ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

АКАДЕМИЯ НАУК
УКРАИНСКОЙ ССР
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

КИЕВ
„НАУКОВА ДУМКА"
1978

УДК 517.946.4.55:519+513.88

В сборнике рассмотрены актуальные вопросы современной теории дифференциальных уравнений, функционального анализа и их приложения к математической физике, а также помещены статьи по теории функций и близким к ним вопросам.

Рассчитан на научных сотрудников, занимающихся дифференциальными уравнениями, функциональным анализом и их приложениями к математической физике.

Ответственный редактор В.А.Марченко

Редакция информационной литературы

Д $\frac{20203-396}{М221/04/-78}$

Содержание

УДК 517.55

П.З.Агранович

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ТИПА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ОДНОЙ ИЗ НИХ

Пусть

$$f(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k(z)}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+1\right)}w^k \tag{1}$$

целая функция переменных $z\in\mathbb{C}^n$, $w\in\mathbb{C}$, конечного порядка ρ по переменной w.

Обозначим $\max\limits_{|w|=t}|f(z,w)|$ через $M_f(r,t)$, $\max\limits_{|z_i|=r_i,\ i=1,\dots,n;\ |\omega|=t}|f(z_1,\dots,z_n,w)|$ через $M_f(r_1,\dots,r_n,t)$. Типом регуляризованным функции $f(r,W)$ по переменной W при порядке ρ (см.[1]) назовем величину

$$\sigma_f^*(z)=\overline{\lim_{z'\to z}}\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{\ln^+ M_f(z',t)}{t^{\rho}}.$$

Обозначим также

$$\sigma_W(r_1,\dots,r_n)=\sigma_W(r_1,\dots,r_n;\ln^+M_f,\rho)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln^+M_f(r_1,\dots,r_n,t)}{t^{\rho}}.$$

Отметим, что тип $\sigma_f^*(z)$ является полунепрерывной сверху функцией, вообще говоря, не непрерывной. В этой статье получены достаточные условия, при которых функция $\sigma_f^*(z)$ непрерывна.

Отправной точкой этих исследований послужила работа [2], в которой рассматривается ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k(z)w^k,\quad z\in\mathbb{C},\ w\in\mathbb{C}, \tag{2}$$

где $p_k(z)$ –полиномы степени k, удовлетворяющие неравенству

$$|p_k(z)| \le C_1(C_2(1+|z|))^k$$

с некоторыми константами C_1, C_2, и формулируется следующий результат.

Пусть функция $f(z,w)$ представима рядом вида (2); $\mu_k(D)$ – число нулей полинома $p_k(z)$ в области D.
Если

$$\mu_k(D) = o(k),$$

то в области D вне множества K линейной меры нуль радиус сходимости ряда (2) или тождественно равен ∞, или непрерывен.

Отметим, что доказательство этого утверждения содержит ошибку, устранить которую нам не удалось.

Нами доказана следующая

Теорема 1. Пусть $f(z,w)$, $z\in \mathbb{C}^n$, $w\in \mathbb{C}$ – целая функция конечного порядка ρ по переменной w, представимая рядом (1); μ_k – мера, ассоциированная по Риссу функции $\frac{1}{k}\ln|f_k(z)|$;

$$\sigma_W(r_1,\dots,r_n) < \infty$$

при некоторых $r_1>0,\dots,r_n>0$. Если область $D\subset \mathbb{C}^n$ из поликруга $\{z: |z_i|<r_i,\ i=1,\dots,n\}$ такова, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k(D))^{\frac{n}{n-1}} < \infty,$$

когда $n\ge 2$, а в случае $n=1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\rho}{\mu_k(D)}} < \infty, \ \forall \rho > 0,$$

то функция $\sigma_f^*(z)$ либо тождественно равна нулю в D, либо непрерывна в D и нигде в D не обращается в нуль.

Для доказательства этой теоремы используем две леммы.

Лемма 1. Пусть $\{u_n(z)\}$ – равномерно ограниченная сверху последовательность гармонических функций в области D. Тогда функция

$$u(z) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n(z)$$

либо непрерывна в D, либо $u(z)\equiv -\infty$ при $z\in D$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что в некоторой точке $\tilde{z}\in D$ функция u равна $-\infty$. Покажем, что тогда $u(z)\equiv-\infty$ в D. Рассмотрим какое-нибудь замкнутое множество $B\subset D$, содержащее точку $\tilde{z}$. Так как $\{u_n(z)\}$ – равномерно ограниченная сверху последовательность гармонических функций, то при некотором $M<\infty$ функции

$$\tilde{u}_n(z)=M-u_n(z)$$

являются неотрицательными гармоническими функциями в D. Применяя к функциям $\tilde{u}_n(z)$ неравенство Харнака [3, с.270], получаем, что для некоторого $k>0$, зависящего только от B и D,

$$\frac{1}{k}u_n(\tilde{z})-M\left(\frac{1}{k}-1\right)\le u_n(z)\le ku_n(\tilde{z})-M(k-1),\ z\in B;\ \forall n,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{k}u(\tilde{z})-M\left(\frac{1}{k}-1\right)\le u(z)\le ku(\tilde{z})-M(k-1),\ \ z\in B. \tag{3}$$

Отсюда, поскольку $u(\tilde{z})=-\infty$, немедленно следует

$$u(z)\equiv-\infty,\ z\in B.$$

В силу произвольности выбора множества B, получаем

$$u(z)\equiv-\infty \text{ в } D.$$

Пусть $u(z)\ne-\infty$ нигде в D. Сначала покажем, что $\inf u(z)>-\infty$ на любом компактном подмножестве B в D. В самом деле, если это не так, то должны существовать точка $z^0\in B$ и последовательность точек $\{z^j\}\subset B$ такие, что

$$z^j\to z^0,\ u(z^j)=m_j,\ \ m_j\to-\infty.$$

Отсюда и из неравенства (3) должно следовать

$$u(z^0)=-\infty,$$

что невозможно. Итак,

$$\inf_{z\in B}u(z)=m>-\infty.$$

Проредим теперь нашу последовательность $\{u_n(z)\}$ так: отбросим те функции $u_n(z)$, которые удовлетворяют неравенству

$$u_n(z)<m-\varepsilon, \quad \forall z\in B$$

(ε – фиксированное положительное число). Если оставшуюся подпоследовательность обозначить через $\{u_{n_l}(z)\}$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} u_n(z)=\overline{\lim_{l\to\infty}} u_{n_l}(z), \; z\in B. \tag{4}$$

Покажем теперь, что функции $u_{n_l}(z)$ равномерно ограничены снизу на множестве B. Действительно, функция $u_{n_l}(z)$, по крайней мере, в одной точке, например $z^0\in B$, не меньше $m-\varepsilon$, т.е.

$$u_{n_l}(z^0)\geq m-\varepsilon.$$

Тогда из неравенства (3) сразу получим

$$u_{n_l}(z)\geq \frac{1}{k}m-M\left(\frac{1}{k}-1\right)+\frac{\varepsilon}{k}>\frac{1}{k}m-M\left(\frac{1}{k}-1\right), \; z\in B.$$

Таким образом, семейство функций $\{u_{n_l}(z)\}$ равномерно ограничено на компакте B. Пусть B – замыкание области с "хорошей" границей. Тогда из оценки Шаудера [3, с.333] следует равностепенная непрерывность семейства $\{u_{n_l}(z)\}$ и, значит, по заданному $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta>0$, что при $|z-\tilde{z}|<\delta$ справедливо неравенство

$$u_{n_l}(\tilde{z})>u_{n_l}(z)-\varepsilon, \quad z\in B.$$

Итак, если $|z^1-z^2|<\delta$, то, используя равенство (4), заключаем

$$u(z^2)=\overline{\lim_{l\to\infty}} u_{n_l}(z^2)\geq \overline{\lim_{l\to\infty}} u_{n_l}(z^1)-\varepsilon=u(z^1)-\varepsilon.$$

Меняя ролями z^1 и z^2, получаем, что функция $u(z)$ непрерывна в B и, следовательно, в D.

Лемма доказана.

Пусть $u(z)$ – произвольная субгармоническая функция, μ – ассоциированная ей по Риссу мера.

Приведем теорему Альфорса–Ландкофа [4], дающую оценку снизу потенциала.

Теорема 2. Пусть $z \in \mathbb{R}^m$, $m > 2$. Тогда для любого $\beta > m-2$ множество G точек, в которых выполнено неравенство

$$-\int \frac{d\mu(a)}{|z-a|^{m-2}} > -\rho, \quad \rho > 0,$$

может быть покрыто системой шаров с радиусами r_k, удовлетворяющими неравенству

$$\sum_k r_k^{\beta} < eN(m)\left(\frac{\mu(D)}{\rho}\right)^{\frac{\beta}{m-2}},$$

где $N(m)$ – некоторая константа, зависящая только от размерности пространства.

Если $m=2$, то для любого $\beta > 0$ множество G тех точек, где

$$-\int \ln \frac{1}{|z-y|}\, d\mu(y) > -\rho, \quad \rho > 0,$$

может быть покрыто системой таких кругов с радиусами r_k, что

$$\sum_k r_k^{\beta} < 6e\left(e^{-\frac{\rho}{\mu(D)}}\right)^{\beta}.$$

Лемма 2. Пусть $\{u_n(z)\}$ – равномерно ограниченная сверху последовательность субгармонических функций;

$$u(z) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n(z);$$

μ_n – мера, ассоциированная по Риссу функции $u_n(z)$.

Если D – область в $\mathbb{R}^m$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n(D))^{\frac{m}{m-2}} < \infty, \tag{5}$$

когда $m \geq 3$, а при $m=2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2\rho}{\mu_n(D)}} < \infty \quad \text{для любого } \rho > 0, \tag{5'}$$

то либо $u(z) \equiv -\infty$ в D, либо вне некоторого множества K лебеговой меры нуль $u(z)$ совпадает с сужением некоторой непрерывной в области D функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим случай $m\geq 3$. В силу теоремы Рисса

$$u_n(z)=-\int_D \frac{d\mu_n(y)}{|z-y|^{m-2}}+h_n(z),$$

где $h_n(z)$ – функция, гармоническая в области D.

Пусть $\varepsilon_{\rho,n}$ – множество тех точек из D, в которых выполнено неравенство

$-\int_D \frac{d\mu_n(y)}{|z-y|^{m-2}}>-\rho$, $\rho>0$ – фиксировано, а $K_\rho=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\varepsilon_{\rho,n}$. Тогда

при $z\bar{\in} K=\bigcup_\rho K_\rho$

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(-\int_D \frac{d\mu_n(y)}{|z-y|^{m-2}}\right)\geq 0,$$

и поскольку

$$-\int_D \frac{d\mu_n(y)}{|z-y|^{m-2}}\leq 0$$

всюду в D, то на множестве $D\setminus K$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n(z)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, h_n(z). \tag{6}$$

Оценим меру множества K. В силу теоремы 2

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\varepsilon_{\rho,n}\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(\varepsilon_{\rho,n})\leq C(m)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_n(D)}{\rho}\right)^{\frac{m}{m-2}}=$$
$$=C(m)\rho^{-\frac{m}{m-2}}\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_n(D))^{\frac{m}{m-2}},$$

где $C(m)$ – некоторая константа, зависящая только от размерности пространства, а λ – мера Лебега.

Из условия (5) следует

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=k}^{\infty}(\mu_n(D))^{\frac{m}{m-2}}=0,$$

поэтому

$$\lambda(K_\rho)\le C(m)\rho^{-\frac{m}{m-2}}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=k}^{\infty}(\mu_n(D))^{\frac{m}{m-2}}=0,$$

и, следовательно,

$$\lambda(K)=0.$$

Покажем теперь, что последовательность $\{h_n(z)\}$ ограничена сверху на каждом компактном множестве B в D. Не уменьшая общности, можно считать, что область D имеет достаточно гладкую границу. Пусть $G(z,y)$ – функция Грина области D, тогда, как известно [4, с.135],

$$u_n(z)=-\int_D G(z,y)\,d\mu_n(y)+h_n^*(z),$$

где $h_n^*(z)$ – наилучшая гармоническая мажоранта функции $u_n(z)$. Отсюда следует

$$h_n(z)=-\int_D G(z,y)\,d\mu_n(y)+\int_D\frac{d\mu_n(y)}{|z-y|^{m-2}}+h_n^*(z).$$

Последовательность $\{h_n^*(z)\}$, очевидно, равномерно ограничена сверху той же константой, что и последовательность $\{u_n(z)\}$.

