots$.

Идея доказательства теоремы состоит в следующем. Возьмем любой Γ-массив ξ, аппроксимирующий с некоторой точностью ε множество $D\in\mathcal{B}$ и траекторию группы Γ. Используя счетность множества значений коциклов α и r, построим конечное разбиение X на множества, на которых коциклы α и r принимают постоянные значения. Затем, поскольку группа S эргодична над полученным разбиением, строим Γ-массив ξ_1, элементы которого уже обладают свойством 4). Уменьшая ε, переходим к последовательности Γ-массивов, удовлетворяющей условию теоремы.

<u>Тип III_λ $(0<\lambda<1)$.</u>

Пусть $U(G)$ – действие аменабельной группы G, лежащее в $N[T]$, где T – эргодический автоморфизм пространства $(X,\mathcal{B},\mu)$ типа III_λ $(0<\lambda<1)$. Без ограничения общности можно считать, что $\mu X=\infty$ и для почти всех $x\in X$

$$\frac{d\mu(Tx)}{d\mu(x)}\in\{\lambda^n : n\in\mathbb{Z}\}.$$

Из результатов работы [4] следует, что для любого $U(g)\in N[T]$ существует автоморфизм $t\in[T]$ такой, что $U(g)t$ умножает меру μ на некоторое число. Поскольку умножение на автоморфизмы из полной группы $[T]$ не влияет на вопросы внешней сопряженности, можно считать, что для п.в. $x\in X$

$$d\mu(U(g)x)=\rho(g)\,d\mu(x),$$

причем числа $\rho(g)$ таковы, что $\rho(G)\cap\{\lambda^n : n\in\mathbb{Z}\}=\{1\}$.

Определим группу Γ, как группу автоморфизмов, порожденную $U(G)$ и $[T]$. Согласно теореме 2.1 группа Γ будет аппроксимируемой группой или типа III_λ $(0<\lambda<1)$ или III_1.

Построим коцикл $\alpha(x,\gamma)$ из $X\times\Gamma$ в G. Предположим, что $U(g)\in[T]$ для любого $g\in G$. Тогда если $\gamma x=U(g)tx$ $(t\in[T])$, то положим $\alpha(x,\gamma)=g$. Если группа $G_0=\{g\in G : U(g)\in[T]\}$ нетривиальна, то коцикл α определим следующим образом: для $\gamma x = U(g)tx$ $(t\in[T])$ положим $\alpha(x,\gamma)=\hat{g}$, где $\hat{g}\in G/G_0$ такой элемент факторгруппы, в классе которого лежит g.

Лемма 3.1. Группа Γ и коциклы α и r удовлетворяют всем условиям теоремы 2.2.

Действительно, для доказательства достаточно заметить, что $[T]=\{\gamma\in\Gamma : \alpha(x,\gamma)=1$ для п.в. $x\in X\}$.

Пусть $U_1(G)$ и $U_2(G)$ – два действия группы G, удовлетворяющие приведенным выше условиям. Построим группы Γ_i и коциклы α_i по $U_i(G)$ и $[T]$ $(i=1,2)$.

Теорема 3.2. Пусть группы Γ_1, Γ_2 и коциклы α_1, α_2 определены как и выше. Предположим, что для любого

$$\rho_1(g)=\rho_2(g),$$

$$\{g\in G : U_1(g)\in[T]\}=\{g\in G : U_2(g)\in[T]\}.$$

Тогда существует автоморфизм θ такой, что $\theta[\Gamma_1]\theta^{-1}=[\Gamma_2]$ и

$$\alpha_1(x,\gamma)=\alpha_2(\theta x, \theta\gamma\theta)^{1})$$

для любого $\gamma\in\Gamma_1$.

Доказательство теоремы состоит в построении с помощью теоремы 2.2 двух последовательностей Γ_i-массивов: $\{\xi_n^i\}_{n=1}^{\infty}$, $i=1,2$, таких, что выполнены условия а)-г) теоремы 2.2 и, более того, на элементах массивов ξ_n^1 и ξ_n^2 с одинаковыми номерами коциклы α_1 и α_2, а также r_1 и r_2 принимали одинаковые значения. Тогда отображение, переводящее элементы массива ξ_n^1 в соответствующие им элементы массива ξ_n^2 и будет нужным отображением θ.

Теорема 3.3. Пусть $U_i(G)$, $i=1,2$ – действия аменабельной группы G автоморфизмами на $(X,\mathcal{B},\mu)$ такие, что $U_i(G)\subset N[T]$, где T – эргодический автоморфизм типа III_λ $(0<\lambda<1)$. Для того, чтобы действия $U_1(G)$ и $U_2(G)$ были внешне сопряжены, т.е. для любого $g\in G$

$$U_1(g)=\varphi^{-1}U_2(g)t\varphi,$$

где $\varphi\in N[T]$, $t=t(g)\in[T]$, необходимо и достаточно, что бы

$$\rho_1(g)=\rho_2(g),\ \{g\in G : U_1(g)\in[T]\}=\{g\in G : U_2(g)\in[T]\}.$$

Теорема 3.3 выводится из теоремы 3.2 с помощью тех же соображений, которые использованы в работе [1].

4. Тип III_1.

Пусть $U(G)$ – действие счетной аменабельной группы G на $(X,\mathcal{B},\mu)$ таково, что $U(G)\subset N[T]$, где T – эргодический автоморфизм типа III_1. Группа Γ, порожденная $U(G)$ и $[T]$ также будет аппроксимируемой группой типа III_1.

Теорема 4.1. Действие $U(G)\subset N[T]$ группы G внешне сопряжено действию $U(G)\times I\subset N[T\times T]$.

Из этой теоремы следует, что для группы Γ так можно выбрать меру, что автоморфизмы $U(g)$, $g \in G$ станут сохраняющими меру. Поэтому можно предположить, что $\rho(g) = 1$, а $r(x,\gamma) \in \{\lambda_1^n \lambda_2^m : n, m \in \mathbb{Z}\}$, где $\log \lambda_1$ и $\log \lambda_2$ рационально независимы.

Точно также, как и в п.3, определяем коцикл α. Тогда для группы Γ и коциклов α и r выполняются условия теоремы 2.2.

Пусть $U_i(G)$ $(i = 1, 2)$ – действия счетной аменабельной группы G из $N[T]$ и Γ_i группа, построенная по $U_i(G)$ и $[T]$, α_i – коцикл на $X \times \Gamma_i$.

Теорема 4.2. Предположим, что для любого $g \in G$

$$\{g \in G : U_1(g) \in [T]\} = \{g \in G : U_2(g) \in [T]\}.$$

Тогда существует автоморфизм θ такой, что $\theta[\Gamma_1]\theta^{-1} = [\Gamma_2]$ и

$$\alpha_1(x,\gamma) = \alpha_2(\theta x, \theta\gamma\theta^{-1}), \qquad \gamma \in \Gamma_1.$$

Эта теорема доказывается так же, как и теорема 3.2. Из теоремы 4.2 выводится критерий внешней сопряженности.

Теорема 4.3. Пусть $U_i(G)$, $i=1,2$ – действия аменабельной счетной группы G на $(X, \mathcal{B}, \mu)$ такие, что $U_i(G) \subset N[T]$, где T – эргодический автоморфизм типа III_1. Чтобы $U_1(G)$ и $U_2(G)$ были внешне сопряжены, т.е.

$$U_1(g) = \varphi^{-1} U_2(g) t \varphi, \qquad g \in G,$$

где $\varphi \in N[T]$, $t \in [T]$, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\{g \in G : U_1(g) \in [T]\} = \{g \in G : U_2(g) \in [T]\}.$$

1. Безуглый С.И., Голодец В.Я. Внешняя сопряженность действий счетных аменабельных групп на пространстве с мерой. – Харьков, 1984. – 38 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-техн.ин-т низ.температур; 2-84).
2. Hamachi T., Osikawa M. Ergodic groups of automorphisms and Krieger's theorems. – Sem. Math. Sci., Keio Univ., 1981, N 3, p.1-113.
3. Connes A., Krieger W. Measure space automorphisms, the normalizers of their full groups, and approximate finiteness. – J. Functional Analysis, 1977, 24, p. 336-352.
4. Безуглый С.И., Голодец В.Я. Группы преобразований пространства с мерой и инварианты внешней сопряженности для автоморфизмов из нормализатора полных групп типа III. – Докл. АН СССР, 1980, 254, № 1, с. 11-14.
5. Connes A., Feldman J., Weiss B. An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. – Ergod. Theory and Dyn. Syst., 1981, 1, N 4, p. 431-450.
6. Zimmer R. Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks. – J. Functional Analysis, 1978, 27, p. 350-372.

УДК 519.4

С.Д.Синельщиков

КРИТЕРИЙ ЭРГОДИЧНОСТИ КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И ПОСТРОЕНИЕ КОЦИКЛОВ С ПЛОТНЫМИ ОБРАЗАМИ В КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ

Многие задачи эргодической теории сводятся к изучению коциклов, которые несут важную информацию о динамических системах [1].

Изучая эргодические преобразования пространства Лебега типа III, В.Кригер доказал одно предложение, характеризующее автоморфизмы типа III_1 в терминах коцикла Радона - Никодима [2, лемма 2.1]. Это предложение представляет интерес в более общей ситуации. В настоящей статье доказывается его аналог для коциклов эргодических, сохраняющих меру действий, принимающих значения в произвольных локально компактных сепарабельных (ЛКС) группах.

В качестве приложения полученного результата будет явно построен коцикл эргодического автоморфизма типа II_1 с плотным образом в произвольной компактной группе. Впервые такой коцикл построил Р.Зиммер [3], используя существование эргодического случайного блуждания на компактной группе. Сочетание описанных ниже явных методов построения коциклов со значениями в компактных группах и техники, использованной в работе [4] для случая разрешимых групп, позволяет решить известную задачу о существовании коциклов с плотными образами [1] для более общих аменабельных групп.

Пусть X - стандартное борелевское пространство с лебеговской мерой μ, на котором задано несингулярное действие ЛКС группы H. Коциклом динамической системы (X, μ, H) со значениями в ЛКС группе G называется борелевское отображение $\alpha: X\times H \to G$ такое, что $\alpha(x, h_1 h_2) = \alpha(x, h_1)\alpha(xh_1, h_2)$, для всех $h_1, h_2 \in H$ при п.в. $x\in X$.

Обозначим через μ_G правую меру Хаара группы G, тогда по коциклу α строится действие группы H на пространстве $(X\times G, \mu\times\mu_G)$: $(x, g)h = (xh, g\alpha(x, h))$, где $h\in H$, $(x,g)\in X \times G$. Это действие называется косым произведением и обозначается $X\times_\alpha G$. Если оно эргодично, то говорят, что коцикл α имеет плотный образ в G, или, что G является образом коцикла α эргодического действия группы H на пространстве (X, μ).

<u>Теорема 1.</u> Пусть на пространстве Лебега (X, μ) задано свободное эргодическое действие ЛКС группы Γ, и $\alpha: X\times\Gamma \to G$ - коцикл этого действия со значениями в ЛКС группе G. Тогда следующие условия эквивалентны.

1. Косое произведение $X\times_\alpha G$ эргодично.

2. Для любых двух подмножеств A, B пространства X, имеющих положительную меру, элемента $g \in G$ и окрестности единицы U в G найдутся множество $E \subset A$, $\mu(E) > 0$, и элемент $\gamma \in \Gamma$ такие, что $E\gamma \subset B$ и $\alpha(x,\gamma) \in Ug$ при $x \in E$.

3. Для любого множества $A \subset X$, $\mu(A) > 0$, элемента $g \in G$ и окрестности единицы U в G найдутся множество $E \subset A$, $\mu(E) > 0$, и элемент $\gamma \in \Gamma$ такие, что $E\gamma \in A$, и $\alpha(x,\gamma) \in Ug$ при $x \in E$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выведем из условия (1) условие (2). Пусть V – симметричная окрестность единицы в G такая, что $VV \subset U$. Положим $\bar{A} = A \times V$, $\bar{B} = B \times Vg$, $\nu = \mu \times \mu_G$. Тогда $\nu(\bar{A}) > 0$, $\nu(\bar{B}) > 0$. В силу условия (I) найдутся $A_1 \subset \bar{A}$ и $\gamma \in \Gamma$ такие, что $\nu(\bar{A}_1) > 0$ и $\bar{A}_1\gamma \subset \bar{B}$, где $A_1\gamma = \{(x\gamma, g\alpha(x,\gamma)) : (x,g) \in A_1\}$. Пусть $E_v = \{x \in A : (x,v) \in A_1\}$. Тогда, очевидно, найдется $v_0 \in V$, для которого $\mu(E_{v_0}) > 0$. Возьмем $E = E_{v_0}$; очевидно, при $x \in E$ имеет место $v_0 \alpha(x,\gamma) \in Vg$, т.е. $\alpha(x,\gamma) \in V^{-1}Vg = VVg \subset Ug$. Кроме того, $E\gamma \subset B$, что и требовалось доказать.

Обратно, пусть выполнено условие (2). Докажем эргодичность косого произведения. Пусть $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ – фундаментальная система окрестностей единицы в G, удовлетворяющих условию $W_{i+1} W_{i+1} \subset W_i$. Обозначим $V_m^p = W_{m+1} W_{m+2} \dots W_{m+p-1} W_{m+p}$ и затем $V_m = \bigcup_{p=1}^{\infty} V_m^p$. Можно непосредственно проверить, что $V_m \subset W_m$, так что $\{V_m\}_{m=1}^{\infty}$ образуют фундаментальную систему окрестностей единицы. Кроме того, очевидно, $\lim_{p\to\infty} \mu_G(V_m^p)/\mu_G(V_m) = 1$, $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $\bar{A}$, $\bar{B}$ – множества положительной меры в $X \times G$. Выберем множества I, J в X одинаковой меры, окрестность единицы V_n и элементы g, $h \in G$ так, чтобы $\nu(I \times V_n g \cap \bar{A}) > 2/3\nu(I \times V_n g)$, $\nu(J \times V_n h \cap \bar{B}) > 2/3\nu(J \times V_n h)$. Затем выберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\mu_G(V_n^k) > 2/3\mu_G(V_n)$. Тогда $\nu(I \times V_n^k g \cap \bar{A}) \geq \nu(I \times V_n g \cap \bar{A}) - 1/3\nu(I \times V_n g) > 2/3\nu(I \times V_n g) - 1/3\nu(I \times V_n g) = 1/3\nu(I \times V_n g)$.

Возьмем окрестность единицы U в G такую, что $gUg^{-1} \subset W_{n+k-1}$. В силу условия (2) можно выбрать множество $E_1 \subset I$, $\mu(E_1) > 0$, и элемент $\gamma_1 \in \Gamma$ такие, что $E_1\gamma \subset J$, и $\alpha(x,\gamma_1) \in Ug^{-1}h$ при $x \in E_1$. Затем аналогичным образом находим множество $E_2 \subset I \setminus E_1$, $\mu(E_2) > 0$ и элемент $\gamma_2 \in \Gamma$, удовлетворяющие условиям $E_2\gamma_2 \subset J \setminus E_1\gamma_1$, и $\alpha(x,\gamma_2) \in Ug^{-1}h$ при $x \in E_2$. Повторяя это построение счетное число раз, получаем сохраняющее меру биективное отображение $\gamma : I \to J \pmod 0$: $x\gamma = x\gamma_i$ при $x \in E_i$. Тогда преобразование $(x,\rho) \to (x\gamma_i, \rho\alpha(x,\gamma_i))$ при $(x,\rho) \in E_i \times V_n^k g$ отображает $I \times V_n^k g \pmod 0$ в $J \times V_n h$ инъективно и с сохранением меры. Используя приведенные выше оценки, получаем $\nu((I \times V_n^k g \cap \bar{A})\gamma \cap (J \times V_n h \cap \bar{B})) \geq \nu(I \times V_n^k g \cap \bar{A}) + \nu(J \times V_n h \cap \bar{B}) - \nu(J \times V_n h) > 1/3\nu(I \times V_n g) + 2/3\nu(J \times V_n h) - \nu(J \times V_n h) = 0$. Это означает, что $\nu(\bar{A}\gamma_i \cap \bar{B}) > 0$ при некотором i, т.е. косое произведение $X \times_\alpha G$ эргодично.

Покажем, как из (3) следует (2). Пусть A и B – множества положительной меры в X, $g\in G$; U – окрестность единицы в G. Выберем симметричную окрестность единицы V так, чтобы $VV\subset U$. В силу эргодичности Γ можно найти $C\subset A, \mu(C)>0$, и $\gamma_1\in\Gamma$ такие, что $C\gamma_1\subset B$. Положим $\varphi(x)=\alpha(x,\gamma_1)$ при $x\in C$, тогда $\varphi: C\to G$ – борелевское отображение. Выберем $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы $G=\bigcup_{n=1}^{\infty} Vg_n$. Поскольку $C=\bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi^{-1}(Vg_n)$, найдется $n_0\in\mathbb{N}$ такое, что $\mu(\varphi^{-1}(Vg_{n_0}))>0$. Обозначим $D=\varphi^{-1}(Vg_{n_0})\subset C$. Выберем окрестность единицы W таким образом, что $g_{n_0}Wg_{n_0}^{-1}\subset V$. В силу условия (3) найдутся $F\subset D\gamma_1, \mu(F)>0$, и $\gamma_2\in\Gamma$ такие, что $F\gamma_2\subset D\gamma_1$, и $\alpha(x,\gamma_2)\in Wg_{n_0}^{-1}g$ при $x\in F$. Возьмем $E=F\cdot\gamma_1^{-1}$, $\gamma=\gamma_1\gamma_2$, тогда $E\subset A$, $E\gamma\subset B$, и $\alpha(x,\gamma)=\alpha(x,\gamma_1)\alpha(x\gamma_1,\gamma_2)\in$ $\in Vg_{n_0}Wg_{n_0}g\subset VVg\subset Ug$ при $x\in E$.

Импликация (2)$\Rightarrow$(3) очевидна. На этом доказательство теоремы I закончено.

Прежде чем перейти к построению коцикла с плотным образом в компактной группе, сделаем несколько замечаний. Рассмотрим счетную дискретную группу $\Gamma=\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_2^{(i)}$, где $\mathbb{Z}_2^{(i)}\cong\mathbb{Z}_2$. Эта группа естественным образом действует на пространстве $(X,\mu)=(Y,\nu)^{\mathbb{N}}$, где $Y=\{0,1\}$, $\nu(\{0\})=$ $=\nu(\{1\})=1/2$. Пусть $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – образующие группы Γ, причем

$$(x\delta_k)_i=\begin{cases}x_i, & i\neq k\\ x_i+1\ (mod\,2), & i=k.\end{cases}$$

Согласно работе [5, § 1, теорема 2] всякий коцикл динамической системы (X,μ,Γ) определяется некоторым семейством борелевских функций $f_k: X_k\to G$, $k\in\mathbb{N}$ следующим образом:

$$c(x,\delta_k)=f_1(x)^{-x_1}f_2(x)^{-x_2}\dots f_{k-1}(x)^{-x_{k-1}}f_k(x)^{(-1)^{x_k}}f_{k-1}(x\delta_k)^{x_{k-1}}\dots f_2(x\delta_k)^{x_2}f_1(x\delta_k)^{x_1},\quad (1)$$

причем каждая функция f_k инвариантна относительно $\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_k$.

Всякое эргодическое действие группы $\mathbb{Z}$ с конечной инвариантной мерой траекторно эквивалентно описанному действию группы Γ [6]. Поэтому в дальнейшем мы будем строить коцикл этого действия вместо коцикла эргодического автоморфизма типа II_1.

Нам понадобится следующее стандартное предложение.

Лемма 2. Пусть K – компактная группа со счетной базой, и U – окрестность единицы в K. Тогда найдется окрестность единицы V такая, что $h^{-1}Vh\subset U$ для всех $h\in K$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы не имеет места, и $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная система окрестностей единицы в K. Тогда для каждого $n\in\mathbb{N}$ найдется $h_n\in K$, $x_n\in V_n$ такие, что

$$h_n^{-1}x_nh_n\notin U.\qquad (2)$$

Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$. Выделяя из $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ подпоследовательность, сходящуюся в K к некоторому пределу h, и переходя по ней к пределу в (2), получаем, что $e \notin \operatorname{int} U$, т.е. U не является окрестностью единицы. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теперь мы готовы сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть K – компактная группа со счетной базой. Тогда существует коцикл эргодического автоморфизма типа II_{I} с плотным образом в K.

Доказательство. Пусть $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ – фундаментальная система окрестностей единицы в K, причем $W_i = W_i^{-1}$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ построим в K конечную W_i-сеть. Будем считать функции $f_k : X \to K$ постоянными ($k \in \mathbb{N}$), и зададим их таким образом, чтобы имело место следующее: для каждого $i \in \mathbb{N}$ найдется последовательность натуральных чисел $\{n_i(k)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\{f_{n_i(k)+j}\}_{j=1}^{q(i)}$ совпадает с построенной выше W_i-сетью. (Здесь $q(i)$ – число точек в W_i-сети, $K = \bigcup\limits_{j=1}^{q(i)} W_i f_{n_i(k)+j}$). Тем самым в соответствии с (1) определяется коцикл $c: X \times \Gamma \to K$. Докажем, что косое произведение $X \times_c K$ эргодично.

Предварительно введем обозначения

$$\varphi_k(x) = f_k^{x_k} f_{k-1}^{x_{k-1}} \dots f_2^{x_2} f_1^{x_1}, \quad x \in X, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$I_k(x) = \{ y \in X : y_i = x_i, \quad i = 1, \dots, k \}.$$

Будем проверять условие (3) теоремы 1. Пусть заданы $A \subset X$, $\mu(A) > 0$, окрестность единицы U в K и $g \in K$. Выберем точку плотности x_0 множества A. Найдем $i \in \mathbb{N}$ так, чтобы $h^{-1} W_i h \subset U$ для всех $h \in K$. Далее, подберем $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\mu(I_{n_i(k)}(x_0) \cap A) > (1 - 2^{-q(i)-1}) \mu(I_{n_i(k)}(x_0)) \tag{3}$$

Наконец, выберем $j = 1, \dots, q(i)$ из условия

$$\varphi_{n_i(k)}(x_0)^{-1} g \varphi_{n_i(k)}(x_0) \in W_i f_{n_i(k)+j}. \tag{4}$$

Положим $B = A \cap I_{n_i(k)}(x_0) \cap \{x \in X : x_{n_i(k)+1} = \dots = x_{n_i(k)+j} = 0\}$.

Оценим меру множества B

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \mu(I_{n_i(k)}(x_0) \cap A) + \mu(I_{n_i(k)}(x_0) \cap \{x \in X : x_{n_i(k+1)} = \dots = x_{n_i(k)+j} = 0\}) - \\ &- \mu(I_{n_i(k)}(x_0) \cap (A \cup \{x \in X : x_{n_i(k)+1} = \dots = x_{n_i(k)+j} = 0\})) > \\ &> (1 - 2^{-q(i)-1}) \mu(I_{n_i(k)}(x_0)) + 2^{-j} \mu(I_{n_i(k)}(x_0)) - \mu(I_{n_i(k)}(x_0)) \geqslant \\ &\geqslant 2^{-q(i)-1} \mu(I_{n_i(k)}(x_0)).\end{aligned} \tag{5}$$

Цилиндрическое множество $I_{n_i(k)}(x_0)$ инвариантно относительно $\delta_{n_i(k)+j}$ и содержит B, поэтому $B\delta_{n_i(k)+j} \subset I_{n_i(k)}(x_0)$. Из этого, а также из (3) и (5) следует, что $\mu(B\delta_{n_i(k)+j} \cap A) > 0$. Положим $E = B \cap A\delta_{n_i(k)+j}$, тогда $\mu(E) > 0, E \subset B \subset A, E\delta_{n_i(k)+j} \subset A$. Используя (4), получаем при $x \in E$ $c(x, \delta_{n_i(k)+j}) = \varphi_{n_i(k)}(x)^{-1} f_{n_i(k)+j}\varphi_{n_i(k)}(x) \in \in \varphi_{n_i(k)}(x_0)^{-1} W_i^{-1} \varphi_{n_i(k)}(x_0) g \varphi_{n_i(k)}(x_0)^{-1} \varphi_{n_i(k)}(x_0) = \varphi_{n_i(k)}(x_0)^{-1} W_i \varphi_{n_i(k)}(x_0) g \subset Ug$.

По теореме I отсюда следует эргодичность косого произведения $X \times_c K$. Теорема 3 доказана.

1. Mackey G.W. Ergodic theory and virtual groups. - Math. Ann., 1966, 166, p. 187-207.
2. Krieger W. On the Araki-Woods asymptotic ratio set and non-singular transformations of a measure space. - Lect. Notes Math., 1970, 160, p. 158-177.
3. Zimmer R.J. Random walks on compact groups and the existence of cocycles. - Isr. J. Math., 1977, 26, p. 84-90.
4. Голодец В.Я. Коциклы динамических систем с плотным образом. - Докл. АН УССР. Серия А, 1982, № 8, с. 3-5.
5. Голодец В.Я. Описание представлений антикоммутационных соотношений. - Успехи мат. наук, 1969, 24, № 4, с. 3-64.
6. Степин А.М. О когомологиях групп автоморфизмов пространства Лебега. - Функц. анализ и его приложение, 1971, 5, № 2, с.91-92.

УДК 517.5

В.А.Ткаченко

О ПРОСТОТЕ СПЕКТРА ОДНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Кратностью спектра линейного оператора A в линейном топологическом пространстве $\mathcal{X}$ принято называть /1, § 10, стр. 313/ наименьшую мощность всех таких систем векторов, что $\mathcal{X}$ совпадает с наименьшим замкнутым линейным подпространством, содержащим эту систему и инвариантным относительно A. Если кратность спектра равна единице, то говорят, что оператор имеет простой спектр, а каждый вектор $f \in \mathcal{X}$, порождающий полную в $\mathcal{X}$ систему $\{A^k f\}_{k=0}^{\infty}$, называется циклическим для A.

Одним из наиболее популярных операторов, рассматриваемых в комплексном анализе, является дифференцирование $\frac{d}{dz}$. Простота его спектра эквивалентна существованию аналитической функции $f(z)$, для которой полна система производных $\{f^{(k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$. Построению таких функций в различных аналитических ситуациях посвящено значительное число работ; соответствующие библиографические указания можно найти в обзорах А.Ф.Леонтьева /2/, Н.К.Никольского /1/ и монографии И.И.Ибрагимова /3/. Однако эффективное построение циклических векторов оператора классического или обобщенного дифференцирования Гельфонда - Леонтьева в большинстве известных работ выполнено лишь для пространств функций, аналитических в круговых областях.

В настоящей работе устанавливается простота спектра оператора обобщенного дифференцирования $\mathcal{D}$, который действует в пространстве аналитических функционалов $H(\mathcal{K})$, определяемом фиксированной тригонометрически ρ-выпуклой функцией $\mathcal{K}(\theta)$. Всюду в дальнейшем используются определения и обозначения работы [4]. В частности, $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ обозначает множество всех тригонометрически ρ-выпуклых функций, каждая из которых удовлетворяет условию $k(\theta)<\mathcal{K}(\theta)$ при всех $\theta\in[0,2\pi]$; если $\varphi(\lambda)$ – целая функция, то $\|\varphi\|_k=\sup\limits_{r,\theta}|\varphi(re^{i\theta})|\exp(-k(\theta)r^{\rho})$; $P(\mathcal{K})$ есть пространство всех целых функций, для каждой из которых конечна хотя бы одна норма $\|\cdot\|_k$ при $k\in\mathfrak{M}(\mathcal{K})$, наделенное топологией индуктивного предела; Λ – оператор умножения в $P(\mathcal{K})$ на независимую переменную; $\mathcal{D}=\Lambda^*$ – сопряженный оператор в сопряженном пространстве $H(\mathcal{K})$, проективная топология которого определяется системой норм

$$\|f\|_k=\sup_{\|\varphi\|_k\le 1}|\langle f,\varphi\rangle|,\qquad f\in H(\mathcal{K}).$$

Наконец, предполагается, что функция $\mathcal{K}(\theta)$ удовлетворяет условиям А и В [4].

Мы докажем следующее предложение.

Теорема. Оператор $\mathcal{D}$ в пространстве $H(\mathcal{K})$ имеет простой спектр.

Приводимое ниже доказательство основано на явном построении циклического вектора для $\mathcal{D}$.

Пусть вначале $\mathcal{K}(\theta)>0$. Выберем последовательность положительных чисел $\{a_m\}_0^\infty$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$0<a_{m+n}\le a_m a_n,\qquad m,n\ge 0 \tag{1}$$

и чтобы

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\ln a_m}{m}=-\infty. \tag{2}$$

Например, можно принять $a_m=\exp(-m^2)$.

Положим далее

$$f=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\delta_0^{(m)}, \tag{3}$$

где $\delta_0^{(m)}$ – функционал, определяемый на пространстве $P(\mathcal{K})$ равенством $\langle\delta_0^{(m)},\varphi\rangle=\frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0)$. Если $k\in\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ и $\sigma=\max\limits_{\theta}k(\theta)$, то с помощью неравенств Коши получаем

$$\|\delta_0^{(m)}\|_k=\sup_{\|\varphi\|_k\le 1}\left|\frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0)\right|\le\min_{r\ge 0}r^{-m}e^{\sigma r^{\rho}}<m^{-\frac{m}{\rho}}(\sigma e\rho)^{\frac{m}{\rho}}.$$

Следовательно, $\delta_0^{(m)}\in H(\mathcal{K})$ и благодаря свойствам последовательности $\{a_m\}_0^\infty$ имеем

$$\|f\|_k\le\sum_{m=0}^{\infty}a_m\|\delta_0^{(m)}\|_k\le\sum_{m=0}^{\infty}a_m m^{-\frac{m}{\rho}}(\sigma e\rho)^{\frac{m}{\rho}}<\infty.$$

Таким образом, $f \in H(\mathcal{K})$. Проверим, что f – циклический вектор оператора $\mathcal{D}$.

Действительно, в противном случае найдется такая ненулевая функция $\varphi \in P(\mathcal{K})$, что $\langle \mathcal{D}^p f, \varphi\rangle = 0$ при всех целых $p \geqslant 0$. Это значит, что f входит в область определения $\mathcal{U}_\infty(\varphi)$ всех степеней оператора $\mathcal{D}(\varphi)$, который по определению [4] является сужением $\mathcal{D}$ на подпространство $\mathcal{U}(\varphi) = \{f \in H(\mathcal{K}) : \langle f, \varphi\rangle = 0\}$. Если $R(\mu;\varphi) = (\mathcal{D}(\varphi) - \mu)^{-1}$ – резольвента оператора $\mathcal{D}(\varphi)$ и на окружности $|\mu| = q$ нет корней функции φ, то при любом $m > 0$ имеет место представление

$$f = -\sum_{|\mu|<q} \operatorname{Res} R(\mu;\varphi) f + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu|=q} \mu^{-m-1} R(\mu;\varphi) \mathcal{D}^m f \, d\mu . \tag{4}$$

Покажем, что с увеличением m последний интеграл стремится к нулю в топологии пространства $H(\mathcal{K})$ и, следовательно, может быть опущен в (4).

В самом деле, поскольку $\mathcal{D}\delta_0^{(s)} = \delta_0^{(s-1)}$ при любом $s \geqslant 1$ и $\mathcal{D}\delta_0^{(0)} = 0$ то с помощью (1) находим

$$\| D^m f \|_k \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} a_{m+s} \|\delta_0^{(s)}\|_k \leqslant a_m \sum_{s=0}^{\infty} a_s \|\delta_0^{(s)}\|_k \leqslant C' a_m , \tag{5}$$

где величина C' не зависит от m. Из оценки резольвенты, содержащейся в лемме 2.6 работы [4], следует, что при фиксированном значении $q > 0$ для каждой функции $l \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$ найдется такая функция $k \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$ и постоянная $C'' > 0$, что при всех $m \geqslant 0$ выполнены неравенства

$$\| R(\mu;\varphi) \mathcal{D}^m f \|_l \leqslant C'' \|\mathcal{D}^m f\|_k , \quad |\mu| = q . \tag{6}$$

Благодаря (2) можно считать, что $|a_m| \leqslant (2^{-1} q)^m$ при всех достаточно больших значениях m. Для таких m на основании (5) и (6) имеем

$$\Big\| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu|=q} \mu^{-m-1} R(\mu;\varphi) \mathcal{D}^m f \, d\mu \Big\|_l \leqslant C'' \|\mathcal{D}^m f\|_k \, q^{-m} \leqslant C' C'' 2^{-m}$$

и теперь из (4) следует $f = -\sum_{|\mu|<q} \operatorname{Res} R(\mu;\varphi) f$. Число $q > 0$ здесь выберем настолько малым, чтобы в круге $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < q\}$ не было корней функции φ, отличных от точки $\mu = 0$. Тогда по лемме 2.2 работы [4] из последнего представления получаем $f = \sum_{i=0}^{s} c_i \delta_0^{(i)}$ с некоторым конечным $s \geqslant 0$. Поскольку при $\mathcal{K} > 0$ будет $\lambda^s \in P(\mathcal{K})$ для всех $s \geqslant 0$, находим

$$0 = \langle \sum_{i=0}^{s} c_i \delta_0^{(i)}, \lambda^{s+1} \rangle = \langle f, \lambda^{s+1} \rangle = \langle \sum_{m=0}^{\infty} a_m \delta_0^{(m)}, \lambda^{s+1} \rangle = a_{s+1} \neq 0 ,$$

что невозможно. Значит, в действительности не существует ненулевой функции $\varphi \in P(\mathcal{K})$, аннулирующей систему $\{\mathcal{D}^p f\}$, и вектор f – циклический.