Разность

$$\frac{1}{|z-y|^{m-2}}-G(z,y),\ z\in B;\ y\in D,$$

является ограниченной гармонической в D функцией, откуда

$$\left|\int_D\left[\frac{1}{|z-y|^{m-2}}-G(z,y)\right]d\mu_n(y)\right|\le const\,\mu_n(D),\ z\in B.$$

Учитывая теперь, что $\mu_n(D)\to 0$ при $n\to\infty$, заключаем, что последовательность $\{h_n(z)\}$ равномерно ограничена сверху.

Отсюда, а также из леммы 1 и равенств (6) и (7) следует утверждение леммы в случае $m\ge 3$.

Пусть теперь $m=2$. Тогда

$$u_n(z)=2\pi\int_D \ln|z-y|\,d\mu_n(y)+h_n(z),$$

где $h_n(z)$ – гармоническая функция в D.

Для любой ограниченной области D существует такая константа M_D, что для $z, y \in D$

$$\ln|z-y| \le M_D .$$

Таким образом, в D

$$2\pi \int_D \ln|z-y| d\mu_n(y) \le 2\pi M_D \mu_n(D).$$

Отсюда в силу условий леммы следует

$$2\pi \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_D \ln|z-y|\, d\mu_n(y) \le 0, \ z\in D.$$

Для получения обратного неравенства заметим, что если $\varepsilon_{\rho,n}$ – множество тех точек из D, в которых выполнено неравенство

$$\int_D \ln|z-y| d\mu_n(y) > -\rho, \ \rho>0,$$

то в силу теоремы 2 его можно покрыть такими кругами радиуса r_k, что

$$\sum_k r_k^2 < 6e\left(e^{-\frac{\rho}{\mu_n(D)}}\right)^2.$$

Теперь повторим доказательство, проведенное в первой части, заменив при этом условие (5) на условие (5′). Тогда получим, что существует множество K нулевой лебеговой меры, вне которого

$$2\pi \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_D \ln|z-y|\, d\mu_n(y) \ge 0.$$

Таким образом, для $z\in D \setminus \left(\bigcup_{\rho>0} \bigcup_{n>1} \bigcup_{n>k} \varepsilon_{\rho,n}\right)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n(z) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, h_n(z).$$

Ограниченность сверху последовательности $\{h_n(z)\}$ доказывается, как и в случае $m\ge 3$.

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Для выполнения условия (5′) достаточно, чтобы

$$\mu_n(\bar{D}) = \frac{1}{\varphi(n)\ln n}, \quad \varphi(n)\to\infty \text{ при } n\to\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Как следует из формул для вычисления величины $\sigma_f(z)$ /1, с.232/, имеет место равенство

$$\ln\sigma_f(z)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\{\ln k+\frac{\rho}{k}\ln|f_k(z)|\}-\ln\rho-1,$$

причем, если при некоторых $r_1>0,\ldots,r_n>0$

$$\sigma_W(r_1,\ldots,r_n)<\infty,$$

то семейство плюрисубгармонических функций

$$\{\ln k+\frac{\rho}{k}\ln|f_k(z)|\}$$

равномерно ограничено сверху на любом компакте в $\mathbb{C}^n$.

Тогда в силу леммы 2 либо существует множество K нулевой лебеговой меры, вне которого $\ln\sigma_f(z)$ совпадает с сужением непрерывной в D функции, либо $\ln\sigma_\rho(z)\equiv-\infty$ в D. Для завершения доказательства достаточно заметить, что, как следует из одного результата Лелона /5, с.526/, а также из /1, теорема 2.3.3/, имеет место равенство

$$\overline{\lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in D}}}\sigma_f(z')=\overline{\lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in D\setminus K}}}\sigma_f(z'),$$

и поскольку регуляризация непрерывной функции совпадает с ней самой, то в случае $\sigma_f^*(z)\not\equiv 0$ функция $\sigma_f^*(z)$ непрерывна в D и $\sigma_f^*(z)\neq 0$ $\forall z\in D$.

Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает, как следствие, утверждение о непрерывности кругового индикатора целой функции $f(z)$, $z\in\mathbb{C}^n$, т.е. функции

$$L_c^*(z;\rho)=\overline{\lim_{z'\to z}}\ \overline{\lim_{|u|\to\infty}}\frac{\ln|f(uz')|}{|u|^\rho}, z\in\mathbb{C}^n;\ u\in\mathbb{C}.$$

Для формулировки соответствующего результата введем необходимые обозначения:

$$p_k(z)=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}f(tz)\Big|_{t=0};$$

μ_k – мера, ассоциированная по Риссу функции

$$\frac{1}{k}\ln|p_k(z_1,\dots,z_{n-1},1)|.$$

Теорема 3. Пусть $f(z)$ – целая функция нормального типа при порядке ρ. Тогда, если D – область в $\mathbb{C}^n$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k(D))^{\frac{n}{n-1}}<\infty,\ \ (n\geq 2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{\rho}{\mu_k(D)}}<\infty \qquad \text{для любого } \rho(n=1),$$

то круговой индикатор $L_C^*(z;\rho)$ либо непрерывен и не обращается в D в нуль, либо тождественно равен нулю.

Замечание 2. Теоремы, аналогичные теоремам 1 и 3, имеют место и для функций уточненного порядка.

Литература

1. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., Наука, 1971. 184 с.
2. McCoy T.L. On the plane sections method for functions of two variables.– Quart. Appl. Math., 1973, N 1, p. 481–490.
3. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., Мир, 1964. 830 с.
4. Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала. М., Наука, 1966. 515 с.
5. Lelong P. Fonctions plurisouharmoniques et fonctions analytiques de variables réelles.– Ann. Inst. Fourier, 1961, N 11, p. 515–562.

УДК 534.1:539.3

В.И.Бабенко

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ВЕТВЛЕНИЯ

Постановка задачи

1.Данная статья является продолжением исследования [1] по устойчивости оболочек. В ней разрабатывается метод построения асимптотических представлений для критической нагрузки и деформаций в начальной послекритической стадии развертывающихся оболочек при внешнем давлении p. Предлагаемый метод иллюстрируется на замкнутой цилиндрической оболочке некругового сечения, шарнирно опертой вдоль края ∂F. Оболочка считается достаточно тонкой, средней длины, линейно упругой, с отличной от нуля средней кривизной срединной поверхности F. За исходные берутся нелинейные уравнения теории "среднего изгиба" пологих оболочек [2, 3] в безразмерной форме

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2\Delta\Delta W+\frac{1}{\bar R(x_2)}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}-\varepsilon L\,[\Psi,W]=-\bar p,\\ &\varepsilon^2\Delta\Delta\Psi-\frac{1}{\bar R(x_2)}\,\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}+\frac{\varepsilon}{2}L[W,W]=0; \end{aligned} \tag{1}$$

на ∂F
$$\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}=W=\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}+\nu\,\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}=0, \tag{2}$$

где
$$L\,[W,\Psi]=\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2}-2\,\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\partial x_2}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}, \tag{3}$$

$$\varepsilon^2=\frac{\delta R}{L^2\sqrt{12(1-\nu)^2}},\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\; p=\frac{\bar p E\varepsilon}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\left(\frac{\delta}{R}\right)^2;$$

$\dfrac{\Psi E\varepsilon RL^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\left(\dfrac{\delta}{R}\right)^2$ – функция усилий; $\dfrac{\varepsilon L^2}{R}W$ – нормальный прогиб. На F введена ортогональная криволинейная система координат (Lx_1, Lx_2), которая переходит в декартову при разворачивании на плоскость, причем за линии x_1 взяты образующие F; линии $x_1=\pm 1/2$ совпадают с ∂F–краем F; $R\cdot\bar R(x_2)$ – отличный от нуля главный радиус кривизны F, где R – его наибольшее значение $(\max\bar R(x_2)=1)$; L – длина образующей F; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; δ – толщина оболочки; $\varepsilon\ll 1$; $\frac{R}{L}\gg\sqrt{\varepsilon}$; $\bar R(x_2)\sim 1$.

2. Верхняя критическая нагрузка определяется на основе статического критерия [2–4]. Опираясь на результаты экспериментальных исследований, предполагаем, что потеря устойчивости цилиндрической оболочки при внешнем давлении начинается с появления на поверхности оболочки существенных деформаций (малых вмятин) в окрестности некоторой образующей. Не ограничивая общности, можно считать, что она совпадает с образующей $x_2=0$. При дальнейшем развитии послекритических деформаций (они происходят хлопком) вмятины могут появляться также и в окрестности других образующих, а в случае круговой оболочки они покрывают всю ее поверхность, причем в процессе хлопка возможно и перераспределение вмятин на поверхности оболочки. Наши дальнейшие построения применимы и в том случае, когда потеря устойчивости начинается с появления вмятин одновременно в окрестности нескольких образующих, так как мы считаем, что в основном приближении взаимодействием вмятин между собой можно пренебречь в начальный период их зарождения. В отличие от предлагаемого подхода обычно [2–4] считаются неотделимыми (взаимосвязанными) вопросы определения верхней критической нагрузки и определение количества вмятин n (формы волнообразования) при послекритических деформациях. Хотя решение этих двух вопросов в методе В.З.Власова [2] разделены на два этапа, однако по-прежнему форма волнообразования при послекритических деформациях определяется в момент потери устойчивости и в известной степени связана с определением критической нагрузки. Как будет видно из дальнейшего, в наших рассмотрениях классическому параметру n – числу вмятин, появляющихся в окружном направлении на круговой оболочке, отвечает величина $\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}$, которая не является целочисленным параметром и определяет предельную частоту осцилляций вырожденных послекритических деформаций при устремлении нагрузки к ее критическому значению.

Система (1)–(2) по существу содержит два малых параметра: параметр относительной тонкостенности ε, стоящий при старших производных, и параметр β (см. (37)), определяющий близость нагрузки к ее критическому значению. Наша задача состоит в определении $\tilde{p}_{\theta}$ – основной асимптотики по ε для верхней критической нагрузки, в окрестности которой существует два близких (смежных) решения системы (1)–(2). Мы предполагаем, что одно из этих решений (описывающее докритические деформации) близко к безмоментному ($W \to 0$ при $\varepsilon \to 0$), а второе (описывающее послекритические деформации) при $\varepsilon \to 0$ и малых β по порядку превышает первое и локализуется в окрестности линии $x_2=0$. Построение асимптотических представлений по ε и β для второго решения составляет основное содержание данной статьи.

Описание метода разложения по малому параметру относительной тонкостенности [5]

3. Разобъем F на две области F_1 и F_2, каждую из которых в свою очередь разобъем на две подобласти соответственно F_{11}, F_{12} и F_{21}, F_{22} так, что $F_1=\{|x_2|\geq\sqrt{\varepsilon^{\mu}}\}$; $F_2=\{|x_2|\leq\sqrt{\varepsilon^{\mu}}\}$; $F_{11}=\{|x_1|\leq\frac{1}{2}-\varepsilon^{\mu}; |x_2|\geq\sqrt{\varepsilon^{\mu}}\}$; $F_{21}=\{|x_1|\leq\frac{1}{2}-\varepsilon^{\mu}, |x_2|\leq\sqrt{\varepsilon^{\mu}}\}$; $F_{12}=\{\frac{1}{2}-\varepsilon^{\mu}\leq|x_1|\leq\frac{1}{2}, |x_2|\geq\sqrt{\varepsilon^{\mu}}\}$; $F_{22}=\{\frac{1}{2}-\varepsilon^{\mu}\leq|x_1|\leq\frac{1}{2}, |x_2|\leq\sqrt{\varepsilon^{\mu}}\}$, μ – фиксированное число $(0<\mu<1)$.

Введем вектор-функцию $U=(W,\Psi)$. В каждой из областей построим асимптотическое разложение $\sum\limits_{n=0}\varepsilon^{n/2}(U^n_{\alpha 1}+\delta^2_{\beta}U^n_{\alpha 2})$, где $\delta^2_1=0$, $\delta^2_2=1$; α обозначает номер области F_α, а β – номер подобласти $F_{\alpha\beta}$, где строятся $U^n_{\alpha\beta}$; $n\geq 0$ – номер приближения. Частичные суммы порядка N в области $F_{\alpha\beta}$ обозначим $U^{(N)}_{\alpha\beta}$. $U^n_{\alpha\beta}$ – функции переменных, зависящих от ε: $U^n_{11}(x_1,x_2)$; $U^n_{12}(\xi_1,x_2)$; $U^n_{21}(x_1,\xi_2)$; $U^n_{22}(\xi_1,\xi_2)$, где $\xi_1=\varepsilon^{-1}(\frac{1}{2}-|x_1|)$, $\xi_2=x_2\sqrt{\varepsilon^{-1}}$. $U^n_{\alpha 1}$ и $U^n_{\alpha 2}$ являются решениями уравнений, которые получаются соответственно с помощью I и II итерационных процессов в F_α из системы (1)–(2), записанной в соответствующих независимых переменных [1, 5]. Уравнения для $U^n_{\alpha\beta}$ не будут здесь выписаны, так как метод их получения достаточно прост и неоднократно описывался для аналогичных систем (см. [1] и цитируемую там литературу). К тому же в дальнейшем нас будет интересовать лишь основная асимптотика по ε. Дополнительные условия, необходимые для однозначного определения $U^n_{2\beta}$, получаем из условия согласования функций $U^{(N)}_{1\beta}$ с $U^{(N)}_{2\beta}$ на границе областей F_1 и F_2. В основном приближении находим, что

$$U^0_{12}=U^0_{22}=W^0_{11}=0;\quad \Psi^0_{11}=-\bar{p}_0\bar{R}(x_2)\left(\frac{x_1^2}{2}-\frac{1}{8}\right), \tag{4}$$

а краевая задача для определения U^0_{21} имеет вид

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\frac{\partial^4 W^0_{21}}{\partial x_2^4}+\frac{1}{\bar{R}(0)}\frac{\partial^2\Psi^0_{21}}{\partial x_1^2}-\varepsilon L[\Psi^0_{21},W^0_{21}]=-\bar{p}_0,\\ \varepsilon^2\frac{\partial^4\Psi^0_{21}}{\partial x_2^4}-\frac{1}{\bar{R}(0)}\frac{\partial^2 W^0_{21}}{\partial x_1^2}+\frac{\varepsilon}{2}L[W^0_{21},W^0_{21}]=0.\end{gathered} \tag{5}$$

Краевые условия на ∂F таковы:

$$W^0_{21}=\Psi^0_{21}=0 \quad \text{при} \quad x_1=\pm\frac{1}{2}, \tag{6}$$

а условия согласования –

$$U_{21}^0\Big|_{\xi_2=\pm\infty} = U_{11}^0\Big|_{x_2=0}\ . \tag{7}$$

Здесь $\bar{p}_0$ – первый член разложения в ряд по ε параметра $\bar{p}(\varepsilon)$, действующего на оболочку внешнего давления $p\,(\bar{p}_0=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\bar{p}(\varepsilon))$. Система (5)–(7) допускает тривиальное решение

$$U_{21}^0 = U_{11}^0\Big|_{x_2=0}\ . \tag{8}$$

Это решение соответствует докритическим безмоментным деформациям оболочки.

Основная асимптотика критической нагрузки

4. Основная асимптотика для верхней критической нагрузки $\bar{p}_e$ определяется наименьшим значением давления $(\bar{p}_0)$, в окрестности которого существует близкое к (8) нетривиальное решение краевой задачи (5)–(7). Последнее имеет место тогда, когда линеаризованная в окрестности тривиального решения (8) система (5)–(7) допускает тождественно не равное нулю решение с ослабленным условием согласования – условием ограниченности решения при $|\xi_2|\to\infty$. Выпишем линеаризованную систему:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^4 w^0}{\partial\xi_2^4}+\frac{1}{\bar{R}(0)}\frac{\partial^2\psi^0}{\partial x_1^2}+\bar{p}_0\bar{R}(0)\frac{\partial^2 w^0}{\partial\xi_2^2}=0,\\ \frac{\partial^4\psi^0}{\partial\xi_2^4}-\frac{1}{\bar{R}(0)}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x_1^2}=0,\end{gathered} \tag{9}$$

$$w^0=\psi^0=0 \qquad \text{при} \qquad |x_1|=\frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$|w^0|+|\psi^0|<\infty \qquad \text{при} \qquad |\xi_2|=\infty, \tag{11}$$

где

$$w^0=W_{21}^0-W_{11}^0\Big|_{x_2=0}\ ;\quad \psi^0=\Psi_{21}^0-\Psi_{11}^0\Big|_{x_2=0}\ . \tag{12}$$

Решение системы (9)–(11) ищем методом разделения переменных:

$$\begin{aligned} w^0(x_1,\xi_2)&=\Xi_1(\xi_2)X_1(x_1),\\ \psi^0(x_1,\xi_2)&=\Xi_2(\xi_2)X_2(x_1).\end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя (13) в (9)-(11), находим уравнения для определения Ξ_α, X_α

$$X_\alpha^{IV} - cX_\alpha = 0,\quad X_\alpha(\pm 1/2) = 0, \tag{14}$$

$$X_2(x_1) = -aX_1''(x_1), \tag{15}$$

$$\Xi_\alpha^{(8)} + \bar{p}_0 \Xi_\alpha^{(6)} + c\frac{1}{\bar{R}^2(0)}\Xi_\alpha = 0, \quad |\Xi_\alpha| < \infty \text{ при } |\xi_2| \to \infty; \tag{16}$$

$$\Xi_1(\xi_2) = a\Xi_2^{IV}(\xi_2), \tag{17}$$

где a, c – пока произвольные постоянные; $\alpha = 1,2$.

Краевая задача (14)-(15) о собственных значениях имеет нетривиальное решение только тогда, когда

$$c = (\pi m)^4, \qquad m = 1,2,3,\ldots \tag{18}$$

При этом собственные функции имеют вид

$$X_1(x_1) = \sin[\pi m(x_1 - \frac{1}{2})];\ X_2 = -a(\pi m)^2 X_1 - \tag{19}$$

балочные фундаментальные функции [2].

Для каждого решения (19) (фиксированного m) решение краевой задачи о собственных значениях (16)-(17) ищем в виде

$$\Xi_2(\xi_2) = \sum_{k=1}^{4} a_k^{\pm} e^{\pm\Omega_k \xi_2}, \tag{20}$$

где верхние знаки берутся при $\xi_2 > 0$, а нижние при $\xi_2 < 0$; $Re\,\Omega_k < 0$, Ω_k^2 – корни уравнения

$$(\Omega^2)^4 + \bar{p}_0(\Omega^2)^3 + \frac{(\pi m)^4}{\bar{R}^2(0)} = 0. \tag{21}$$

Нумерация корней выбрана так, чтобы

$$\Omega_2^2 = \bar{\Omega}_1^2;\ \Omega_3^2 = \bar{\Omega}_4^2;\ |\Omega_1^2| \geq |\Omega_3^2|.$$

Постоянные $a_k^{\pm}$ не произвольны, они должны обеспечивать непрерывность Ξ_α и их первых трех производных. Эти требования сводятся к четырем условиям

$$\sum_{k=1}^{4} a_k \Omega_k^{2n} = 0, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \tag{22}$$

которым тождественно должна удовлетворять каждая из четверок искомых постоянных

$$(a_k^+ - a_k^-) \text{ и } (a_k^+ + a_k^-)\Omega_k . \tag{23}$$

Однородная система (22) (a значит и (16)-(17) имеет нетривиальное решение, когда

$$\Omega_1^2 = \bar{\Omega}_1^2 , \tag{24}$$

т.е. тогда, когда уравнение (21) имеет кратный действительный корень, что возможно, если

$$\bar{p}_0 = \frac{4\pi m}{3}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\bar{R}(0)}}. \tag{25}$$

При этом

$$\Omega_1^2 = \Omega_2^2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\bar{R}(0)}}\,\pi m . \tag{26}$$

Из (22), (23) находим

$$a_3^{\pm} = a_4^{\pm} = 0; \;\; a_1^{\pm} = a_2^{\mp} \text{,} \tag{27}$$

Отметим, что

$$\min_{(\Omega^2 < 0)} \bar{p}_0(\Omega^2) = \frac{4\pi m}{3}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\bar{R}(0)}} \tag{28}$$

Здесь под $\bar{p}_0(\Omega^2)$ понимается $\bar{p}_0$, определяемое уравнением (21). Соотношением (28) определяется $\bar{p}_e$ в общепринятом подходе [4].

Минимизируя $\bar{p}_0$ в (25) по m и $\bar{R}(0)$, находим, что основная асимптотика верхней критической нагрузки определяется по формуле

$$\bar{p}_e = 4\pi\, 3^{-3/4}, \tag{29}$$

что совпадает с хорошо известной формулой П.Ф.Папковича [4]:

$$p_e = \frac{4\pi E}{[36(1-\nu^2)]^{3/4}} \sqrt{\frac{\delta R}{L^2}} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2.$$

Выпучивание начинается зарождением существенных деформаций (вмятин) в окрестности одной из образующих, где отличный от нуля главный радиус кривизны достигает своего наибольшего значения. Согласно нашему способу выбора системы отсчета, таковой является образующая $x_2 = 0$, поэтому

$$\bar{R}(0) = 1. \tag{30}$$

Нетривиальное решение системы (9)–(11) представимо в виде

$$W^0 = -\sqrt{3}\,\psi^0 = \rho^0 \cos\pi x_1 \cos\omega\,(\xi_2 + \xi_2^0), \tag{31}$$

где

$$\omega^4 = \pi^2\sqrt{3}; \tag{32}$$

$\rho^2 = a\pi^2$; ξ_2^0 – произвольные постоянные.

Построение асимптотических представлений для деформаций в окрестности вмятин

5. С учетом результатов предыдущего пункта систему (5)–(7) для определения U_{21}^0 перепишем в форме

$$3\frac{\partial^4 w}{\partial \bar{s}^4} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 4(1-\beta^q)\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{s}^2} + \beta^h L[\psi, w] = 0, \tag{33}$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial \bar{s}^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 1/2\beta^h L[w, w] = 0, \tag{34}$$

$$w = \psi = 0 \quad \text{при} \quad |z| = \frac{\pi}{2}, \tag{35}$$

$$w = \psi = 0 \quad \text{при} \quad |\bar{s}| = \infty, \tag{36}$$

где $q, h > 0$,

$$w = \frac{\omega^2 W_{21}^0}{\beta^h}; \quad \psi = -\omega^2\sqrt{3}\,\frac{-\psi_{21}^0 - \psi_{11}^0|_{x_2=0}}{\beta^h};$$

$$\bar{s} = \frac{x_2\omega}{\sqrt{\varepsilon}}; \quad z = x_1\pi; \quad \omega^4 = \pi^2\sqrt{3};$$

$$\varepsilon \ll \beta^{q} \equiv 1-\frac{p_0}{p_e}=1-\frac{\bar{p}_0}{\bar{p}_e} \ll 1; \qquad (37)$$

L – оператор, определяемый по формуле (3) в терминах переменных $\bar{s}, z$; h и q – целочисленные постоянные, подлежащие определению: q указывает на порядок близости к критическому значению $\bar{p}_e$ нагрузки $\bar{p}_0\,(\beta \ll 1)$, при которой строится искомое нетривиальное решение, описывающее начальные послекритические деформации в окрестности вмятин; h – на порядок близости искомого решения к тривиальному (8). Построение асимптотических разложений по малому параметру β для нетривиальных решений системы (33)-(37) производится следующим образом.