Для произвольной функции $\mathcal{K}(\theta)$, благодаря условию A из

[4], можно подобрать такое число $\Delta > 0$, что $H(\theta)+\Delta > 0$. Пусть $\omega(\lambda)$ – какая-нибудь целая функция с индикатором Δ при порядке ρ. Тогда [5] оператор $\omega(\mathcal{D})$ – сопряженный с умножением функций пространства $P(\mathcal{K})$ на $\omega(\lambda)$ – непрерывно отображает пространство $H(\mathcal{K}'+\Delta)$ в $H(\mathcal{K}')$. Выберем циклический вектор f оператора $\mathcal{D}$ в пространстве $H(\mathcal{K}'+\Delta)$ и положим $g=\omega(\mathcal{D})f$. Если $\varphi\in P(\mathcal{K}')$ аннулирует систему $\{\mathcal{D}^p g\}_{p=0}^{\infty}$, то $\langle\mathcal{D}^p f, \omega\varphi\rangle = \langle\mathcal{D}^p\omega(\mathcal{D})f,\varphi\rangle = \langle\mathcal{D}^p g,\varphi\rangle = 0$ и так как f – циклический вектор, то $\omega\varphi\equiv 0$. Отсюда $\varphi\equiv 0$, $g\in H(\mathcal{K}')$ – циклический вектор и теорема полностью доказана.

Приведем некоторые ее аналитические реализации.

1. Пусть $\mathcal{K}(\theta) > 0$ – заданная ρ-выпуклая функция; $\mathcal{G}$ – ρ-выпуклая область, для которой $\mathcal{K}(\theta)$ является ρ-опорной функцией [6]; $A(\mathcal{G})$ – пространство аналитических в $\mathcal{G}$ функций с топологией равномерной сходимости на внутренних компактах. Из описания $A(\mathcal{G})$ как пространства вида $H(\mathcal{K}(\theta))$ и свойств вектора (3), установленных при доказательстве теоремы, следует, что

Если выполнены условия (I) и (2), то система функций

$$\left\{\sum_{m=p}^{\infty}\frac{q_m}{m!}z^{m-p}\frac{\Gamma(m\rho^{-1}+1)}{\Gamma((m-p)\rho^{-1}+1)}\right\}_{p=0}^{\infty}$$

полна в пространстве $A(\mathcal{G})$.

2. Рассмотрим пространство $[\rho,k(\theta)]$ целых функций нормального типа при порядке ρ с топологией, определяемой системой норм

$$\|f(z)\|_{\varepsilon} = \sup_{r,\theta}|f(re^{i\theta})|\exp(-k(\theta)-\varepsilon)r^{\rho},$$

где $k(\theta)$ – такая неотрицательная ограниченная функция, что $k(\theta)r^{\rho}$ – выпуклая функция от $z=re^{i\theta}$. Как показано в работе [5], $[\rho,k(\theta)]$ допускает изоморфную реализацию в виде пространства $H(\mathcal{K}')$, где $\mathcal{K}'$ – функция, сопряженная с k по Юнгу, и при этой реализации $\mathcal{D}$ оказывается дифференцированием $\frac{d}{dz}$. Поэтому

Если выполнены условия (I) и (2), то система функций

$$\left\{\sum_{m=p}^{\infty}\frac{a_m}{(m-p)!}z^{m-p}\right\}_{p=0}^{\infty}$$

полна в пространстве $[\rho,k(\theta)]$.

3. Пространство A А.Ф.Леонтьева [7] состоит из функций, определенных на фиксированном множестве $\mathcal{M}$ в кольце $r<|z|<R<\infty$ комплексной плоскости и допускающих на $\mathcal{M}$ представление рядом

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k\mathcal{P}_k(z).$$

Предполагается, что последовательность $\{\mathcal{P}_k(z)\}$ удовлетворяет условию $\lim_{k\to\infty}k^{\frac{1}{\rho}}|\mathcal{P}_k(z)|^{\frac{1}{k}}=(\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}|z|$ равномерно по z на каждом множестве

$\mathcal{M}_{p,q} = \mathcal{M} \cap \{x : p \le |x| \le q\}$. Если наделить A системой норм

$$\|f(z)\|_{p,q} = \sup_{z \in \mathcal{M}_{p,q}} \sum_{k=0}^{\infty} |d_k \mathcal{P}_k(z)|,$$

то, как показано в работе [8], оно будет пространством вида $H(\mathcal{K})$ при подходящем выборе $\mathcal{K}$, а оператор $\mathcal{D}$ будет левым сдвигом в нем

$$\mathcal{D}\left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k \mathcal{P}_k(z)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{k+1} \mathcal{P}_k(z).$$

Из изложенных выше построений следует, что

Если выполнены условия (1) и (2), то система функций

$$\left\{\sum_{m=p}^{\infty} a_m \mathcal{P}_{m-p}(z)\right\}_{p=0}^{\infty}$$

полна в пространстве A.

1. Никольский Н.К. Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций. - В кн.: Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, Матем. анализ, 12, 1974, с. 199-412.
2. Леонтьев А.Ф. Дифференциальные уравнения бесконечного порядка и их применения. - Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, 11, 1964, с. 648-660.
3. Ибрагимов И.И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. - М.: Наука, 1971. - 518 с.
4. Ткаченко В.А. Спектральная теория в пространствах аналитических функционалов для операторов, порождаемых умножением на независимую переменную. - Матем. сборник, 112, № 3, 1980, с.421-466.
5. Ткаченко В.А. Об операторах, коммутирующих с обобщенным дифференцированием в пространствах аналитических функционалов с заданным индикатором роста. - Матем. сборник, 102, № 3, 1977, с. 435-456.
6. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. - М.: Наука, 1966. - 641 с.
7. Леонтьев А.Ф. Об одном функциональном уравнении. - Изв. АН СССР. Сер. матем., 29, № 4, 1965, с. 725-756.
8. Ткаченко В.А. Спектральные разложения в пространствах аналитических функционалов. - Изв. АН СССР. Сер. матем., 43, № 3, 1979, с. 654-712.

УДК 517.54+517.4

В.К.Дубовой

О МОДЕЛИ ОПЕРАТОРА СЖАТИЯ, ПОСТРОЕННОЙ ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ ТЕЙЛОРА ЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Как известно, характеристическая функция (Х Ф) определяет оператор сжатия с точностью до унитарной эквивалентности. Это позволяет построить по ХФ функциональную модель соответствующего оператора сжатия [1], [2]. Класс ХФ сжатий допускает простое внутреннее описание - это класс голоморфных внутри единичного круга сжимающих оператор-функций. Таким образом, каждой функции $\theta(\zeta)$ из указанного класса соответствует функциональная модель оператора сжатия. С другой стороны, функция $\theta(\zeta)$ допускает разложение

$$\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots + c_n\zeta^n + \ldots$$

и, очевидно, полностью определяется коэффициентами

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots .$$

Возникает естественный вопрос о том, как построить модель оператора сжатия, отправляясь от этой последовательности коэффициентов. Построению указанной модели и посвящена данная работа.

§ 1. Предварительные сведения

1. Приведем основные сведения из теории унитарных узлов, необходимые для дальнейшего. Подробное изложение относящихся сюда вопросов имеется, например, в работе [2].

Совокупность, состоящая из сепарабельных гильбертовых пространств H (внутреннего), E_-, E_+ (внешних), для которых $\dim(H\oplus E_-) = \dim(H\oplus E_+)$ и унитарного оператора $U\in[H\oplus E_+, H\oplus E_-]$, называется унитарным узлом или просто узлом и обозначается символом $(H, E_-, E_+; U)$. Оператор U допускает блочное представление

$$U = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix},$$

где операторы

$$T\in[H,H],\quad F\in[H,E_-],\quad G\in[E_+,H],\quad S\in[E_+,E_-]$$

называются соответственно основным, правым каналовым, левым каналовым и дублирующим.* Легко видеть, что операторы T, F, G и S тогда и только тогда являются компонентами узла, когда

$$T^*T + G^*G = I_H,\quad TT^* + FF^* = I_H, \tag{1.1}$$

$$T^*F + G^*S = 0,\quad TG^* + FS^* = 0, \tag{1.2}$$

$$F^*F + S^*S = I_{E_-},\quad GG^* + SS^* = I_{E_+}. \tag{1.3}$$

Очевидно, что основной оператор узла является сжатием, то есть для любого $h\in H$ выполняется неравенство $\|Th\| \le \|h\|$.

Узел Δ называется простым, если $H = H_y \vee H_H$, где

$$H_y = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n F E_-,\quad H_H = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^* G^* E_+,$$

$\bigvee_n D_n$ – наименьшее подпространство, содержащее все D_n.

---

* Через $[H, E_-]$ обозначается совокупность всех линейных ограниченных операторов, действующих из E_- в H.

Узел $\Delta=(H, E_-, E_+;\ T, F, G, S)$ называется унитарно эквивалентным узлу $\Delta'=(H', E_-, E_+;\ T', F', G', S')$, если $S'=S$ и существует унитарное отображение V пространства H' на H такое, что

$$T'=V^{-1}TV, \quad F'=V^{-1}F, \quad G'=GV.$$

Построим по данному унитарному узлу $\Delta=(H, E_-, E_+;\ T, F, G, S)$ функцию комплексного переменного

$$\theta(\zeta)=S+\zeta G(I-\zeta T)^{-1}F, \qquad |\zeta|<1. \tag{1.4}$$

Функцию $\theta(\zeta)$ принято называть характеристической функцией узла Δ. Она определена и голоморфна внутри единичного круга, ее значения принадлежат $[E_+, E_-]$ при этом $\theta^*(\zeta)\theta(\zeta)\le I$. Множество функций, обладающих этими свойствами, обозначим через $S[E_+, E_-]$. Существенным является то, что для каждой функции $\theta(\zeta)\in S[E_+, E_-]$ существует простой унитарный узел $\Delta=(H, E_-, E_+;\ U)$, для которого $\theta(\zeta)$ является ХФ. Легко проверяется, что ХФ унитарно эквивалентных узлов совпадают. Для простых узлов иммет место обратное утверждение, а именно: если ХФ двух простых узлов совпадают, то эти узлы унитарно эквивалентны.

Отметим, что ХФ $\hat\theta(\zeta)$ совряженного узла $\Delta^*=(H, E_+, E_-;\ T^*, G^*, F^*, S^*)$ связана с ХФ узла $\Delta=(H, E_-, E_+;\ T, F, G, S)$ соотношением

$$\hat\theta(\zeta)=\theta^*(\bar\zeta). \tag{1.5}$$

2. Каждой функции $\theta(\zeta)$ со значениями из $[E_+, E_-]$ и голоморфной внутри единичного круга

$$\theta(\zeta)=C_0+C_1\zeta+C_2\zeta^2+\dots$$

поставим в соответствие оператор

$$C=\begin{bmatrix} C_0 & & & 0 \\ C_1 & C_0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_n & C_{n-1} & C_0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

который будем считать действующим из пространства $l_2(0,\infty;E_-)$ в пространство $l_2(0,\infty;E_+)$.

Теорема 1.1. Для того, чтобы $\theta(\zeta)\in S[E_+, E_-]$ необходимо и достаточно, чтобы оператор C был сжатием, т.е.

$$I-CC^*\ge 0.$$

Для скалярного случая $\dim E_-=\dim E_+=1$ этот результат принадлежит И.Шуру [3]. Доказательство для матричного случая имеется, например, в работах [4], [5], а для бесконечномерного случая в работе [1].

Обозначим через $s[E_+, E_-]$ множество последовательностей $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$, $c_k \in [E_+, E_-]$, для которых оператор (1.6) является сжатием. Тогда функция $\theta(\zeta) \in S[E_+, E_-]$ в том и только в том случае, если соответствующая последовательность коэффициентов Тейлора $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит $s[E_+, E_-]$.

Если $\theta(\zeta) \in S[E_+, E_-]$, то $\hat{\theta}(\zeta) \in S[E_-, E_+]$, при этом

$$\hat{\theta}(\zeta) = c_0^* + c_1^* \zeta + c_2^* \zeta^2 + \dots .$$

Соответствующий оператор (1.6) действует в этом случае из $l_2(0, \infty; E_+)$ в $l_2(0, \infty; E_-)$ и имеет вид

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} c_0^* & & & 0 \\ c_1^* & c_0^* & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_n^* & c_{n-1}^* & \dots & c_0^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} .$$

§ 2. Описание модели

1. Пусть $\{c_k\}_{k=0}^{\infty} \in s[E_+, E_-]$. Этой последовательности поставим в соответствие функцию $\theta(\zeta) \in S[E_+, E_-]$:

$$\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots$$

Пусть $\Delta = (H, E_-, E_+; T, F, G, S)$ – простой унитарный узел, для которого функция $\theta(\zeta)$ является характеристической. Тогда при $|\zeta| < 1$

$$\theta(\zeta) = S + \zeta G (I - \zeta T)^{-1} F = S + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n G T^{n-1} F$$

и

$$c_0 = S, \quad c_k = G T^{k-1} F, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. Имеют место равенства

$$I - CC^* = \begin{bmatrix} G \\ G\,T \\ \vdots \\ G\,T^n \\ \vdots \end{bmatrix} [G^*, T^* G^*, \dots, T^{*n} G^*, \dots], \tag{2.2}$$

$$I - \hat{C}\hat{C}^* = \begin{bmatrix} F \\ F^* T^* \\ \vdots \\ F^* T^{*n} \\ \vdots \end{bmatrix} [F, TF, \dots, T^n F, \dots]. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & & & 0 \\ c_1 & c_0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_0 \end{bmatrix} .$$

Из равенств (2.I) следует

$$C_n = \begin{bmatrix} S & & & 0 \\ GF & S & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ GT^{n-1}F & GT^{n-2}F & \dots & S \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} S & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ I & \ddots & & & \\ T & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ T^{n-1} & \dots & T & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F \end{bmatrix} .$$

Откуда, учитывая условия узла (1.1) - (1.3), получаем

$$I - C_n C_n^* = \begin{bmatrix} G & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} I & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & T^* & \dots & T^{*\,n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & T^* \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ T & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ T^{n-1} & \dots & T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ I & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ T^{n-2} & \dots & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - TT^* & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I - TT^* \end{bmatrix} \times$$

$$\left. \times \begin{bmatrix} 0 & I & \dots & T^{n-2} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & I \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} G^* & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G^* \end{bmatrix} .$$

После простых преобразований выражение в фигурных скобках приводится к виду

$$\begin{bmatrix} I & T^* & \dots & T^{*n} \\ T & TT^* & \dots & TT^{*n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T^n & T^nT^* & \dots & T^nT^{*n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ T \\ \vdots \\ T^n \end{bmatrix} [I, T^*, \dots, T^{*n}] .$$

Следовательно,

$$I - C_n C_n^* = \begin{bmatrix} G \\ G T \\ \vdots \\ G T^n \end{bmatrix} [G^*, T^* G^*, \dots, T^{*n} G^*].$$

Устремляя $n \to \infty$, получаем (2.2). Аналогично доказывается равенство (2.3).

Прежде чем переходить к описанию модели остановимся еще на двух важных для дальнейшего соотношениях. Пусть

$$\varphi^+ = \{\varphi_0^+, \varphi_1^+, \dots, \varphi_n^+, \dots\} \in l_2(0,\infty; E_+),$$

$$\varphi^- = \{\varphi_0^-, \varphi_1^-, \dots, \varphi_n^-, \dots\} \in l_2(0,\infty; E_-).$$

Тогда

$$T\Big(\sum_{k=0}^{\infty} T^{*k} G^* \varphi_k^+ + \sum_{k=0}^{\infty} T^k F \varphi_k^-\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} T^{*k} G^* \varphi_{k+1}^+ + F\Big(-\sum_{k=0}^{\infty} c_k^* \varphi_k^+\Big) + \sum_{k=1}^{\infty} T^k F \varphi_{k-1}^-, \tag{2.4}$$

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} T^{*k} G^* \varphi_k^+ + \sum_{k=0}^{\infty} T^k F \varphi_k^-, \sum_{j=0}^{\infty} T^{*j} G^* \varphi_j^+ + \sum_{j=0}^{\infty} T^j F \varphi_j^-\Big) =$$

$$= (A\varphi^+, \varphi^+) + (\hat{A}\varphi^-, \varphi^-) + \sum_{k,j=0}^{\infty} (c_{k+j}^* \varphi_k^+, \varphi_j^-) + \sum_{k,j=0}^{\infty} (c_{k+j} \varphi_k^-, \varphi_j^+), \tag{2.5}$$

где

$$A = I - CC^*, \quad \hat{A} = I - \hat{C}\hat{C}^*.$$

Действительно, из условий узла следует

$$T\Big(\sum_{k=0}^{\infty} T^{*k} G^* \varphi_k^+ + \sum_{k=0}^{\infty} T^k F \varphi_k^-\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} TT^* \cdot T^{*k-1} G^* \varphi_k^+ +$$

$$+ TG^* \varphi_0^+ + \sum_{k=0}^{\infty} T^{k+1} F \varphi_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} (I - FF^*) T^{*k-1} G^* \varphi_k^+ - FS^* \varphi_0^+ +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} T^k F \varphi_{k-1}^- = \sum_{k=0}^{\infty} T^{*k} G^* \varphi_{k+1}^+ + F\Big(-\sum_{k=1}^{\infty} F^* T^{*k-1} G^* \varphi_k^+ - S^* \varphi_0^+\Big) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} T^k F \varphi_{k-1}^- = \sum_{k=0}^{\infty} T^{*k} G^* \varphi_{k+1}^+ + F\Big(-\sum_{k=0}^{\infty} c_k^* \varphi_k^+\Big) + \sum_{k=0}^{\infty} T^k F \varphi_{k-1}^-.$$

Далее, из теоремы 2.I и равенств (2.I) получаем

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} T^{*k} G^* \varphi_k^+ + \sum_{k=0}^{\infty} T^k F \varphi_k^-, \sum_{j=0}^{\infty} T^{*j} G^* \varphi_j^+ + \sum_{j=0}^{\infty} T^j F \varphi_j^-\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{k=0}^{\infty} T^{*k} G^* \varphi_k^+, \sum_{j=0}^{\infty} T^{*j} G^* \varphi_j^+\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} T^k F \varphi_k^-, \sum_{j=0}^{\infty} T^j F \varphi_j^-\Big) +$$

$$+ \Big(\sum_{k=0}^{\infty} T^{*k} G^* \varphi_k^+, \sum_{j=0}^{\infty} T^j F \varphi_j^-\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} T^k F \varphi_k^-, \sum_{j=0}^{\infty} T^{*j} G^* \varphi_j^+\Big) =$$

$$=(A\varphi^+,\varphi^+)+(\hat{A}\varphi^-,\varphi^-)+\sum_{k,j=0}^{\infty}(c^*_{k+j}\varphi^+_k,\varphi^+_j)+\sum_{k,j=0}^{\infty}(c_{k+j}\varphi^-_k,\varphi^+_j).$$

2. Пусть задана последовательность $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}\in s[E_+,E_-]$. Приведенные соотношения делают естественными следующие построения. Рассмотрим пространство $\hat{H}_0$, состоящее из последовательностей

$$\hat{\varphi}=\{\ldots,\varphi^+_n,\ldots,\varphi^+_1,\varphi^+_0,\varphi^-_0,\varphi^-_1,\ldots,\varphi^-_n,\ldots\},$$

где

$$\varphi^+=\{\varphi^+_0,\varphi^+_1,\ldots,\varphi^+_n,\ldots\}\in l_2(0,\infty;E_+),$$

$$\varphi^-=\{\varphi^-_0,\varphi^-_1,\ldots,\varphi^-_n,\ldots\}\in l_2(0,\infty;E_-).$$

Каждым двум элементам $\hat{\varphi},\hat{\psi}\in\hat{H}_0$ отнесем число

$$(\hat{\varphi},\hat{\psi})=(A\varphi^+,\psi^+)+(\hat{A}\varphi^-,\psi^-)+$$
$$+\sum_{k,j=0}^{\infty}(c^*_{k+j}\varphi^+_k,\psi^-_j)+\sum_{k,j=0}^{\infty}(c_{k+j}\varphi^-_k,\psi^+_j). \tag{2.6}$$

Из (2.5) следует $(\hat{\varphi},\hat{\varphi})\geq 0$. Кроме того, легко видеть, что числа $(\hat{\varphi},\hat{\psi})$ удовлетворяют условиям

$$(\hat{\varphi},\hat{\psi})=\overline{(\hat{\psi},\hat{\varphi})},\ (\alpha_1\hat{\varphi}_1+\alpha_2\hat{\varphi}_2,\hat{\psi})=\alpha_1(\hat{\varphi}_1,\hat{\psi})+\alpha_2(\hat{\varphi}_2,\hat{\psi}).$$

Назовем элементы $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$ эквивалентными, если $(\hat{\varphi}-\hat{\psi},\hat{\varphi}-\hat{\psi})=0$. Очевидно, пространство $\hat{H}_0$ разбивается на попарно непересекающиеся классы эквивалентных элементов. Обозначим через $k_{\hat{\varphi}}$ класс, содержащий элемент $\hat{\varphi}$. Полагая

$$k_{\hat{\varphi}}+k_{\hat{\psi}}=k_{\hat{\varphi}+\hat{\psi}},\quad \alpha k_{\hat{\varphi}}=k_{\alpha\hat{\varphi}},$$

превратим множество всех классов в линейное пространство. Введем в этом пространстве скалярное произведение $(k_{\hat{\varphi}},k_{\hat{\psi}})=(\hat{\varphi},\hat{\psi})$. Наконец, дополняя пространство классов до полного, получим гильбертово пространство, которое обозначим $\hat{H}$. Пространство $\hat{H}$ и будет играть роль модельного пространства. В дальнейшем ради простоты элемент $k_{\hat{\varphi}}\in\hat{H}$ будем обозначать $\hat{\varphi}$.

Теорема 2.2. Если $\{c_k\}^{\infty}\in s[E_+,E_-]$, то совокупность $\hat{\Delta}=(\hat{H},E_-,E_+;\hat{T},\hat{F},\hat{G},\hat{S})$, где $\hat{H}$ – модельное пространство, а операторы

$$\hat{T}\in[\hat{H},\hat{H}],\ \hat{F}\in[\hat{H},E_-],\ \hat{G}\in[E_+,\hat{H}],\ \hat{S}\in[E_+,E_-]$$

определяются формулами

$$\hat{T}\{\ldots,\varphi^+_n,\ldots,\varphi^+_1,\boxed{\varphi^+_0},\varphi^-_0,\varphi^-_1,\ldots,\varphi^-_n,\ldots\}=$$
$$=\{\ldots,\varphi^+_{n+1},\ldots,\varphi^+_2,\boxed{\varphi^+_1},-\sum_{k=0}^{\infty}c^*_k\varphi^+_k,\varphi^-_0,\ldots,\varphi^-_{n-1},\ldots\}, \tag{2.7}$$

$$\hat{F}^* \hat{\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}^* \varphi_k^+ + (I - c_0^* c_0)\varphi_0^- - c_0^* \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k^-, \tag{2.8}$$

$$\hat{G}\hat{\varphi} = -c_0 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^* \varphi_k^+ + (I - c_0 c_0^*)\varphi_0^+ + \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}\varphi_k^-, \tag{2.9}$$

$$\hat{S} f = c_0 f, \tag{2.10}$$

представляет собой простой унитарный узел, ХФ которого совпадает с

$$\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots .$$

Доказательство. Так как $\{c_k\}_{k=0}^{\infty} \in s[E_+, E_-]$, то функция $\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots$ принадлежит $s[E_+, E_-]$. Пусть $\Delta = (H, E_-, E_+; T, F, G, S)$ – простой унитарный узел, для которого функция $\theta(\zeta)$ является характеристической. Определим отображение $V: \hat{H} \to H$, положив

$$V\hat{\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} T^{*k} G^* \varphi_k^+ + \sum_{k=0}^{\infty} T^k F \varphi_k^- .$$

Отображение V определено на всюду плотном в $\hat{H}$ множестве, отображает его на всюду плотное в H множество и, как следует из (2.5) и (2.6), сохраняет норму. Значит V допускает продолжение по непрерывности до унитарного отображения $\hat{H}$ на H. Сохраним для продолженного отображения то же самое обозначение. Тогда из (2.4) и (2.7) вытекает, что $TV\hat{\varphi} = V\hat{T}\hat{\varphi}$, т.е.

$$\hat{T} = V^{-1}TV.$$

Построим совокупность $\hat{\Delta} = (\hat{H}, E_-, E_+; \hat{T}, \hat{F}, \hat{G}, \hat{S})$,

где
$$\hat{F} = V^{-1}F, \quad \hat{G} = GV, \quad \hat{S} = S.$$

Поскольку $\hat{\Delta}$ есть узел, унитарно эквивалентный узлу Δ, то

$$\theta_{\hat{\Delta}}(\zeta) = \theta_{\Delta}(\zeta).$$

Осталось доказать, что имеют место формулы (2.8) – (2.10). Равенство (2.10) очевидно. Далее, учитывая условия узла (1.1) – (1.3), получаем

$$\begin{aligned}
\hat{F}^*\hat{\varphi} = F^* V \hat{\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty} F^* T^{*k} G^* \varphi_k^+ + \sum_{k=0}^{\infty} F^* T^k F \varphi_k^- = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} F^* T^{*k} G^* \varphi_k^+ + F^* F \varphi_0^- + \sum_{k=1}^{\infty} F^* T^k F \varphi_k^- = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} F^* T^{*k} G^* \varphi_k^+ + (I - S^* S)\varphi_0^- - S^* \sum_{k=1}^{\infty} G T^{k-1} F \varphi_k^- = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}^* \varphi_k^+ + (I - c_0^* c_0)\varphi_0^- - c_0^* \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k^- .
\end{aligned}$$

Следовательно, выполняется равенство (2.12). Аналогично доказывается и равенство (2.9).

1. Секефальви – Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 325 с.

2. Бродский М.С. Унитарные операторные узлы и их характеристические функции. Успехи мат. наук. 1978, 33, вып. 4, с.144-168.
3. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern der Einheitskreises beschränkt sind. - Iourn. f. Math., 1917, 147, 205-232; 1918, 148, 122-145.
4. Галстян Л.А. Аналитические j-растягивающие матрицы-функции и проблема Шура. - Изв. АН АрмССР, 1977, 12, № 3, с.204-228.
5. Дубовой В.К. Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций. I. - В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Изд-во Харьковск. ун-та, 1982, вып. 37, с. 14-26.

УДК 517.5

В.Э.Кацнельсон

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ И ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА РАДИУСОВ ЗАДАЧИ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ МАТРИЧНОЙ ЭРМИТОВО ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ.I.

1^0. Пусть $s(t)$ - заданная при $t\in(-\infty,\infty)$ непрерывная эрмитово положительная (ЭП) $n\times n$ матричная функция. Как известно, такая $s(t)$ допускает при $t\in(-\infty,\infty)$ интегральное представление

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}\, d\Sigma(\lambda), \tag{1.1}$$

где $d\Sigma(\lambda)\geqslant 0$ - $n\times n$ - матричная мера. В скалярном случае, ($n=1$), возможность такого представления была установлена С.Бохнером и А.Я.Хинчиным. При этом мера $d\Sigma$, дающая представление (1.1) при $t\in(-\infty,\infty)$ единственна. Можно рассматривать непрерывные эрмитово положительные (ЭП) матричные функции, $s(t)$, заданные на конечном промежутке: $t\in(-l, l)$, (где $l\in(0,\infty)$. Как показал М.Г.Крейн [1] такая $s(t)$ допускает при $t\in(-l,l)$ интегральное представление (1.1), но в отличие от случая бесконечного промежутка $(l=\infty)$, в случае конечного промежутка ($l<\infty$), представляющая $s(t)$ на $(-l,l)$ мера $d\Sigma$ вообще говоря неединственна. Отметим, что для любой представляющей меры

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Sigma(\lambda) = s(0),$$

значит интеграл слева существует.

Для описания представляющих мер $d\Sigma(\lambda)$ с ними ассоциируют функции $W_\Sigma(z)$:

$$W_\Sigma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Sigma(\lambda)}{\lambda - z}. \tag{1.2}$$

Функция $W_\Sigma(z)$ однозначно определяет меру $d\Sigma(\lambda)$. М.Г.Крейн для так называемой вполне неопределенной ситуации в задаче о представлении $s(t)$ на конечном промежутке дал параметрическое описание множества представляющих мер $d\Sigma$ в виде дробно-линейного преобразования

$$W_\Sigma(z)=[a_{11}(z)\omega(z)+a_{12}(z)][a_{21}(z)\omega(z)+a_{22}(z)]^{-1},$$

где $\omega(z)$ – "свободный параметр" – пробегает расширенный неванлинновский класс. Неванлинновский класс – это класс $n\times n$ матриц-функций $\omega(z)$, голоморфных в $Im\, z\neq 0$ и удовлетворяющих условиям

$$\frac{\omega(z)-\omega^*(z)}{z-\bar z}\geqslant 0,\quad \omega(z)=\omega^*(\bar z),\quad (Im\, z\neq 0).$$

Расширенный неванлинновский класс* получается присоединением к неванлинновскому классу "несобственных" элементов, т.е. "обесконечивающихся" $\omega(z)$. Матрица

$$\mathfrak{A}(z)=\begin{bmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z)\\ a_{21}(z) & a_{22}(z)\end{bmatrix}$$

является целой матрицей-функцией (блоки a_{jk} – $n\times n$ матрицы), удовлетворяющей при $J=\begin{bmatrix} 0 & iI_n\\ -iI_n & 0\end{bmatrix}$, (I_n – единичная $n\times n$ матрица) неравенству

$$\frac{\mathfrak{A}(z)J\mathfrak{A}^*(z)-J}{\frac{z-\bar z}{i}}\geqslant 0,\quad (Im\, z\neq 0).$$

$\mathfrak{A}(z)$ строится по $s(t)$, $t\in(-l,l)$ Методы М.Г.Крейна опирались на теорию эрмитовых операторов. Отправной точкой для их развития явилась работа М.С. Лившица [2]. Новый, опирающийся на теорию аналитических J - растягивающих матриц-функций, подход к исследованию вполне неопределенной ситуации в задаче о представлении непрерывной ЭП функции на конечном промежутке, был недавно предложен В.П.Потаповым [3].

2°. Мы получили параметрическое описание множества мер, представляющих $s(t)$ на конечном промежутке, в любой ситуации, а не только во вполне неопределенной. Это описание дается посредством дробно-линейного преобразования иного типа. Совокупность ассоциированных с представляющими $s(t)$ на $(-l,l)$ мерами $d\Sigma$ функций $W_\Sigma(z)$ параметризуется в виде

$$W_\Sigma(z)=m_{11}(z)-m_{12}(z)(m_{22}(z)+\omega(z))^{-1}m_{21}(z), \tag{2.1}$$

где матрица-функция $M(z)$

$$M(z)=\begin{bmatrix} m_{11}(z) & m_{12}(z)\\ m_{21}(z) & m_{22}(z)\end{bmatrix} \tag{2.2}$$

(с блоками m_{jk} - $n\times n$ матрицами) голоморфна в $Im\, z\neq 0$ и удовлетворяет там условиям

$$\frac{M(z)-M^*(z)}{z-\bar z}\geqslant 0,\quad M(z)=M^*(\bar z),\quad (Im\, z\neq 0). \tag{2.3}$$

---

* Аккуратно расширенный неванлинновский класс может быть описан проективно, посредством пар голоморфных матриц-функций, в множество которых вводится отношение эквивалентности.

M строится только по $S(t)$ на $(-l, l)$. $\omega(z)$ в (2.1) – матрица-функция размера $n \times n$ – свободный параметр, пробегающий расширенный неванлинновский класс. Мы установили, что ранги матриц $m_{12}(z), m_{21}(z)$ не зависят от точки z верхней полуплоскости

$$\operatorname{rank} m_{12}(z) \equiv d_{g,l}\,; \quad \operatorname{rank} m_{21}(z) \equiv d_{d,l}\,. \tag{2.4}$$

Числа $d_{g,l}$, $d_{d,l}$ называются дефектными числами задачи об интегральном представлении функции $S(t)$ на промежутке $(-l, l)$.