Предполагается, что искомое решение w, ψ – четные функции по переменным $\bar{s}$ и z. Поэтому решение строится в полуполосе $\{-\frac{\pi}{2} \le z \le \frac{\pi}{2}; \bar{s} \ge 0\}$ с дополнительными краевыми условиями

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial^3 w}{\partial \bar{s}^3} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial \bar{s}^3} = 0 \qquad \text{при } \bar{s}=0. \qquad (38)$$

Введем вектор-функцию $u(\bar{s},z)$ с компонентами $w(\bar{s},z), \psi(\bar{s},z)$.

При интегрировании по переменной $\bar{s}$ используется идея двухмасштабных разложений [6]. Вместо $\bar{s}$ вводятся две переменные s и φ по формулам

$$s=\beta\bar{s}; \quad \varphi=(1+\sum_{i=2}\beta^{i}\varphi_i)\bar{s}, \qquad (39)$$

где φ_i – постоянные, подлежащие определению. Подставляя асимптотические представления

$$u(\bar{s},z)=\sum_{k=0}\beta^{k}u_k(s,\varphi,z) \qquad (40)$$

в уравнения (33)-(38) и приравнивая в них коэффициенты при одинаковых степенях β, получаем для определения w_k, ψ_k цепочку линейных неоднородных краевых задач A_k с дифференциальными уравнениями в частных производных по независимым переменным φ, z. Для интегрирования последних по z применяется метод Бубнова-Галеркина, причем за координатные берутся функции

$$Z_{\lambda}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(2\lambda-1)z, \qquad (41)$$

являющиеся фундаментальной системой линеаризованной задачи (33)-(38) или (что то же самое) однородной задачи A_k. Представляя вектор-функцию $u_k(w_k, \psi_k)$ в виде рядов

$$u_k(s,\varphi,z) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} u_{k\lambda}(s,\varphi)\, Z_\lambda(z) \tag{42}$$

и применяя к A_k процедуру метода Бубнова-Галеркина, для $u_{k\lambda}(w_{k\lambda}, \psi_{k\lambda})$ получаем цепочку линейных неоднородных краевых задач $A_{k\lambda}$:

$$3\frac{\partial^4 w_{k\lambda}}{\partial\varphi^4} + (2\lambda-1)^2\psi_{k\lambda} + 4\frac{\partial^2 w_{k\lambda}}{\partial\varphi^2} = W_{k\lambda}\ ; \tag{43}$$

$$\frac{\partial^4 \psi_{k\lambda}}{\partial\varphi^4} - (2\lambda-1)^2 w_{k\lambda} = \Psi_{k\lambda} \tag{44}$$

с краевыми условиями:

при $\bar{s} = \infty$ $\qquad \psi_{k\lambda} = w_{k\lambda} = 0;$ (45)

при $\bar{s} = 0$

$$\frac{\partial w_{k\lambda}}{\partial\varphi} + \sum_{l+r=k} \partial_{l1} w_{r\lambda} = 0;\quad \frac{\partial \psi_{k\lambda}}{\partial\varphi} + \sum_{l+r=k} \partial_{l1}\psi_{r\lambda} = 0 \tag{46}$$

$$\frac{\partial^3 w_{k\lambda}}{\partial\varphi^3} + \sum_{l+r=k} \partial_{l3} w_{r\lambda} = 0;\quad \frac{\partial^3 \psi_{k\lambda}}{\partial\varphi^3} + \sum_{l+r=k} \partial_{l3}\psi_{r\lambda} = 0.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$W_{k\lambda} = -\{\sum_{l+r=k} [3\partial_{l4} + 4\partial_{l2} - 4\partial_{(l-q)2}]\, w_{r\lambda} -$$

$$-4\frac{\partial^2 w_{(k-q)\lambda}}{\partial\varphi^2} + \sum_{h+f+l+r=k} L_{f\lambda}[w_l, \psi_r]\},$$

$$\Psi_{k\lambda} = -\{\sum_{l+r=k} \partial_{l4}\psi_{r\lambda} - \frac{1}{2}\sum_{h+f+l+r=k} L_{f\lambda}[w_l, w_r]\},$$

$$L_{0\lambda}[w_l, \psi_r] = Z_{\lambda\mu\nu''}\frac{\partial^2 w_{l\mu}}{\partial\varphi^2}\psi_{r\nu} -$$

$$-2Z_{\lambda\mu'\nu'}\frac{\partial w_{l\mu}}{\partial\varphi}\;\frac{\partial\psi_{r\nu}}{\partial\varphi} + Z_{\lambda\mu''\nu}w_{l\mu}\;\frac{\partial^2\psi_{r\nu}}{\partial\psi^2};$$

для $i \geq 1$

$$L_{i\lambda}[w_l, \psi_r] = Z_{\lambda\mu\nu''}\,\partial_{i2}w_{l\mu}\psi_{r\nu} +$$

$$+Z_{\lambda\mu''\nu}w_{l\mu}\,\partial_{i2}\psi_{r\nu} - 2Z_{\lambda\mu'\nu'}\,[\frac{\partial w_{l\mu}}{\partial\varphi}\partial_{i1}\psi_{r\nu} +$$

$$+\partial_{i1}w_{l\mu}\,\frac{\partial\psi_{r\nu}}{\partial\varphi} + \sum_{э+j=i}\partial_{э1}w_{l\mu}\,\partial_{j1}\psi_{r\nu}\;],$$

$$Z_{\lambda\mu\nu''} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Z_\lambda\cdot Z_\mu\cdot Z''_\nu\,dz = -(2\nu-1)^2 Z_{\lambda\mu\nu},$$

$$Z_{\lambda\mu''\nu} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Z_\lambda\cdot Z''_\mu\cdot Z_\nu\,dz = -(2\mu-1)^2 Z_{\lambda\mu\nu},$$

$$Z_{\lambda\mu\nu} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Z_\lambda\cdot Z_\mu\cdot Z_\nu\,dz;\quad Z_{\lambda\mu'\nu'} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Z_\lambda\cdot Z'_\mu\cdot Z'_\nu\,dz;$$

для $j \geq 2$ $\quad \partial_{j1} = \varphi_j\frac{\partial}{\partial\varphi}\;;\quad \partial_{11} = \frac{\partial}{\partial s}\;;$

для $i \geq 1$ $\quad \partial_{i2} = 2\partial_{i1}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \sum_{m+n=i}\partial_{m1}\partial_{n1},$

$$\partial_{i3} = \partial_{i2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \partial_{i1}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \sum_{p+q=i}\partial_{p1}\partial_{q2},$$

$$\partial_{i4} = 2\partial_{i2}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2} + \sum_{p+q=i}\partial_{p2}\partial_{q2}\;;$$

для $n = 1,2,3,4$

$$\frac{\partial^n}{\partial\bar{s}^n} = \frac{\partial^n}{\partial\varphi^n} + \sum_{i=1}\beta^i\partial_{in}.$$

6. Построение асимптотических представлений начинаем с основного приближения. Решение однородных уравнений системы (43)-(45) обозначим через $u_{k\lambda}^{(+)}(w_{k\lambda}^{(+)},\ \psi_{k\lambda}^{(+)})$. Имеем

$$w_{k\lambda}^{(+)}=\sum_{l=1}^{4} w_{k\lambda}^{l}\, e^{\omega_{\lambda l}\varphi};\ \psi_{k\lambda}^{(+)}=\sum_{l=1}^{4}\psi_{k\lambda}^{l}\, e^{\omega_{\lambda l}\varphi},$$

$$\psi_{k\lambda}^{l}(s)=\frac{(2\lambda-1)^2}{\omega_{\lambda l}^{4}}\, w_{k\lambda}^{l}(s),\ l=1,2,3,4, \tag{47}$$

где $w_{k\lambda}^{l}(s)$ – функции, подлежащие определению; $\omega_{\lambda l}$ – корни характеристического уравнения системы (43), (44)

$$3\omega^{8}+4\omega^{6}+(2\lambda-1)^{4}=0. \tag{48}$$

При $\lambda = 1$ это уравнение имеет два двукратных мнимых корня $\pm i$, остальные корни при $\lambda = 1$ и $\lambda > 1$ – комплексные с $Re\,\omega\neq 0$. Полагаем $\omega_{11}=i$, $\omega_{12}=-i$; остальные корни при $\lambda = 1$ и при каждом $\lambda\geq 2$ выбираем так, чтобы $Re\,\omega_{\lambda l}<0$.

Каждая из задач $A_{0\lambda}$ – однородная, ее решение дается формулами (47)

$$u_{0\lambda}=u_{0\lambda}^{(+)}.$$

Краевые условия (45), (46) приводятся к виду

$$w_{01}^{1}(0)-w_{01}^{2}(0)=0; \tag{49а}$$

$$w_{01}^{1}=w_{01}^{2}=0 \quad \text{при} \quad s=\infty; \tag{49б}$$

$$w_{0\lambda}^{l}(0)=0 \ \text{для} \ \lambda\geq 2 \quad \text{и} \ \lambda=1,\ l=3,4. \tag{49в}$$

Пусть зависимость некоторой функции $f(s,\varphi)$ от φ представляется в виде ряда

$$f(s,\varphi)=\sum_{m,n<\infty}\sum_{\mu,\nu,k,i} f_{\mu\nu ik}^{mn}(s)\, e^{[m\omega_{\mu i}+n\omega_{\nu k}]\varphi}. \tag{50}$$

Выделим из (50) все слагаемые, зависимость которых от φ выражается экспонентой $e^{\omega_{\lambda l}\varphi}$, обозначим их $f^{\{+\lambda l\}}$:

$$f^{\{+\lambda l\}}=f_{\lambda l}(s)\, e^{\omega_{\lambda l}\varphi}; \tag{51а}$$

$$f^{\{+\lambda\}} = \sum_l f^{\{+\lambda l\}};\tag{51б}$$

$$f^{\{-\lambda l\}} = f - f^{\{+\lambda l\}};\tag{51в}$$

$$f^{\{-\lambda\}} = f - f^{\{+\lambda\}}.\tag{51г}$$

Отметим, что $u_{0\lambda}$, $W_{1\lambda}$, $\Psi_{1\lambda}$ представляют собой ряды типа (50). Это имеет место и для $W_{k\lambda}, \Psi_{k\lambda}\ (k>1)$, если $u_{i\lambda}\ (i<k)$ принимают вид (50). В дальнейшем будем строить искомые решения $u_{i\lambda}$ в виде рядов (50). Разобъем общее решение $u_{k\lambda}$ системы (43)–(44) на три части

$$u_{k\lambda} = u_{k\lambda}^{(+)} + u_{k\lambda}^{[+]} + u_{k\lambda}^{\{-\lambda\}},\tag{52}$$

где $u_{k\lambda}^{[+]}$ – частное решение, соответствующее слагаемым $W_{k\lambda}^{\{+\lambda\}}$, $\Psi_{k\lambda}^{\{+\lambda\}}$. Потребуем, чтобы $u_{k\lambda}^{[+]}$ имело вид (51а), т.е. не содержало "секулярных" членов. Для этого необходимо, чтобы $W_{k\lambda}, \Psi_{k\lambda}$ удовлетворяли четырем условиям:

$$\Psi_{k\lambda}^{\{+\lambda l\}} = \frac{\omega_{\lambda l}^4}{(2\lambda-1)^2} W_{k\lambda}^{\{+\lambda l\}} \quad \text{для } l = 1,2,3,4.\tag{53}$$

Эти уравнения вместе с граничными условиями (45), (46) определяют $W_{k\lambda}^{l}(s)$; $u_{k\lambda}^{[+]}$ можно найти с точностью до решений однородных уравнений. Полагаем $w_{k\lambda}^{[+]} \equiv 0$, тогда

$$\psi_{k\lambda}^{[+]} = \sum_{l=1}^{4} \frac{1}{\omega_{\lambda l}^4} \Psi_{k\lambda}^{\{+\lambda l\}};\tag{54}$$

$u_{k\lambda}^{\{-\lambda\}}$ – частные решения системы

$$\begin{gathered} 3\frac{\partial^4 w_{k\lambda}^{\{-\lambda\}}}{\partial\varphi^4} + (2\lambda-1)^2 \psi_{k\lambda}^{\{-\lambda\}} + 4\frac{\partial^2 w_{k\lambda}^{\{-\lambda\}}}{\partial\varphi^2} = W_{k\lambda}^{\{-\lambda\}}, \\ \frac{\partial^4 \psi_{k\lambda}^{\{-\lambda\}}}{\partial\varphi^4} - (2\lambda-1)^2 w_{k\lambda}^{\{-\lambda\}} = \Psi_{k\lambda}^{\{-\lambda\}}. \end{gathered}\tag{55}$$

Выпишем решения уравнений задач $A_{1\lambda}$. Условия (53) при $k=1$ сводятся к системе

$$6(\omega_{\lambda l}^2 + 1)\frac{\partial w_{0\lambda}^{l}}{\partial s} = \delta_1^q \omega_{\lambda l} w_{0\lambda}^{l},$$

$l = 1,2,3,4;$ $\qquad \delta_m^n = \begin{cases} 1 \text{ при } m=n \\ 0 \text{ при } m \neq n \end{cases}$

С граничными условиями (49) она имеет тождественно не равное нулю решение только тогда, когда $q > 1$. При этом все функции $w_{0\lambda}^l \equiv 0$, кроме w_{01}^1 и w_{01}^2, которые остаются пока не определенными. Далее из уравнений (54), (53), (46) последовательно находим

$$\psi_{1\lambda}^{[+]} = \delta_1^\lambda \sum_{l=1,2} 4\omega_{l1} \frac{dw_{01}^l}{ds} e^{\omega_{l1}\varphi},$$

$$u_{1\lambda}^{[-\lambda]} = \delta_1^h \{ u_{1\lambda 0} w_{01}^1 w_{01}^2 +$$

$$+ u_{1\lambda 2} [(w_{01}^1)^2 e^{2i\varphi} + (w_{01}^2)^2 e^{-2i\varphi}]\}$$

$w_{1\lambda}^l(0)=0$ при $\lambda \geq 2$ и $\lambda = 1$; $l = 3,4$, (56а)

$$w_{11}^1(0) - w_{11}^2(0) = 0, \tag{56б}$$

$$\left(\frac{dw_{01}^1}{ds} + \frac{dw_{01}^2}{ds}\right)\Big|_{s=0} = 0; \tag{56в}$$

где $u_{k\lambda m} = (w_{k\lambda m}, \psi_{k\lambda m})$; $u_{1\lambda}^{[-\lambda]} = (w_{1\lambda}^{[-\lambda]}, \psi_{1\lambda}^{[-\lambda]})$;

$$w_{1\lambda 0} = \frac{1}{2}\psi_{1\lambda 0} = -\frac{2\pi_\lambda}{(2\lambda+1)(2\lambda-3)};\ \pi_\lambda = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{2(-1)^\lambda}{2\lambda-1};$$

$$w_{1\lambda 2} = \pi_\lambda \frac{(2\lambda-1)^2+32}{(2\lambda-1)^4+512};\quad \psi_{1\lambda 2} = 2\pi_\lambda \frac{(2\lambda-1)^2-16}{(2\lambda-1)^4+512}.$$

Рассмотрим краевые задачи $A_{2\lambda}$. Условия (53), (56а) дают

$w_{1\lambda}^l(s) \equiv 0$ для $\lambda \geq 2$ и $\lambda = 1$; $l = 3,4$,

$$\left[-24\frac{d^2}{ds^2} + \delta_2^q - \delta_1^h \cdot 4w_{01}^1 w_{01}^2 L_{01}'\right] w_{01}^l = 0, \tag{57}$$

где $l = 1,2$;

$$L_{01}' = \frac{128}{\pi^3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2\nu+1)^2(2\nu-3)^2} + \frac{(2\nu-1)^2+8}{2(2\nu-1)^2[(2\nu-1)^4+512]}\right] \cong 0{,}6833.$$

Система (57), (49а,б), (56в) имеет тождественно не равное нулю решение, если

$$q=2; \quad h=1. \tag{57'}$$

Считая, что имеет место (57'), находим

$$w_{01}^{1}=w_{01}^{2}\equiv\frac{\rho}{2};$$

$\rho(s)$ – решение задачи:

$$\begin{gathered}\frac{d^2\bar\rho}{dx^2}+(-1+2\bar\rho^2)\bar\rho=0,\\ \left.\frac{d\bar\rho}{dx}\right|_{x=0}=0, \quad \bar\rho(\infty)=0,\end{gathered} \tag{58}$$

где $\rho(s)=\rho(0)\bar\rho(x)$; $x=\frac{s}{\sqrt{\sigma}}$;

$$\rho(0)=-\sqrt{8/L_{01}'}\cong-3,421. \tag{58а}$$

Из последних уравнений получаем

$$\bar\rho(x)=\frac{1}{chx}=\frac{1}{ch(s/\sqrt{\sigma})}. \tag{58б}$$

На этом заканчивается построение асимптотического представления в основном (нулевом) приближении. Оно имеет вид (ср.с(32))

$$\begin{gathered}u(\bar s,z)\sim u_{(0)}(\bar s,z)\equiv u_{011}\rho(s)\cos\varphi Z_1(z),\\ w_{011}=\psi_{011}=1, \quad \varphi=\bar s.\end{gathered}$$

7. Отыскивая последовательно решения уравнений задач $A_{2\lambda}$, $A_{3\lambda}$, приходим к выражению для асимптотического представления $u_{(1)}(\bar s,z)$ в первом приближении:

$$\begin{gathered}u(\bar s,z)\sim u_{(1)}(\bar s,z)\equiv u_{011}\rho\cos\varphi\, Z_1+\\ +\beta\Big[u_{111}\frac{d\rho}{ds}\sin\varphi Z_1+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{\rho^2}{4}(u_{1\lambda 0}+2u_{1\lambda 2}\cos 2\varphi)Z_\lambda\Big],\end{gathered} \tag{59}$$

где $$\psi_{111}=w_{111}-4; \quad \psi=(1-\frac{7}{36}\beta^2)\bar{s};$$

$$w_{111}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{9\rho^2(0)}{4\pi^3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(16\frac{(2\nu-1)^2+32}{(2\nu-1)[(2\nu-1)^4+512]}\right)^3\right]\cong-0{,}0209.$$

8. Методом математической индукции устанавливаются такие утверждения о свойствах асимптотических представлений $u_{(k)}(\bar{s},z)$ искомых решений $u(\bar{s},z)$ в k-м $(1\le k\le K)$ приближении: $u_{k\lambda}(s,\varphi)$, $w_{k\lambda}(s,\varphi),\psi_{k\lambda}(s,\varphi)$ – четные функции по переменной $\bar{s}$, их зависимость от φ представляется в виде конечных рядов типа (50) с $n=0$; $\mu=1$; $l=1,2$, т.е. конечных тригонометрических рядов.

Ряды (42) сходятся абсолютно.

Структура уравнений и их решений задач $A_{K\lambda}$, $A_{(K+1)\lambda}$, $A_{(K+2)\lambda}$ K-го приближения такова:

$$w^l_{K\lambda}\equiv 0 \quad \text{для } \lambda\ge 2 \text{ и } \lambda=1; \quad l=3,4;$$

$$\psi^{[+]}_{(K+1)\lambda}=\delta^\lambda_1\left[\sum_{l=1,2}4\omega_{1l}\frac{dw^l_{K1}}{ds}-2\rho\varphi_{K+1}+\ldots\right],$$

$$u^{\{-\lambda\}}_{(K+1)\lambda}=\rho\left[u_{1\lambda0}\frac{\rho_K}{2}+u_{1\lambda2}(w^1_{K1}e^{2i\varphi}+w^2_{K1}e^{-2i\varphi})\right]+\ldots,$$

$$\rho_K\equiv w^1_{K1}+w^2_{K1}; \quad r_K\equiv w^1_{K1}-w^2_{K1}; \quad x=\frac{s}{\sqrt{6}};$$

$\rho_K(x)$ и $r_K(x)$ – решения краевых задач:

$$\frac{d^2\rho_K}{dx^2}+(-1+6\bar{\rho}^2)\rho_K=\ldots; \quad \left.\frac{d\rho_K}{dx}\right|_{x=0}=\rho_K(\infty)=0,$$

$$\frac{d^2r_K}{dx^2}+(-1+2\bar{\rho}^2)r_K=2\sqrt{6}\bar{\rho}'\varphi_{K+1}+\ldots, \quad r_K(0)=r_K(\infty)=0. \tag{60}$$

Имеем

$$\rho_K=\bar{\rho}'(x)f'_K(0)+f_K(x), \quad r_K=-\bar{\rho}\Phi_K(0)+\Phi_K(x); \quad ()'\equiv\frac{d()}{dx}.$$

Здесь „...“ обозначены слагаемые, которые не содержат искомых функций K-го приближения и выражаются только через функции, найденные в предыдущих приближениях; ρ_K и r_K – погранслойные функции, при необходимости скорость их убывания при $x\to\infty$ можно усилить соответствующим выбором константы ψ_{K+1}. Так, при $K=1$ первое уравнение в (60) – однородное, поэтому $\rho_1 \equiv 0$. Полагая $\psi_2=-\frac{7}{3\delta}$, убираем в правой части (60) слагаемые убывающие, как $\rho(x)$ при $x \to \infty$, тогда $r_1 = w_{111}\frac{d\rho}{ds}$; f_K, Φ_K – частные решения уравнений (60).

Представим уравнения исходной задачи (33)–(38) в операторном виде $Au=0$. Справедлива оценка $Au_K = B\beta^{K+1}$, причем

$\lim |B| < \infty$.
$(\beta \to 0, |s| < \infty)$

Головная асимптотика зависимости "нагрузка – деформация"

9. Давлению ρ, действующему на оболочку, соответствует обобщенная координата ΔV – вызываемое действием давления ρ изменение объема ограниченного оболочкой:

$$\Delta V = -\frac{\varepsilon L^4}{R}\iint_{(F)} W\,dx_1\,dx_2 .$$

Подставляя в эту формулу полученное в пп.3,7 асимптотическое представление для W, находим, что в основном приближении зависимость изменения объема ΔV от величины давления ρ для равновесных (неустойчивых) деформированных состояний оболочки в начальной послекритической стадии имеет вид

$$\overline{\Delta V} = \sqrt{1-\frac{\rho}{\rho_e}} + O\left(\left[1-\frac{\rho}{\rho_e}\right]^{3/2}\right) + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

где безразмерный параметр $\overline{\Delta V}$ определяется по формуле

$$\Delta V = k_V \frac{L^4}{R}\varepsilon^{3/2}\overline{\Delta V};$$

$$k_V = \rho^2(0)\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^{11} 3^{1/4}\right]^{1/2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^2(2\nu+1)(3-2\nu)} \cong 0{,}3456.$$

Отметим, что построенная в [1] аналогичная зависимость для строго выпуклых оболочек имеет такой же вид, что качественно согласуется с [7].

10. В заключение заметим, что в данной статье рассматривается нагружение оболочек лишь внешним давлением. Если цилиндрическая оболочка нагружена только сжимающими нормальными усилиями вдоль края, то методика построения асимптотик для критической

нагрузки и для послекритических деформаций будет сходной с методикой, развитой в [1] для строго выпуклых оболочек.