Индексы g и d внизу – первые буквы французских слов *gauche* и *droite* – левый и правый. Представляющая $s(t)$ на $(-l, l)$ мера единственна точно тогда, когда хотя бы одно из чисел $d_{g,l}$, $d_{d,l}$ равно нулю. Если одно из двух чисел $d_{g,l}$, $d_{d,l}$ равно n, то и другое обязательно равно n; в этом случае имеет место вполне неопределенная ситуация (существуют представляющие меры $d\Sigma_1$ и $d\Sigma_2$, существенно различные в том смысле, что $\det[W_{\Sigma_1}(z) - W_{\Sigma_2}(z)] \not\equiv 0$), и работает параметрическое описание М.Г.Крейна (которое можно привести к виду (2.1)). Никаких иных ограничений на дефектные числа нет. При надлежащем выборе ЭП $S(t)$ на $(-l, l)$ возможны любые комбинации дефектных чисел $d_{g,l}$, $d_{d,l}$ из $[0, n-1]$ Мы в настоящей работе не приводим доказательств изложенных в п°. 2 утверждений – работа посвящена другому, и п.° 2 носит поясняющий характер. Результаты п.° 2 – итог далеко продвинутой теории, развернутому изложению которой мы посвятим специальную обширную работу. При получении изложенных в п.° 2 результатов мы использовали развитый нами метод регуляризации (его фрагменты см. в работах [4, 5]). Существенную помощь нам также оказали работы С.А.Орлова [6, 7], некоторые построения которых послужили для нас образцами. Полезны были беседы с Д.З.Аровым и М.Ф.Бессмертным. Отметим, что результаты п.° 2 не специфичны именно для задачи об интегральном представлении ЭП функций, а справедливы и получены нами для широкого класса задач типа проблемы моментов так называемых классических задач об интегральных представлениях.

3°. Пусть z_0 – фиксированная невещественная точка. Из параметрического описания (2.1) следует, что совокупность значений $W_\Sigma(z_0)$ функций W_Σ, ассоциированных с представляющими на $(-l, l)$ данную э.п. функцию $S(t)$ мерами $d\Sigma$, заполняет некоторый матричный круг $\mathcal{K}_l(z_0)$, т.е. множество вида

$$\mathcal{K}_l(z_0) = \mathcal{U}_l(z_0) + \sqrt{\rho_{g,l}(z_0)}\; \mathcal{J}\, \sqrt{\rho_{d,l}(z_0)}\,, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{J}$ – единичный матричный круг – множество всех сжимающих $n \times n$ матриц $\mathcal{U}_l(z_0)$, $\rho_{g,l}(z_0) \geqslant 0$, $\rho_{d,l}(z_0) \geqslant 0$ – некоторые $n \times n$ матрицы. $\mathcal{U}_l$ называется центром, а $\rho_{g,l}$ и $\rho_{d,l}$ – соответственно левым и правым радиусами круга $\mathcal{K}_l$. Изучению матричных кругов как самих по себе, так и в связи с дробно-линейными преобразованиями, посвящен ряд работ Ю.Л.Шмульяна (см. работы [8-11]). Ю.Л.Шмульян рассматривает более общие бесконечномерные вообще говоря объекты и называет их операторными шарами.

Радиусы ρ_g и ρ_d любого матричного круга $\mathcal{K}$ определены (если ни один из них не ноль) однозначно с точностью до произвола, заключающегося в "перераспределении" между ними положительного скалярного множителя: можно одновременно заменить ρ_g на $\alpha\rho_g$, ρ_d на $\alpha^{-1}\rho_d$, где $\alpha > 0$ – скаляр.

Одним из основных результатов теории, о которой шла речь в п.$^{\circ}$ 2, является утверждение о стабильности рангов радиусов. Если $\mathcal{K}_l(z)$ – матричный круг, связанный с задачей об интегральном представлении заданной непрерывной э.п. $s(t)$ на конечном промежутке $(-l, l)$, то

$$rank\,\rho_{g,l}(z) \equiv d_{g,l}; \quad rank\,\rho_{d,l}(z) \equiv d_{d,l}, \quad (Im\,z > 0), \tag{3.2}$$

где $d_{g,l}$, $d_{d,l}$ – те же, что и в (2.4).

(Матрицы $m_{12}(z)$, $m_{21}(z)$ в (2.1) можно рассматривать как "аналитические радиусы".)

Замечание. Ввиду условия симметрии $W_{\Sigma}(z) = W_{\Sigma}^{*}(\bar{z})$ для ассоциированной функции W_{Σ} при переходе от точки z к точке $\bar{z}$ круг $\mathcal{K}_l$ преобразуется так: его центр переходит в эрмитово сопряженную матрицу, а радиусы "меняются местами" – правый переходит в левый, левый – в правый. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением радиусов $\rho_{g,l}(z)$, $\rho_{d,l}(z)$ лишь в одной полуплоскости.

4°. На протяжении оставшейся части работы фиксируем заданную на всей оси непрерывную эрмитово положительную $n \times n$ матрицу-функцию $S(t)$. Мы будем рассматривать семейство "усечений" задачи об интегральном представлении этой $S(t)$, т.е. рассматривать семейство сужений исходной $S(t)$ на промежутки $(-l, l)$, где l изменяется от 0 до $+\infty$, и на каждом из этих промежутков рассматривать задачу об интегральном представлении сужения на него исходной $S(t)$. Таким образом, с исходной S оказывается связанным семейство кругов $\mathcal{K}_l(z)$, в частности семейство их радиусов $\rho_{g,l}(z), \rho_{d,l}(z)$. Поскольку всякая мера, представляющая $S(t)$ на $[0, l_2)$ и подавно представляет S на $[0, l_1)$, $l_1 < l_2$, то при расширении промежутка класс ассоциированных функций сужается, а значит круги $\mathcal{K}_l(z)$ гнездятся: если $l_1 < l_2$, то $\mathcal{K}_{l_1}(z) \geq \mathcal{K}_{l_2}(z)$. Из гнездования кругов следует [8], что их радиусы монотонно убывают: $\rho_{g,l_1}(z) \geqslant \rho_{g,l_2}(z), \rho_{d,l_1}(z) \geqslant \rho_{d,l_2}(z)$ (конечно при надлежащей нормировке, так как возможно "перераспределение" между радиусами множителя $\alpha(z)>0$ – строго положительной скалярной функции. Впрочем, используемые нами формулы для радиусов сразу дают правильно нормированные радиусы, нормировка которых не нужна). Поскольку в задаче о представлении э.п. функции на бесконечном промежутке имеет место единственность, то "предельный круг" $\mathcal{K}_\infty(z)=\bigcap\limits_{l>0}\mathcal{K}_l(z)$ сводится к одной точке; к точке $W_\Sigma(z)$, где $W(z)$ – функция, ассоциированная с представляющей $S(t)$ на $(-\infty,\infty)$ мерой. Поэтому по крайней мере один из радиусов $\rho_{g,l}(z)$, $\rho_{d,l}(z)$ должен стремиться к нулю при $l\to+\infty$. Радиусы, которые получаются из используемых нами формул, таковы, что в верхней полуплоскости левый радиус экспоненциально стремится к нулю при $l\to+\infty$, а правый, вообще говоря, к нулю не стремится. Оказывается, можно в явном виде выделить скалярный множитель, ответственный за стремление левого радиуса к нулю, именно, множитель e^{-2ly}, $(z=x+iy)$. После такого выделения левый радиус может иметь и ненулевой предел, и изучение этого предела целесообразно.

Введем в рассмотрение нормированные радиусы $r_{g,l}(z)$, $r_{d,l}(z)$, полагая* $(z=x+iy)$:

$$r_{g,l}(z)=\rho_{g,l}(z)\cdot e^{2ly}, \quad (Im\, z>0). \tag{4.1}$$

$$r_{d,l}(z)=\rho_{d,l}(z), \quad (Im\, z>0). \tag{4.2}$$

Круг $\mathcal{K}_l(z)$, таким образом, представим в виде

$$\mathcal{K}_l(z)=u_l(z)+e^{-ly}\sqrt{r_{g,l}(z)}\ \mathcal{J}\ \sqrt{r_{d,l}(z)}\ . \tag{4.3}$$

Мы покажем, что нормированные радиусы в каждой точке z верхней полуплоскости монотонны по l

$$r_{g,l_1}(z)\geq r_{g,l_2}(z),\quad r_{d,l_1}(z)\geq r_{d,l_2}(z),\ (l_1<l_2). \tag{4.4}$$

Поэтому существуют пределы

$$r_{g,\infty}(z)\overset{def}{=}\lim_{l\to\infty} r_{g,l}(z),\ r_{d,\infty}(z)\overset{def}{=}\lim_{l\to\infty} r_{d,l}(z), \tag{4.5}$$

называемые нами нормированные предельные радиусы. Эти пределы, вообще говоря, ненулевые. Из наших рассмотрений будет вытекать, что ранги нормированных предельных радиусов не зависят от точки z верхней полуплоскости

$$rank\ r_{g,\infty}(z)\equiv d_{g,\infty};\quad rank\ r_{d,\infty}(z)\equiv d_{d,\infty},\ (Im\, z>0). \tag{4.6}$$

---

* Подобную нормировку в одной из классических задач – задаче Шура – по-видимому впервые осуществил В.К.Дубовой [12].

Числа $d_{g,\infty}$, $d_{d,\infty}$ дают некоторую классификацию* эрмитово положительных функций на всей вещественной оси (или, что то же самое, классификацию "конечных" $n\times n$ матричных мер, находящихся во взаимно однозначном соответствии с такими ЭП функциями).

Числа $d_{g,\infty}$, $d_{d,\infty}$ будем называть дефектными числами задачи об интегральном представлении $s(t)$ на $(-\infty,\infty)$ или дефектными числами меры $d\Sigma(\lambda)$, представляющей $s(t)$ на $(-\infty,\infty)$. Если одно из чисел $d_{g,\infty}$, $d_{d,\infty}$ равно n, то и другое должно быть равно n. Никаких других связей между дефектными числами нет. Можно дать критерий того, что $d_{g,\infty}=d_{d,\infty}=n$ в терминах представляющей меры.

Пусть

$$d\Sigma(\lambda)=\rho(\lambda)d\lambda+d\sigma_s(\lambda) \tag{4.7}$$

– разложение представляющей s на $(-\infty,\infty)$ меры на абсолютно непрерывную и сингулярную компоненты. Условие

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\det\rho(\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\lambda>-\infty \tag{4.8}$$

является необходимым и достаточным условием того, что $d_{g,\infty}=d_{d,\infty}=n$. Как видно, условие $d_{g,\infty}=d_{d,\infty}=n$ определяется лишь абсолютно непрерывной компонентой, представляющей меры. Из наших рассмотрений следует больше. Оказывается, что сами нормированные предельные радиусы $r_{g,\infty}(z)$, $r_{d,\infty}(z)$ зависят лишь от абсолютно непрерывной компоненты меры: если у двух эрмитово положительных на $(-\infty,\infty)$ функций абсолютно непрерывные компоненты представляющих их там мер совпадают, то и сами нормированнные предельные радиусы $r_{g,\infty}(z)$, $r_{d,\infty}(z)$ будут совпадать (хотя, конечно, нормированные допредельные радиусы $r_{g,l}(z)$, $r_{d,l}(z)$ могут отличаться). Это перекликается с известной теоремой Сеге-Колмогорова - Крейна.

5°. Мы покажем, что нормированные предельные радиусы факторизуются /12/. Как сообщил нам В.К.Дубовой, ранее аналогичный результат был получен им иными методами в задаче Шура. Точнее, существуют внешние матрицы-функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ из класса Харди H^2_{n} (в верхней полуплоскости) такие, что

$$r_{g,\infty}(z)=\Phi(z)\Phi^*(z),\quad (Im\,z>0), \tag{5.1}$$

$$r_{d,\infty}(z)=\Psi^*(z)\Psi(z),\quad (Im\,z>0). \tag{5.2}$$

---

* Соображение о классификации по рангам предельных радиусов задачи об интегральном представлении впервые высказано в работе /14/ И.В.Ковалишиной, где рассматривалась задача Каратеодори, т.е. задача об интегральном представлении ЭП последовательности. Однако И.В.Ковалишина не нормировала радиусы, один из них всегда был равен нулю, так что ее классификация была неполной. Классификацию по нормированным радиусам в одной из задач (задаче Шура) впервые предпринял В.К.Дубовой /12/.

Эти внешние функции не являются, вообще говоря квадратными. Из постоянства рангов внешних матриц-функций (см. работу /13/, гл.5, § 2) вытекает постоянство рангов $r_{g,\infty}(z), r_{d,\infty}(z)$. Таким образом, матрица $\Phi(z)$ имеет размер $n\times d_{g,\infty}$ (n строк, $d_{g,\infty}$ столбцов), матрица $\Psi(z)$ имеет размер $d_{g,\infty}\times n$ (n столбцов, $d_{d,\infty}$ строк). Функции Φ, Ψ определены однозначно, с точностью до постоянных унитарных сомножителей $\Phi(z)\leftrightarrow\Phi(z)U$, $\Psi(z)\leftrightarrow V\Psi(z)$, $(UU^*=I,\ V^*V=I)$. Они обладают следующими экстремальными свойствами: выполняются неравенства

$$\Phi(\lambda)\Phi^*(\lambda)\le\frac{1}{2\pi}\rho(\lambda),\quad \Psi^*(\lambda)\Psi(\lambda)\le\frac{1}{2\pi}\rho(\lambda)$$
$$(-\infty<\lambda<\infty),\tag{5.3}$$

если $\varphi(z),\psi(z)$ – любые другие матрицы-функции из класса Харди H_+^2 (размеров $n\times m_g$, $m_d\times n$, где m_g, m_d не обязательно равны $d_{g,\infty}$, $d_{d,\infty}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\varphi(\lambda)\varphi^*(\lambda)\le\frac{1}{2\pi}\rho(\lambda),\quad \psi^*(\lambda)\psi(\lambda)\le\frac{1}{2\pi}\rho(\lambda)$$
$$(-\infty<\lambda<\infty),\tag{5.4}$$

то для них будут выполняться неравенства

$$\varphi(\lambda)\varphi^*(\lambda)\le\Phi(\lambda)\Phi^*(\lambda),\ \psi^*(\lambda)\psi(\lambda)\le\Psi^*(\lambda)\Psi(\lambda),$$
$$(-\infty<\lambda<\infty)\tag{5.5}$$

и даже неравенства

$$\varphi(z)\varphi^*(z)\le\Phi(z)\Phi^*(z),\ \psi^*(z)\psi(z)\le\Psi^*(z)\Psi(z)$$
$$(Im\ z>0).\tag{5.6}$$

Отметим, что при условии (4.8) в обоих неравенствах (5.3) имеет место равенство.

Существование экстремальных внешних функций, "подпирающих" (в смысле (5.3)) заданную неотрицательную матрицу функцию, было установлено Надем и Фояшем (см. работу /13/, гл. 5, § 4) с использованием рассуждений в духе теории Берлинга – Лакса – Хелсона – Лауденслегера инвариантных подпространств оператора сдвига. Мы не опираемся непосредственно на эти результаты Надя и Фояша.

6°. Нормированные радиусы $r_{g,l}$, $r_{d,l}$ (как при $l<\infty$, так и при $l=\infty$) связаны с решением некоторой экстремальной задачи для матричнозначного "квадратичного функционала", определенного на соответствующем классе аналитических матриц-функций.

Пусть $d\Sigma(\lambda)\geq 0$ – матричная мера, представляющая S на $(-\infty,\infty)$. Матричнозначный функционал, о котором идет речь, задается интегралом

$$I(f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,d\Sigma(\lambda)\,f^*(\lambda).\tag{6.1}$$

Аргументами этого "функционала" являются заданные на вещественной оси $n \times n$ матричные функции $f(\lambda)$, для которых этот интеграл существует. Множество таких матриц-функций f образует гильбертово пространство $L^2(d\Sigma)$. Скалярнозначный функционал $sp\, I(f)$ является квадратом нормы элемента f в $L^2(d\Sigma)$.

Пусть z_0 – фиксированная точка верхней (нижней) полуплоскости. Обозначим через $A_\infty(z_0)$ класс $n \times n$ матриц-функций, голоморфных и ограниченных в верхней (нижней) полуплоскости, непрерывных вплоть до вещественной оси и удовлетворяющих нормировочному условию

$$f(z_0) = I_n. \tag{6.2}$$

Для $l<\infty$ пусть $A_l(z_0)$ – подкласс тех функций f из $A_\infty(z_0)$, которые могут быть продолжены в комплексную плоскость до целых функций экспоненциального типа, не превосходящего l.

Мы покажем, что как при $l<\infty$, так и при $l=\infty$ в каждой точке z_0 верхней полуплоскости выполняются неравенства

$$r_{g,l}(z_0) \le \frac{1}{|z_0 - \bar z_0|} I(f), \quad (\forall f \in A_l(z_0)) \tag{6.3}$$

$$r_{d,l}(z_0) \le \frac{1}{|z_0 - \bar z_0|} I(g), \quad (\forall g \in A_l(\bar z_0)) \tag{6.4}$$

и что существуют (зависящие от z_0) последовательности $f_k \in A_l(z_0)$, $g_k \in A_l(\bar z_0)$, на которых в этих неравенствах достигаются асимптотические равенства

$$r_{g,l}(z_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|z_0 - \bar z_0|} I(f_k), \quad (f_k \in A_l(z_0)), \tag{6.5}$$

$$r_{d,l}(z_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|z_0 - \bar z_0|} I(g_k), \quad (g_k \in A_l(\bar z_0)). \tag{6.6}$$

Вместо двух функций $r_{g,l}(z), r_{d,l}(z)$ в верхней полуплоскости целесообразно рассматривать определенную в $\operatorname{Im} z \ne 0$ единую функцию $r_l(z)$

$$r_l(z) = \begin{cases} |z - \bar z|\, r_{g,l}(z), & (\operatorname{Im} z > 0), \quad (6.7) \\ |z - \bar z|\, r_{d,l}(\bar z), & (\operatorname{Im} z < 0). \quad (6.8) \end{cases}$$

Эта функция $r_l(z)$ не только формальное образование. Далее она естественно возникает из формулы как единая функция во всей комплексной плоскости.

Экстремальные свойства (6.3) – (6.6) могут быть переформулированы в терминах функции $r_l(z)$. Пусть $\operatorname{Im} z_0 \ne 0$. Тогда для любой функции $f \in A_l(z_0)$ выполняется неравенство

$$r_l(z_0) \le I(f), \quad (\forall f \in A_l(z_0)), \tag{6.9}$$

и существует (зависящая от z_0) последовательность $f_k \in A_l(z_0)$, на которой в этом неравенстве достигается асимптотическое равенство

$$r_l(z_0) = \lim_{k\to\infty} I(f_k), \qquad (f_k \in A_l(z_0)). \tag{6.10}$$

Это верно как при $l<\infty$, так и при $l=\infty$.

Таким образом, матрица $r_l(z_0)$ является наименьшим элементом* множества значений (точнее, замыкания множества значений) функционала $I(f)$ на классе $A_l(z_0)$.

Сформулированные выше утверждения о постоянстве рангов радиусов могут быть переформулированы в терминах функции $r_l(z)$:

$$\operatorname{rank} r_l(z) \equiv d_{+,l} \ (\operatorname{Im} z>0); \ \operatorname{rank} r_l(z) \equiv d_{-,l} \ (\operatorname{Im} z<0), \tag{6.11}$$

где переобозначено

$$d_{+,l} = d_{q,l}; \quad d_{-,l} = d_{d,l}. \tag{6.12}$$

При этом, если для некоторой точки z_0 ранг $r_l(z_0)$ максимален:

$$\exists z_0, \ z_0 \neq \bar{z}_0 : \operatorname{rank} r_l(z_0) = n, \tag{6.13}$$

то он и всюду равен n:

$$\operatorname{rank} r_l(z) \equiv n \quad (\forall z: \operatorname{Im} z \neq 0). \tag{6.14}$$

7^0. В скалярной ситуации (когда n = 1) тесно связанный с $r_l(z)$ (при $l<\infty$) функционал уже давно употреблялся в теории весовой аппроксимации целыми функциями ([15, 16]; П.Кусиса; Н.Левинсона; Б.Я.Левина и его учеников. Правда, в первых двух работах речь идет об аппроксимации многочленами и только о $\sup$-норме, но методы именно этих работ оказались решающими). Рассматривалась мера $d\sigma(\lambda)$ на вещественной оси и некоторое пространство многочленов или целых функций, и изучался вопрос, когда это пространство плотно в $L^2(d\sigma)$. В связи с этим вводился функционал

$$\mu(z) = \sup |f(z)|^2, \tag{7.1}$$

где $\sup$ взят по классу функций f из пространства, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\sigma(\lambda) \leq 1. \tag{7.2}$$

Доказывалась альтернатива: либо в некоторой невещественной точке z_0 выполняется $\mu(z_0)<\infty$ (в этом случае $\mu(z)<\infty$ для всех z и имеет место неполнота), либо $\mu(z) \equiv \infty$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$. В этом случае имеет место полнота. Функционал $\mu(z)$, конечно можно записать в виде

$$\mu(z) = \rho^{-1}(z), \tag{7.3}$$

где

$$\rho(z) = \inf \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\sigma(\lambda), \tag{7.4}$$

---

* Существование у этого множества наименьшего элемента (или хотя бы точной нижней грани) из общих соображений неочевидно, поскольку множество эрмитовых матриц не является линейно упорядоченным.

$\inf$ берется по классу всех f из пространства, удовлетворяющих в точке z нормировочному условию $f(z)=1$. Альтернатива, о которой шла речь, приобретает вид: либо существует точка z_0, $z_0 \neq \bar{z}_0$ такая, что $\rho(z_0)>0$ (в этом случае $\rho(z)>0$ для всех z), либо $\rho(z)\equiv 0$, $(Im\, z\neq 0)$.

Функционал $r_l(z)$ можно рассматривать как матричный аналог этого функционала $\rho(z)$ (в случае, когда речь идет о пространстве целых функций экспоненциального типа $\leq l$). Импликацию (6.13)→(6.14) можно рассматривать как аналог альтернативы, о которой шла речь, а утверждение (6.11) о стабильности рангов матрицы-функции $r_l(z)$ как дальнейшее обобщение альтернативы. Можно рассматривать вопросы весовой аппроксимации для целых матриц-функций (мы сделаем это в другом месте).

8^0. Из (6.9) – (6.10) следует, что число $sp\, r_l(z_0)$ является точной нижней гранью на $A_l(z_0)$ скалярнозначного квадратичного функционала $sp\, I(f)$ – квадрата нормы в $L^2(d\Sigma)$, а последовательность $f_k\in A_l(z_0)$ минимизирует этот скалярнозначный функционал точно тогда, когда она минимизирует на $A_l(z_0)$ (в смысле (6.10)) матричнозначный функционал $I(f)$. $A_l(z_0)$ – выпуклое множество в $L^2(d\Sigma)$; значит всякая последовательность $f_k\in A_l(z_0)$, минимизирующая квадрат нормы на $A_l(z_0)$, является последовательностью Коши. Поэтому существует и единственная $n\times n$ матрица-функция $F(\lambda)=F(\lambda, z_0)\in L^2(d\Sigma)$ такая, что для всякой удовлетворяющей (6.10) последовательности $f_k\in A_l(z_0)$ выполняется

$$I(f_k - F)\to 0, \quad (k\to\infty). \tag{8.1}$$

Конечно,

$$r_l(z_0) = I(F). \tag{8.2}$$

Функцию $F(\lambda)$ можно получить, рассматривая экстремальную задачу для скалярнозначного функционала $sp\, I(f)$, но $F(\lambda)$ одновременно является решением экстремальной задачи и для матричнозначного функционала $I(f)$.

При $l=\infty$ из экстремальных свойств функции $r_l(z)$ мы получим факторизуемость радиусов. При этом мы будем действовать методом Хелсона – Лауденслегера, приспосабливая его к нашей ситуации*. Экстремальные функции $F(\lambda)$ будут тем материалом, из которого мы будем строить функции Φ, Ψ, фигурирующие в соотношениях (5.3). Именно, фиксируем точку z_0, $(Im\, z_0>0)$. Пусть $F(\lambda,z_0)$, $F(\lambda,\bar{z}_0)$ – экстремальные функции, отвечающие "опорным" точкам $z_0\, \bar{z}_0$.

* У самих Хелсона и Лауденслегера речь шла о скалярнозначных функционалах типа $sp\, I(f)$, определенных на матрицах-функциях f, голоморфных в единичном круге, и в качестве "опорной" выбиралась точка $z_0=0$.

Тогда

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda-z_0}{\lambda-z}\,d\Sigma(\lambda)F^*(\lambda,z_0)\cdot T_+,\quad (Im\ z>0); \tag{8.3}$$

$$\Psi(z)=T_-\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda,\bar z_0)\,d\Sigma(\lambda)\frac{\lambda-z_0}{\lambda-z},\quad (Im\ z>0), \tag{8.4}$$

где T_+ , T_- - некоторые постоянные матрицы,

$$rank\ T_+=d_{g,\infty},\qquad rank\ T_-=d_{d,\infty} \tag{8.5}$$

Метод Хелсона - Лауденслегера непосредственно применим лишь в случае, когда плотность $\rho(\lambda)$ представляющей S на $(-\infty,\infty)$ меры $d\Sigma$ удовлетворяет условию (4.8); в этом случае он дает и факторизации плотности $\rho(\lambda)$ при $-\infty<\lambda<\infty$

$$\frac{1}{2\pi}\rho(\lambda)=\Phi(\lambda)\Phi^*(\lambda);\ \frac{1}{2\pi}\rho(\lambda)=\Psi^*(\lambda)\Psi(\lambda). \tag{8.6}$$

Если же условие (4.8) не выполняется, то метод Хелсона - Лауденслегера непосредственно неприменим, и нам приходится регуляризовать исходную задачу, переходя от исходной меры $d\Sigma$ к возмущенной - "регуляризованной" - мере $d\Sigma_\varepsilon$, для плотности $\rho_\varepsilon(\lambda)$ уже выполняется условие (4.8). Радиусы регуляризованной задачи факторизуются в виде (5.1), (5.2), а для плотности $\rho_\varepsilon(\lambda)$ выполняются равенства типа (8.6). Затем совершается монотонный предельный переход по параметру регуляризации. При этом предельном переходе радиусы регуляризованной задачи стремятся к радиусам исходной задачи, а из равенств типа (8.6) для регуляризованной плотности получаются лишь неравенства для исходной плотности типа (5.3). Формулы (8.3), (8.4) предельный переход выдерживают.

9^0. Регуляризация, о которой идет речь, такова. Пусть $\hat\rho(\lambda)\geq 0$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ - фиксированная $n\times n$ матричная функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} sp\ \hat\rho(\lambda)\,d\lambda<\infty, \tag{9.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\det\hat\rho(\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\lambda>-\infty\ . \tag{9.2}$$

Пусть

$$d\Sigma(\lambda)=\rho(\lambda)d\lambda+d\sigma_s(\lambda) \tag{9.3}$$

- разложение на абсолютно непрерывную и сингулярную компоненты меры, дающей интегральное представление исходной S на $(-\infty,\infty)$.

Пусть $\varepsilon>0$. Положим

$$\rho_\varepsilon(\lambda)=\rho(\lambda)+\varepsilon\hat\rho(\lambda); \tag{9.4}$$

$$d\Sigma_\varepsilon(\lambda)=\rho_\varepsilon(\lambda)d\lambda+d\sigma_s(\lambda) \tag{9.5}$$

или

$$d\Sigma_\varepsilon(\lambda) = d\Sigma(\lambda) + \varepsilon\hat\rho(\lambda)d\lambda\,. \tag{9.6}$$

Функции

$$\hat s(t) \overset{def}{=\!=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}\hat\rho(\lambda)d\lambda\,;$$

и

$$s_\varepsilon(t) = s(t) + \varepsilon\hat s(t)$$

эрмитово положительны на всей вещественной оси.

Введем в рассмотрение $n\times n$ матричные ядра

$$K(x,y) = s(x-y),\quad R(x,y) = \hat s(x-y)\,;$$
$$K_\varepsilon(x,y) = s_\varepsilon(x-y) = K(x,y) + \varepsilon R(x,y)\,,$$

определенные при $0\le x,y<\infty$. Пусть $0<l<\infty$. В пространстве $L^2(0,l)$ $n\times n$ матриц-функций со скалярным произведением

$$(A,B)_l = sp\int_0^l A(t)B^*(t)dt$$

рассмотрим интегральные операторы K_l, R_l, $K_{l,\varepsilon}$, порожденные в $L^2(0,l)$ ядрами $K(x,y)$, $R(x,y)$, $K_\varepsilon(x,y)$ (точнее, сужениями этих ядер на $0\le x,y\le l$). (Оператор R является регуляризатором в смысле работы [5]).

Употребляется система бра-кэт обозначений типа использованной в работе [4]. Через $<|>_l$ обозначен матричнозначный билинейный "функционал" в $L^2(0,l)$

$$<X|Y>_l \overset{def}{=\!=} \int_0^l X(t)Y(t)dt\,. \tag{9.7}$$

(Таким образом, скалярное произведение в $L^2(0,l)$ может быть записано в виде $(A,B)_l = sp<A|B^*>_l$). Выражение $<X|K_l|Y^*>_l$, к примеру, означает

$$<X|K_l|Y^*>_l \overset{def}{=\!=} \int_0^l\int_0^l X(t)K(t,\tau)Y^*(\tau)dtd\tau -$$

оно является $n\times n$ -матрицей.

10^0. При $\delta>0$ операторы $K_{l,\varepsilon}+\delta I_l$, $K_l+\delta I_l$ положительны и обратимы в $L^2(0,l)$, а значит определены матрицы

$$<u^*(z)|(K_{l,\varepsilon}+\delta I_l)^{-1}|u(z)>_l^{-1}\,; \tag{10.1}$$

$$<u^*(z)|(K_l+\delta I_l)^{-1}|u(z)>_l^{-1}, \tag{10.2}$$

где

$$u(t,z) = e^{-itz}I_n \quad (0\le t<\infty). \tag{10.3}$$

При убывании δ эти матрицы монотонно убывают, значит существуют пределы

$$\rho_{l,\varepsilon}(z) = \lim_{\delta\to+0} <u^*(z)|(K_{l,\varepsilon}+\delta I_l)^{-1}|u(z)>_l^{-1}; \tag{10.4}$$

$$\rho_l(z) = \lim_{\delta\to+0} < u^*(z)|(K_l+\delta I_l)^{-1}|\, u(z)>_l^{-1} . \qquad (10.5)$$

При каждом фиксированном $\delta>0$ матрица (10.1) при $\varepsilon\downarrow+0$ монотонно убывает к матрице (10.2). При таких условиях монотонности повторные предельные переходы можно переставлять. Поэтому

$$\rho_l(z) = \lim_{\varepsilon\to+0} \rho_{l,\varepsilon}(z). \qquad (10.6)$$

Одним из результатов построенной нами теории, о которой шла речь в п.[0] 2, являются выражения для радиусов $\rho_{g,l}(z)$, $\rho_{d,l}(z)$, о которых шла речь в п.[0] 3. Именно, мы показали, что

$$\rho_{g,l}(z) = \frac{1}{|z-\bar z|}\rho_l(z), \quad (Im\, z>0); \qquad (10.7)$$

$$\rho_{d,l}(z) = \frac{1}{|z-\bar z|}\rho_l(\bar z), \quad (Im\, z>0). \qquad (10.8)$$

Мы принимаем здесь эти формулы как данные. Доказательство будет помещено в статье, посвященной изложению упомянутой теории.

Формулы (10.7), (10.8) показывают, что радиусы $\rho_{g,l}$, $\rho_{d,l}$, определенные в верхней полуплоскости, порождаются функцией $\rho_l(z)$, которую ввиду (10.5) естественно считать единой функцией, заданной во всей комплексной плоскости. Поэтому функцию $r_l(z)$, (6.7)-(6.8), порождающую нормированные радиусы, тоже естественно считать функцией, заданной во всей комплексной плоскости

$$r_l(z) = \begin{cases} e^{2ly}\rho_l(z), & (Im\, z>0), \\ \rho_l(z), & (Im\, z<0). \end{cases} \qquad (10.9)$$

Нам понадобится также функция

$$r_{l,\varepsilon}(z) = \begin{cases} e^{2ly}\rho_{l,\varepsilon}(z), & (Im\, z>0), \\ \rho_{l,\varepsilon}(z), & (Im\, z<0). \end{cases} \qquad (10.10)$$

При каждом $l\in(0,\infty)$ функция $r_{l,\varepsilon}$ монотонно убывает при убывании ε, согласно (10.6)

$$r_l(z) = \lim_{\varepsilon\to+0} r_{l,\varepsilon}(z). \qquad (10.11)$$

Мы покажем, используя формулы (10.4), (10.10), что при кажом $\varepsilon>0$ функция $r_{l,\varepsilon}(z)$ монотонно убывает при возрастании l, значит существует предел

$$r_{\infty,\varepsilon}(z) = \lim_{l\to\infty} r_{l,\varepsilon}(z). \qquad (10.12)$$

При таких условиях монотонности повторные предельные переходы можно переставить

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{\varepsilon\to+0} r_{l,\varepsilon}(z) = \lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{l\to\infty} r_{l,\varepsilon}(z). \qquad (10.13)$$

Напомним ((4.5), (6.7), (6.8)), что

$$r_\infty(z) = \lim_{l\to\infty} r_l(z). \tag{10.14}$$

Таким образом,

$$r_\infty(z) = \lim_{\varepsilon\to+0} r_{\infty,\varepsilon}(z). \tag{10.15}$$

Аналогично тому, как через функцию $r_l(z)$ выражались нормированные радиусы исходной задачи (при $0<l\le\infty$), так через функцию $r_{l,\varepsilon}(z)$ выражаются нормированные радиусы регуляризованной задачи на $(0,l)$, $(0<l<\infty)$, т.е. задачи об интегральном представлении на $(0,l)$ регуляризованной функции $s_\varepsilon(t)$

$$r_{g,l,\varepsilon}(z) = \frac{1}{|z-\bar z|}\, r_{l,\varepsilon}(z), \quad (\operatorname{Im} z>0); \tag{10.16}$$

$$r_{d,l,\varepsilon}(z) = \frac{1}{|z-\bar z|}\, r_{l,\varepsilon}(\bar z), \quad (\operatorname{Im} z>0). \tag{10.17}$$

Заметим, что поскольку при $\varepsilon>0$ для плотности $\rho_\varepsilon(\lambda)$ меры, представляющей регуляризованную функцию s_ε, выполнено условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\det\rho_\varepsilon(\lambda)}{1+\lambda^2}\, d\lambda > -\infty, \tag{10.18}$$

то нормированные предельные радиусы $r_{g,\infty,\varepsilon} = \Phi_\varepsilon(z)\,\Phi_\varepsilon^*(z)$, $r_{d,\infty,\varepsilon} = \Psi_\varepsilon^*(z)\,\Psi_\varepsilon(z)$ строго положительны, а тогда ввиду монотонности по l и подавно строго положительны "допредельные радиусы" $r_{g,l,\varepsilon}(z)$, $r_{d,l,\varepsilon}(z)$ при $l<\infty$. Таким образом, для регуляризованной задачи на каждом конечном промежутке имеет место вполне неопределенная ситуация.