Литература

1. Бабенко В.И. Асимптотические представления решений уравнений теории непологих оболочек при нагрузках, близких к критическим. – Мат. физика и функцион. анализ, 1974, вып.5, с.76–91.
2. Власов В.З. Избранные труды. В 3-х т. Т.1, ч.3. М., Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.
3. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория гибких оболочек. Казань, Таткнигоиздат, 1957. 423 с.
4. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек. – В кн.: Механика твердых деформируемых тел 1967. М., 1969, с.5–348.
5. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. – Успехи мат.наук, 1960, 15, вып.3, с.3–80.
6. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., Мир, 1972. 275 с.
7. Хатчинсон Дж., Койтер В.Т. Теория послекритического поведения конструкций. – Механика, 1971, №4, с.129–149.

УДК 513.8

Г.Р.Белицкий

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ФОРМАЛЬНЫХ РЯДОВ И РОСТКОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В настоящей статье предлагается схема получения нормальных формальных форм относительно действия в линейном пространстве группы, допускающей некоторую фильтрацию. Эта схема применяется к пространствам формальных рядов и ростков аналитических отображений, в которых действует та или иная группа преобразований координат. Некоторые частные результаты, полученные с помощью предлагаемого здесь подхода, опубликованы в [1].

Общие теоремы

1. Пусть J – конечномерное линейное пространство над полем комплексных или вещественных чисел, в котором действует конечномерная группа Ли G. Действие

$$G \times J \xrightarrow{S} J$$

предполагается гладким. Обозначим через T касательное пространство в единице к группе G. Каждый элемент $z \in J$ определяет отображение

$$S(\cdot, z): G \to J$$

и производную

$$S'(z): T \to J$$

этого отображения в единице. Считаем, что в пространствах T и J фиксированы некоторые скалярные произведения. Пусть далее $J_0 \subset J$ – подпространство с фиксированными вложением и ортопроектором

$$i: J_0 \to J, \quad \rho: J \to J_0, \quad \rho_i = 1.$$

Предполагается, что действие группы связано с подпространством соотношением

$$S(g, z) - S(g, \rho z) = z - \rho z \quad (z \in J,\ g \in G). \tag{1}$$

Отсюда вытекает, что равенством

$$S_0(g, z_0) = \rho S(g, z_0) \quad (g \in G,\ z_0 \in J_0)$$

определено действие группы G на подпространстве J_0, причем

$$S'(z) = S'(z_0) \quad (z = \rho z \in J_0). \tag{2}$$

Образ подпространства $Ker\, \rho S'(z_0) \subset T$ под действием линейного оператора $S'(z)$ содержится, очевидно, в ортогональном дополнении $J_0^{\perp}$:

$$S'(z): Ker\, \rho S'(z_0) \longrightarrow J_0^{\perp}.$$

Пусть

$$L(z): J_0^{\perp} \longrightarrow Ker\, \rho S'(z) -$$

сопряженный оператор. Из (2) вытекает, что

$$L(z) = L(z_0).$$

Положим $g.z = S(g, z)$. Тогда имеет место следующая

Теорема 1. Для каждого $z \in J$ найдется такое преобразование $g \in G$, что

$$g.z = \rho z + \theta; \quad \rho\theta = 0, \quad \theta \in Ker\, L\,(\rho z).$$

Если при некотором $z_0 \in J_0$ справедливо включение

$$J_0^{\perp} \subset S'(z_0)(T), \tag{3}$$

то сужение

$$S'(z_0) : Ker\, \rho S'(z_0) \longrightarrow J_0^{\perp}$$

сюръективно. Поэтому из теоремы 1 вытекает

Следствие. Пусть при некотором $z_0 \in J_0$ справедливо включение (3). Тогда, если $\rho z = z_0$, то элемент $z \in J$ лежит с z_0 в одной орбите: найдется такое преобразование $g \in G$, что

$$g.z = z_0 .$$

Пример. Пусть J – пространство двумерных треугольных матриц

$$z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

G – группа верхнетреугольных матриц с единичной диагональю, которая действует в J преобразованием подобия. Если выбрать в качестве J_0 пространство диагональных матриц, то при соответствующем выборе скалярного произведения оператор

$$\rho z = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

будет ортопроектором и выполнится условие (1). Если $z_0 \in J_0$ – скалярная матрица, то $S'(z_0) = 0$. Если же собственные числа матрицы $z_0 \in J_0$ различны, то сужение

$$S'(z_0) : Ker\, \rho S'(z_0) \longrightarrow J_0^{\perp}$$

сюръективно, поэтому матрица вида $z = z_0 + b$, где $b \in J_0^{\perp}$, подобна диагональной матрице z_0.

Доказательство теоремы 1. Для фиксированного $z_0 \in J_0$ положим

$$J(z_0) = S'(z_0)(Ker\, \rho S'(z_0)).$$

Тогда $J(z_0) \subset J_0^{\perp}$. Пусть $Q: J_0^{\perp} \longrightarrow J(z_0)$ – ортопроектор. Тогда $Ker\, Q = Ker\, L(z_0)$. Каждый элемент $z \in J$ можно записать в виде

$$z = Pz + a + b, \quad a \in Ker\, Q, \quad b \in \dot{J}(Pz).$$

Пусть $Pz = z_0$ и $G(z_0) \subset G$ – стационарная подгруппа элемента z_0 относительно действия

$$S_0 : G \times J_0 \longrightarrow J_0$$

группы G в пространстве J_0. Тогда $G(z_0)$ – подгруппа Ли (см.[2], с.226), а подпространство $Ker\, PS'(z_0) \subset T$ – ее алгебра Ли. При фиксированном z рассмотрим отображение

$$F_z : G(z_0) \longrightarrow J(z_0),$$

определенное формулой

$$F_z(g) = Q(S(g,z) - z_0) - b \quad (g \in G(z_0)).$$

В силу (1)

$$F_z(g) = Q(S(g, z_0) - z_0),$$

т.е. отображение F_z зависит только от проекции $Pz = z_0$. Производная отображения F_z в единице равна сужению оператора $QS'(z_0)$ на подпространство $Ker\, PS'(z_0)$. Эта производная сюръективна, так как Q – проектор на образ $S'(z_0)(Ker\, PS'(z_0))$. По теореме о неявной функции образ $F_z(G(z_0)) \subset J(z_0)$ содержит некоторую окрестность начала координат. Поэтому для каждого $N > 0$ найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(z_0, N) > 0$, что $\varepsilon \cdot V \in F_z(G(z_0))$, как только $V \in J(z_0)$, $\|V\| \le N$. Положим $N = \|b\|$. Тогда найдется такое преобразование $g_1 \in G(z_0)$, что

$$F_z(g_1) = -\varepsilon b,$$

т.е.

$$z_1 = g_1 \cdot z = z_0 + a_1 + b_1, \quad a_1 \in Ker\, L(z_0), \quad b_1 = (1-\varepsilon) b.$$

Так как $F_z(g) = F_{z_1}(g)$, то, в свою очередь, найдется такое $g_2 \in G(z_0)$, что

$$F_{z_1}(g_2) = -\varepsilon b,$$

т.е.

$$z_2 = g_2 \cdot z = z_0 + a_2 + b_2, \; a_2 \in \operatorname{Ker} L(z_0); \; b_2 = b_1 - \varepsilon b = (1-2\varepsilon)b.$$

Продолжая этот процесс, за конечное число шагов найдем элемент

$$u = z_0 + a, \quad a \in \operatorname{Ker} L(z_0),$$

лежащий в орбите элемента z.

Теорема доказана.

2. Пусть теперь J – не обязательно конечномерное линейное пространство над полем комплексных или вещественных чисел, в котором действует некоторая группа G, и имеется набор конечномерных подпространств $J_k \subset J$ и гладких конечномерных многообразий $G_k \subset G$ с фиксированными вложениями и проекциями

$$J_1 \xrightarrow{i_1} J_2 \xrightarrow{i_2} \ldots, \qquad p_k : J \to J;$$

$$G_1 \xrightarrow{j_1} G_2 \xrightarrow{j_2} \ldots, \qquad \theta_k : G \to G.$$

Считаем, что отображения i_k, p_k – линейны, $p_k(J) = J_k$ и, кроме того,

$$p_k^2 = p_k; \; p_{k-1} \cdot p_k = p_k \cdot p_{k-1} = p_{k-1}; \; p_k \cdot i_k = 1.$$

Предполагается также, что $\theta_k(G) = G_k$, отображения $j_k : G_k \to G_{k+1}$ и $Q_k : G_{k+1} \to G_k$ – гладкие и выполняются соотношения

$$Q_k^2 = Q_k; \; Q_{k-1} Q_k = Q_k \cdot Q_{k-1} = Q_{k-1}; \; Q_k j_k = 1;$$

$$Q_k(g.h) = Q_k((Q_k g).(Q_k h)) \quad (g, h \in G).$$

Это означает, в частности, что равенством

$$(g.h)_k = Q_k(g.h) \quad (g.h \in G_k)$$

задается структура группы на многообразии G_k. Предполагая дополнительно гладкость отображения

$$G_k \times G_k \xrightarrow{(.)_k} G_k,$$

получаем группу Ли G_k. Пусть T_k – алгебра Ли группы G_k. Тогда имеем последовательность линейных вложений и проекторов

$$T_1 \xrightarrow{j_1'} T_2 \xrightarrow{j_2'} \dots, \quad T_1 \xleftarrow{Q_1'} T_2 \xleftarrow{Q_2'} ,$$

Введем в пространствах T_k и J_k скалярные произведения таким образом, чтобы операторы P_k' и Q_k' были ортопроекторами.
Пусть

$$G \times J \xrightarrow{S} J -$$

действие группы в пространстве J, причем выполняются соотношения

$$P_k S(g,z) - P_k S(g, P_{k-1} z) = P_k z - P_{k-1} z \quad (z \in J,\ g \in G)$$

и

$$P_k S(g,z) = P_k S(Q_k g, z) \qquad (z \in J,\ g \in G).$$

Из этих соотношений вытекает, что формулой

$$S_k(g,z) = P_k S(g,z) \qquad (z \in J_k,\ g \in G_k)$$

задается действие группы G_k в пространстве J_k. Предположив это действие гладким, рассмотрим производную $S'(z): T_k \to J_k$ отображения

$$S_k(\cdot, z): G_k \to J_k .$$

Алгебра Ли $Ker\, S_{k-1}'(z) \subset T_k$ стационарной подгруппы элемента $P_{k-1} z \in J_{k-1}$ относительно действия S_{k-1} переводится оператором $S_k'(z)$ в ортогональное дополнение $J_{k-1}^{\perp} \subset J_k$:

$$S_k'(z): Ker\, S_{k-1}'(z) \to J_{k-1}^{\perp} .$$

Пусть

$$L_k(z): J_{k-1}^{\perp} \to Ker\, S_{k-1}'(z) -$$

сопряженный оператор. Тогда

$$L_k(z) = L_k(P_{k-1} z) \qquad (z \in J_k).$$

Индукцией по k из теоремы 1 получается

Теорема 2. Пусть $q \le k < \infty$. Для каждого $z \in J$ найдется такое преобразование $g_k \in G$, что

$$g_k . z = u_k ,$$

где $u_k \in J_k$ удовлетворяет условиям

$$P_q u_k = P_q \cdot z, \; P_j u_k - P_{j-1} u_k \in \operatorname{Ker} L_j (P_{j-1} u_k), \; j = q+1, \ldots, k$$

и, кроме того,

$$P_j u_k = P_j u_j \quad (j = q+1, \ldots, k).$$

Для каждого $z_q \in J_q$ обозначим через $N_k(z_q)$ множество всех таких $z \in J_k$, что

$$P_q z = z_q, \; P_j z - P_{j-1} z \in \operatorname{Ker} L_j (P_{j-1} z), \; j = q+1, \ldots, k.$$

Положим

$$E_k(z_q) = \cap S_k'(z)(\operatorname{Ker} S_{k-1}'(z)),$$

где пересечение берется по всем $z \in N_k(z_q)$. Очевидно, $E_k(z_q) \subset J_{k-1}^{\perp}$. Пусть $E_k^{\perp}(z_q)$ – ортогональное дополнение в пространстве $J_{k-1}^{\perp}$.