1. Крейн М.Г. Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексами дефекта (m,m). – Укр. мат. журнал, 1949, 1, № 2, с. 3-66.
2. Лившиц М.С. Об одном применении теории эрмитовых операторов к обобщенной проблеме моментов. – Докл. АН СССР, 1944, 44, № 1, с. 3-7.
3. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Интегральное представление эрмитово положительных функций. – Рукопись депонирована в ВИНИТИ, Харьков, 1981, № 2984 – 81 деп.
4. Кацнельсон В.Э. Методы J-теории в континуальных интерполяционных задачах анализа. 1. Харьков, 1983. – Рукопись депонирована в ВИНИТИ, № 171 – 83 деп.
5. Кацнельсон В.Э. Регуляризация основного матричного неравенства задачи о разложении положительно определенного ядра на элементарные произведения. – Докл. АН УССР. Сер. А, 1984, № 3, с.6-8.
6. Орлов С.А. Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теорема об инвариантности рангов предельных радиусов. – Изв. АН СССР. Сер. мат., 1976, 10, № 3, с. 593-644.
7. Орлов С.А. Параметризация предельных матричных кругов, аналитически зависящих от параметра. – В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков. Изд-во Харьков. ун-та, 1984, вып. 41, с. 96-107.
8. Шмульян Ю.Л. Операторные шары. – В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков. Изд-во Харьков.ун-та, 1967, вып. 6, с. 68-81.

9. Шмульян Ю.Л. О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами и операторных шарах. - Матем. сборник, 1968, 77, № 3, с. 335-353.
10. Шмульян Ю.Л. Дробно-линейные преобразования верхней операторной полуплоскотси. - Известия вузов. Сер. мат., 1969, № 1, с. 95-107.
11. Шмульян Ю.Л. Общие дробно-линейные преобразования операторных шаров. - Сибирский мат. журн., 1978, 19, № 2, с. 418-425.
12. Дубовой В.К. Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций. II. В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, Изд-во Харьков. ун-та, 1982, вып. 38, с. 32-39.
13. Секефальви - Надь Б., Фояш Ч. - Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. - М.: Мир, 1970. - 431 с.
14. Ковалишина И.В. J-растягивающие матрицы-функции в задаче Каратеодори. - Докл. АН Арм. ССР, 1974, 59, № 3, с. 129-135.
15. Мергелян С.Н. Весовые приближения многочленами. - Успехи мат. наук., 1956, 11, № 3, с. 107-152.
16. Ахиезер Н.И. О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси. - Успехи мат.наук, 1956, 11, № 4, с. 3-43.

УДК 517.535.4

П.З.Агранович, В.Н.Логвиненко

ДВУЧЛЕННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ И КАНОНИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДЖРБАШЯНА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА

В настоящей работе авторы продолжают исследования, связанные с двучленными асимптотическими разложениями целых функций и канонических произведений Джрбашяна для полуплоскости. В работах [1-3] показано, как уточняются некоторые утверждения теории функций вполне регулярного роста Б.Я.Левина - А.Пфлюгера для случая двучленных асимптотических представлений в предположении, что порядок рассматриваемых функций - нецелое число и корни лежат на конечной системе лучей. В работе [4] рассмотрены целые функции целого порядка с корнями на одном луче. Методы, развитые в работе [3], позволяют получить не только более точные результаты в случае целой функции целого порядка с корнями на одном луче, но и изучить связь между двучленными асимптотическими представлениями логарифма модуля целой функции или канонического произведения Джрбашяна целого порядка с корнями на конечной системе лучей и функциями, считающими эти корни на каждом из лучей. Аналогичная связь установлена и для субгармонических функций. Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. Пусть $u(z)$ - канонический потенциал, все массы которого положительны, и пусть функция $\mu(t)$ ассоциированная по Риссу функции $u(z)$, удовлетворяет условию

$$\mu(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t\le 1, \\ \Delta t^{\rho}+\Delta_1 t^{\rho_1}+\varphi(t), & t>1, \end{cases}$$

где ρ – натуральное число; $\rho-1<\rho_1<\rho$, $\Delta>0$, а для функции $\varphi(t)$ выполняется соотношение

$$\int_T^{2T}|\varphi(t)|^q\,dt=o(T^{\rho_1 q+1}),\quad T\to\infty,\quad q\geq 1. \tag{1}$$

Тогда

$$u(z)=Re\{\Delta z^{\rho}\ln(1-z)\}+Ar^{\rho}\cos\rho\theta-\frac{\pi\Delta_1 r^{\rho_1}}{\sin\pi\rho_1}\cos\rho_1(\theta-\pi)+\psi(z),\ z=re^{i\theta},$$

где $A=\int_1^{\infty}\frac{\mu(t)-\Delta t^{\rho}}{t^{\rho+1}}dt$, а функция $\psi(re^{i\theta})=o(r^{\rho_1})$ при $r\to\infty$ равномерно по $\theta\in[0,2\pi]$, если точка $z=re^{i\theta}$ не принадлежит некоторому C_0 – множеству.

Если в оценке (1) число $q>1$, то

$$\int_T^{2T}\sup_{\theta}|\psi(re^{i\theta})|^q\,dr=o(T^{\rho_1 q+1}),\quad T\to\infty. \tag{2}$$

Заметим, что для целых функций $f(z)$ верен более сильный результат: получено двучленное асимптотическое представление и для $\arg f(z)$.

Теорема 2. Пусть $f(z)$ – каноническое произведение Вейерштрасса порядка ρ, все корни которого положительны, и пусть для функции $n(t)$, считающей эти корни, выполняется соотношение

$$n(t)=\Delta t^{\rho}+\Delta_1 t^{\rho_1}+\varphi(t),$$

где ρ – натуральное число; $\rho-1<\rho_1<\rho$, $\Delta>0$, а для функции $\varphi(t)$ при некотором $q\geq 1$ имеет место асимптотическая оценка (1). Тогда

$$\ln f(re^{i\theta})=\Delta z^{\rho}\ln(1-z)+Az^{\rho}+\frac{\pi\Delta_1 r^{\rho_1}}{\sin\pi\rho_1}e^{i\rho_1(\theta-\pi)}+\psi(z),\quad z=re^{i\theta},$$

где $A=\int_1^{\infty}\frac{n(t)-\Delta t^{\rho}}{t^{\rho+1}}dt$ и функция $\psi(re^{i\theta})=o(r^{\rho_1})$ при $r\to\infty$ равномерно по $\theta\in[0,2\pi]$, если точка $z=re^{i\theta}$ не принадлежит некоторому C_0-множеству.

Если в условии (1) число $q>1$, то имеет место (2).

Следующая теорема в некотором смысле обратна теореме 1.

Теорема 3. Пусть $u(z)$, $z\in\mathbb{C}$ – канонический потенциал целого порядка $\rho>0$, и пусть все массы μ функции $u(z)$ положительны и $\mu(t)=0$, $0\le t\le 1$. Предположим, что справедливо соотношение

$$u(x)=\Delta x^{\rho}\ln|1-x|+Ax^{\rho}+\pi\Delta_1 x^{\rho_1}\cdot ctg\,\pi\rho_1+\psi(x),\quad x>0, \tag{3}$$

где $\rho-\frac{1}{2}<\rho_1<\rho$, A – некоторая константа, а для функции $\psi(x)$ при некотором $q>1$ справедлива асимптотическая оценка

$$\int_T^{2T} |\varphi(x)|^q \, dx = o\,(T^{\rho_1 q+1}), \quad T \to \infty .$$

Тогда функция $\mu(t)$ имеет вид

$$\mu(t) = \Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1} + \varphi(t), \tag{4}$$

причем остаточный член $\varphi(t)$ удовлетворяет соотношению (1).

Для любой пары чисел ρ и ρ_1, для которых $\rho-1<\rho_1<\rho-\frac{1}{2}$, найдется субгармонический потенциал $u(z)$, для которого выполнены условия теоремы, а соотношения (4), (1) не имеют места.

Результат теоремы 1, очевидным образом, обобщается на случай, когда массы канонического потенциала лежат на конечной системе лучей, а для ассоциированной ему по Риссу меры на каждом луче имеет место двучленное асимптотическое разложение. Естественно возникает вопрос о справедливости обратного утверждения. Нами доказан несколько более общий результат, для формулировки которого введем следующие обозначения.

Пусть $0 \le \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < 2\pi$, а ρ – положительное число. Положим

$$\alpha_j = \left[\rho \frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{\pi}\right] \frac{\pi}{\theta_{j+1}-\theta_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\alpha_{n+j} = \left(\left[\rho \frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{\pi}\right]-1\right) \frac{\pi}{\theta_{j+1}-\theta_j}, \quad j=1,\ldots,n, \qquad \theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi .$$

Упорядочим множество $\{\alpha_j\}_1^{2n}$, т.е. будем считать, что $\alpha_{k_1} \ge \alpha_{k_2} \ge \ldots \ge \alpha_{k_{2n}}$. Предположим, что $\alpha_{k_1} = \alpha_{k_2} = \ldots = \tilde{\alpha}_1, \ldots, \alpha_{k_{p_{m-1}+1}} = \ldots = \alpha_{k_{p_m}} = \tilde{\alpha}_m$ и обозначим через $\mathfrak{A}_j$, $j=1,\ldots,m$, матрицы

$$\mathfrak{A}_j = \begin{pmatrix} \cos\tilde{\alpha}_j(\theta_1-\theta_{p_{j-1}+1}-\pi) \ldots \cos\tilde{\alpha}_j(\theta_1-\theta_{p_j}-\pi) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos\tilde{\alpha}_j(\theta_n-\theta_{p_{j-1}+1}-\pi) \ldots \cos\tilde{\alpha}_j(\theta_n-\theta_{p_j}-\pi) \end{pmatrix}.$$

Теорема 4. Пусть $u(z)$, $z \in \mathbb{C}$ – канонический потенциал целого порядка $\rho > 0$, все массы μ которого расположены на конечной системе лучей $\arg z = \theta_j$, $j=1,\ldots,n$, и $\mu(t)=0$, $0 \le t \le 1$. Пусть далее число ρ_1 таково, что $\rho-1<\rho_1<\rho$, $\rho_1(\theta_{j+1}-\theta_j)/\pi$ – нецелые при любом j и выполнено хотя бы одно из условий: существует номер j_0, $1 \le j_0 \le n$, такой, что

$$\rho_1 > \alpha_{j_0}; \tag{5}$$

Если выполняется неравенство $\rho_1 < \tilde{\alpha}_j$, то $\operatorname{rang} \mathfrak{A}_j$ – максимален, $j = 1, \ldots, m.$ (6)

Предположим, что для функции $u(z)$ имеют место следующие соотношения:

$$u(re^{i\theta_j}) = r^{\rho} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[\Delta_k e^{i\rho(\theta_j-\theta_k)} \ln(1-re^{i(\theta_j-\theta_k)}) \right.\right. +$$

$$+ A_k e^{i\rho(\theta_j-\theta_k)}]\} + \frac{\pi r^{\rho_1}}{\sin \pi\rho_1} \sum_{k=1}^{n} \Delta_k^1 \cos\rho_1(\theta_j-\theta_k-\pi) + \varphi(re^{i\theta_j}),$$

$$j = 1, \ldots, n,$$

$$\int_T^{2T} \sup_j |\varphi(re^{i\theta_j})|^q dr = o(T^{\rho_1 q+1}), \quad T \to \infty, \quad q > 1,$$

где A_k – некоторые константы.

Тогда функция $\mu_j(t) = \mu(\{z: 0<|z|<t, \ \arg z = \theta_j\})$ имеет вид

$$\mu_j(t) = \Delta_j t^{\rho} + \Delta_j^1 t^{\rho_1} + \varphi_j(t), \tag{7}$$

где

$$\int_T^{2T} |\varphi_j(t)|^q dt = o(T^{\rho_1 q+1}), \quad T \to \infty, \quad j = 1, \ldots, n \tag{8}$$

Если условия (5) и (6) не выполняются, то при данных $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$, ρ и ρ_1 существует такой канонический потенциал $u(z)$, для которого выполнены условия теоремы, а асимптотические формулы (7), (8) не имеют места.

Аналогичные результаты верны и для канонического произведения Джрбашяна для полуплоскости целого порядка. Приведем для примера аналоги теорем 2 и 3.

Теорема 2$'$. Пусть точки $1 < b_1 < b_2 < \ldots$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(Re \frac{1}{b_n}\right)^{\rho} = \infty; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(Re \frac{1}{b_n}\right)^{\rho+1} < \infty$$

и пусть для функции $n(t)$, считающей эти точки, выполняется соотношение

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1} + \varphi(t),$$

где ρ – натуральное число; $\rho-1 < \rho_1 < \rho$, $\Delta > 0$, а для функции $\varphi(t)$ при некотором $q \geq 1$ имеет место асимптотическая оценка

$$\int_T^{2T} |\varphi(t)|^q dt = o(T^{\rho_1 q+1}), \quad T \to \infty. \tag{9}$$

Тогда для канонического произведения Джрбашяна в правой полуплоскости

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{2b_n(z+1)}{(z+b_n)(b_n+1)}; \rho\right),$$

где $G(u;\rho)$ – первичный множитель Вейерштрасса справедливо следующее соотношение:

$$\ln F(z) = \Delta(z+1)^{\rho} \ln(b_1 - z) + \frac{\pi\Delta_1}{\sin \pi\rho_1} \{A(z,\rho_1) + z^{\rho_1} e^{-i\pi\rho_1}\} +$$

$$+ f(z) + \varphi(z),$$

где $A(z;\rho_1)=-(-1)^{\rho} z^{\rho+\rho_1+2} \sum_{j=0}^{\rho} C_{\rho+j}^{\rho} (-1)^j (1-z)^{-(\rho+j+1)} \sum_{k=0}^{\rho-1} 2^{\rho-k} \times$

$$\times z^{-(k+1)}(1+z)^{j+k}-(-1)^{\rho}\sum_{j=1}^{\rho}\frac{1}{j!}(\rho+\rho_1)\cdot\ldots\cdot(\rho+\rho_1+1-j)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\rho-j} C_{\rho+k}^{k}(1-z)^{-(\rho+k+1)}\sum_{l=0}^{\rho-j-k} 2^{\rho-l} z^{\rho+\rho_1-j-l+1}(-1)^{k+j}(1+z)^{j+k+l};$$

$$f(z)=(z+1)^{\rho+1}\left\{\int_{b_1}^{\infty}\frac{n(t)-\Delta t^{\rho}}{t^{\rho+1}}dt-\int_{b_1}^{\infty}\frac{tn(t)[z^{\rho}+(C_{\rho+1}^{1}+1)tz^{\rho-1}+\ldots+(C_{\rho+1}^{1}+\ldots+1)t^{\rho}]}{(t-1)(t+1)^{\rho+1}(z+t)^{\rho+1}}dt\right\},$$

а функция $\varphi(re^{i\theta})=o(r^{\rho_1})$ при $r\to\infty$ равномерно по $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3}{2}\pi,2\pi]$, если точка $z=re^{i\theta}$ не принадлежит некоторому C_0-множеству.

Если в условии (9) число $q>1$, то

$$\int_T^{2T}\sup\{|\varphi(re^{i\theta})|^q:\theta\in[0,\tfrac{\pi}{2}]\cup[\tfrac{3}{2}\pi,2\pi]\}dr=o(T^{\rho_1 q+1}),\quad T\to\infty,$$

<u>Теорема 3′</u>. Пусть $F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{2b_n(z+1)}{(z+b_n)(b_n+1)};\rho\right)$ – каноническое произведение Джрбашяна с корнями $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $1<b_1<b_2,\ldots,$ для которого справедливы соотношения

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty,\,Re\,z>0}}\ \ln|F(z)|/(|z|^{\rho}\ln|z|)<\infty,\quad \rho\in N,$$

$$\ln|F(x)|=Re\left\{\Delta(z+1)^{\rho}\ln(b_1-z)+\frac{\pi A_1}{\sin\pi\rho_1}[A(z;\rho_1)+z^{\rho_1}e^{-i\pi\rho_1}]+\right.$$
$$\left.+f(z)+\varphi(z)\right\},$$

где $\rho-\frac{1}{2}<\rho_1<\rho$, величина $A(z;\rho_1)$ такая же, как в теореме 2′.

$$f(z)=(z+1)^{\rho+1}\left\{\int_{b_1}^{\infty}\frac{n(t)-\Delta t^{\rho}}{t^{\rho+1}}dt-\int_{b_1}^{\infty}\frac{tn(t)[z^{\rho}+(C_{\rho+1}^{1}+1)tz^{\rho-1}+\ldots+(C_{\rho+1}^{1}+\ldots+1)t^{\rho}]}{(t-1)(t+1)^{\rho+1}(t+z)^{\rho+1}}\times\right.$$
$$\left.\times dt\right\},$$

а

$$\int_T^{2T}|\varphi(x)|^q dx=o(T^{\rho_1 q+1}),\quad T\to\infty,$$

при некотором $q>1$.

Тогда функция $n(t)$, считающая точки b_n, имеет вид

$$n(t)=\Delta t^{\rho}+A_1 t^{\rho_1}+\varphi(t),$$

где

$$\int_T^{2T}|\varphi(t)|^q dt=o(T^{\rho_1 q+1}),\quad T\to\infty.$$

Доказательства этих результатов мы не приводим, поскольку они лишь техническими деталями отличаются от доказательств соответствующих теорем работ [3].

<u>Замечание</u>. Отметим, что в условии (3) величина

$$A=\int_1^{\infty}\frac{\mu(t)-\Delta t^{\rho}}{t^{\rho+1}}dt.$$

1. Логвиненко В.Н. О целых функциях с нулями на полупрямой. I. – В кн.: Теория функций, функц. анализ и их приложения. Изд-во, 1972, вып. 16, с. 154-158.
2. Логвиненко В.Н. О целых функциях с нулями на полупрямой. II. – В кн.: Теория функций, функц. анализ и их приложения. Изд-во Харьковск. ун-та, 1973, вып. 17, с. 84-99.
3. Агранович П.З., Логвиненко В.Н. Аналог теоремы Валирона – Титчмарша для двучленных асимптотик субгармонической функции с массами на конечной системе лучей. – Харьков, 1983. – 28 с.(Препринт /ФТИНТ АН УССР: 18-83).
4. Логвиненко В.Н. Асимптотические свойства целых функций: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат.наук. – Харьков, 1972. – 151 с.

УДК 517.55

П.З.Агранович, Л.И.Ронкин

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМ ПОВЕДЕНИЕМ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Пусть $f(z)$, $z\in\mathbb{C}^n$ – целая функция уточненного порядка $\rho(t)\,/\rho(t)\to\rho>0$ при $t\to\infty/$. Следуя Лелону, круговым индикатором целой функции $f(z)$ назовем функцию

$$L_c^*(z;\rho(r);f)=\overline{\lim_{z'\to z}}\ \overline{\lim_{|u|\to\infty}}\ \frac{\ln|f(uz)|}{|u|^{\rho(|u|)}}\ ,\quad z\in\mathbb{C}^n,\ u\in\mathbb{C}.$$

Эта функция является плюрисубгармонической в $\mathbb{C}^n$ и удовлетворяет условию

$$L_c^*(uz;\rho(r);f)=|u|^{\rho}L_c^*(z;\rho(r);f).$$

Указанные свойства кругового индикатора являются характеристическими; в частности существует плюрисубгармоническая функция с заданным индикатором. Однако при использовании L^2-методов решения $\bar\partial$ -проблемы в некоторых задачах теории функций возникает необходимость в существовании плюрисубгармонических функций с более точной асимптотикой на бесконечности. В нашей работе, примыкающей по методу к работе Ронкина*, получена следующая теорема.

Теорема. Пусть $\varphi(z)$ – плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^n$ функция, удовлетворяющая условию

$$\varphi(uz)=|u|^{\rho}\varphi(z),\quad u\in\mathbb{C}. \tag{1}$$

Тогда существует такая плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^n$ функция $u(z)$, что

$$\frac{u(tz)}{t^{\rho(t)}}\rightrightarrows\varphi(z),\quad t\to\infty,$$

где $\rho(t)$ – уточненный порядок, $\rho(t)\to\rho$ при $t\to\infty$.

* Ронкин Л.И. О существовании плюрисубгармонических функций с заданным типом (индикатором) при уточненном порядке по выделенной переменной. – В кн.: Теория функций, функц.анализ и их приложения, Изд-во Харьковск.ун-та, 1984, вып. 41, с.115-119.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В дальнейшем будем понимать дифференцирование как действие в пространстве обобщенных функций. Отметим, что у любой плюрисубгармонической функции первые производные в смысле обобщенных функций являются обычными локально суммируемыми функциями.

Обозначим

$$grad_z = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right).$$

Поскольку $\varphi(z)$ – плюрисубгармоническая функция, удовлетворяющая условию (1), то непосредственно проверяется, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \bar{w}_j \geq \frac{1}{\varphi(z)} \left|(grad_z \varphi, w)\right|^2 {}^{*}. \qquad (2)$$

Функцию $u(z)$ будем искать в виде

$$u(z) = u_0(z) + u_1(z) + C \ln(1 + |z|^2),$$

полагая

$$u_0(z) = \varphi(z) |z|^{\rho(|z|) - \rho},$$

$$u_1(z) = e^{\varphi\left(\frac{z}{|z|}\right)} \beta(|z|^2) |z|^{\rho(|z|)},$$

где положительная бесконечно дифференцируемая функция $\beta(t) \downarrow 0$, $t \to \infty$ будет определена ниже.

Далее будем предполагать, что $\rho(t) \in C^\infty(R^+)$, $\rho^{(n)}(0) = 0$, $\forall n = 0, 1, \dots$ и $\lim_{t \to \infty} t^2 \rho''(t) \ln t = 0$. Эти предположения не нарушают общности, поскольку всегда существует эквивалентный данному уточненный порядок с указанными свойствами.

Нетрудно показать, что форма Леви функции $u_0(z)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_0(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \bar{w}_j \geq -|z|^{\rho(|z|) - \rho - 2} \left|(grad_z \varphi, \bar{w})\right| \left|\sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i\right| \gamma_1(|z|), \qquad (3)$$

где $\gamma_1(|z|) \to 0$ при $|z| \to \infty$ и $\gamma_1(t) \geq 0$ $\forall t \geq 0$, а для формы Леви функции $u_1(z)$ имеет место соотношение

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_1(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \bar{w}_j \geq e^{\varphi\left(\frac{z}{|z|}\right)} \beta(|z|^2) |z|^{\rho(|z|) - 2\rho} \left\{ \frac{|z|^\rho}{\varphi(z)} \left|(grad_z \varphi, \bar{w})\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \left|(grad_z \varphi, \bar{w})\right|^2 \right\} e^{\varphi\left(\frac{z}{|z|}\right)} |z|^{\rho(|z|) - \rho - 2} A_1(z) \left|(grad_z \varphi, \bar{w})\right| \times$$

---

* Условие (2) эквивалентно тому, что функция $\varphi(z)$ является логарифмически плюрисубгармонической.

$$\times\Big|\sum_{i=1}^{n} z_i\bar{w}_i\Big|^2-\beta'(|z|^2)|z|^2\,|(grad_z\varphi,\bar{w})|\Big|\sum_{i=1}^{n} z_i\bar{w}_i\Big|+e^{\varphi(\frac{z}{|z|})}\times$$

$$\times\frac{|z|^{\rho(|z|)-4}}{4}A_2(z)\Big|\sum_{i=1}^{n} z_i\bar{w}_i\Big|^2,$$

где

$$A_1(z)=\beta'(|z|^2)|z|^2+\beta(|z|^2)\Big[\rho(|z|)-\rho+|z|\rho'(|z|)\ln|z|+\frac{\rho\varphi(z)}{|z|^{\rho}}\Big],$$

$$A_2(z)=4\beta''(|z|^2)|z|^4+2\beta'(|z|^2)\Big[\rho(|z|)+|z|\rho'(|z|)\ln|z|-$$

$$-\frac{\rho\varphi(z)}{|z|^{\rho}}+1\Big\}|z|^2+\beta(|z|^2)\Big\{\frac{\rho^2\varphi^2(z)}{|z|^{2\rho}}+\frac{[\rho-\rho(|z|)]\rho\varphi(z)}{|z|^{\rho}}+\frac{2\rho\varphi(z)}{|z|^{\rho}}-$$

$$-\frac{\rho\varphi(z)\rho'(|z|)|z|\ln|z|}{|z|^{\rho}}+[\rho(|z|)+|z|\rho'(|z|)\ln|z|]^2+\rho''(|z|)|z|^2\ln|z|+$$

$$+2|z|\rho'(|z|)-|z|\rho'(|z|)\ln|z|-2\rho(|z|)\Big)\Big].$$

Пусть $æ(t)$ – произвольная положительная функция при $t\geqslant 0$ и $æ(t)\downarrow 0$ при $t\to\infty$. Возьмем в качестве $\beta(t)$ лагорифмически выпуклую функцию, удовлетворяющую условиям

$$\beta(t)\geqslant æ(t)\quad \forall t>0; \tag{4}$$

$$\frac{t\beta'(t)}{\beta(t)}\geqslant -\big|2t\rho'(t)+t\rho''(t)\ln t+t^2\rho''(t)\ln t\big|,\quad \forall t>0. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что такая функция $\beta(t)$ существует для произвольной функции $æ(t)$.

Из условия (4) и выпуклости функции $\ln\beta(t)$ следует, что при $|z|\to\infty$

$$\beta(|z|^2)A_2(z)=A_1^2(z)(1+\alpha(z)),$$

где $\alpha(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u_1(z)}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}w_i\bar{w}_j\geqslant e^{\varphi(\frac{z}{|z|})}|z|^{\rho(|z|)-\rho-2}\Big|\sum_{i=1}^{n} z_i\bar{w}_i\Big|\times$$

$$\times\sqrt{1+\frac{|z|^{\rho}}{\varphi(z)}A_2(z)\beta(|z|^2)}\,|(grad_z\varphi,\bar{w})|-e^{\varphi(\frac{z}{|z|})}|z|^{\rho(|z|)-\rho-2}\times$$

$$\times\Big|\sum_{i=1}^{n} z_i\bar{w}_i\Big|A_1(z)|(grad_z\varphi,\bar{w})|=e^{\varphi(\frac{z}{|z|})}|z|^{\rho(|z|)-\rho-2}\cdot|(grad_z\varphi,\bar{w})|\times$$

$$\times A_1(z)\Big|\sum z_i w_i\Big|\Big\{\sqrt{1+\frac{1}{\varphi(\frac{z}{|z|})}}-1\Big\}. \tag{6}$$

Заметим, что в силу (5) при $|z|\to\infty$

$$A_1(z)\geqslant\frac{1}{2}\beta(|z|^2)\rho. \tag{7}$$

Обозначим

$$\tilde{v}(z)=u_0(z)+u_1(z).$$

Тогда в силу (3), (6) и (7), выбрав в качестве $\varkappa(z)$ функцию $\frac{8\gamma_1(z)\varphi(\frac{z}{|z|})}{e^{\varphi(\frac{z}{|z|})}\rho}$, получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \bar{w}_j \geq |(grad_z \varphi, \bar{w})| \left| \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i \right| \gamma_1(z). \tag{8}$$

Итак, $\tilde{u}(z)$ – плюрисубгармоническая функция при достаточно больших $|z|$. Добавляя к ней функцию $C\ln(1+|z|^2)$ с достаточно большой константой C и замечая, что

$$\frac{u_1(tz)}{t^{\rho(t)}} \rightrightarrows, \quad t \to \infty,$$

получаем искомую функцию $u(z)$.

Теорема доказана.

УДК 517.535.4

М.Л.Содин

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О РОСТЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО НИЖНЕГО ПОРЯДКА

Пусть $f(z)$, $z=re^{i\theta}$, $|\theta| \leq \pi$ – мероморфная функция в комплексной плоскости, причем $f(0)=1$.

Следуя А.Бернстейну, полагаем

$$T_f^*(re^{i\theta}) = \sup_{|E|=2\theta} \frac{1}{2\pi} \int_E \ln|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi + N_f(r,\infty),$$

где $|E|$ – мера множества $E \subset [-\pi,\pi]$, $N_f(r,a)$ – неванлинновская функция числа a-точек. Как известно [1], функция T^* обладает следующими свойствами.

1. T^* субгармонична в верхней полуплоскости, непрерывна в ее замыкании и неотрицательна.

2. Выполняются соотношения

$$T_f^*(r) = N_f(r,\infty), \quad T_f^*(-r) = N_f(r,0), \tag{0.1}$$

$$\max_{0 \leq \theta \leq \pi} T_f^*(re^{i\theta}) = T(r,f), \tag{0.2}$$

где $T(r,f)$ – характеристика Неванлинны.

3. Пусть $\ell_f(re^{i\theta})$, $|\theta| \leq \pi$ – четная и невозрастающая на $[0,\pi]$ функция от θ, равноизмеримая при каждом фиксированном r с $\ln|f(re^{i\theta})|$. Тогда

$$T_f^*(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\theta \ell_f(re^{i\varphi})\,d\varphi + N_f(r,\infty).$$

Следовательно, при r функция $\theta \to T_f^*(re^{i\theta})$ вогнута, причем

$$\frac{\partial}{\partial\theta} T_f^*(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} B_f(re^{i\theta}). \tag{0.3}$$

Положим

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad \mu_f(r) = \min_{|z|=r} |f(z)|.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial\theta} T_f^* \Big|_{\theta=0} = \frac{1}{\pi} \ln M_f(r), \quad \frac{\partial}{\partial\theta} T_f^* \Big|_{\theta=\pi} = \frac{1}{\pi} \ln \mu_f(r). \tag{0.4}$$

При фиксированном $\theta \in [0,\pi]$ функция $t \to T_f^*(e^{t+i\theta})$ выпукла на $(-\infty, \infty)$.

Используя эти свойства функции T^* Бернстейн решил ряд экстремальных задач теории функций [1 - 3].

В настоящей работе, воспользовавшись идеей В.Фукса [4]*, мы докажем одно общее соотношение, связывающее T_f^* и B_f, откуда элементарно и единообразно, используя свойства 1 - 4 выведем ряд точных оценок, среди которых будут как известные, так и новые. Упомянутое выше общее соотношение можно также получить, используя близкий метод, предложенный М.Эссеном и Д.Шиа в работах [5, 6].

§ 1. В этом параграфе мы приведем основные результаты работы.

1.1. Обозначим

$$G_f(r;\mu) = G_f(r;\alpha,\beta,\gamma;\mu) =$$

$$= \mu T_f^*(re^{i\beta}) \sin\mu(\beta+\gamma) - \mu T_f^*(re^{i\alpha}) \sin\mu(\alpha+\gamma) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} B_f(re^{i\beta}) \cos\mu(\beta+\gamma) - \frac{1}{\pi} B_f(re^{i\alpha}) \cos\mu(\alpha+\gamma). \tag{1.1.1}$$

Далее, не оговаривая это каждый раз заново, мы предполагаем, что параметры $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ удовлетворяют условиям

$$0 \le \alpha < \beta \le \pi,$$

$$[\alpha+\gamma, \beta+\gamma] \subset \left[-\frac{\pi}{2\mu}, \frac{\pi}{2\mu}\right]. \tag{1.1.2}$$

Теорема 1. Пусть λ - нижний порядок мероморфной функции f. Тогда

$$\limsup_{r\to\infty} G_f(r;\alpha,\beta,\gamma;\lambda)/T(r,f) \ge 0; \tag{1.1.3}$$

кроме того, при $\mu > \lambda$ выполняется

* В этой заметке Фукс указывает, что основной результат получен им совместно с А.Эдреем.

$$\limsup_{r\to\infty} G_f(r;\alpha,\beta,\gamma;\mu)\geq 0. \qquad (1.1.4)$$

Доказательство этой теоремы будет приведено в § 2.