Следствие. Пусть $q \le k < \infty$. Для каждого $z \in J$ найдется такое преобразование $g_k \in G$, что

$$g_k . z = u_k ,$$

где $u_k \in J$ удовлетворяет условиям

$$P_q u_k = P_q z, \; P_j u_k - P_{j-1} u_k \in E_j^{\perp}(P_q z), \; j = q+1, \ldots, k,$$

и, кроме того,

$$P_j u_k = P_j u_j, \quad j = q+1, \ldots, k.$$

В частности $P_j u_k - P_{j-1} u_k = 0$, если для данного номера j оператор

$$S_j'(z) : \operatorname{Ker} S_{j-1}'(z) \longrightarrow J_{j-1}^{\perp}$$

сюръективен при каждом $z \in N_j(z_q)$.

Это утверждение дает нормальную форму относительно группы G, определяемую по "главной части" z_q элемента $z \in J$.

Теорема 2 и ее следствие при определенных условиях допускают "предельный переход" при $k \to \infty$. Пусть, например, G – какая-нибудь из групп преобразований координат (см./1/) с тождественным линейным приближением, действующая в пространстве $J=\hat{J}_{\mathbb{C}}(n,p)$ формальных степенных рядов с комплексными коэффициентами. Тогда имеются естественные отображения

$$J_1 \xrightarrow{i_1} J_2 \xrightarrow{i_2} \dots, \quad P_k : J \longrightarrow J_k;$$

$$G_1 \xrightarrow{j_1} G_2 \xrightarrow{j_2} \dots, \quad Q_k : G \longrightarrow G_k,$$

где $J_k \subset \hat{J}_{\mathbb{C}}(n,p)$, $G_k \subset G$ – подмножества k-струй элементов из J и G соответственно. Здесь очевидным образом определяется "касательное пространство" T к группе G в единице, также допускающее естественную "фильтрацию"

$$T_1 \xrightarrow{i_1} T_2 \xrightarrow{j_2} \dots, \quad Q_k : T \longrightarrow T_k,$$

где T_k – алгебра Ли группы G_k. Введем в пространствах T_k и J_k скалярные произведения следующим образом. Пусть $\varphi, \tau \in J_k$, так что $\varphi=\{\sum_I \varphi_I^i \frac{x^I}{I!}\}_{i=1}^p$, $\tau=\{\sum_I \tau_I^i \frac{x^I}{I}\}_{i=1}^p$, $I! = I_1! \dots I_n!$, где $I=(I_1,\dots,I_n)$ – целочисленный неотрицательный мультииндекс, $|I|=\sum I_\alpha \le k$ и

$$x^I = x_1^{I_1} \dots x_n^{I_n}.$$

Тогда

$$(\varphi,\tau)=\sum_{I,i} \varphi_I^i \bar{\tau}_I^i \cdot \frac{1}{I!}.$$

При таком выборе скалярного произведения операторы P_k и Q_k будут ортопроекторами, причем $J_{k-1}^{\perp} = J^{(k)}$, где $J^{(k)} \subset J_k$ – пространство всех однородных степени k полиномиальных отображений $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$. Все предположения описанной выше схемы выполнены, и применима теорема 2. Однако в данном случае она допускает уточнение:

Теорема 3. Пусть $1 \le q < \infty$. Для каждого формального ряда $z \in J$ найдется такое преобразование $g \in G$, что

$$g.z = u,$$

где $u \in \hat{J}_{\mathbb{C}}(n,p)$ удовлетворяет условиям

$$P_q u = P_q z, \quad P_j u - P_{j-1} u \in \operatorname{Ker} L_j (P_{j-1} u), \quad j=q+1, \dots$$

В рассматриваемой нами ситуации естественным образом определяется производная

$$S'(z): T \longrightarrow J \quad (z \in J)$$

отображения

$$S(\cdot, z): G \longrightarrow J.$$

При этом $S'_k(z) = \rho_k S'(z)$. Полагая, как и выше,

$$E_k(z_q) = \bigcap_{z \in N_k(z_q)} S'_k(z)(Ker\, S'_{k-1}(z))$$

для каждого $z_q \in J_q$, получаем

<u>Следствие 1</u>. Пусть $1 \leqslant q < \infty$. Каждый формальный ряд $z \in \hat{J}_e(n,\rho)$ некоторым преобразованием $g \in G$ можно привести к виду

$$g.z = u,$$

где $u \in \hat{J}_e(n,\rho)$ удовлетворяет условиям

$$\rho_q u = \rho_q z, \ \rho_k u - \rho_{k-1} u \in E_k^{\perp}(\rho_q z) \subset J^{(k)}, \ k = q+1, \dots .$$

В частности, $\rho_k u - \rho_{k-1} u = 0$, если для данного номера k оператор

$$S'_k(z): Ker\, S'_{k-1}(z) \longrightarrow J^{(k)}$$

сюръективен при любом $z \in N_k(z_q)$.

<u>Следствие 2</u>. Пусть $z_q \in J_q$ - такой элемент, что справедливо включение

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} J^{(k)} \subset S'(z_q)(T).$$

Тогда каждый формальный ряд $z \in \hat{J}_e(n,\rho)$, q-струя $\rho_q z$ которого равна z_q, лежит с z_q в одной орбите: найдется такое преобразование $g \in G$, что

$$g.z = z_q.$$

Доказательство теоремы 3. В силу теоремы 2 для каждого $k < \infty$ найдется такое преобразование $g_k \in G$, что

$$g_k . z = u_k,$$

причем $P_q u_k = P_q z$, $P_j u_k - P_{j-1} u_k - P_{j-1} u_k \in Ker L_j (P_{j-1} u_k)$, $j = q+1, \dots, k$. При этом элементы $\tau_j = P_j u_k$ зависят только от номера j. Рассмотрим бесконечную систему уравнений

$$P_j g.z = \tau_j, \quad j = q, q+1, \dots \tag{4}$$

относительно неизвестного преобразования $g \in G$. Так как $P_j g.z = P_j (Q_j g).z)$, то каждое из этих уравнений есть алгебраическое уравнение от конечного числа переменных. Каждая конечная подсистема системы (4) разрешима. В силу теоремы Ленга [3] система (4) имеет некоторое решение $g \in G$.

Теорема доказана.

В дальнейшем приведем различные примеры применения изложенной здесь схемы нахождения нормальных форм.

Формальные ряды

Элементы пространства $J_{\mathbb{C}}(n, p)$ обозначим здесь $F, H, \dots$, а элементы касательного пространства T к группе G – $h, k, \varphi, \dots$.

1. Группа $\mathcal{Y}_r$. Здесь

$$(S'(F)\varphi)(x) = F'(x)\varphi(x) \quad (F \in \hat{J}_{\mathbb{C}}(n,p); \ \varphi \in T).$$

Пусть $F_q \in J_q$ – некоторая q-струя. Обозначим через $T^{(i)} \subset T$ подпространство однородных степени i полиномиальных отображений. Если ряд F имеет q-струю, равную F_q, то справедливо включение

$$S'_k(F_q)\Big(\sum_{i=k-q+1}^{k} T^{(i)} \cap Ker S'_{k-1}(F_q)\Big) \subset S'_k(F)(Ker S'_{k-1}(F)).$$

Поэтому в рассматриваемой ситуации

$$E_k(F_q) \supset S'_k(F_q)\Big(\sum_{i=k-q+1}^{k} T^{(i)} \cap Ker S'_{k-1}(F_q)\Big).$$

Рассмотрим оператор

$$S'_k(F_q) : \sum_{i=k-q+1}^{k} T^{(i)} \cap Ker S'_{k-1}(F_q) \longrightarrow J^{(k)}. \tag{5}$$

Согласно результатам предыдущего параграфа, каждый формальный ряд

$$F(x) = F_q(x) + \dots$$

некоторым формальным преобразованием Φ можно привести к виду

$$F(\Phi(x)) = F_q(x) + H(x), \quad H \in \sum_{k=q+1}^{\infty} \mathcal{J}^{(k)},$$

где H удовлетворяет условиям

$$H^{(k)} \in \operatorname{Ker} L_k(F_q), \quad k = q+1, \dots$$

Здесь $L_k(F_q)$ – оператор, сопряженный к оператору (5), а через $H^{(k)} \in \mathcal{J}^{(k)}$ обозначается однородное слагаемое ряда H. Для явного нахождения оператора $L_k(F_q)$ запишем каждый элемент $\varphi \in T_k$ в виде

$$\varphi(x) = \left\{ \sum_{|I| \le k} \varphi_I^j \frac{x^I}{I!} \right\}_{j=1}^{n}.$$

Пусть, кроме того,

$$F_q'(x) = \left\{ \sum_I a_I^{ij} x^I \right\}_{i=1, j=1}^{i=p, j=n}.$$

Рассмотрим оператор

$$A_k = S_k'(F_q) : T_k \longrightarrow \mathcal{J}_k.$$

Согласно нашему определению скалярного произведения в пространствах T_k и $\mathcal{J}_k$, для каждого

$$\tau(x) = \left\{ \sum_I \tau_I^i \frac{x^I}{I!} \right\}_{i=1}^{p} \in \mathcal{J}_k$$

имеем

$$(A_k \varphi, \tau) = \sum_{\substack{I+J=L \\ i,j}} a_I^{ij} \varphi_J^j \bar{\tau}_L^i .$$

Отсюда для сопряженного оператора

$$(A_k^* \tau)^j(x) = \sum_{I,i} \bar{a}_I^{ij} \frac{\partial^{|I|} \tau^i(x)}{\partial x_1^{I_1} \dots \partial x_n^{I_n}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

С учетом того, что $L_k(F_q)$ – оператор, сопряженный к сужению (5), справедлива

Теорема 4. Каждый формальный ряд $F\in\hat{\mathcal{J}}_\ell(n,p)$ с q-струей $F_q\in J_q$ некоторым формальным преобразованием Φ можно привести к виду

$$F(\Phi(x))=F_q(x)+H(x),\quad H\in\sum_{k=q+1}^{\infty}\mathcal{J}^{(k)},$$

где $H=(H^1,\ldots,H^p)$ удовлетворяет следующему условию: для каждой однородной компоненты $H^{(k)}=((H^1)^{(k)}\ldots(H^p)^{(k)})\in\mathcal{J}^{(k)}$ найдется такая $k-1$-струя $\gamma=(\gamma^1\ldots\gamma^p)\in J_{k-1}$, что

$$(\rho_k-\rho_{k-q})\Big[\sum_{I,i}\bar{a}_I^{ij}\,\frac{\partial^{(I)}((H^i)^{(k)}-\gamma^i)}{\partial x_1^{I_1}\ldots\partial x_n^{I_n}}\Big]=0,\quad j=1,\ldots,n. \tag{6}$$

В частности, если $F_q\in\mathcal{J}^{(q)}$ – однородное отображение, то из равенства (6) вытекает

$$\sum_{I,i}\bar{a}_I^{ij}\,\frac{\partial^{(I)}(H^i)^{(k)}}{\partial x_1^{I_1}\ldots\partial x_n^{I_n}}=0,\ j=1,\ldots,n.$$

Поэтому справедливо

Следствие. Каждый формальный ряд $F(x)=F_q(x)+\ldots\in\hat{\mathcal{J}}_\ell(n,p)$ с однородной главной частью $F_q\in\mathcal{J}^{(q)}$ некоторым формальным преобразованием Φ можно привести к виду

$$F(\Phi(x))=F_q(x)+H(x),\ H\in\sum_{k=q+1}^{\infty}\mathcal{J}^{(k)},$$

где $H=(H^1\ldots H^p)$ удовлетворяет формальной системе уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами

$$\sum_{I,i}\bar{a}_I^{ij}\,\frac{\partial^{q-1}H^i}{\partial x_1^{I_1}\ldots\partial x_n^{I_n}}=0,\ j=1,\ldots,n,$$

в которой

$$\sum_I\bar{a}_I^{ij}x^I=\frac{\partial F_q^i(x)}{\partial x_j},\ i=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,n.$$