Выведем из теоремы 1 некоторые следствия*. Начнем с известных результатов.

1.2. В этом пункте мы получим некоторые результаты А.А.Гольдберга и И.В.Островского о росте мероморфных функций нижнего порядка $\lambda<1$ ([7], гл. V, § 3, см. также [8]).

Полагаем $\alpha=0$, $\beta=\pi$. В силу (1.1.2) и (1.1.4) при

$$-\frac{\pi}{2\mu}\leq\gamma\leq\frac{\pi}{2\mu}-\pi,\ \lambda<\mu<1$$

выполняется

$$\limsup_{r\to\infty}\Big\{-\mu\sin\mu\gamma N_f(r,\infty)+\mu\sin\mu(\pi+\gamma)N_f(r,0)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\cos\mu\gamma\ln M_f(r)+\frac{1}{\pi}\cos\mu(\pi+\gamma)\ln\mu_f(r)\Big\}\geq 0. \qquad (1.2.1)$$

Подставляя в (1.2.1) значения $\gamma=-\frac{\pi}{2\mu}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$ и устремляя μ к λ, получаем** следующие теоремы.

Теорема А. (Гольдберг - Островский). Пусть f - мероморфная функция нижнего порядка $\lambda<\frac{1}{2}$. Тогда

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln^+\mu_f(r)}{T(r,f)}\geq\frac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}\left(\delta(\infty,f)-1+\cos\pi\lambda\right),$$

где $\delta(\infty,f)$- неванлинновский дефект функции f в бесконечности.

Теорема Б. (Гольдберг - Островский). Пусть f - мероморфная функция нижнего порядка $\lambda<1/2$, такая, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M_f(r)}{\ln r}=+\infty.^{***}$$

Тогда

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln\mu_f(r)}{\ln M_f(r)}+\pi\lambda\sin\pi\lambda\limsup_{r\to\infty}\frac{N_f(r,\infty)}{\ln M_f(r)}\geq\cos\pi\lambda.$$

Теорема В. (Гольдберг - Островский). Пусть f - мероморфная функция нижнего порядка $\lambda<1$. Тогда

$$\limsup_{r\to\infty}\Big\{\pi\lambda\sin\frac{\pi\lambda}{2}\,\frac{N_f(r,0)+N_f(r,\infty)}{T(r,f)}-\cos\frac{\pi\lambda}{2}\times$$

$$\times\frac{\ln M_f(r)-\ln\mu_f(r)}{T(r,f)}\Big\}\geq 0.$$

---

* Мы предполагаем, что $\lambda>0$. На более простом случае $\lambda=0$ мы останавливаться не будем.

** Опущенные элементарные рассуждения имеются в работе [7], гл. V, § 3.

*** Это условие необходимо для того, чтобы от произвольной мероморфной функции f перейти к такой функции f_1, что $f_1(0)=1$.

1.3. Пусть $\Delta(\infty,f)$ – валироновский дефект функции f в бесконечности, а

$$\beta(\infty,f)=\liminf_{r\to\infty}\frac{\ln^+ M_f(r)}{T(r,f)}$$

– дефект в смысле В.П.Петренко функции f в бесконечности. В.П.Петренко показал [9], что для мероморфной функции f нижнего порядка λ выполняется

$$\beta(\infty,f)\le\begin{cases}\pi\lambda, & \lambda\geq 1/2,\\ \dfrac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}, & \lambda<1/2.\end{cases}$$

Используя метод Петренко, Д.Шиа получил следующее обобщение его теоремы (см. например, [10], гл. II):

Теорема Г. (Петренко – Шиа). Пусть f – мероморфная функция нижнего порядка λ. Тогда

$$\beta(\infty,f)\le\begin{cases}\pi\lambda\sqrt{\Delta(\infty,f)(2-\Delta(-\infty,f))}, & \arccos(1-\Delta(\infty))\le\pi\lambda\\ \dfrac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}\{1-(1-\Delta(\infty,f))\cos\pi\lambda\}, & \arccos(1-\Delta(\infty))>\pi\lambda.\end{cases}$$

(Второй случай может достигаться лишь при $\lambda<1/2$).

Выведем из теоремы 1 теорему Г. Положим в (1.1.3) $\alpha=0$, $\beta=\varphi$, $\gamma=\frac{\pi}{2\lambda}-\varphi$. Учитывая (0.1), (0.2) и (0.4), получаем

$$\limsup_{r\to\infty}\left\{-\lambda\cos\lambda\varphi\frac{N_f(r,\infty)}{T(r,f)}-\frac{1}{\pi}\sin\lambda\varphi\frac{\ln M_f(r)}{T(r,f)}+\lambda\right\}\geq 0,$$

$$1\geq\cos\lambda\varphi(1-\Delta(\infty,f))+\sin\lambda\varphi\frac{\beta(\infty,f)}{\pi\lambda},$$

где $0\le\varphi\le\pi/2\lambda$. Далее,

$$\beta(\infty,f)\le\frac{\pi\lambda}{\sin\lambda\varphi}\{1-(1-\Delta(\infty,f))\cos\lambda\varphi\}. \tag{1.3.1}$$

Правая часть последнего неравенства достигает своего минимального значения при $\tilde\varphi=\min(\varphi_0,\pi)$, где φ_0 – наименьший положительный корень уравнения $\cos\lambda\varphi=1-\Delta(\infty,f)$. Подставляя в (1.3.1) $\tilde\varphi$, получаем теорему Г.

Известно [11], что, если для мероморфной функции f нижнего порядка $\lambda\le1/2$ выполняется $\beta(\infty,f)\geq\pi\lambda\sin\pi\lambda$, то при всех $a\in\mathbb{C}$ $\beta(a,f)=0$. Этому результату нетрудно придать количественную форму, наподобие теоремы А. При этом мы получим результат, близкий к теореме Б.

Действительно, полагая в (1.1.3) $\alpha=\gamma=0$, $\beta=\pi$, получаем

$$\limsup_{r\to\infty}\left\{\lambda\sin\pi\lambda\frac{N_f(r,0)}{T(r,f)}-\frac{1}{\pi}\frac{\ln M_f(r)}{T(r,f)}+\frac{1}{\pi}\cos\pi\lambda\frac{\ln\mu_f(r)}{T(r,f)}\right\}\geq 0,$$

Теорема Б$'$. Пусть f – мероморфная функция нижнего порядка $\lambda\le1/2$. Тогда

$$\lim_{r\to\infty}\sup \frac{\ln^{+}\mu_f(r)}{T(r,f)} \geq \frac{\pi\lambda \sin \pi\lambda - \beta(\infty, f)}{\cos \pi\lambda}.$$

1.4. В этом и следующем пункте мы получим оценки роста перестройки $B_f(re^{i\varphi})$.

Положим в (1.1.3) $\alpha=0$, $\gamma=-\varphi$, $\beta=\varphi$. Получаем

$$\lim_{r\to\infty}\sup \left\{\mu \sin\mu\varphi\, N_f(r,\infty) - \frac{1}{\pi}\cos\mu\varphi \ln M_f(r) + \frac{1}{\pi} B_f(re^{i\varphi})\right\} \geq 0,$$

где $\mu>\lambda$, $0<\varphi\leq \min(\pi, \pi/2\mu)$. Устремив μ к λ, получаем следующую теорему.

<u>Теорема 2</u>. Пусть f – мероморфная функция нижнего порядка λ, причем

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln r} = +\infty.$$

Тогда при $\lambda>0$, $0<\varphi\leq \min(\pi, \frac{\pi}{2\lambda})$ выполняется

$$\lim_{r\to\infty}\sup \frac{B_f(re^{i\varphi})}{\ln M_f(r)} + \pi\lambda \sin\lambda\varphi \lim_{r\to\infty}\sup \frac{N_f(r,\infty)}{\ln M_f(r)} \geq \cos\lambda\varphi. \qquad (1.4.1)$$

Для целых функций более сильный, результат был получен А.Бернстейном [3]. Для мероморфных функций, близких по духу, результат был получен Дж.Андерсоном и А.Бернстейном [12].

Для мероморфных функций нижнего порядка $\lambda<1/2$, подставляя в (1.4.1) $\varphi=\pi$, получаем теорему Б А.А.Гольдберга и И.В.Островского.

1.5. Положим

$$\sigma_f = \lim_{r\to\infty}\sup \left|\{\theta : |f(re^{i\theta})|>1\}\right|.$$

Эта величина называется протяжением функции f.

Оценим рост перестройки B_f через σ_f.

В силу определения величины σ_f для произвольного $\beta>\frac{1}{2}\sigma_f$ имеем

$$\lim_{r\to\infty}\sup B_f(re^{i\beta}) \leq 0. \qquad (1.5.1)$$

Предположим, что $\sigma_f \leq \pi/\lambda$. Зафиксируем такое число φ, что $0\leq\varphi<\frac{1}{2}\sigma_f$.

Пусть сперва $\sigma_f/2-\varphi<\pi/2\lambda$. Тогда число β выберем так, чтобы $\sigma_f/2<\beta<\varphi+\pi/2\lambda$. Применим (1.1.3) с $\alpha=\varphi$, β, выбранным выше, и $\gamma=-\varphi$. Учитывая (0.2) и (1.5.1), получаем

$$\lim_{r\to\infty}\sup \left\{\pi\lambda \sin\lambda(\beta-\varphi) - \frac{B_f(re^{i\varphi})}{T(r,f)}\right\} \geq 0.$$

Устремляя β к $\sigma_f/2$, получаем* следующую теорему.

---

* При $\sigma_f/2-\varphi=\frac{\pi}{2\lambda}$ теорема 3 есть очевидное следствие теоремы Г.

Теорема 3. Пусть f – мероморфная функция нижнего порядка λ, причем $0 \le \varphi < \frac{1}{2}\sigma_f \le \pi/2\lambda$. Тогда

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\beta_f(re^{i\varphi})}{T(r,f)} \le \pi\lambda \sin\lambda\left(\frac{\sigma_f}{2}-\varphi\right). \tag{1.5.2}$$

В работе [2] А.Бернстейн получил оценку

$$\sigma_f \ge \min\left(2\pi, \frac{2}{\lambda}\arccos\left(1-\delta(\infty,f)\right)\right). \tag{1.5.3}$$

(На самом деле результат Бернстейна существенно сильнее).

Полагая в (1.5.2) $\varphi=0$ и учитывая (0.4), получаем

$$\beta(\infty,f) \le \pi\lambda \sin \sigma_f \lambda/2,$$

если $\sigma_f \le \pi/\lambda$.

Следствие 1. Пусть f – мероморфная функция нижнего порядка λ. Тогда

$$\sigma_f \ge \min\left(2\pi, \frac{2}{\lambda}\arcsin\left(\min\left(\frac{\beta(\infty,f)}{\pi\lambda}, 1\right)\right)\right).$$

Эта оценка, аналогичная оценке (1.5.3), была недавно анонсирована И.И.Марченко [13].

1.6. Для дальнейшего нам понадобится легкое обобщение теоремы 1.

Теорема 1'. Пусть f – мероморфная функция нижнего порядка $\lambda<1$, числа a_1, a_2 – неотрицательны, $\varphi\in[0,\pi]$. Тогда

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{a_1 G_f(r;0,\varphi,\gamma_1;\lambda)+a_2 G_f(r;\varphi,\pi,\gamma_2;\lambda)}{T(r,f)} \ge 0. \tag{1.6.1}$$

Доказательство этой теоремы будет приведено в § 2. Напомним, что аргументы функции G_f подчинены условиям (1.1.2).

Пусть $\gamma_1=0$, $\gamma_2=-\pi$. Тогда в силу (1.1.1)

$$G_f(r;0,\varphi,0;\lambda) = \lambda T_f^*(re^{i\varphi})\sin\lambda\varphi +$$
$$+\frac{1}{\pi}\left[\beta_f(re^{i\varphi})\cos\lambda\varphi - \ln M_f(r)\right],$$
$$G_f(r;\varphi,\pi,-\pi;\lambda) = -\lambda T_f^*(re^{i\varphi})\sin\lambda(\varphi-\pi) +$$
$$+\frac{1}{\pi}\left[-\beta_f(re^{i\varphi})\cos\lambda(\varphi-\pi)+\ln\mu_f(r)\right],$$

а в силу (1.1.2)

$$\left(\pi-\frac{\pi}{2\lambda}\right)^+ \le \varphi \le \min\left(\pi, \frac{\pi}{2\lambda}\right). \tag{1.6.2}$$

Выбирая $a_1=\cos\lambda(\varphi-\pi)$, $a_2=\cos\lambda\varphi$ и учитывая (0.2), получаем из (1.6.1)

$$\limsup_{r\to\infty}\left\{\pi\lambda\sin\pi\lambda - \frac{\ln M_f(r)}{T(r,f)}\cos\lambda(\pi-\varphi) - \frac{\ln\mu_f(r)}{T(r,f)}\cos\lambda\varphi\right\} \ge 0. \tag{1.6.3}$$

Предположим, что

$$\min(\beta(0,f),\ \beta(\infty,f))>0. \tag{1.6.4}$$

Тогда из (1.6.3) получаем

$$\beta(\infty,f)\cos\lambda(\pi-\varphi)+\beta(0,f)\cos\lambda\varphi\le\pi\lambda\sin\pi\lambda, \tag{1.6.5}$$

где φ – произвольное число, удовлетворяющее (1.6.2). Полагая в (1.6.5) $\varphi=\pi/2$, получаем

Следствие 2. Пусть f – мероморфная функция нижнего порядка $\lambda<1$, для которой выполняется (1.6.4). Тогда

$$\beta(0,f)+\beta(\infty,f)\le 2\pi\lambda\sin\frac{\pi\lambda}{2}. \tag{1.6.6}$$

Точная оценка (1.6.6) дает ответ на вопрос В.П.Петренко [10], с. 83.

Далее, из неравенства (1.6.5) мы получим аналог теоремы об эллипсе А.Эдрея и В.Фукса (см., например, [7], гл. V, § 4) для дефектов в смысле В.П.Петренко.

Пусть выполнено условие (1.6.4). Перепишем (1.6.5) в виде

$$(\beta(\infty)\cos\pi\lambda+\beta(0))\cos\lambda\varphi+\beta(\infty)\sin\pi\lambda\sin\lambda\varphi\le\pi\lambda\sin\pi\lambda\ , \tag{1.6.7}$$

Пусть $0<\lambda<1/2$. Тогда $0\le\varphi\le\pi$. Находя максимум по φ в левой части (1.6.7), получаем

$$[(\beta(0)+\beta(\infty)\cos\pi\lambda)^2+\beta^2(\infty)\sin^2\pi\lambda]^{1/2}\le\pi\lambda\sin\pi\lambda,$$

$$\beta^2(0)+2\beta(0)\beta(\infty)\cos\pi\lambda+\beta^2(\infty)\le(\pi\lambda\sin\pi\lambda)^2. \tag{1.6.8}$$

При $\frac{1}{2}<\lambda<1$ необходимо произвести несколько более громоздкое вычисление, связанное с ограничениями на φ. Окончательно получаем следующий результат.

Теорема 4. Пусть f – мероморфная функция нижнего порядка $\lambda<1$, для которой выполнено условие (1.6.4)*. Если

$$\min(\beta(0),\beta(\infty))+\cos\pi\lambda\,\max(\beta(0),\beta(\infty))\ge 0^{**},$$

то выполняется неравенство (1.6.8).

Отметим, что эта теорема следует из одного результата, недавно анонсированного И.И.Марченко [13].

§ 2. В этом параграфе мы докажем теоремы 1 и 1'.

2.1. В основе доказательства этих теорем лежит следующее утверждение.

* Как легко видеть, последнее ограничение существенно лишь при $0<\lambda<1/2$.

** При $0<\lambda\le 1/2$ это неравенство, очевидно, выполняется всегда.

Лемма 1. Пусть f – мероморфная функция, числа α, β, γ, μ удовлетворяют (1.1.2), $0<\rho<Q<\infty$. Тогда выполняется неравенство

$$\int_{\rho}^{Q} \frac{dr}{r^{1+\mu}} Q_f(r;\alpha,\beta,\gamma;\mu) \geq I_f(\rho,Q;\alpha,\beta,\gamma;\mu), \tag{2.1.1}$$

где

$$I_f(\rho,Q;\alpha,\beta,\gamma;\mu)=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\frac{T_f^*(\rho e^{i\theta})+\rho\frac{\partial}{\partial r}T_f^*(\rho e^{i\theta})}{\rho^{\mu}} - \frac{T_f^*(Qe^{i\theta})+Q\frac{\partial}{\partial r}T_f^*(Qe^{i\theta})}{Q^{\mu}}\right\}\cos\mu(\theta+\gamma)\,d\theta.$$

Обозначим

$$D=D(\rho,Q,\alpha,\beta)=\{z=re^{i\theta}, \rho<r<Q, \alpha<\theta<\beta\}.$$

Предположим сначала, что функция T_f^* дважды непрерывно дифференцируема в D и непрерывно дифференцируема в замыкании $\bar{D}$.

Пусть

$$V(re^{i\theta})=r^{-\mu}\cos\mu(\theta+\gamma). \tag{2.1.2}$$

Это гармоническая в D функция, которая неотрицательна в D вследствие условий (1.1.2). Применив вторую формулу Грина, получаем

$$\iint_D (V\Delta T^* - T^*\Delta V)\,d\sigma = \int_{\partial D}\left(V\frac{\partial T^*}{\partial n} - T^*\frac{\partial V}{\partial n}\right)ds,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к D. В силу субгармоничности T^* и гармоничности и неотрицательности V получаем

$$\int_{\partial D}\left(V\frac{\partial T^*}{\partial n} - T^*\frac{\partial V}{\partial n}\right)ds \geq 0. \tag{2.1.3}$$

В последнем интеграле интегралы по отрезкам дают левую часть неравенства (2.1.1), а интегралы по дугам равны – $I_f(\rho,Q;\alpha,\beta,\gamma;\mu)$. Таким образом, если T_f^* достаточно гладкая функция, то (2.1.1) следует из (2.1.3).

В общем случае лемма 1 будет доказана в пункте 2.3.

2.2. Выведем из леммы 1 теоремы 1 и 1$'$.

Оценим функцию I_f снизу. Поскольку $T_f^*\geq 0$ и выпукла относительно $\ln r$, то первое слагаемое в I_f положительно. Отбросим его и заменим $T_f^*(Qe^{i\theta})$ на $T(Q,f)$. Кроме того, из выпуклости функции $t\to T_f^*(e^{t+i\theta})$ следует, что

$$Q\frac{\partial}{\partial r}T_f^*(Qe^{i\theta}) \leq \frac{T_f^*(2Qe^{i\theta})}{\ln 2} \leq \frac{T(2Q,f)}{\ln 2}.$$

Поэтому получаем

$$I_f(\rho,Q;\alpha,\beta) \geq -\frac{\beta-\alpha}{\ln 2}\,\frac{2T(2Q,f)}{Q^{\mu}} \geq -10\,\frac{T(2Q,f)}{Q^{\mu}}. \tag{2.2.1}$$

Пусть $\{2Q_k\}$ – последовательность пиков Пойа второго рода порядка λ для характеристики $T(r,f)$. Это означает, что найдутся такие последовательности $a_k\to\infty, \eta_k\to 0$, что при всех $r\in[a_k^{-1}Q_k, a_kQ_k]$ выполняется неравенство

$$T(r,f)\geqslant(1-\eta_k)\left(\frac{r}{2Q_k}\right)^{\lambda} T(2Q_k,f).$$

Известно, что такая последовательность существует ([10], гл. 1). Положим $\rho_k=a_k^{-1}Q_k$. Тогда

$$\int_{\rho_k}^{Q_k}\frac{T(r,f)}{r^{1+\lambda}}\,dr\geqslant(1-\eta_k)\frac{T(2Q_k,f)}{2^{\lambda}Q_k^{\lambda}}\ln a_k,$$

т.е.

$$\frac{T(2Q_k,f)}{Q_k^{\lambda}}=O(1)\int_{\rho_k}^{Q_k}\frac{T(r,f)}{r^{1+\lambda}}\,dr,\quad k\to\infty. \tag{2.2.2}$$

Теперь из леммы 1, а также (2.2.I) и (2.2.2) получаем

$$\limsup_{r\to\infty} G_f(r,\lambda)/T(r,f)\geqslant$$

$$\geqslant\lim_{k\to\infty}\left\{\int_{\rho_k}^{Q_k}\frac{G_f(r,\lambda)}{T(r,f)}\frac{T(r,f)}{r^{1+\lambda}}\,dr\right\}\left\{\int_{\rho_k}^{Q_k}\frac{T(r,f)}{r^{1+\lambda}}\,dr\right\}^{-1}\geqslant$$

$$\geqslant-10\lim_{k\to\infty}\frac{T(2Q_k,f)}{Q_k^{\lambda}}\left\{\int_{\rho_k}^{Q_k}\frac{T(r,f)}{r^{1+\lambda}}\,dr\right\}^{-1}=0,$$

что дает (1.1.3).

Теперь получим (1.1.4). Зафиксируем число $\mu>\lambda$. Имеем

$$I_f\geqslant H_f(\rho)-10\frac{T(2Q,f)}{Q^{\mu}}, \tag{2.2.3}$$

где $H_f(\rho)$ – некоторая положительная величина. Зафиксируем сколь угодно большое число ρ и выберем число $Q>\rho$ так, чтобы левая часть в (2.2.3) была положительна. Тогда в силу леммы 1

$$\int_{\rho}^{Q}\frac{G_f(r;\mu)}{r^{1+\mu}}\,dr>0,$$

а следовательно,

$$\limsup_{r\to\infty} G_f(r;\mu)\geqslant 0,$$

что и требовалось доказать. Тем самым, теорема 1 получена из леммы 1.

Чтобы получить теорему 1′, запишем с помощью леммы 1 и (2.2.1) следующее неравенство:

$$\int_{\rho}^{Q}\frac{dr}{r^{1+\lambda}}\left\{a_1G_f(r;0,\varphi,\gamma_1;\lambda)+a_2G_f(r;\varphi,\pi,\gamma_2;\lambda)\right\}\geqslant$$

$$\geqslant a_1I_f(\rho,Q;0,\varphi,\gamma_1;\lambda)+a_2I_f(\rho,Q;\varphi,\pi,\gamma_2;\lambda)\geqslant-10\frac{T(2Q,f)}{Q^{\lambda}}(a_1+a_2)$$

и применим рассуждения, уже использовавшиеся при доказательстве неравенства (1.1.3).

2.3. В этом пункте мы докажем лемму 1.

Пусть u^m – двукратное усреднение функции T_f^* по кругу радиуса $1/m$. Выберем достаточно малое число $l>0$ и будем считать, что $m>2/l$. Тогда функция u^m дважды непрерывно дифференцируема в замыкании сектора $D(\frac{\rho}{2}, 2Q, \alpha+l, \beta-l)=D_l$. Далее, последовательность функций u^m, монотонно убывая, равномерно стремится к T_f^* при $m\to\infty$, $z\in\bar{D}_l$.

Зафиксируем числа $k>l>0$, $0<h<1$. Числа η, ψ, ρ' и Q' выберем так, что

$$\alpha+l\le\eta\le\alpha+k, \quad \beta-k\le\psi\le\beta-l,$$
$$\rho\le\rho'\le\rho+h\rho, \quad Q\le Q'\le Q+hQ.$$

К функциям u^m и V, где гармоническая неотрицательная функция V определена в (2.1.2), применим вторую формулу Грина в секторе $D'=D(\rho', Q', \eta, \psi)$.

Имеем

$$0\le\iint_{D'}V\Delta u^m d\sigma=\int_{\partial D'}\left(V\frac{\partial u^m}{\partial n}-u^m\frac{\partial V}{\partial n}\right)ds=\int_{\rho'}^{Q'}u^m(re^{i\eta})\frac{\partial}{\partial\theta}V(re^{i\eta})\frac{dr}{r}-$$
$$-\int_{\rho'}^{Q'}u^m(re^{i\psi})\frac{\partial}{\partial\theta}V(re^{i\psi})\frac{dr}{r}+\int_{\eta}^{\psi}\rho' u^m(\rho' e^{i\theta})\frac{\partial}{\partial r}V(\rho' e^{i\theta})d\theta-\int_{\eta}^{\psi}Q' u^m\times$$
$$\times(Q'e^{i\theta})\frac{\partial}{\partial r}V(Q'e^{i\theta})d\theta-\int_{\rho'}^{Q'}V(re^{i\eta})\frac{\partial}{\partial\theta}u^m(re^{i\eta})\frac{dr}{r}+\int_{\rho'}^{Q'}V(re^{i\psi})\frac{\partial}{\partial\theta}u^m\times$$
$$\times(re^{i\psi})\frac{dr}{r}-\int_{\eta}^{\psi}\rho' V(\rho' e^{i\theta})\frac{\partial}{\partial\theta}u^m(\rho' e^{i\theta})d\theta+\int_{\eta}^{\psi}Q' V(Q' e^{i\theta})\frac{\partial}{\partial\theta}u^m(Q' e^{i\theta})d\theta. \quad (2.3.1)$$

Усредним неравенство (2.3.1) по η, ψ, ρ' и Q'. Ввиду громоздкости выражения в правой части этого неравенства далее мы будем следить лишь за одним из восьми слагаемых, например, за пятым, которое мы обозначим через W.

Обозначим

$$M_x^{\tau}g=\frac{1}{\tau}\int_x^{x+\tau}g(t)\,dt.$$

В силу теоремы о среднем найдется такое число $\eta^*=\eta^*(r,l,k)$, что $\alpha+l\le\eta^*\le\alpha+k$,

$$M_\rho^{h\rho}M_Q^{hQ}M_{\alpha+l}^{k-l}M_{\beta-l}^{l-k}W=M_\rho^{h\rho}M_Q^{hQ}\int_{\rho'}^{Q'}\frac{dr}{r}\,\frac{1}{k-l}\int_{\alpha+l}^{\alpha+k}V(re^{i\eta})\frac{\partial}{\partial\theta}u^m(re^{i\eta})d\eta=$$
$$=M_\rho^{h\rho}M_Q^{hQ}\int_{\rho'}^{Q'}\frac{dr}{r}\;\frac{u^m(re^{i(\alpha+k)})-u^m(re^{i(\alpha+l)})}{k-l}\,V(re^{i\eta^*}).$$

В силу равномерной непрерывности функции V последнее выражение отличается не более чем на сколь угодно малое число $\varepsilon>0$ от

$$M_p^{hP} M_Q^{hQ} \int\limits_{p'}^{Q'} \frac{dr}{r} V(r) \frac{u^m(re^{i(\alpha+k)}) - u^m(re^{i(\alpha+l)})}{k-l},$$

при $l<k<\delta_\varepsilon$, $m>m_\varepsilon$. Последний интеграл не содержит частных производных от u^m, мы можем перейти в нем к пределу при $m\to\infty$. При этом получаем

$$M_p^{hP} M_Q^{hQ} \int\limits_{p'}^{Q'} \frac{dr}{r} V(r) \frac{T_f^*(re^{i(\alpha+k)}) - T_f^*(re^{i(\alpha+l)})}{k-l}. \qquad (2.3.2)$$

В силу вогнутости функции $\theta\to T_f^*(re^{i\theta})$ и теоремы о монотонном предельном переходе знаком интеграла мы можем перейти в (2.3.2) к пределу сперва при $l\to 0$, а затем и при $k\to 0$. В силу произвольности числа $\varepsilon>0$ получаем

$$\lim_{k\to 0} \lim_{l\to 0} \lim_{m\to\infty} M_p^{hP} M_Q^{hQ} M_{\alpha+l}^{k-l} M_{\beta-l}^{l-k} W = M_p^{hP} M_Q^{hQ} \int\limits_{p'}^{Q'} \frac{dr}{r} V(r) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial\theta} T_f^*(r).$$

Ввиду абсолютной непрерывности интеграла Лебега окончательно имеем

$$\lim_{h\to 0} \lim_{k\to 0} \lim_{l\to 0} \lim_{m\to\infty} M_p^{hP} M_Q^{hQ} M_{\alpha+l}^{k-l} M_{\beta-l}^{l-k} W = \int\limits_{p}^{Q} \frac{dr}{r} V(r) \frac{\partial}{\partial\theta} T_f^*(r).$$

Поступая аналогично[*] с остальными семью слагаемыми в правой части (2.3.1), получаем (2.1.1).

Некоторые результаты настоящей статьи, например, следствие I, были независимо и одновременно получены Е.В.Глейзером, применявшим аналогичный метод для изучения распределения значений мероморфных функций по аргументам.

1. Baernstein A. Integral means , univalent functions and circular symmetrization. - Acta Math., 1974, 133, p. 139-169.
2. Baernstein A. Proof of Edrei's conjecture. - Proc. London Math. Soc., 1973, 26 (3), p. 418-434.
3. Baernstein A. A generalisation of the $\cos \pi\rho$-theorem. - Trans. Amer. Math. Soc., 1974, 193, p. 181-197.
4. Fuchs W.H.J. A theorem on $\min_{|z|} \log |f(z)|/T(r,f)$. - Proc. of the Conference on Classical Function Theory, Canterbury 1973. London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 12, p. 69-72.
5. Essen M., Shea D.F. Applications of Denjoy integral inequalities to growth problems for subharmonic and meromorphic functions.- Proc. of the Conf. on Classical Function Theory, Canterbury 1973 London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 12, p. 69-72.
6. Essen M., Shea D.F. Applications of Denjoy integral inequalities and differential inequalities to growth problems for subhar-

[*] Четыре последних слагаемых в правой части (2.3.1) однотипны, а с первыми четырьмя слагаемыми дело обстоит проще.

monic and meromorphic functions. - Proc. Roy. Ir. Acad., 1982, 82A, N 2, p. 201-206.
7. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. - М.: Наука, 1970. - 590 с.
8. Гольдберг А.А., Островский И.В. Некоторые теоремы о росте мероморфных функций. - Зап.матем. отд. Харьк. ун-та и Харьк. матем. об-ва, Изд-во Харьк. ун-та, 1961, 27, с. 2-37.
9. Петренко В.П. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. - Изв. АН СССР, 1969, 33, № 2, с. 414-454.
10. Петренко В.П. Рост мероморфных функций. - Харьков: Вища школа, 1978. - 136 с.
11. Петренко В.П. Величины отклонений мероморфных функций нижнего порядка меньше единицы. - Докл. АН СССР, 1969, 187, № 1 с. 40-42.
12. Anderson J.M., Baernstein A. The size of the set on which a meromorphic function is large. - Proc. London Math. Soc, 1978, 36 (3), p. 518-539.
13. Марченко И.И. О росте мероморфных функций конечного нижнего порядка. - Докл. АН СССР, 1982, 264, № 5, с. 1077-1080.
14. Essen M.R., Rossi J.F. Shea D.F. A comolution inequality with applications in function theory. - Contemp. Math., 1983, 25, p. 141-147.

УДК 547.977.3 + 517.974.3

Г.Н.Гестрин

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ

В работе будут рассмотрены некоторые обратные задачи теории диффузии заряженных частиц в диэлектрике в присутствии внешнего электрического поля.

1. Полупространство $z>0$ занято диэлектриком (твердым или газообразным) с диэлектрической проницаемостью ε. В полупространстве $z<0$ находится конечное число ограниченных заряженных тел. Расположение и заряды тел неизвестны. Направление создаваемого ими поля $\vec{E}(x,y,z)$ в точках плоскости $z=0$ считается известным. В начальный момент времени ($t=0$) из точки $\vec{r_0}=(x_0,y_0,0)$ лежащей на границе раздела полупространств, начинается диффузия первоначально сосредоточенного там заряда q_0 весьма малой величины в диэлектрик. Пусть $c(\vec{r};\vec{r_0},t)$ - концентрация заряда в точке $\vec{r}$ в момент времени t. Объемная плотность тока $\vec{j}$ (в пренебрежении взаимодействием диффундирующих заряженных частиц) выражается формулой

$$\vec{j}=-D\,\mathrm{grad}\,c-\varepsilon\beta e D c\vec{E}, \tag{1.1}$$

где D - коэффициент диффузии; β - обратная температура; e - заряд одной частицы. Уравнение неразрывности $c_t'+\mathrm{div}\vec{j}=0$ записывается в виде

$$c_t'=D\Delta c-\beta^2\varepsilon^2e^2DE^2c-\beta\varepsilon c(\vec{j},\vec{E}). \tag{1.2}$$

Присоединим к нему начальное и граничное условия

$$c|_{t=0} = q_0\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_0); \quad j_z|_{z=0} = 0. \tag{1.3}$$

Коэффициент диффузии D предполагается весьма малой величиной.

Предположим, что нам известна концентрация $c(\vec{r}_0, \vec{r}_0, t)$ заряда (в той точке, откуда начался процесс) через некоторое время t для всех точек $\vec{r}_0$ на плоскости $z=0$. Можно ли тогда восстановить поле $\vec{E}(\vec{r})$ во всем полупространстве $z>0$? Имеет место

Теорема 1. Потенциальное векторное поле $\vec{E} = \vec{E}(x,y,z) = -grad\,U(x,y,z)$, удовлетворяющее всюду в полупространстве $z>0$ условию $div\vec{E}=0$ с потенциалом $U(\vec{r})$, убывающим на бесконечности по закону $U(\vec{r}) = O(|\vec{r}|^{-1})$, определяется следующей формулой:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -grad\,\frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}\sqrt{q_0}\,\varepsilon e\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\lim\limits_{t\to 0}\sqrt{tD}\,(c(\vec{r}_0,\vec{r}_0,t) - q_0(4\pi tD)^{-3/2})\right)^{1/2}}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2)^{1/2}}\cos(\vec{l},r)\,d\xi\,d\eta, \tag{1.4}$$

где $\vec{r}_0 = (\xi, \eta, 0)$, а $c(\vec{r}, \vec{r}_0, t)$ – решение задачи (1.1)-(1.3), $\vec{l}$ – направление поля $\vec{E}(\vec{r})$ на плоскости $z=0$. При этом оценка разности между пределом подынтегрального выражения при $t\to 0$ и допредельным выражением зависит только от произведения Dt так, что приближенное выражение для $\vec{E}(\vec{r})$ получится, если знак предела отбросить и считать t небольшой, но конечной величиной.

Доказательство. От смешанной задачи (1.1)-(1.3) удобно перейти к задаче Коши во всем пространстве, продолжив E_z нечетно по z, а E_x и E_y – четно. При этом $E^2(\vec{r})$ и начальные данные продолжатся четно. Четное продолжение самого решения $c(\vec{r}, \vec{r}_0, t)$ приведет к нечетному продолжению j_z-составляющей тока и к четному продолжению j_x и j_y составляющих тока. Следовательно, и $(\vec{j}, \vec{E})$ окажется четным, и граничное условие $j_z = 0$ удовлетворится автоматически. Обозначив через $\vec{E}^*(x,y,z)$, $j^*(x,y,z)$ и $c^*(\vec{r}, \vec{r}_0, t)$ указанные продолжения, введем новую переменную $t' = Dt$.

Пусть $G(\vec{r}, \vec{r}', t')$ – фундаментальное решение уравнения $G'_{t'} = \Delta G - \gamma^2 E^2(\vec{r})G$ ($\gamma = \beta e\varepsilon$). Тогда

$$c^*(\vec{r}, \vec{r}', t') = q_0 G(\vec{r}, \vec{r}', t') + q_0\int\limits_0^{t'}\int\limits_{R^3} G(\vec{r}, \vec{r}'', t'-\tau)\left(\frac{1}{D}\vec{j}, \vec{E}\right)d\vec{r}''d\tau. \tag{1.5}$$

Далее запишем $G(\vec{r}, \vec{r}', t')$ с помощью винеровского интеграла по всем непрерывным траекториям, начинающимся в момент времени $\tau=0$ в точке $\vec{r}'$ и оканчивающимся в момент $\tau = t'$ в точке $\vec{r}$

$$G(\vec{r}, \vec{r}', t') = \int\limits_{C(0,\vec{r}',t',\vec{r})}\exp\left(-\gamma^2\int\limits_0^{t'}E^2(\vec{r}(s))\,ds\right)d_W\vec{r}(s) \tag{1.6}$$

(формула Фейнмана – Каца [1]).

Отметим, что

$$\int\limits_{C(0,\vec r\,',t',\vec r)} d_W \vec r(s) = (4\pi t')^{-3/2} \exp(-(4t')^{-1}|\vec r - \vec r\,'|^2) \tag{1.7}$$

и другую формулу

$$\int\limits_{C(0,\vec r_0,t',\vec r_0)} \int\limits_0^{t'} v(\vec r(s))\,ds\, d_W \vec r(s) = (2\sqrt{\pi}\,t')^{-3} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho}{t'}} M(\sqrt\rho, \vec r_0, v)\,d\rho, \tag{1.8}$$

где $M(\sqrt\rho, \vec r_0, v(\vec r))$ – среднее по сфере радиуса $\sqrt\rho$ с центром в точке $\vec r_0$ от функции $v(\vec r)$. Доказательство этой формулы содержится в работе [2]. Предположение об ограниченности в пространстве источников поля приводит к убыванию $\vec E(\vec r)$, $\vec j$ и c на бесконечности ($\vec E(\vec r) \sim |r|^{-2}$ при $|\vec r| \to \infty$).

Сделаем две оценки, которые будут использованы ниже. Первая из них верна при любом t', вторая – при малом t'. Имеем

$$\Big|\int\limits_0^{t'}\int\limits_{R^3}\int\limits_{C(0,\vec r\,',t'-\tau,\vec r)} \exp\Big(-\gamma^2\int\limits_0^{t'-\tau} E^2(s)\,ds\; d_W\vec r(s)\Big)\Big(\frac{\gamma}{D}\vec j, \vec E\Big)\,d\vec r\,''\,d\tau\Big| \le$$

$$\le \int\limits_0^{t'}\int\limits_{R^3}\int C(0,\vec r\,',t-\tau,\vec r)\,d_W\vec r(s)\,d\vec r\,''\,d\tau\,\gamma D^{-1}\max|(\vec j,\vec E)| = \int\limits_0^{t'}\int\limits_{R^3}\frac{1}{8\pi^{3/2}(t'-\tau)^{3/2}}\times$$

$$\times e^{-\frac{|\vec r - \vec r\,''|^2}{4(t'-\tau)}}\,d\vec r\,''\,d\tau\,\gamma D^{-1}\max|(\vec j,\vec E)| \le \pi t'\gamma D^{-1}\max|(\vec j,\vec E)|, \tag{1.9}$$

$$\Big|\sum_{k=2}^\infty \frac{(-1)^k\gamma^{2k}}{k!}\int\limits_{C(0,\vec r_0,t',\vec r_0)}\Big(\int\limits_0^{t'} E^2(\vec r(s))\,ds\Big)^k d_W\vec r(s)\Big| \le \sum_{k=2}^\infty \frac{\gamma^{2k}}{k!}\times$$

$$\times \max|E|^{2k}\, t'^k\,\frac{1}{8(\pi t')^{3/2}} \le const\,\sqrt{t'}\,. \tag{1.10}$$

Возвращаясь к формуле (1.5), полагая $\vec r = \vec r\,' = \vec r_0$, и используя (1.8) и оценки (1.9), (1.10), найдем при малых t'

$$c^*(\vec r_0, \vec r_0, t') = \frac{q_0}{8(\pi t')^{3/2}} - \frac{q_0\gamma^2}{8(\pi t')^{3/2}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho}{t'}} M(\sqrt\rho, \vec r_0, E^2(\vec r))\,d\rho + O\Big(\frac{t'}{D}\Big) + O(\sqrt{t'})\,. \tag{1.11}$$

Интегральное слагаемое в (1.11) является преобразование Лапласа с параметром $(t')^{-1}$ и в силу предельного соотношения $(t' \to 0)$

$$\frac{1}{t'}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho}{t'}} M(\sqrt\rho; \vec r_0, E^2(\vec r))\,d\rho \to M(0, \vec r_0, E^2) = E^2(\vec r_0)\,. \tag{1.12}$$

Из выражений (1.11), (1.12) следует

$$E^2(\vec r_0) = -\frac{8\pi^{3/2}}{q_0\gamma^2}\sqrt{tD}\Big(c(\vec r_0, \vec r_0, t) - \frac{q_0}{8(\pi t D)^{3/2}}\Big) + \alpha(tD), \tag{1.13}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Таким образом, точное значение $E^2(\vec{r}_0)$ на плоскости $z=0$ равно пределу правой части (1.13) при $t\to 0$, когда $\vec{r}_0$ изменяется на этой плоскости. Для потенциала $U(\vec{r})$ получаем задачу Неймана

$$\Delta U=0\ (z>0);\qquad \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0}=|E(\vec{r}_0)|\cos(\vec{l},z). \tag{1.14}$$

Поскольку поле $\vec{E}(\vec{r})$ образовано заряженными телами, ограниченными в пространстве, при больших $|\vec{r}|$ будет $U(\vec{r})=O(|r|^{-1})$, а тогда решение задачи Неймана получается с помощью функции Грина

$$G(p,q)=(4\pi)^{-1}(r_{pq}+r_{pq'})\quad (p=(x,y,z),\ q=(\xi,\zeta,\varsigma)),$$

что немедленно приводит к формуле (1.4) теоремы 1. Из того же условия ограниченности заряженных тел вытекает, что для больших $\xi^2+\zeta^2$ будет $\cos(\vec{l},z)\sim d(\xi^2+\zeta^2)^{-1/2}$ (d – характерное расстояние заряженных тел до плоскости $z=0$). Поэтому разность между точными и приближенными ($E^{\text{прибл}}$) выражениями для компонент поля, получаемыми отбрасыванием предела в (1.4), может быть оценена так:

$$|E_x(x,y,z)-E_x^{\text{прибл}}|\le \vartheta(t,D)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|(x-\xi)||\cos(l,z)|}{((x-\xi)^2+(y-\zeta)^2+z^2)^{3/2}}\,d\xi\, d\zeta\le$$

$$\le \mathrm{const}\ \vartheta(t,D)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi\, d\zeta}{((x-\xi)^2+(y-\zeta)^2+z^2)^{3/2}}=\frac{\mathrm{const}\ \vartheta(tD)}{|z|}, \tag{1.15}$$

где $\vartheta(x)\to 0$ при $x\to 0$. Оценкой (1.15) заканчивается доказательство теоремы 1. Следует отметить, что эта оценка равномерна в любом пространстве $z>\delta$.

2. Рассмотрим уравнение вида $z>\delta$.

$$\frac{\partial N}{\partial t}=D\Delta N-\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\dot{\varepsilon}N), \tag{2.1}$$

в котором $N\equiv N(\vec{r},\varepsilon,t)$ – функция распределения числа частиц в пространстве координат $\vec{r}=(x,y,z)$ и энергий ε. При этом $\dot{\varepsilon}$ – скорость изменения энергии частицы (заряженная частица может терять энергию в результате излучения при неравномерном движении в электрическом и магнитном полях в промежутках между столкновениями. Так, для частицы, движущейся в электрическом поле $\vec{E}$ со скоростью $v\ll c$ скорость потерь энергии $\dot{\varepsilon}=\frac{2}{3}e^4m^{-2}c^{-3}E^2$, где e – заряд, m – масса частицы).

Уравнения вида (2.1) используются в физике космических лучей. В работе [3] обсуждаются вопросы об их применимости и указаны в различных важных случаях выражения для $\dot{\varepsilon}$. Мы будем считать, что $\dot{\varepsilon}$ не зависит явно от времени t и энергии ε. Ниже доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Функция $q(\vec{r})$ из класса непрерывно дифференцируемых и ограниченных во всем трехмерном пространстве R^3, четных по переменной z, полностью определяется значениями интегралов $\int_0^\infty \varepsilon N(\vec{r}_0,\vec{r}_0,\varepsilon,t)\,d\varepsilon$, где $\vec{r}_0=(x_0, y_0, 0)$ изменяется на плоскости $z=0$, t принимает все неотрицательные значения, а $N\equiv N(\vec{r}, \vec{r}_0, \varepsilon, t)$ является решением такой задачи

$$\frac{\partial N}{\partial t}=D\Delta N-q(\vec{r})\frac{\partial N}{\partial \varepsilon}\ (z>0)\frac{\partial N}{\partial z}\Big|_{z=0}=0 \tag{2.2}$$

$$N\big|_{t=0}=N_0(\varepsilon)\delta(\vec{r}-\vec{r}_0);\ (N_0>0;\ \int_0^\infty \varepsilon N_0(\varepsilon)\,d\varepsilon<+\infty,$$

$$\int_0^\infty \varepsilon N(\vec{r}, \vec{r}_0, \varepsilon, t)\,d\varepsilon<+\infty). \tag{2.3}$$

Доказательство. Положим

$$N^*\equiv N^*(\vec{r}, \vec{r}_0, p, t)=\int_0^\infty N(\vec{r}, \vec{r}_0, \varepsilon, t)\,e^{-p\varepsilon}\,d\varepsilon. \tag{2.4}$$

Тогда

$$\frac{\partial N^*}{\partial t'}=\Delta N^*-pq(\vec{r})D^{-1}N^*;\quad N^*\big|_{t=0}=N_0^*\delta(\vec{r}-\vec{r}_0), \tag{2.5}$$

причем мы можем считать N^* продолженной на полупространство $z<0$ четно. Снова, применяя формулу Фейнмана – Каца, получаем

$$N^*(\vec{r}_0, \vec{r}_0, p, t)=N_0^*(p)\int_{C(0,\vec{r}_0, t', \vec{r}_0)} e^{-pD^{-1}\int_0^{t'} q(\vec{r}(s))\,ds}\,d_W\vec{r}(s). \tag{2.6}$$

Дифференцируя по p и полагая затем $p=0$, получаем

$$-\int_0^\infty \varepsilon N(\vec{r}_0, \vec{r}_0, \varepsilon, t)\,d\varepsilon=-\int_0^\infty \varepsilon N_0(\varepsilon)\,d\varepsilon\,(4\pi tD)^{-3/2}-\int_0^\infty N_0(\varepsilon)\,d\varepsilon\int_{C(0,\vec{r}_0, t', \vec{r}_0)}$$
$$\times\Big(\int_0^{t'} q(\vec{r}(s))\,ds\,d_W\vec{r}(s)D^{-1} \tag{2.7}$$

Пользуясь (1.8), находим

$$\int_0^\infty \varepsilon N(\vec{r}_0, \vec{r}_0, \varepsilon, t)\,d\varepsilon-(4\pi tD)^{-3/2}\int_0^\infty \varepsilon N_0(\varepsilon)\,d\varepsilon=(4\pi tD)^{-3/2}\int_0^\infty e^{-\frac{\rho}{tD}}\ \times$$
$$\times M(\sqrt{\rho}, \vec{r}_0, q)\,d\rho\int_0^\infty N_0(\varepsilon)\,d\varepsilon\,D^{-1}. \tag{2.8}$$

Отсюда видно, что, обращая сначала преобразование Лапласа, мы придем к следующей хорошо известной задаче: найти функцию, четную относительно плоскости $z=0$, зная интегралы от нее по сферам всевозможных радиусов с центрами, лежащими на этой плоскости. В работе [4] доказана однозначная разрешимость этой задачи в классе непрерывно дифференцируемых функций. Необходимо только иметь в виду, что сами интегралы по сферам как функции от радиуса и места расположения центра на плоскости нельзя задавать произвольным образом. Теорема полностью доказана.

1. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. – М.: Мир, 1965. – 406 с.

2. Гестрин Г.Н. О теореме единственности в одной многомерной обратной задаче для оператора $-\Delta+v(\vec{r})$. - Докл. АН УССР. Серия А, 1978, № 12, с. 1067-1071.
3. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. - М.: Наука, 1975. - 415 с.
4. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. - 831 с.

УДК 519.2

Л.Б.Голинский

ОБ ОЦЕНКЕ УСТОЙЧИВОСТИ В ТЕОРЕМЕ МАРЦИНКЕВИЧА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Проблема устойчивости для известной теоремы Марцинкевича о характеристических функциях (ХФ) вида $exp\{P_n(t)\}$, $P_n(t)$ - многочлен, поставлена Н.А.Сапоговым в работах [1, 2], причем первая работа посвящена многочленам $P_n(t)$ степени $n = 4$. Задача при этом приобретает основные черты, свойственные ей для значений $n > 4$. В работе [1] получена оценка сверху для коэффициентов многочлена $P_4(t)$, если функция $exp\{P_4(t)\}$ близка в некотором смысле к характеристической.

В настоящей работе рассмотрен многочлен $P_4(t) = -\frac{1}{2}t^2 - at^4$, $a>0$ (именно этот случай, как показано в работе [1], является основным). Получены двусторонние точные оценки коэффициента a в равномерной и λ-метриках. Наш метод отличен от примененного Н.А.Сапоговым и основан на исследовании функции

$$v_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{itx + P_4(t)\right\} dt \qquad (1)$$

методом перевала, который применялся до сих пор исключительно для получения оценок снизу в ряде задач об устойчивости разложения распределений на прямой (см. работы [3, 4]). Здесь этот метод позволил получить двустороннюю оценку.

§ 1. Оценка устойчивости в равномерной метрике.

Легко видеть, что функция $v_0(x)$ - вещественная и принадлежит $L^1(-\infty,\infty)$. Применяя формулу обращения для интеграла Фурье, получаем

$$f_0(t) = exp\left\{-\frac{1}{2}t^2 - at^4\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, v_0(x)dx.$$

Обозначим

$$F_0(x) = \int_{-\infty}^{x} v_0(u)\,du. \qquad (1.1)$$

Теорема 1. Пусть $F(x)$ – функция распределения (ФР) и

$$\sup_x |F(x) - F_0(x)| = \varepsilon_0. \tag{1.2}$$

Тогда

$$C_1 \sqrt{a}\,(1+\sqrt{a})^{-1} \exp(-C_2 a^{-1}) \le \varepsilon_0. \tag{1.3}$$

Буквами C_k, $k = 1, 2, \ldots$ обозначаются постоянные.

Доказательство. Точки перевала суть корни алгебраического уравнения третьей степени

$$4az^3 + z - ix = 0, \tag{1.4}$$

которое разрешимо в радикалах (связанные с этим понятия и формулы приведены в работе [5]). Дискриминант уравнения (1.4) $D = (\frac{x}{8a})^2 - (\frac{1}{12a})^3 > 0$, если только

$$x^2 > (27a)^{-1}, \tag{1.5}$$

что будем сейчас считать выполненным. Поскольку функция $v_0(x)$ четна, то можно ограничиться значениями $x > 0$. Нас интересуют точки перевала, лежащие в верхней полуплоскости:

$$z_1 = \tau + i\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v) + \frac{i}{2}(u + v), \quad z_2 = -\bar{z}_1,$$

где

$$u = u(x) = \left\{\frac{x}{8a} + \sqrt{D}\right\}^{\frac{1}{3}}, \quad v = v(x) = \left\{\frac{x}{8a} - \sqrt{D}\right\}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{12au}, \quad u > v > 0. \tag{1.6}$$

При условии (1.5) $u^2 > (12a)^{-1}$, и значит функции

$$u = u(x), \; \sigma = \sigma(x) = \frac{1}{2}[u(x) + v(x)], \; \tau = \tau(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}[u(x) - v(x)] \tag{1.7}$$

монотонно возрастают. Кроме того, из (1.6) и (1.7) непосредственно следует, что

$$\frac{1}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} < \sigma(x) < \left(\frac{x}{4a}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{1.8}$$

Подставляя $z_1 = \tau + i\sigma$ в уравнение (1.4), получаем соотношения для τ и σ:

$$\left.\begin{aligned} 4a\sigma^3 - \sigma + x &= 12a\sigma\tau^2, \\ 12a\sigma^2 - 1 &= 4a\tau^2 \end{aligned}\right\}. \tag{1.9}$$

Теорема Коши позволяет перенести интегрирование в (1) на прямую $t + i\sigma$, $-\infty < t < \infty$.

Учитывая, что функция $v_0(x)$ вещественная и используя соотношения (1.9), получаем

$$v_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(t+i\sigma)x + P_4(t+i\sigma)\}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \exp\left\{-\sigma x - \frac{t^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} + 6at^2\sigma^2 - a\sigma^4\right\};$$

$$\cos\{t(x-\sigma)-4a\sigma t(t^2-\sigma^2)\}dt = \frac{1}{\pi}\exp\left\{-a\sigma^4+\frac{\sigma^2}{2}-\sigma x+a\tau^4\right\}\int_0^\infty \exp\{-a(t^2-\tau^2)^2\}\cos\{4a\sigma t^3-12a\sigma\tau^2 t\}\,dt.$$

Замена переменных $t-\tau=\tau\zeta$ (при условии (1.5) $\tau>0$) приводит к следующему выражению:

$$v_0(x)=\frac{\tau}{\pi}\exp\left\{-a\sigma^4+\frac{\sigma^2}{2}-\sigma x+a\tau^4\right\}v_1(x), \qquad (1.10)$$

где

$$v_1(x)=\int_{-1}^{\infty}\exp\left\{-t^2R(t,x)\right\}\cos\left\{Q(t,x)\right\}dt,\quad R(t,x)=a\tau^4(t+2)^2,\quad Q(t,x)=4a\sigma\tau^3(t^3+3t^2-2).$$

Имеем далее

$$v_1(x)=\cos(8a\sigma\tau^3)\int_{-1}^{\infty}\exp\{-t^2R(t,x)\}\cos\{4a\sigma\tau^3(t^3+3t^2)\}dt+\sin(8a\sigma\tau^3)\int_{-1}^{\infty}\exp\{-t^2R(t,x)\}\times$$

$$\times\sin\{4a\sigma\tau^3(t^3+3t^2)\}\,dt=I_1\cos(8a\sigma\tau^3)+I_2\sin(8a\sigma\tau^3).$$

В интегралах I_1, I_2 выделим главную часть и оценим остаток

$$\left|I_1-\int_{-1}^{\infty}\exp\{-4a\tau^4t^2\}\cos(12a\sigma\tau^3t^2)dt\right|\le\int_{-1}^{\infty}\exp\{-t^2R(t,x)\}\left|\cos(4a\sigma\tau^3(t^3+3t^2))-\right.$$

$$\left.-\cos(12a\sigma\tau^3t^2)\right|dt+\int_{-1}^{\infty}\left|\exp\{-t^2R(t,x)\}-\exp\{-4a\tau^4t^2\}\right|dt\le 2a\sigma\tau^3\int_{-1}^{\infty}\exp\{-t^2R(t,x)\}|t|^3dt+$$

$$+\int_{-1}^{0}[\exp\{-t^2R(t,x)\}-\exp\{-4a\tau^4t^2\}]dt+\int_0^\infty[\exp\{-4a\tau^4t^2\}-\exp\{-t^2R(t,x)\}]dt.$$

Поскольку функция $R(t,x)$ возрастает на полуоси $[-1,\infty)$, то

$$\left|I_1-\int_{-1}^{\infty}\exp\{-4a\tau^4t^2\}\cos(12a\sigma\tau^3t^2)dt\le 4a\sigma\tau^3\int_0^\infty\exp(-a\tau^4t^2)\,t^3dt+2\int_0^\infty\exp(-a\tau^4t^2)\times\right.$$

$$\times(4a\tau^4t^3+a\tau^4t^4)dt\le 6\int_0^\infty\exp(-a\tau^4t^2)(4a\sigma\tau^3t^3+a\tau^4t^4)dt=3[4a\sigma\tau^3\Gamma(2)+4a\tau^4\Gamma(2)+$$

$$+\sqrt{a}\,\tau^2\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right)](a\tau^4)^{-2}.$$

Сузим интервал (1.5) изменения параметра x, считая $x>8a^{-\frac{1}{2}}$. Из (1.7) и второго равенства в (1.9) непосредственно следует, что при этом

$$2\sigma^2(x)<\tau^2(x)<3\sigma^2(x). \qquad (1.11)$$

Таким образом

$$\left|I_1-\int_{-1}^{\infty}\exp(-4a\tau^4t^2)\cos(12a\sigma\tau^3t^2)dt\right|\le C_3\left[(a\tau^4)^{-1}+(a\tau^4)^{-\frac{3}{2}}\right].$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-4a\tau^3t^2)\cos(12a\sigma\tau^3t^2)dt=\mathrm{Re}\sqrt{\frac{\pi}{4a\tau^4-12ia\sigma\tau^3}}=\frac{0{,}5}{(a\tau^4)^{1/2}}\mathrm{Re}\sqrt{\frac{\pi}{1-3i\sigma\tau^{-1}}},$$

а

$$\left|\int_1^\infty\exp(-4a\tau^4t^4)\cos(12a\sigma\tau^3t^2)dt\right|\le\frac{1}{8a\tau^4}\exp(-4a\tau^4)<\frac{1}{8a\tau^4},$$

то приходим к следующему неравенству:

$$\left| I_1 - \frac{1}{2(a\tau^4)^{1/2}} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{x}{1-3i\sigma\tau^{-1}}} \right| \le c_4 \left[(a\tau^4)^{-1} + (a\tau^4)^{-\frac{3}{2}} \right].$$

Совершенно аналогично получаем

$$\left| I_2 - \frac{1}{2(a\tau^4)^{1/2}} \operatorname{Im} \sqrt{\frac{x}{1-3i\sigma\tau^{-1}}} \right| \le c_5 \left[(a\tau^4)^{-1} + (a\tau^4)^{-\frac{3}{2}} \right].$$

Учитывая (1.11), имеем

$$\max\left\{ \left| I_1 - \frac{c_6}{(a\tau^4)^{1/2}} \right|, \left| I_2 - \frac{c_7}{(a\tau^4)^{1/2}} \right| \right\} \le c_8 \left[(a\tau^4)^{-1} + (a\tau^4)^{-3/2} \right]. \qquad (1.12)$$

Если

$$a\tau^4 > c_9, \qquad (1.13)$$

где c_9 – подходящим образом выбранная постоянная, то из (1.12) следует

$$I_j > \frac{c_{10}}{(a\tau^4)^{1/2}}, \quad j = 1, 2. \qquad (1.14)$$

Учитывая (1.8) и (1.12), можно обеспечить условие (1.13), если положить

$$x \ge 8a^{\frac{1}{2}} + c_{11} a^{\frac{1}{4}} = x_0,$$

где c_{11} – достаточно велико. При условии $x \ge x_0$ выполнены неравенства (1.14). Функция $q(x) = 8a\sigma(x)\tau^3(x)$ монотонно возрастает, неограничена на полуоси $x \ge x_0$ и

$$c_{12}(a^{-1}+1) \le q(x_0) \le c_{13}(a^{-1}+1).$$

Пусть $[x_1, x_2]$ – такой интервал, что $q(x_1) = (2p+1)\pi$, $q(x_2) = (2p+\frac{3}{2})\pi$

$$(2p-1)\pi \le c_{13}(a^{-1}+1) < (2p+1)\pi,$$

так что $x_0 < x_1 < x_2$ При $x_1 \le x \le x_2$ $\cos q(x) \le 0$, $\sin q(x) \le 0$,

$$I_j > \frac{c_{10}}{(a\tau^4)^{1/2}} \ge \frac{c_{10}}{\sqrt{a}\,\tau^2(x_2)} > \frac{c_{14}}{1+a^{-1/2}}, \; j = 1, 2$$

отсюда следует, что $v_1(x) = I_1 \cos q(x) + I_2 \sin q(x) < -\frac{c_{14}}{1+a^{1/2}}$, $x_1 \le x \le x_2$. (1.15)

Оценим экспоненциальный множитель в (1.10) в указанных границах для x. Используем соотношения (1.9). Имеем

$$-a\sigma^4 + \frac{1}{2}\sigma^2 - \sigma x = -a\sigma^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\sigma^2 + a\left(3\sigma^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 - \sigma(12a\sigma\tau^2 - 4a\sigma^3 + \sigma) = -24a\sigma^4 + \sigma^2 +$$
$$+ (16a)^{-1} > -24a\sigma^4 > -c_{15}(1-a^{-1}).$$

Поскольку при $x \ge x_0$ в силу (1.11) и (1.8)

$$\tau(x) \ge c_{16}\left(a^{-\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{4}}\right),$$

то

$$\frac{\tau}{x} \exp\left\{ -a\sigma^4 + \frac{1}{2}\sigma^2 + a\tau^4 - \sigma x \right\} > c_{17}\left(a^{-\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{4}}\right) \exp\left(-\frac{c_{15}}{a}\right). \qquad (1.16)$$

Оценим теперь снизу длину интервала $[x_1, x_2]$. Из (1.9) вытекает равенство $x = 2\sigma(x)[16a\sigma^2(x)-1]$.
Если $x_1 \le x < y \le x_2$, то

$$x-y \geq C_{18}(a\sigma^2(y)-1)(\sigma(x)-\sigma(y)) > C_{19}(1+\sqrt{a})(\sigma(x)-\sigma(y)).$$

С другой стороны, из выражения для $q(x)$, имеем

$$q(x)-q(y) \le C_{20}\, a\tau^3(x)\{\sigma(x)-\sigma(y)\} < C_{21}(a^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{4}})\{\sigma(x)-\sigma(y)\}.$$

Но по построению $q(x_2)-q(x_1)=\frac{\pi}{2}$, так что

$$x_2-x_1 > C_{22}(1+\sqrt{a})(a^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{4}})^{-1}. \tag{1.17}$$

Учитывая (1.15), (1.16) и (1.17), получаем

$$\int_{x_1}^{x_2} v_0(u)\,du < -C_{23}\,\frac{(a^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{4}})(1+\sqrt{a})}{(a^{-\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}})(1+a^{-\frac{1}{2}})}\exp\left(-\frac{C_{15}}{a}\right) < C_{24}\,\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{C_{15}}{a}\right). \tag{1.18}$$

Пусть теперь $F(x)$ – функция распределения (или хотя бы просто неубывающая функция) и справедливо (1.12).
Тогда

$$F(x)-\varepsilon_0 \le F_0(x) \le F(x)+\varepsilon_0.$$

и

$$\int_{x_1}^{x_2} v_0(u)\,du = F_0(x_2)-F_0(x_1) \geq F(x_2)-\varepsilon_0-F(x_1)-\varepsilon_0 \geq -2\varepsilon_0.$$

Используя (1.18), получаем неравенство (1.3).

Замечание. Неравенство (1.3) справедливо без каких-либо априорных ограничений на параметры a и ε_0. Из (1.3) очевидно следует, что $\lim\limits_{\varepsilon_0\to 0} a(\varepsilon_0)=0$, т.е. теорема Марцинкевича устойчива в равномерной матрике. Если при этом ε_0 достаточно мало, то

$$a < C_0\left[\ln\frac{1}{\varepsilon_0}\right]^{-1}. \tag{1.19}$$

§ 2. Оценка устойчивости в λ-метрике.

Рассмотрим близость функции $f_0(t)=\exp\{P_4(t)\}$ к ХФ $f(t)$ иного рода. Пусть $f(t)$ – вещественная ХФ, отвечающая ФР $F(x)$ и

$$|f_0(t)-f(t)| \le \varepsilon,\quad |t| \le T. \tag{2.1}$$

В работе [6] авторами была рассмотрена следующая теорема:

Пусть $F(x)$ – ФР, $G(x)$ – функция ограниченной вариации, $G(-\infty)=0$, $f(t)$, $g(t)$ – соответствующие преобразования Фурье – Стилтьеса. Пусть $G(x)$ при всех x имеет производную, причем $\sup\limits_x|G'(x)| \le C_1$. Если $|f(t)-g(t)| \le \varepsilon$, $|t| \le T$, то для любого $L > 2T^{-1}$ имеет место неравенство

$$\sup_x |F(x)-G(x)| \le C_2(\varepsilon\ln LT + C_1T^{-1} + \gamma(L)\},$$

где

$$\gamma(L) = \mathop{Var}_{-\infty<x<\infty} G(x) - \sup_x \mathop{Var}_{x\le y\le x+L} G(y).$$

Положим $G(x)=F_0(x)$ (см. (1.1)), $g(t)=f_0(t)$. Тогда

$$\gamma(L)\le 2\int_{L/2}^{\infty}|v_0(u)|\,du,$$

так что

$$\sup_x |F(x)-F_0(x)|\le C_3\ (\varepsilon \ln LT+T^{-1}+\int_{L/2}^{\infty}|v_0(u)|\,du). \tag{2.2}$$

Для оценки последнего слагаемого в (2.2) воспользуемся следующим утверждением (фактически доказанном в работе [2]):

<u>Лемма 1</u>. Пусть $h(t)=\exp\{-\frac{1}{2}t^2-\sum_{k=2}^{n} a_k t^{2k}\}$, $a_k\ge 0$ и

$$v(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(itx)h(t)\,dt.$$

Тогда при любом $A>0$

$$|v(x)|\le C_4\exp\{\frac{A^2}{2}+\sum_{k=2}^{n} a_k \alpha_k A^{2k}\}e^{-A|x|},$$

$$\alpha_k=(\sin\frac{\pi}{2(2k+1)})^{1-2k}.$$

В интересующем нас случае имеем

$$|v_0(x)|\le C_5\exp\{\frac{A^2}{2}+\alpha_2 aA^4\}e^{-Ax}, \quad x>0. \tag{2.3}$$

Как показано в работе [1, лемма 6.1] при достаточно малых ε, T^{-1} в (2.1) параметр a ограничен. Поэтому, полагая в (2.3) $A=2$, получаем

$$\int_{L/2}^{\infty}|v_0(u)|\,du<C_6\exp(-L). \tag{2.4}$$

При $L=\ln\frac{1}{\varepsilon}$ из (2.2) и (2.4) следует, что

$$\sup_x |F(x)-F_0(x)|\le C_7\{\varepsilon\ln(T\ln\frac{1}{\varepsilon})+T^{-1}\}=\varepsilon_0.$$

Теорема 1 позволяет утверждать, что, если ε_0 достаточно мало, то

$$a\le C_8[\ln\frac{1}{\varepsilon_0}]^{-1}. \tag{2.5}$$

Оценка (2.5) была получена Н.А.Сапоговым в работе [1]. Там же было высказано предположение об ее точности.

Последнее неравенство можно трактовать как оценку устойчивости в λ-метрике. Пусть $B\cdot C$ – пространство ограниченных на всей оси непрерывных вещественных функций. На нем можно ввести метрику, называемую λ-метрикой следующим образом [7]:

$$\lambda(f_1,f_2)=\inf_{T>0}\max\{\max_{|t|\le T}|f_1(t)-f_2(t)|,T^{-1}\},\ f_1,f_2\in B\cdot C, \tag{2.6}$$

после чего оно становится полным метрическим пространством, причем сходимость в λ-метрике эквивалентна равномерной сходимости на любом компакте. Из определения λ-метрики следует, что

$$\max_{|t|\le\lambda_0^{-1}}|f_1(t)-f_2(t)|=\lambda_0,\quad \lambda_0=\lambda(f_1,f_2). \tag{2.7}$$

Пусть $f(t)$ – вещественная ХФ и $\lambda(f_0, f_1)=\lambda_0$. Тогда справедливо неравенство (2.1) с $\varepsilon = T^{-1} = \lambda_0$ и, следовательно, при достаточно малом λ_0

$$a \le C_9 \left[\ln \frac{1}{\lambda_0} \right]^{-1}. \tag{2.8}$$

§ 3. Оценки снизу устойчивости в равномерной и λ-метриках.

Докажем, что оценка (2.8) точна, т.е., справедлива.

Теорема 2. Пусть $a < 10^{-4}$. Тогда существует ФР $F_1(x)$ с ХР $f_1(t)$ такие, что

$$\sup_x |F_0(x) - F_1(x)| \le C_1 \sqrt{a} \exp\left\{-\frac{C_2}{a}\right\}, \tag{3.1}$$

$$\sup_t |f_0(t) - f_1(t)| \le C_1 \sqrt{a} \exp\left\{-\frac{C_2}{a}\right\}. \tag{3.2}$$

Доказательству теоремы предпочтем следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $a < 10^{-4}$. Тогда при $0 \le x \le (6\sqrt{a})^{-1}$

$$v_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) f_0(t)\,dt > 0. \tag{3.3}$$

Доказательство. Применим вновь метод перевала к интегралу (1) при малых значениях x. Дискриминант D уравнения (1.4) сейчас отрицателен, так что все точки перевала лежат на мнимой оси. Нас будет интересовать ближайшая к вещественной оси точки перевала (см. работу [5])

$$z_0 = i\sigma = -i\left\{\left(\frac{x}{8a} + i\sqrt{|D|}\right)^{1/3} \exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right) + \left(\frac{x}{8a} - i\sqrt{|D|}\right)^{1/3} \exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)\right\}.$$

Обозначая $\frac{x}{8a} + i\sqrt{|D|} = R\exp(i\varphi)$, проверяем, что

$$\sigma = -\frac{1}{\sqrt{3a}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2}{3}\pi\right) \ge 0,$$

причем $\varphi = \varphi(x)$ убывает от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{6}$, когда x растет от 0 до $(6\sqrt{a})^{-1}$. Используя первое соотношение (1.9), которое сейчас имеет вид $4a\sigma^3 - \sigma + x = 0$, получаем, как в теореме 1,

$$v_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(t+i\sigma) + P_4(t+i\sigma)\}\,dt = \frac{1}{\pi} \exp\left\{-\sigma x + \frac{\sigma^2}{2} - a\sigma^4\right\}\cdot$$

$$\int_0^\infty \exp\left\{-at^4 + 6at^2\sigma^2 - \frac{t^2}{2}\right\} \cos(4a\sigma t^3)\,dt.$$

Оценим

$$v_1(x) = \int_0^\infty \exp\left\{-at^4 - \frac{1}{2}\beta(x)t^2\right\} \cos(4a\sigma t^3)\,dt, \quad \beta(x) = 1 - 12a\sigma^2(x).$$

Заметим, что при $0 \le x \le (6\sqrt{a})^{-1}$ $\beta(x) \ge 1 - 4\cos^2 \frac{11}{18}\pi > \frac{1}{2}$.

Поэтому $v_1(x) = \left\{\int_0^3 + \int_3^\infty\right\} \exp\left\{-at^4 - \frac{1}{2}\beta(x)t^2\right\} \cos(4a\sigma t^3)\,dt = I_3 + I_4$.

Для величины I_4 получаем

$$|I_4| \le \int_3^\infty \exp\left\{-\beta(x)\frac{t^2}{2}\right\} dt = \frac{1}{\sqrt{\beta(x)}} \int_{3\sqrt{\beta(x)}}^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt < \frac{1}{3\beta(x)} e^{-\frac{9}{2}\beta(x)} < \frac{2}{3} e^{-\frac{9}{4}\beta(x)}.$$

Далее, поскольку $4a\sigma < 4\sqrt{\frac{a}{3}}$, то при $0 \le t \le 3$ $4a\sigma t^3 < 108\sqrt{\frac{a}{3}} < \frac{\pi}{3}$, если только $a < 10^{-4}$.

Поэтому

$$I_3 > exp(-81a)\int_0^3 exp\{-\frac{1}{2}\beta(x)t^2\}\cos(4a\sigma t^3)dt > \frac{1}{2}exp(-81a)\int_0^3 exp\{-\frac{1}{2}\beta(x)t^2\}dt >$$

$$> \frac{3}{2}exp(-81a)e^{-\frac{9}{2}\beta(x)}$$

и значит

$$v_1(x) \ge I_3 - |I_4| > \{\frac{3}{2}exp(-81a) - \frac{2}{3}\}e^{-\frac{9}{2}\beta(x)} > 0,$$

что и требовалось доказать.

Глобальная оценка функции $v_0(x)$ дается леммой 1. Положим в (2.3) $A = Ka^{-1/2}$, постоянная K выбирается ниже. Тогда

$$|v_0(x)| \le C_3 exp\{-\frac{K}{\sqrt{a}}x + \frac{K^2}{2a} + \frac{d_2 K^4}{a}\} = C_3 exp\{-\frac{K}{\sqrt{a}}(x - \frac{K}{2\sqrt{a}} - \frac{d_2 K^3}{\sqrt{a}})\}, \ x > 0.$$

Выбирая K из условия

$$\frac{K}{2} + d_2 K^3 < \frac{1}{12},$$

получаем

$$|v_0(x)| \le C_4 exp\{-\frac{Kx}{2\sqrt{a}}\}, \quad x \ge (6\sqrt{a})^{-1}. \qquad (3.4)$$

В неравенствах (3.3) и (3.4) содержится вся необходимая информация о поведении функции $v_0(x)$.

Доказательство теоремы 2. Обозначим, как обычно, $v_0^+(x)$ $(v_0^-(x))$ положительную (отрицательную) части функции $v_0(x)$, так, что $v_0(x) = v_0^+(x) - v_0^-(x)$.

Положим

$$F_0^+(x) = \int_{-\infty}^{x} v_0^+(u)du.$$

Тогда

$$\sup_x |F_0^+(x) - F_0(x)| \le \int_{-\infty}^{\infty} v_0^-(u)du \equiv \Delta.$$

Очевидно, функция $F_0^+(x)$ не убывает, $F_0^+(-\infty) = 0$ и

$$F_0^+(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0^+(u)du = \int_{-\infty}^{\infty}(v_0(u) + v_0^-(u))du = 1 + \Delta.$$

Поэтому $F_1(x) = (1+\Delta)^{-1}F_0^+(x)$ – функция распределения и

$$\sup_x |F_1(x) - F_0(x)| = \sup_x |(1+\Delta)^{-1}F_0^+(x) - F_0(x)| \le [1-(1+\Delta)^{-1}](1+\Delta) + \sup_x |F_0^+(x) - F_0(x)| \le 2\Delta. \qquad (3.5)$$

Если $f_1(x)$ – ХФ распределения $F_1(x)$, то

$$|f_1(t) - f_0(t)| = |(1+\Delta)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}v_0^+(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}v_0(x)dx| \le 2\int_0^{\infty}|(1+\Delta)^{-1}v_0^+(x) -$$

$$- v_0(x)|dx \le 2[1-(1+\Delta)^{-1}]\int_0^{\infty} v_0^+(x)dx + 2\int_0^{\infty} v_0^-(x)dx = 2\Delta. \qquad (3.6)$$

Оценим теперь величину Δ, используя (3.3) и (3.4). В силу (3.3) $v_0^-(x)=0$ при $0\le x\le (6\sqrt{a})^{-1}$ и, следовательно,

$$\Delta=2\int_0^\infty v_0^-(x)dx=2\int_{(6\sqrt{a})^{-1}}^\infty v_0^-(x)dx\le 2\int_{(6\sqrt{a})^{-1}}^\infty |v_0(x)|dx\le C_0\int_{(6\sqrt{a})^{-1}}^\infty \exp\left\{-\frac{Kx}{2\sqrt{a}}\right\}dx=C_6\sqrt{a}\exp\left\{-\frac{C_2}{a}\right\},$$

что и завершает в силу (3.5) и (3.6) доказательство теоремы.

Замечание. Поскольку $\lambda=\lambda(f_0,f_1)\le\sup_t|f_0(t)-f_1(t)|$, то при достаточно малых a справедлива оценка

$$a\ge C_7\left[\ln\frac{1}{\lambda}\right]^{-1} \tag{3.7}$$

Таким образом, гипотеза Н.А.Сапогова доказана в следующем виде. Пусть Λ_0 – расстояние от $f_0(t)$ до множества $\mathfrak{M}$ вещественных ХФ в λ-метрике:

$$\Lambda_0=\inf_{f\in\mathfrak{M}}\lambda(f_0,f),$$

ρ_0 – расстояние от $F_0(x)$ до множества $\mathcal{F}$ функций распределения в равномерной метрике

$$\rho_0=\inf_{F\in\mathcal{F}}|F_0(x)-F(x)|.$$

Тогда при достаточно малых Λ_0 и ρ_0

$$C_8\left[\ln\frac{1}{\Lambda_0}\right]^{-1}\le a\le C_9\left[\ln\frac{1}{\Lambda_0}\right]^{-1},\quad C_{10}\left[\ln\frac{1}{\rho_0}\right]^{-1}\le a\le C_{11}\left[\ln\frac{1}{\rho_0}\right]^{-1}.$$

1. Сапогов Н.А. Устойчивость для теоремы Марцинкевича. Случай многочлена четвертой степени. – Зап. науч. семинаров Ленинградского отделения матем. ин-та, 1976, 61, с. 107–124.
2. Сапогов Н.А. Проблема устойчивости для теоремы Марцинкевича. – Зап. науч.семинаров ЛОМИ, 1979, 87, с.104–124.
3. Чистяков Г.П. Оценки устойчивости разложений композиции распределений Гаусса и Пуассона. – Зап. науч. семинаров Ленинградского отделения матем. ин-та, 1979, 87, с. 164–186.
4. Чистяков Г.П. О точности оценок в теоремах об устойчивости нормального распределения и распределения Пуассона. – Теория функций, функц.анализ и их прилож., 1975, вып. 26, с.119–128.
5. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. – М.: Наука, 1965.–300 с.
6. Мешалкин Л.Д., Рогозин Б.А. Оценка расстояния между функциями распределения по близости их характеристических функций и ее применение к центральной предельной теореме. – В кн.: Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963, с. 49–55.
7. Золотарев В.М. Метрические расстояния в пространствах случайных величин и их распределений. – Матем. сборник, 1976, 101, № 3, с. 416–454.

УДК 517.9

А.М.Блох

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОТРЕЗКА ПОСТОЯННОГО УГЛА НАКЛОНА

В работе исследуются свойства непрерывных, а также удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям отображений отрезка. Под отображениями постоянного угла наклона понимаются кусочно-монотонные отображения f, такие, что $|f'(x)|=\operatorname{tg}\alpha>1$ всюду, кроме экстремумов f (так что угол наклона $\alpha>45^0$).

Введем определения и сформулируем теоремы, доказанные в работах [1-3]. Пусть f – непрерывное отображение отрезка. Периодическим периода k назовем отрезок J, где $J, \dots, f^{k-1}J$ попарно не пересекаются, а $f^kJ=J$; $E(f, orb_f J)=\{x\in orb_f J:$ для любой окрестности U точки x в $orb_f J$ $orb_f U=orb_f J\}$ назовем базисным, если оно бесконечно (если ясно, о каком отображении идет речь, будем писать $E(orb\, J)$. Пусть $\{J_i\}_{i=1}^k$ – упорядоченный набор отрезков, т.е. $J_1<J_2<\dots<J_k$, $J_i\cap J_2=\emptyset$ при $i\neq r$; $Q=\cup J_i$. Отображение $\varphi: Q\to Q$, циклически переставляющее отрезки $\{J_i\}_{i=1}^k$, назовем нестрого периодическим (периода k). Если $\{J_i\}_{i=1}^k$ – периодические отрезки отображения отрезка f с периодами $\{m_k\}_{k=0}^\infty$, $m_k\to\infty$, $J_0\supset J_1\supset\dots$, $\omega(x)\subset\cap orb\, J_k$, то назовем $\omega(x)$ сильно соленоидальным; если $m_k=2^k\ (\forall k)$, то назовем $\omega(x)$ двоично сильно соленоидальным. Наконец, максимальные по включению среди ω-предельных множеств f циклы назовем множествами рода 0, их объединение обозначим X_f.

<u>Теорема</u> А([1-3]). Непрерывные отображения отрезка f обладают такими свойствами.

1. Пусть J – периодический отрезок периода k, $E=E(f, orb\, J)$ – базисное. Тогда существует нестрого периодическое транзитивное отображение периода k $g: Q\to Q$ и монотонная непрерывная сюръекция $\varphi: orb_f J\to Q$ такие, что $\varphi\circ f=g\circ\varphi$, $card\{\varphi^{-1}(x)\cap E\}\leq 2\ (\forall x\in Q)$. При этом а) $\exists b\in E: f^{2k}b=b$; б) топологическая энтропия $h(f/E)\geq(2k)^{-1}\cdot \ln 2$; в) если $\omega(z)\supset E$, то $\omega(z)=E$; г) f/E транзитивно; д) E совершенно.

2. Пусть отрезки $\{J_k\}_{k=0}^\infty$ с периодами $\{m_k\}_{k=0}^\infty$ таковы, что $m_k\to\infty$, $J_0\supset J_1\supset\dots$ $\Omega=\omega(x)\subset S=\cap_k orb\, J_k$. Тогда найдется максимальное по включению среди ω-предельных множеств множество $\Omega''=\omega(z)\subset S$ такое, что: а) для любого $y\in S$ $\omega(y)=S\cap Per f=\Omega'\subset\Omega\subset\Omega''$; б) Ω' минимально, $\Omega''\setminus\Omega'$ пусто или счетно и состоит из изолированных точек; в) для любого $\tilde y$ $\omega(\tilde y)\cap S\neq\emptyset\Rightarrow\Omega'\subset\omega(\tilde y)\subset\Omega''$.

3. Существует не более, чем счетное семейство базисных мно-

жеств $\{E_i\}$ и некоторое семейство пар множеств $\{\Omega'_\alpha \subset \Omega''_\alpha\}$, где Ω'_α и Ω''_α – соответственно минимальное (в смысле топологической динамики) и максимальное по включению среди ω-предельных множеств сильно соленоидальные множества, несовпадающие для не более, чем счетного множества индексов, причем: а) пересечение среди всех этих множеств возможно только между базисными множествами, происходит в конечном числе точек и никакие 3 множества не пересекаются; б) $Per f = \cup E_i \cup \Omega'_\alpha \cup X_f$, $\omega(f) = \cup E_i \cup \Omega''_\alpha \cup X_f = \cup\, \omega(y)$, где последнее объединение взято по всем y.

Теорема В ([2, 4]). Следующие свойства f равносильны: 1) $h(f) = 0$; 2) Точки $Per f$ имеют периоды степени 2 от 2^0 до 2^i (возможно, $i=\infty$); 3) Для любого x $\omega(x)$ – цикл или двоично соленоидальное множество.

Ниже среди базисных множеств введем отношение частичного порядка $>$: $E(orb J_1) > E(orb J_2) \equiv orb J_1 \supset orb J_2$.

Лемма 1. Пусть $f:[0,1] \xrightarrow{def} [0,1]$ непрерывно, $\{J_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – семейство невырожденных периодических отрезков, $\overline{\bigcup_\alpha orb J_\alpha} = [0,1]$, никакое множество $orb J_\alpha$ не содержит другого множества того же вида. Тогда периоды J_α равны 1 или 2.

Доказательство. Пусть $\beta\in A$, J_β имеет период $n>2$. Тогда найдутся $k\neq l$, $k<n$, $l<n$ такие, что $f^k J_\beta < f^l J_\beta$, между $f^k J_\beta$ и $f^l J_\beta$ нет отрезков из $orb J_\beta$; для определенности пусть $f^{k+1}J_\beta > f^l J_\beta$, $f^{l+1}J_\beta \not\equiv f^k J_\beta$. Ясно, что есть отрезок $I: f^k J_\beta < I < f^l J_\beta$, $fI = f^k J_\beta$.

Пусть $\gamma\in A$, $J_\gamma \cap I \neq \phi$. Тогда $f J_\gamma \cap f^k J_\beta \neq \phi$, так что и сам J_γ пересекается хотя бы с одним из отрезков $orb J_\beta$; расположение отрезков влечет, что $J_\gamma \cap f^k J_\beta \neq \phi$ или $J_\gamma \cap f^l J_\beta \neq \phi$. Если $J_\gamma \cap f^k J_\beta \neq \phi$, то $f J_\gamma \cap f^{k+1} J_\beta \neq \phi$, а по выбору I $f J_\gamma \cap f^k J_\beta \neq \phi$, так что $f J_\gamma$ (значит J_γ) пересекается с не менее чем двумя отрезками из $orb J_\beta$. Значит, J_γ содержит I или один из отрезков из $orb J_\beta$, а это невозможно по условию. Если же $J_\gamma \cap f^l J_\beta \neq \phi$, то $f J_\gamma \cap f^k J_\beta \neq \phi$ по выбору I и $f J_\gamma \cap f^{l+1} J_\beta \neq \phi$, а поскольку $f^{l+1} J_\beta \not\equiv f^k J_\beta$, то снова $f J_\gamma$ (значит J_γ) пересекается с не менее чем двумя отрезками $orb J_\beta$, что, как и выше, влечет противоречие.

Утверждение 1. Пусть $\{E(orb J_\gamma)\}_{\gamma\in A}$ – все $>$ - максимальные базисные множества f. Тогда периоды всех J_γ – степени 2, $\bigcup_\gamma orb J_\gamma = F_f$ – инвариантный компакт, являющийся объединением не более, чем счетного семейства Г орбит периодических отрезков и некоторого семейства циклов и двоично-соленоидальных множеств, причем разные элементы разложения не пересекаются, а периоды периодических отрезков и циклов – степени 2. Больше того, если f переделано только на орбитах периодических отрезков из Г, причем так, что они по-прежнему инвариантны, новое отображение g имеет на них энтропию 0 и в целом непрерывно, то $h(g)=0$.

Доказательство. Ясно, что F_f есть объединение не более чем счетного множества попарно не пересекающихся орбит периодических отрезков $\{orb\, I_\beta\}_{\beta\in B}$, и некоторого нульмерного множества. По доказанному в работе [1], если $\omega_f(x)$ не есть множество рода 0 и не сильно соленоидального, то есть базисное множество $E(f, orb_f J_\alpha)\supset\omega_f(x)$, а значит найдется $\beta\in B: orb_f I_\beta\supset\omega_f(x)$. Построим отображение g так, что $g/[0,1]\setminus\bigcup_\beta int(orb\, I_\beta)=f/[0,1]\setminus\bigcup_\beta int(orb\, I_\beta)$, для любого $\beta\in B$ $orb_f I_\beta=orb_g I_\beta$, $h(g/orb\, I_\beta)=0$ и в целом g непрерывно. Покажем, что $h(g)=0$. Если $orb_f x$ не попадает в $\bigcup_\beta orb\, I_\beta$, то по доказанному $\omega_f(x)$ – цикл или сильно соленоидально, причем $\omega_f(x)\cap\bigcup_\beta int(orb\, I_\beta)=\phi$. Но вне $\bigcup_\beta int(orb\, I_\beta)$ f совпадает с g, так что в этом случае $\omega_g(x)=\omega_f(x)$, $g/\omega(x)=f/\omega(x)$ и $h(g/\omega(x))=0$. Если же f – орбита x попадает в некоторое множество $int(orb\, I_\beta)$, то $h(g/\omega_g(x))=0$ по построению. Итак, $h(g)=0$ и по доказанному в работах [4, 2] (теорема B) имеем: периоды всех I_β – степени 2, F_f имеет описанное в утверждении теоремы строение. По лемме 1 это влечет, что все J_γ имеют периоды степени 2, что завершает доказательство.

Из доказательства ясно, что если переделать f на всех $int(orb\, I_\beta)$ так, что $orb\, I_\beta$ остается инвариантной, новое отображение g непрерывно и $g/orb\, I_\beta$ имеет конечное число циклов, притягивающих все точки $orb\, I_\beta$, то для любого x $\omega_g(x)$ – цикл или $\omega_g(x)$ – двоично сильно соленоидальное множество и $\omega_g(x)\cap(\bigcup_\beta orb\, I_\beta)=\phi$.

Ниже, если не оговорено обратное, f – непрерывно, кусочно-монотонно и не имеет интервалов постоянства. Мы используем такую теорему (см. [5,6]).

Теорема С. Если f кусочно-монотонно, транзитивно и $h(f)>0$, т.е. числа $\alpha,\beta>0$ такие, что для любого x

$$\alpha\cdot e^{nh(f)}\le card\{f^{-n}x\}\le\beta\cdot e^{nh(f)}.$$

По доказанному в работах [1, 3], если f непрерывно и транзитивно, то $h(f)>0$, так что в этом случае теорема С применима.

Лемма 2. Пусть у f нет сильно соленоидальных множеств. Тогда у f конечное число базисных множеств.

Доказательство. Если у f бесконечно много базисных множеств, то по теореме А кусочная монотонность влечет наличие последовательности орбит периодических отрезков $orb\, J_1\supset orb\, J_2\supset\dots$, где $E(orb\, J_i)$ – базисное $(\forall i)$, причем периоды $orb\, J_i$ стремятся к бесконечности, откуда у f есть сильно соленоидальные множества – противоречие.

Лемма 3. Пусть у f нет сильно соленоидальных множеств, $F_f=\bigcup_{i=1}^{k} orb\, J_i$, где $\{E(orb\, J_i)\}_{i=1}^{k}$ – все $\succ$ – максимальные базисные множества. Тогда для любого x множество $A_n(x)=\{y: y\notin F_f, fy\notin F_f, \ldots, f_y^{n-1}\notin F_f, f_y^n=x\}$ состоит из не более чем $p_f(n)$ точек, где $p_f(n)$ – зависящий только от f полином с положительными коэффициентами.

Доказательство. Перестроим f на F_f, пользуясь утверждением 1 так, что новое отображение g на F_f будет иметь конечное число циклов, притягивающих все точки F_f. Из замечания после доказательства утверждение 1 и условия следует, что все точки под действием g притягиваются к одному из некоторого конечного (в силу кусочной монотонности) набора циклов. Поскольку вне F_f $g=f$, то по работе [7] найдется полином P такой, что $card\, A_n(x)\le P(n)$. Фиксировав g, можно считать $P=P_f$, что и требуется доказать.

Ниже мы исследуем вопрос о числе прообразов произвольной точки x под действием отображения f. Легко привести примеры отображений f, у которых есть f^{-1} – инвариантный цикл (например, $y: fy=y, f^{-1}\{y\}=\{y\}$). Эти отображения могут иметь любую энтропию, y может принадлежать множествам $orb_f\, J$, где $E(orb_f\, J)$ – базисное, что не позволит нам в этом случае привести единую формулу для числа прообразов у всех точек отрезка, не прибегнув к громоздким и малосодержательным, даже очевидным, рассуждениям. Поэтому, имея в виду, что результаты, получаемые ниже, несколько обобщаются, будем считать описанную ситуацию и аналогичные ей невозможной, для чего и будем предполагать, что у отображения нет притягивающих хотя бы с одной стороны циклов (если $x\in Per\, f$, существует число n и малая односторонняя полуокрестность U_x вида $(x-\varepsilon, x)$ или $(x, x+\varepsilon)$ такие, что $f^n x=x$ и под действием f^n все точки U_x двигаются в сторону x, оставаясь в U_x (т.е. $f^n U_x\subset U_x$), то x является односторонне притягивающей точкой).

Лемма 4. Пусть у f нет притягивающих хотя бы с одной стороны циклов и сильно соленоидальных множеств, $E=E(orb\, J)$ – базисное множество, $h(f/E)=c$, $x\in orb\, J$. Считая $f/orb\, J=\varphi$, обозначим, как и выше, F_φ объединение множеств $orb\, J'$ по всем базисным множествам $E'=E(orb\, J')$ таким, что $E\succ E'$ (т.е. $orb\, J\supset orb\, J'$), F_f – аналогичное объединение для f. Пусть $B_n(x)=\{y: f^i y\notin F_f$ либо $f^i y\in orb\, J\setminus F_\varphi\ (\forall i: 0\le i\le n\le 1), f^n y=x\}$. Тогда есть $\alpha, \beta>0$ зависящие только от f и J, такие, что $\alpha\cdot c^n\le card\, B_n(x)\le\beta\cdot c^n$ или $B_n(x)=0$.

Доказательство. Можно считать $B_n(x)\ne\phi$. Очевидно, что есть конечное множество O периодических отрезков K, дополнительных в $orb\, J$ к E и таких, что есть базисное множество

$E' = E(orb\,J') \subset orb\,K$. По лемме 3 это влечет, что для некоторого полинома $Q(z) = Q_{f,J}(z)$ имеем $card\{B_n(x) \cap \bigcup_{K\in O} orb\,K\} \le Q(n)$.

Далее, пусть φ монотонно полусопрягает $f/orb\,J_i$ с нестрого периодическим транзитивным отображением g той же энтропии. Тогда каждой точке y из $B_n(x) \cap orb\,J$ соответствует $\varphi(y) \in g^{-n} \circ \varphi(x)$, причем, если $y', y'' \in B_n(x) \cap orb\,J$ и $\varphi(y') = \varphi(y'')$, то, очевидно, найдется дополнительный к E в $orb\,J$ интервал I, содержащий f-экстремумы, и $i<n: f^i y' \in I, f^i y'' \in I$. Пусть $\{I_1, \dots, I_r\} = P$ – множество всех дополнительных в $orb\,J$ к E интервалов, содержащих f-экстремумы; тогда из проведенных рассуждений следует, что если $x' \notin \bigcup_{i=0}^{n} \bigcup_{s=1}^{r} f^i I_s$, то $card\{B_n(x') \cap orb\,J\} = card\{g^{-n} \circ \varphi(x')\}$, причем, если n достаточно велико (больше периода любого отрезка из O), то $B_n(x') \cap (\bigcup_{K\in O} orb\,K) = \emptyset$. Фиксируем отрезок $I' \subset orb\,J : I' \cap (\bigcup_{i=0}^{M} \bigcup_{s=1}^{r} f^i I_s) = \emptyset$ (M – фиксированное число, большее периода любого отрезка из O и такое, что для любого z $card\{g^{-M}(z)\} \ge r+1$), $int\,I' \cap E \ne \emptyset$. По условию и из доказанного в работе [1] есть $N: \bigcup_{i=0}^{N} f^i I' = orb\,J$. Поскольку $B_n(x) \ne \emptyset$, т.е. $y \in orb\,J \setminus F_\psi : fy = x$. Значит, есть $y' \in I'$ и $i' \le N+1 : f^{i'-1}(y') = y$, $f^{i'}(y') = x$, причем, так как $y \notin F_\psi$, то $y' \notin F_\psi$, $fy' \notin F_\psi, \dots, f^{i'-1}(y') \notin F_\psi$. Далее, так как $y' \notin \bigcup_{i=0}^{M} \bigcup_{s=1}^{r} f^i I_s$ по выбору I', то $card\{B_M(y')\} = card\{g^{-M} \circ \varphi(y')\} \ge r+1$, так что есть точка $y'' \in B_M(y')$ такая, что $\bigcup_{s=1}^{r} orb\,I_s \notin y''$. Окончательно имеем: $y'' \in B_{i'+M}(x)$ (т.е. $f(y') = x$, для любого $i \le M + i' - 1$ $f^i y'' \notin F_\psi$), причем $i' + M \le N + M + 1$. Значит для всех $n \ge N+M+1$ $card\,B_n(x) \ge card\,B_{n-M-i'}(y'') = card\{g^{-(n-M-i')} \circ \varphi(y')\} \ge \alpha' c^{n-M-i'} \ge \alpha' c^{-M-N-1} c^n = \alpha'' c^n$, где последние оценки следуют из теоремы C. Осталось лишь изменить α'' так, чтобы неравенство выполнялось и для $n < M+M+1$ и оценка снизу получена.

Оценка сверху следует из того, что, как было замечено выше, любой точке из $B_n(x)$ соответствует $\varphi(y) \in g^{-n} \circ \varphi(x)$, причем если I_j имеет l_j участков монотонности $(1 \le j \le r)$, то в одну точку z склеивается под действием φ не более $Q(n) + l_1 \cdot \ldots \cdot l_r = \tilde{Q}(n)$ точек множества $B_n(x)$, откуда по теореме C имеем: $card\,B_n(x) \le \tilde{Q}(n) \cdot \beta' \cdot c^n \le \beta \cdot c^n$ для соответствующего β.

Заметим, что $B_n(x) = \emptyset$ возможно лишь в случае, если $x \in orb\,J'$, где $E' = E(orb\,J')$ – базисное, $E \succ E'$, причем $f(orb\,J \setminus orb\,J') \not\ni x$. Такие x образуют конечное число интервалов и их проведенных при получении оценки снизу для $card\{B_n(x)\}$ рассуждений следует, что найдется $\eta = \eta(f, J)$ такое, что для любого $x \in orb\,J$ есть $y \in orb\,J \setminus F_\psi : f^\eta y = x$. Это замечание понадобится нам в дальнейшем. Доказательство закончено.

Чтобы получить формулу числа прообразов точки x для f, обладающих свойствами из леммы 4, рассмотрим семейство $Co(x)$ базисных множеств $E(orb\,J)$ таких, что $orb\,J \ni x$. По доказанному в работе [1] (это легко следует из определения) не существует трех орбит периодических отрезков (порождающих базисные множества), попарно не содержащих друг друга и пересекающихся в одной точке. Поэтому, если $E'=E(orb\,J')$ и $E''=E(orb\,J'')$ не являются $\succ$-сравнимыми, $E'\ni x$, $E''\ni x$ и $E'''=E(orb\,J''')\ni x$, то E''' $\succ$- сравнимо с E' или с E''. Сказанное влечет, что в $Co(x)$ не более двух $\succ$-минимальных множеств E', E'', которые мы будем обозначать $E_{m_i}(x)$, а остальные базисные множества $E\in Co(x)$ - такие, что $E\succ E'$ или $E\succ E''$.

Утверждение 2. Пусть у f нет притягивающих хотя бы с одной стороны циклов и сильно соленоидальных множеств, x - некоторая точка, $c=\max\{e^{h(f/E)}: E\in Co(x)\}$, наибольшая по длине $\succ$ - упорядоченная цепочка базисных множеств из $Co(x)$ с энтропией $\ln c$ состоит из k элементов. Тогда если $Co(x)$ пусто, то $card\{f^{-n}x\}\le P_f(n)$, а если $Co(x)\neq\emptyset$, то для некоторых, зависящих только от $Co(x)$ чисел α, $\beta>0$, имеем: $\alpha\cdot n^{k-1}\cdot c^n\le card\{f^{-n}x\}\le\beta\cdot n^{k-1}\cdot c^n$.

Доказательство. В силу леммы 3 можно считать $Co(x)\neq\emptyset$. Из проведенных перед утверждением 2 рассуждений следует, что $Co(x)$ состоит из не более чем двух не совпадающих максимальных $\succ$ - упорядоченных цепочек базисных множеств; некоторые элементы разных цепочек могут совпадать. Пусть $E_1=E(orb\,J_1)\succ E_2=E(orb\,J_2)\succ\ldots\succ$ $\succ E_N=E(orb\,J_N)$-та из них, которая содержит k элементов с энтропией $\ln c$. Обозначим $e^{h(f(E_i))}=c_i$. Оценим мощность множеств D_1 тех точек y из $\{f^{-n}x\}$, которые обладают таким свойством: для любого $i\le n$ либо $f^iy\notin F_f$, либо есть номер t_i такой, что $f^iy\in orb\,J_{t_i}$, причем для любого $\tilde{E}=E(orb\,\tilde{J})\in Co(x)$ такого, что $E_{t_i}\succ\tilde{E}$, имеем $f^iy\notin orb\,\tilde{J}$.

Сопоставим каждому $y\in D_1$ последовательность $t_0,\ldots,t_n$ ($t_i=0$, если $f^iy\notin F_f$, $t_n=N$ всегда, поскольку $f^ny=x$). Ясно, что $\{t_i\}$ монотонно растет. Обозначим константы, возникающие по лемме 4 для каждого E_i как постоянные множители при степенях c_i соответственно α_i для оценки снизу и β_i для оценки сверху, и пусть $\beta''>\prod_{i=1}^{N}\gamma_i$ для любого набора $\{\gamma_i\}$, где либо $\gamma_i=\beta_i$, либо $\gamma_i=1$. Тогда из леммы 4 следует, что $card\,D_1\le\beta''\sum_{t_0\le t_1\le\ldots\le t_n=N}\prod_{i=0}^{n-1}c_{t_i}$ (c_0 подобрано так, что $c_0<c$, а $\beta''c_0^m\ge P_f(m)$ для любого m, при этом, возможно, дополнительно увеличено β''). Имеем $\beta''\sum_{t_0\le t_1\le\ldots\le t_n=N}\prod_{i=0}^{n-1}c_{t_i}=\beta''\cdot c^n\cdot\sum_{t_0\le t_1\le\ldots\le t_n=N}\left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{c_{t_i}}{c}\right)\le\beta''\cdot c^n\cdot Q_1(n)$, где Q_1 - некоторый полином степени $k-1$, зависящий только от выбора цепочки $E_1\succ E_2\succ\ldots\succ E_N$. Взяв (если она существует) другую максимальную $\succ$-упорядоченную цепочку элементов из $Co(x)$ и проведя те же рассуждения, получим аналогичную оценку сверху для соответствующего множества $D_2\subset\{f^{-n}x\}$. А поскольку $\{f^{-n}x\}=D_1\cup D_2$, то значит найдется полином $Q(z)$ степени $k-1$ и число β такие, что $card\{f^{-n}x\}\le\beta\cdot c^n\cdot Q(n)$; меняя, если надо, β, можно считать, что $card\{f^{-n}x\}\le\beta\cdot c^n\cdot n^{k-1}$.

Для получения оценки снизу найдем число γ так, что для любых $s<r$ $f^{\gamma}(orb\,J_s \setminus orb\,J_{s-1}) \supset orb\,J_r$. Пусть $E_{s_1},\dots,E_{s_k}$ – те базисные множества, для которых $h(f/E_{s_j}) = c_{s_j} = c$.

Пусть $\{t_i\}$ – такая, что $t_0 = s_1,\dots,t_{j_1} = s_1$; $t_{i_2} = s_2,\dots,t_{j_2} = s_2;\dots$ $t_{i_k} = s_k,\dots,t_{j_k} = s_k$, причем $i_2 - j_1 \le \gamma,\dots,i_k - j_{k-1} \le \gamma$, $n - j_k \le \gamma$. Множество всех таких $\{t_i\}$ обозначим $T(\{i_r j_r\}_{r=1}^{k})(i_1 = 0)$. Оценим число соответствующих этим последовательностям точек y. По выбору γ и из леммы 4 имеем: их число не меньше, чем $\alpha_{s_k}\cdot c^{j_k - i_k}\cdot\ldots\cdot\alpha_{s_1}\cdot c^{j_1 - i_1} \geq$ $\geq(\alpha_{s_k}\cdot\ldots\cdot\alpha_{s_1}\cdot c^{-k(\gamma+1)})\cdot c^{n} = \alpha'\cdot c^{n}$. С другой стороны, семейство всех удовлетворяющих указанным выше свойствам наборов $\{j_r, i_r\}$ состоит из $C^{k-1}_{n-k\gamma+k-1}$ элементов (число способов представить с учетом порядка $n-k\gamma$ в виде суммы k слагаемых). Некоторым набором могут соответствовать одни и те же последовательности, но очевидно, что одна последовательность не может соответствовать более, чем γ^k наборам. Отсюда имеем $\underset{\alpha}{card}\{f^{-n}x\} \geq card\,D_1 \geq \alpha'\cdot c^{n}\cdot C^{k-1}_{n-k\gamma+k-1}\cdot\gamma^{-k} \geq \alpha\cdot c^{n}\cdot n^{k-1}$, где α соответственно подобранное положительное число. Утверждение доказано, так как ясно, что α и β зависят только от семейства базисных множеств $\mathcal{Q}(x)$.

Будем называть гомтервалом интервал I такой, что f^{n}/I монотонно $(\forall n)$.

Утверждение 3. Следующие свойства $f:[0,1]\to[0,1]$ равносильны: 1) у f нет сильно соленоидальных множеств гомтервалов, причем, если $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ все базисные множества f и $\{E_i\}_{i=n-k}^{n}$ – все $>$-минимальные множества, то для любого i такого, что $n-k \le i \le n$ $h(f/E_i) = h(f)$, а для любого $1 \le i \le n-k-1$ $h(f/E_i) < h(f)$; 2) f топологически сопряжено отображению постоянного угла наклона.

Доказательство. Пусть выполняется 1). Отсутствие гомтервалов влечет отсутствие притягивающих хотя бы с одной стороны циклов и доказанные выше леммы применимы. Воспользуемся такой теоремой ([7]): "Если $h(f) > 0$, то f монотонно сопряжено с отображением постоянного угла наклона g с коэффициентом растяжения $c = e^{h(f)}$. Если $l_i(J)$ – число экстремумов f^{i}/J, $\varphi(J,t) = \sum_{i=0}^{\infty} l_i(J)\cdot t^{i}$, то полусопрягающее отображение ψ задается формулой $\psi(x) = \lim_{t\uparrow c^{-1}} \varphi([0,x],t)/\varphi([0,1],t)$ (мероморфная функция $\varphi([0,1],t)$ имеет в c^{-1} минимальный по модулю полюс)". Пусть $I\subset[0,1]$ – отрезок. Поскольку у f нет интервалов, то I не может быть сильно блуждающим, т.е. найдутся минимальные $k<s: f^{k}I \cap f^{s}I \neq \emptyset$. Рассматривая $\bigcup_{i\ge k} f^{i}I$ и пользуясь тем, что объединение интервалов-интервал, имеем $\overline{\bigcup_{i\ge k} f^{i}I} = orb\,J$ – орбита периодического отрезка J. Ввиду отсутствия гомтервалов и сильно соленоидальных множеств в $orb\,J$ есть $>$ – минимальное базисное множество $E = E(orb\,K) = orb\,K$; где K – периодический отрезок (так что $f/orb\,K$ транзитивно). По доказанному в работе [1] найдется отрезок $K' \subset K$, n и N такие, что $f^n I \supset K'$, $f^N K' = K'$, а из теоремы C теперь следует, что для достаточно малого α' и больших i $l_{iN}(I) \geq \alpha' \cdot c^{iN}$ Пользуясь тем, что $f^{n+1} I \supset f K'$, $f^N(fK') = fK', \ldots,$ получаем окончательно, что для некоторого $\alpha = \alpha(I)$ $l_i(I) \geq \alpha \cdot c^i$, начиная с некоторого i.

С другой стороны, по лемме 4 ввиду кусочной монотонности ясно, что $l_i([0,1]) \leq \beta \cdot c^i$ (поскольку l_i есть суммарное количество всех f^{-i} -прообразов всех экстремумов f). Пользуясь сформулированной выше теоремой Милнора - Сёерстена, получаем, что так как

$$\lim_{t \uparrow c^{-1}} \varphi(I,t)/\varphi([0,1],t) = \lim_{t \uparrow c^{-1}} \Big(\sum_{i=0}^{\infty} l_i(I)\cdot t^i\Big) \Big/ \sum_{i=0}^{\infty} l_i([0,1])\cdot t^i\Big) > 0, \text{ то } \varphi(I) \qquad (1)$$

не есть точка. Значит отображение φ, полусопрягающее f с отображением постоянного угла наклона, в нашем случае гомеоморфизм, что и требовалось.

Пусть выполняется 2) и нашлось базисное множество $E = E(orb\, J)$ такое, что $h(f) = h(f/E)$, E не является $>$-минимальным. Тогда E нульмерно и в J есть дополнительный к E интервал I, который можно считать не содержащим образы ни одного экстремума f. По теореме C и теореме A существует $\alpha > 0$ такое, что $f^{-i} I \cap orb\, J$ состоит из не менее, чем $\alpha \cdot e^{ih(f)}$ отрезков $\{K_r^{(i)}\}_{r=1}^{s_i}$, причем $f^i/K_r^{(i)}$ - гомеоморфизм и $f^i(K_r^{(i)}) = I$ ($\forall r$). Считая f отображением постоянного угла наклона, имеем $\lambda(f^{-i} I) = \sum_{r=1}^{s_i} \lambda(K_r^{(i)}) \geq \lambda(I) e^{-ih(f)} \cdot \alpha e^{ih(f)} = \alpha \lambda(I)$, где λ - мера Лебега. Поскольку I не содержит образы экстремумов f, то I - непериодический (иначе I был бы гомтервалом), так что $f^{-i}(I) \cap f^{-j}(I) = \emptyset$ ($\forall i \neq j$), откуда и из доказанного $\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-i}(I)) = \infty$ - противоречие. С другой стороны, если $E' = E(orb\, J') \text{-} >$ - минимально, то $E' = orb\, J'$ и, очевидно, $h(f/E') = h(f)$. Итак, $2) \Rightarrow 1)$, ч. и т.д.

Следствие 1. Если f -отображение постоянного угла наклона, F - инвариантный нульмерный компакт, то $h(f/F) < h(f)$.

Доказательство. С учетом утверждения 3 осталось доказать следствие для транзитивных f. Однако в работе [8], доказано, что в этом случае есть ровно одна мера максимальной энтропии μ, имеющая носителем весь отрезок, так что существующая на F мера максимальной энтропии для f/F не совпадает с μ (см. работу [9]).

Пусть $f:[0,1] \to [0,1]$, $h(f) > 0$, φ - отображение, полусопрягающее (по теореме Милнора - Сёрстена) f с отображением постоянного угла наклона g с угловым коэффициентом $e^{h(f)}$. Пусть D - семейство базисных множеств $E = E(orb\, I)$ таких, что $h(f/E) = h(f)$ и для любого базисного $E' > E$ $h(f/E') < h(f)$.

Тогда утверждение 3 влечет, что $\varphi(I)$ не есть точка если и только если $\mathrm{orb}\, I \supset E$ для некоторого $E \in D$; в частности, если $E' = E(\mathrm{orb}\, J')$ – базисное, то $\varphi(J')$ не точка если и только если $E' \succ E$ для некоторого $E \in D$.

В следующей теореме мы оценим число базисных множеств нестрого периодического отображения f постоянного угла наклона с n экстремумами сверху числом n. Нам понадобится такое построение. Пусть $E = E(\mathrm{orb}\, J)$ – базисное и существует базисное E': 1) $E \succ E'$; 2) орбита периодического отрезка, дополнительная в $\mathrm{orb}\, J$ к E и содержащая E', имеет период больше 1; тогда положим $k(E) = 0$. В противном случае, если E нульмерно, то положим $k(E) = 1$, а если $E = \mathrm{orb}\, J$, то пусть $k(E)$ – число экстремумов $f/\mathrm{orb}\, J$.

<u>Теорема 1</u>. В описанной выше ситуации, если $\{E_i\}_{i=1}^{r}$ – все базисные множества f, то $r \le \sum_{i=1} k(E_i)$, откуда $r \le n$, где n – число экстремумов f.

Доказательство. Индукция по числу $l \succ$ – минимальных базисных множеств f . Пусть $l = 1$; тогда базисные множества f образуют цепочку $E_1 = E(\mathrm{orb}\, J_1) \succ \ldots \succ E_r = E(\mathrm{orb}\, J_r) = \mathrm{orb}\, J_r$, где периоды J_i равны $m_i(V_i)$. Пусть s – число таких $i < r$, что $k(E_i) = 0$. Тогда $m_r \ge 2^s m_1$, и если $t_1, \ldots, t_{m_r}$ – число экстремумов f, лежащих на разных отрезках из $\mathrm{orb}\, J_r$, то свойства отображений отрезка влекут [9], что $h(f/\mathrm{orb}\, J_r) \le m_r^{-1} \cdot \ln \prod_{i=1}^{m_r} (1 + t_i)$. С другой стороны, по [1] $h(f/E_1) \ge (\ln 2) \cdot 2^{-1} \cdot m_1^{-1}$, что вместе с утверждением 2 влечет $(\ln 2) \cdot 2^{-1} m_1^{-1} < m_r^{-1} \ln \prod_{i=1}^{m_r} (1 + t_i)$. Отсюда, если $p = 2^{s-1} < m_r \cdot 2^{-1} \cdot m_1^{-1}$, то $2^p < \prod^{m_r} (1 + t_i)$. Пусть $\sum_{i=1}^{m_r} t_i = k(E_r) \le s$. Поскольку $m_r \ge 2^s > s$, то очевидно, что максимум $\prod_{i=1}^{m_r} (1 + t_i)$ есть $2^{k(E_r)} \le 2^s$, откуда $2^p < 2^s$, $2^{s-1} = p < s$, что неверно. Значит, $k(E_r) \ge s + 1$, откуда $\sum_{i=1}^{r} k(E_i) = r - s - 1 + k(E_r) \ge r$.

Пусть для случая $t \succ$ -минимальных базисных множеств оценка получена, у f $-t+1 \succ$ -минимальных множеств. Выделим базисные множества $E_0 = E(\mathrm{orb}\, J_0) \succ E_1 = E(\mathrm{orb}\, J_1) \succ \ldots \succ E_r = E(\mathrm{orb}\, J_r)$ так, что: 1) для E_i $(i = 1, \ldots, r-1)$ все базисные множества E' со свойством $E_i \succ E'$ – это $\{E_j\}_{j=i+1}^{r}$; 2) существует базисное множество $E' \ne E_1$ такое, что $E_0 \succ E'$; 3) если I_1 – периодический отрезок, дополнительный к E_0 в J_0 , содержащий E_1 , то любой дополнительный к E_0 в J_0 периодический отрезок I'', содержащий некоторое базисное множество (для чего в нашей ситуации достаточно, чтобы I'' был невырожден), имеет период не меньший, чем период I_1 (ясно, что это можно сделать). Рассмотрим монотонное отображение φ, склеивающее связные компоненты множества $G = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(\mathrm{orb}_f\, I_1)$ и только их. Ввиду двусторонней инвариантности G существует кусочно-монотонное g такое, что $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Из построения g не имеет сильно соленоидальных множеств и притягивающих хотя бы с одной стороны циклов, запас базисных множеств g состоит из не более, чем двукратных φ-образов всех базисных множеств f кроме $\{E_i\}_{i=1}^{r}$. По утверждению 3 отсюда g можно считать отображением постоянного угла наклона, причем к g применима индукция. Функция k от всех базисных множеств g (кроме $\varphi(E_0)$) совпадает с функцией k от соответствующих множеств f по построению φ. По индукции $f/orb I_1$ обладает доказываемым свойством. Наконец, $k(\varphi(E_0))=k(E_0)$ по выбору E_0 и E_1. Суммируя, получаем требуемое неравенство для f.

Осталось показать, что если $\{E_i\}_{i=1}^{r}$ - все базисные множества f, то $\sum_{i=1}^{r} k(E_i) \le n$, где n - число экстремумов f. Но если $k(E_i)=$ $= 1$, то из того, что $E_i > E$, I - дополнительный к E_i в $orb J_i$ отрезок такой, что $orb I > E$, следует, что период I совпадает с периодом J_i; это значит, что есть экстремум c_i, принадлежащий $orb J_i$, и такой, что, если I' - дополнительный к E_i в $orb J_i$ периодический отрезок, содержащий некоторое базисное множество, то $c_i \notin orb I'$. Сопоставим этот экстремум множеству E_i в случае нульмерного E_i; если же E_i совпадает с орбитой периодического отрезка J_i, то сопоставим E_i $k(E_i)$ экстремумов $f/orb J_i$. По построению множества экстремумов, сопоставленные разным базисным множествам, попарно не пересекаются, а мощность этих множеств $-k(E_i)(V_i)$; отсюда $\sum_{i=1}^{r} k(E_i) \le n$.

Пусть у f, имеющего постоянный угол наклона, $>$ - минимальные базисные множества содержат все экстремумы f, причем каждое базисное множество содержит ровно один экстремум. Тогда у f нет других базисных множеств (по теореме 1), так что $\overline{Per f}$ состоит из этих базисных множеств и, очевидно, конечного числа изолированных отталкивающих циклов - множеств рода 0, т.е. $\overline{Per f}$ есть конечное объединение отрезков и точек. Если у f один экстремум c, то из общих свойств растягивающих отображений следует, что есть базисное множество $E=E(orb I)=orb I$, причем $c \in int\, orb I$, откуда $\overline{Per f}=orb I \cup$ $\cup(\bigcup_{i=1}^{\ell} orb\, p_i)$, где $p_i \in Per f$. В заключение заметим, что по утверждению 1, если $\overline{Per f}$ - конечное объединение отрезков и точек, то все эти отрезки и точки - периодические с периодами-степенями 2 (здесь f - любое непрерывное).

1. Блох А.М. О предельном поведении одномерных динамических систем. I. - Харьков, 1982. - 37 с. - Рукопись депонирована в ВИНИТИ, 1982; № 1156-82.
2. Блох А.М. О предельном поведении одномерных динамических систем. II. - Харьков, 1982. - 33 с. - Рукопись депонирована в ВИНИТИ 1982; № 2704-82.
3. Блох А.М. О разложении динамических систем на отрезке. - Успехи мат. наук, 1983, 38, № 5, с. 179-180.
4. Misiurewicz M. Horseshoes for mappings of the interval. -

Bull.Acad.Pol.Sci.Ser.Sci. math.,1979, 27, N 2, p.167-169.
5. Hofbauer F. The structure of piecewise monotonic transformations. - Ergodic Theory and Dynam Syst., 1981, 1, N 2,p.159-178.
6. Hofbauer F., Keller G. Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations. - Math. Zeit., 1982, 180, N 1, p. 119-140.
7. Milnor J., Thurston W. Oniterated maps of the interwal. - Princeton: Princeton University and the Institute for Advanced Study, 1977. - 110 p.
8. Hoefbauer F. On intrinsic ergodicity of piecewise monotonic transformations with positive entropy. - In. J. Math., 1979, 34, N 3, p. 213-237.
9. Misiurewicz M., Schlenk W. Entropy of piecewise monotone meppings. - Studia Math., 1980, 67, N 1, p. 45-53.

УДК 517.98

Г.Р.Белицкий

ТЕОРЕМА БОРЕЛЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Известная теорема Бореля утверждает, что для каждого формального отображения $\hat{F}: R^n \to R^p$ найдется C^∞ - отображение $F: R^n \to R^p$, ряд Тейлора которого в начале координат равен $\hat{F}$. Доказательство аналогичной теоремы для отображений банаховых пространств может осложняться отсутствием нетривиальных гладких финитных функций*. Мы покажем, однако, что теорема Бореля иногда имеет место и в том случае, когда такие функции отсутствуют. Автору неизвестны контрпримеры к теореме Бореля в банаховых пространствах.

Обозначим через $\beta: C^\infty(E_1, E_2) \to R[E_1, E_2]$ так называемый оператор Бореля, сопоставляющий каждому C^∞ -отображению F: $E_1 \to E_2$ банаховых пространств его формальный ряд Тейлора в начале координат. Тогда $\hat{F} = \beta(F) = \Sigma \hat{F}_i \in R[E_1, E_2]$, где однородные слагаемые $\hat{F}_i$ непрерывны. Множество всех формальных отображений с непрерывными однородными слагаемыми обозначим через $R_b[E_1, E_2]$. Элемент $\hat{F} \in R_b[E_1, E_2]$ назовем сглаживаемым, если существует отображение $F \in C^\infty(E_1, E_2)$ с ограниченными производными всех порядков, для которого $\beta(F) = \hat{F}$.

<u>Теорема</u>. Если все однородные слагаемые $\hat{F}_i$ отображения $\hat{F} \in R_b[E_1, E_2]$ сглаживаемы, то F сглаживаемо.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F_i: E_1 \to E_2$ - сглаживание для $\hat{F}_i$, так что

$$c_{i,k} = \sup_x \| (F_i(x))^{(k)} \| < \infty \quad (i, k = 0, 1, \dots).$$

Положим

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2^i \max_{k \le i} (1 + c_{i,k})} \quad (i = 0, 1, \dots).$$

---

* Мешков В.Я. О гладких функциях в пространстве Джеймса. - Вестн. МГУ, 1974, № 4, с. 34-39.

Ряд
$$F(x)=\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i^i F_i\left(\frac{1}{\varepsilon_i} x\right)$$
сходится в топологии пространства C^∞-отображений. При этом
$$\|F^{(k)}(x)\| \le \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i^{i-k} \|F_i^{(k)}\left(\frac{1}{\varepsilon_i} x\right)\| \le \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i^{i-k} c_{i,k} \le \sum_{i\le k} \varepsilon_i^{i-k} c_{i,k} +$$
$$+\sum_{i>k} \varepsilon_i^{i-k} c_{i,k} < 1+\sum_{i\le k} \varepsilon_i^{i-k} c_{i,k}.$$

Очевидно, $\beta(F)=\hat F$. Теорема доказана.

Согласно работе [1] банахово пространство E называется C^∞-гладким, если в нем существует финитная функция $\tau: E\to R$ класса C^∞, отличная от тождественного нуля. Если E C^∞ - гладко, то в нем существует и "C^∞- шапочка", т.е. функция φ, равная тождественно единице в окрестности начала координат. Произведение $F(x)=\varphi(x)\hat F(x)$ является сглаживанием любого непрерывного полиномиального отображения $\hat F: E_1\to E$. При этом F совпадает в достаточно малой окрестности нуля с $\hat F$. Итак, имеет место

Следствие I. Если пространство E_2 является C^∞- гладким, то оператор Бореля $\beta: C^\infty(E_1,E_2)\to R_\delta[E_1,E_2]$ сюръективен при любом E_1.

В частности, оператор β сюръективен, если E_2 конечномерно, но, а E_1 - любое банахово пространство.

Примером бесконечномерного C^∞ - гладкого пространства является l_p при четном p. В самом деле, пусть C^∞ - функция $\tau(t)$ от одной переменной финитна и равна единице в окрестности нуля. Тогда функция
$$\varphi(x)=\tau(\|x\|^p) \qquad (x\in l_p)$$
является C^∞ - шапочкой в l_p. В то же время даже C^2 - гладкость накладывает довольно жесткие ограничения на банахову структуру (см. работу [1]).

Если единичное отображение $I: E_1\to E_1$ допускает сглаживание $I(x)$, то композиция $F(x)=F(I(x))$ является сглаживанием непрерывного полиномиального отображения $\hat F\in R_\delta[E_1,E_2]$. Поэтому имеет место

Следствие 2. Если единичное отображение в E_1 сглаживаемо, то оператор Бореля $\beta: C^\infty(E_1,E_2)\to R_\delta[E_1,E_2]$ сюръективен при любом E_2.

Из C^∞ - гладкости пространства E очевидно, следует и сглаживаемость единичного отображения $I: E\to E$. Однако сглаживаемость I является более слабым условием на пространство, чем C^∞ -гладкость. В самом деле, пространство $C(K)$ всех непрерывных на компакте K функций не является C^∞ - гладким (это следует, например, из универсальности $C(K)$ и существования пространств, не являющихся C^∞ - гладкими). В то же время единичное отображение в $C(K)$

сглаживаемо. Пусть r - финитная C^{∞}- функция в R^s, равная единице в окрестности нуля. Тогда отображение $(I(x))(t)=r(x(t))x(t)$ является сглаживанием единичного оператора и даже совпадает с ним в окрестности начала координат.

УДК 517.98

Г.Р.Белицкий, В.Ф.Лисяной

КЛАССИФИКАЦИЯ ФОРМАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Заметка посвящена классификации формальных отображений бесконечномерных линейных пространств относительно конкретных преобразований.

1. Пусть L_1, L_2 - линейные пространства над полем K, $char\, K = 0$. Обозначим через $K[L_1, L_2]$ пространство формальных отображений из L_1 в L_2, т.е. рядов $F=\sum_{n=0} F^{(n)}$, где $F^{(n)}: L_1 \to L_2$ - однородное полиномиальное отображение степени n (см. [1], с. 87). Алгебраические операции и подстановка ряда в ряд определяются очевидным образом.

Группа $\mathcal{G}(L_1, L_2)$ контактных преобразований состоит из обратимых формальных отображений $g: L_1 \times L_2 \to L_1 \times L_2$ вида $g(x,y)=(\Phi(x); \Psi(x,y))$, $\Phi(0)=0$, $\Psi(x,0)=0$. Эта группа действует на формальные отображения по формуле

$$(g.F)(x)=(\Psi(\Phi^{-1}(x)); F(\Phi^{-1}(x)) \quad (F\in K[L_1, L_2])$$

Обозначим через $\mathcal{G}^0[L_1,L_2]\subset \mathcal{G}[L_1, L_2]$ подгруппу контактных преобразований с единичным линейным приближением, т.е. вида $g(x,y)= =(x+\dots;\ y+\dots)$. Алгебра Ли $\mathcal{X}^0[L_1, L_2]$ этой подгруппы состоит из формальных векторных полей $\lambda(x,y)=(\alpha(x); \beta(x,y))$, начинающихся с квадратичных членов. Экспоненциальное отображение $exp: \mathcal{X}^0[L_1, L_2] \to \mathcal{G}^0[L_1, L_2]$ биективно.

Пусть $P_n: K[L_1, L_2] \to K_n[L_1, L_2]$, $Q_n: \mathcal{X}^0[L_1, L_2] \to \mathcal{X}^0_n[L_1, L_2]$ - естественные проекторы на пространства n-струй, которые можно отождествить с подпространствами полиномиальных отображений степени $\le n$. Наборы проекторов $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$ задают топологию в пространствах $K[L_1, L_2]$ и $\mathcal{X}[L_1, L_2]$ соответственно.

Каждая подгруппа $\mathcal{G}\subset \mathcal{G}[L_1, L_2]$ действует в пространствах струй по формуле $g.F = P_n g.\tilde F$, где $\tilde F \in K[L_1, L_2]$ - произвольный представитель струи $F\in K_n[L_1, L_2]$.

Формальное отображение $F: L_1 \to L_2$ называется ω-определенным относительно $\mathcal{G}$, если для любого $H\in K[L_1, L_2]$ из $\mathcal{G}$-эквивалентности струй P_nF, P_nH $(n=1,2,\dots)$ вытекает $\mathcal{G}$-эквивалентность F и H.

В дальнейшем мы рассматриваем только подгруппы $\mathcal{G}$ вида $\mathcal{G}= \exp \mathcal{L}$, где $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\mathcal{G})\subset \mathcal{L}^0[L_1, L_2]$ – подалгебра Ли. Положим

$$S_F(\lambda)=\exp \lambda.F \quad (\lambda\in \mathcal{L}(\mathcal{G}),\ F\in K[L_1,L_2]).$$

Допустим, что поле K алгебраически или вещественно замкнуто и несчетно, а пространства L_1, L_2 имеют счетную тотальную систему K-линейных функционалов. В этих предположениях справедлива

Теорема. Пусть подалгебра $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ замкнута, а пересечения $\operatorname{Ker} \rho_n S_F'(0)\cap Q_n\mathcal{L}(\mathcal{G})$ конечномерны, начиная с некоторого n. Тогда отображение F ω-определено относительно группы $\mathcal{G}$.

Пример 1. Пусть $K=R$ или C. Рассмотрим формальную систему

$$\dot x = Ax + f(x,\theta), \quad \dot\theta=\alpha, \tag{1}$$

где $x\in K^S$, $A: K^S\to K^S$, а θ – точка на торе T^q. Пространство $\mathcal{T}$ правых частей состоит из формальных отображений $f(x,\theta)=\sum_{|j|\geq 2} f_j(\theta)x^j$ с C^∞ – коэффициентами $f_j: T^q\to K^S$. Оно является подпространством в $K[L,L]$, где L состоит из C^∞-отображений $x: T^q\to K^S$. В множестве систем (1) действует группа $\mathcal{G}$ преобразований переменной $x\mapsto y+\varphi(y,\theta)$, $\varphi\in K[L,L]$. Если частоты $\alpha=(\alpha_1\dots\alpha_n)$ независимы над Z, то условия теоремы выполнены, система (1) ω определена относительно $\mathcal{G}$.

Пусть $\mathcal{T}\subset K[L_1, L_2]$ – $\mathcal{G}$ – инвариантное подпространство. Отображение $F\subset\mathcal{T}$ называется n-определенным относительно $\mathcal{G}$ в подпространстве $\mathcal{T}$, если всякое отображение $H\in\mathcal{T}$, n, струя которого равна $\rho_n F$, $\mathcal{G}$ – эквивалентно F.

Положим $\mathcal{T}^{(n)}=\rho_n(\mathcal{T}'_{n-1})$, где $\mathcal{T}_i'\subset\mathcal{T}$ – подпространство отображений из $\mathcal{T}$ с нулевой i-струей.

Предложение. Для n-определенности отображения $F\in\mathcal{T}$ относительно $\mathcal{G}$ в подпространстве $\mathcal{T}$ необходимо, чтобы имели место включения

$$(\rho_i S_F'(0))(\mathcal{L}(\mathcal{G}))\supset\mathcal{T}^{(i)} \quad (i=n+1, n+2,\dots). \tag{2}$$

Если $F(\omega)$ определено, то включений (2) достаточно для n – определенности.

Следствие. В условиях теоремы для n-определенности формального отображения $F\in\mathcal{T}$ необходимо и достаточно выполнения включений (2).

2. Допустим теперь, что условия теоремы выполнены, подпространство $\mathcal{T}\subset K[L_1, L_2]$ инвариантно относительно $\mathcal{G}$ и при каждом $n=1, 2, \dots$ и $F\in\mathcal{T}$ определены сопряженные операторы $(\rho_n S_F'(0))^*$: $Q_n\mathcal{L}(\mathcal{G})\to\rho_n\mathcal{T}$ так, что справедливы прямые разложения $\mathcal{T}^{(n)}=\operatorname{Im}\tilde A+\operatorname{Ker}\tilde A^*$,

где $\tilde{A}=\rho_n s_F^1(0): Ker\,\rho_{n-1} s_F^1(0) \to \mathcal{T}^{(n)}$. Тогда, следуя схеме, изложенной в [2], для каждого $F\in\mathcal{T}$ можно построить инвариантную нормальную форму $H\in\mathcal{G}$, удовлетворяющую уравнениям

$$(\rho_n s_H^1(0))^* H^{(n)} = (\rho_n s_H^1(0))^* \quad \tau_{n-1}, \tag{3}$$

где $H^{(n)}$ – однородное слагаемое ряда H, а $\tau_{n-1}\in\rho_{n-1}(\mathcal{T})$

Пример 2. (см. [3]). Пусть $K=R$ или C. Формальная система

$$\dot{x}=F(x,\theta)=\sum_{|I|\geq 1} F(\theta)x^I, \quad x\in K^n \tag{4}$$

с периодическими C^k – коэффициентами $F_I: S^1\to K^n$ некоторым формальным преобразованием $x\to y+\varphi(y,\theta)$ с периодическими C^{k+1} – коэффициентами приводится к нормальной форме (3), где

$$(\rho_n s_H^1(\theta))^* f(x,\theta)=\frac{\partial f}{\partial\theta}+\rho_n H_x^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\theta\right)f(x,\theta)-xH\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\theta\right)f(x,\theta).$$

Здесь $x\cdot z=\sum x_i z_i$.

Пусть A – линейное приближение формального отображения H. Приравнивая в (3) члены наивысшей степени, построим соотношение

$$(\rho_n s_A^1(\theta))^* H^{(n)} = 0, \qquad (n\geq 2).$$

Таким образом, каждое отображение $F\in\mathcal{T}$ действием из $\mathcal{G}$ можно привести к неполной нормальной форме. Например, систему (4) можно привести к виду $\dot{x}=A(\theta)x+h(x,\theta)$, , где h удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial\theta}-A^*(\theta)h(x,\theta)+h_x^1(x,\theta)A^*(\theta)x=0.$$

Отметим, что приведение к неполной нормальной форме не требует w-определенности отображения F.

Если $\mathcal{G}=\mathcal{G}_r$ – подгруппа преобразований в прообразе, то, как и в конечномерном случае, неполную нормальную форму можно строить по однородной главной части более высокой степени.

Пример 3. Пусть $A: L\to L$ ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве L. Формальный функционал $F(x)=(Ax,x)+\ldots\in K[L,K]$ преобразованием $x\mapsto y+\varphi(y),\ \varphi\in K[L,L]$ можно привести к виду $F(y+\varphi(y))=(Ay,y)+h(y)$, где $Ah'(y)=0$.

1. Картан А. Дифференциальное исчисление. – М.: Мир. 1971. – 216 с.
2. Белицкий Г.Р. Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. – Киев: Наук. думка, 1979. – 170 с.
3. Лисяной В.Ф. Нормальные формы периодических систем. – Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 10, с. 14–16.

Редакция информационной литературы

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Сборник научных трудов

Утверждено к печати ученым советом
Физико-технического института низких температур АН УССР

Редактор Е.Н.Цыганкова
Художественный редактор И.Е.Писарева
Технический редактор И.Ф.Михалкина
Корректор М.Е.Ролинская

ИБ № 7601

Подп. в печ. 24.12.85. БФ 39611. Формат 60x84/16. Бум. офс. № 1. Офс. печ. Усл. печ. л. 8,60. Усл. кр.-отт. 8,83. Уч.-изд. л. 8,50. Тираж 900 экз. Заказ 6-56. Цена 1 р. 30 к.

Издательство "Наукова думка". 252601 Киев 4, ул. Репина, 3.
Киевская книжная типография научной книги. 252004 Киев 4, ул. Репина, 4.

М $\frac{1704020000-165}{М221(04)-86}$ 209-86