2. Группа $\mathcal{G}_c$. Здесь

$$(S'(F)\varphi)(x)=\varphi(Fx)-F'(x)\varphi(x)\quad(F\in J;\ \varphi\in T).$$

Если F_q - q -струя ряда F , то справедливо включение

$$S_k'(F_q)\Big(\sum_{i=k-q+1}^{k} T^{(i)} \cap \operatorname{Ker} S_{k-1}'(F_q)\Big) \subset S_k'(F \times \operatorname{Ker} S_{k-1}'(F)) .$$

Поэтому, как и в предыдущем случае, каждый формальный ряд $F(x)=F_q(x)+\ldots$ некоторым формальным преобразованием Φ можно привести к виду

$$(\Phi F \Phi^{-1})(x)=F_q(x)+H(x), \quad H \in \sum_{k=q+1}^{\infty} \mathcal{J}^{(k)},$$

где H удовлетворяет условиям

$$H^{(k)} \in \operatorname{Ker} L_k(F_q), \quad k=q+1, \ldots$$

Здесь $L_k(F_q)$ - оператор, сопряженный к сужению

$$S_k'(F_q): \sum_{i=k-q+1}^{k} T^{(i)} \cap \operatorname{Ker} S_{k-1}'(F_q) \longrightarrow \mathcal{J}^{(k)}.$$

Рассмотрим, в частности, q -струю вида

$$F_q(x)=\lambda x + R^{(q)}(x),$$

где λ - комплексное число, а $R^{(q)} \in \mathcal{J}^{(q)}$ - однородное отображение. Если λ не есть корень из единицы, то ряд $F=F_q+\ldots$ сопряжен в группе $\mathcal{G}_c$ со своей линейной частью (отсутствуют резонансы). Пусть теперь m - наименьшее из таких целых чисел, что $\lambda^m=1$. В этом случае мы будем считать, что $q-1$ не делится на m . Тогда, если $k=lm+1$ при некотором $l \geq 1$, то пространство $\operatorname{Ker} S_{k-1}'(F_q)$ содержит подпространство $T^{(k-q+1)}$. Оператор, сопряженный к сужению

$$A_k=S_k'(F_q): T^{(k-q+1)} \longrightarrow \mathcal{J}^{(k)},$$

имеет вид

$$(A_k^* \tau)^j(x)=\sum_{I,i} \bar{a}_I^{ij} \frac{\partial^{q-1} \tau^i(x)}{\partial x_1^{I_1} \ldots \partial x_n^{I_n}} - \sum_{I,i} \bar{a}_I^i x_i \frac{\partial^q \tau^j(x)}{\partial x_1^{I_1} \ldots \partial x_n^{I_n}}, \; j=1,\ldots,n,$$

где

$$R^{(q)}(x)=\Big\{\sum_I a_I^i x^I\Big\}_{i=1}^n ; \quad \frac{\partial R^{(q)}(x)}{\partial x_j}=\Big\{\sum_I a_I^{ij} x^I\Big\}_{i=1}^n , \; j=1,\ldots,n.$$

Итак, справедлива

Теорема 5. Каждый формальный ряд

$$F(x)=\lambda x+R^{(q)}(x)+\ldots\in\hat{J}_{\mathbb{C}}(n,n),\quad \lambda^m=1$$

некоторым формальным преобразованием Φ можно привести к виду

$$(\Phi F\Phi^{-1})(x)=\lambda x+R^{(q)}(x)+H(x),\ H\in\sum_{k=q+1}^{\infty}J^{(k)},$$

где $H=(H^1,\ldots,H^n)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\sum_{I,i}\bar{a}_I^{ij}\frac{\partial^{q-1}H^i(x)}{\partial x_1^{I_1}\ldots\partial x_n^{I_n}}=\sum_{I,i}\bar{a}_I^i x_i\frac{\partial^q H^j(x)}{\partial x_1^{I_1}\ldots\partial x_n^{I_n}},\ j=1,\ldots,n$$

и, кроме того, условиям

$$H^{(k)}=0\quad(k\neq lm+1).$$

3. Группа $\mathcal{G}_t$. Это группа обратимых формальных рядов $\Phi\in\hat{J}_{\mathbb{C}}(n,n)$, которая действует в пространстве $\hat{J}_{\mathbb{C}}(n,n)$ по правилу

$$(\Phi.F)(x)=\Phi'(x)F(\Phi^{-1}(x))\ (F\in\hat{J}_{\mathbb{C}}(n,n)).$$

Для этой группы

$$(S'(F)\varphi)(x)=F'(x)\varphi(x)-\varphi'(x)F(x)\ \ (F\in J,\varphi\in T).$$

С помощью вычислений, аналогичных сделанным выше, получается

Теорема 6. Каждую формальную систему уравнений

$$\frac{dx}{dt}=F_q(x)+\ldots,\ F_q\in J_q$$

некоторой формальной заменой переменных можно привести к виду

$$\frac{dx}{dt}=F_q(x)+H(x),\ H\in\sum_{k=q+1}^{\infty}J^{(k)},$$

где $H=(H^1\ldots H^n)$ удовлетворяет следующему условию: для каждой однородной компоненты $H^{(k)}=((H^1)^{(k)}\ldots(H^n)^{(k)})\in J^{(k)}$ найдется такая $k-1$ – струя $\gamma=(\gamma^1\ldots\gamma^n)\in J_{k-1}$, что

$$
(\rho_k - \rho_{k-q})\Big[\sum_{I,i} \bar{a}_I^{ij} \frac{\partial^{|I|}((H^i)^{(k)} - \gamma^i)}{\partial x_1^{I_1} \ldots \partial x_n^{I_n}}\Big] =
$$

$$
= (\rho_k - \rho_{k-q})\Big[\sum_{I,i} \bar{a}_I^{i} x_i \frac{\partial^{|I|}((H^j)^{(k)} - \gamma^j)}{\partial x_1^{I_1} \ldots \partial x_n^{I_n}}\Big], \; j = 1, \ldots, n.
$$

Здесь

$$
F_q^i(x) = \sum_I a_I^i x^I, \quad \frac{\partial F_q^i}{\partial x_j} = \sum_I a_I^{ij} x^I, \quad i, j = 1, \ldots, n.
$$

Следствие. Каждую формальную систему уравнений

$$
\frac{dx}{dt} = F_q(x) + \ldots
$$

с однородной главной частью $F_q \in \mathcal{J}^{(q)}$ некоторой формальной заменой переменных можно привести к виду

$$
\frac{dx}{dt} = F_q(x) + H(x), \quad H \in \sum_{k=q+1}^{\infty} \mathcal{J}^{(k)},
$$

где $H = (H^1 \ldots H^n)$ удовлетворяет системе уравнений

$$
\sum_{I,i} \bar{a}_I^{ij} \frac{\partial^{q-1} H^i(x)}{\partial x_1^{I_1} \ldots \partial x_n^{I_n}} = \sum_{I,i} \bar{a}_I^{i} x_i \frac{\partial^{q} H^i(x)}{\partial x_1^{I_1} \ldots \partial x_n^{I_n}}, \quad j = 1, \ldots, n,
$$

в которой

$$
F_q^i(x) = \sum_I a_I^i x^I, \quad \frac{\partial F_q^i}{\partial x_j} = \sum_I a_I^{ij} x^I, \quad i, j = 1, \ldots, n.
$$

Ростки аналитических отображений

Рассмотрим вопрос о существовании сходящегося преобразования к нормальной форме для ростка аналитического отображения с однородной главной частью. Для групп $\mathcal{G}_c$ и $\mathcal{G}_t$ этот вопрос связан со значительными техническими трудностями (малые знаменатели и т.д., см. [4] даже в случае линейной главной части Для группы $\mathcal{G}_r$ ситуация проще.

Теорема 7. Пусть $F:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^p,0)$ – росток аналитического отображения с однородной главной частью

$$F(x)=F_q(x)+\ldots,\ \left(F_q\in J^{(q)}\right).$$

Существует такое обратимое аналитическое преобразование координат $\Phi:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^p,0)$, что

$$F(\Phi(x))=F_q(x)+H(x),\ H(x)=o(\|x\|^q),$$

где $H(H^1\ldots H^n)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\sum_{I,i}\bar{a}_I^{ij}\frac{\partial^{q-1}H^i}{\partial x_1^{I_1}\ldots\partial x_n^{I_n}}=0,\quad j=1,\ldots,n,$$

в которой

$$\frac{\partial F_q^i(x)}{\partial x_j}=\sum_I a_I^{ij}x^I,\ i=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,n.$$

Пример. Пусть $x=(x_1\ldots x_n)\in\mathbb{C}^n$ и

$$F_q(x)=\left\{\sum_j a^{ij}x_j^q\right\}_{i=1}^p,\ q\geq 1.$$

Тогда каждое аналитическое отображение $F:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^p,0)$ с главной частью F_q некоторым аналитическим преобразованием координат $\Phi:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^n,0)$ можно привести к виду

$$F(\Phi(x))=F_q(x)+H(x),$$

где $H=(H^1\ldots H^p)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\sum_{i=1}^p\bar{a}^{ij}\frac{\partial^{q-1}H^i}{\partial x_j^{q-1}}=0,\quad j=1,\ldots,n. \tag{7}$$

В частности пусть $p=1,\ q=2$ и

$$F_2(x)=\sum_{i=1}^s x_i^2,$$

где $s\leq n$ – ранг квадратичной части. Тогда аналитическую функцию $F(x)=\sum^s x_i^2+\ldots$ аналитическим преобразованием координат $\Phi:(\mathbb{C}^n,0)\to$

$\longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ можно привести к виду

$$F(\Phi(x)) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 + H(x_{s+1}, \dots, x_n)$$

(см. [5], лемма 4.1). В самом деле, согласно (7),

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s.$$

При $s = n$ получаем аналитический вариант леммы Морса:

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

т.е. $H = 0$.

Доказательство теоремы 7. Будем искать преобразование координат $\Phi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ в виде

$$\Phi(x) = x + \varphi(x), \quad \varphi(x) = O(\|x\|^2).$$

Тогда для φ получим уравнение

$$F(x + \varphi(x)) = g(x)$$

или

$$F_q'(x)\varphi(x) = g(x) - \{f(x + \varphi(x)) - F_q(x) + F_q(x + \varphi(x)) - F_q'(x)\varphi(x)\}.$$

Будем последовательно искать производные $\varphi^{(k-q+1)} \in T^{(k-q+1)}$, $k = q+1, \dots$. Тогда последнее уравнение, которое мы рассматриваем как рекуррентную систему для последовательного нахождения производных $\varphi^{(k-q+1)}$ запишем в виде

$$A_k \varphi^{(k-q+1)} = g^{(k)} + R_k[\varphi^{(2)} \dots \varphi^{(k-q+1)}]. \tag{8}$$

Здесь

$$A_k : T^{(k-q+1)} \longrightarrow J^{(k)}(n, p) -$$

оператор, действующий по формуле

$$(A_k \varphi^{(k-q+1)})(x) = F_q'(x)\varphi^{(k-q+1)}(x).$$

Следует доказать, что значения производных, которые находятся из системы (8), удовлетворяют соответствующим оценкам. С этой целью отождествим пространство $T^{(k-q+1)}$ с пространством $J^{(k-q+1)}(n,n)$ однородных полиномиальных отображений φ: $(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^n,0)$. Тогда имеют место включения

$$T^{(k-q+1)}\subset J^{(2)}(n,n)\otimes J^{(k-q+1)}(n,1)$$

и

$$J^{(k)}(n,p)\subset J^{(q+1)}(n,p)\otimes J^{(k-q+1)}(n,1).$$

Оператор A_k естественным образом продолжается до некоторого оператора

$$\tilde{A}_k: J^{(2)}(n,n)\otimes J^{(k-q-1)}(n,n)\longrightarrow J^{(q+1)}(n,p)\otimes J^{(k-q-1)}(n,1)$$

так, что $\tilde{A}_k=A_{q+1}\otimes E$, где E – единичный оператор, При этом

$$Im\tilde{A}_k=ImA_{q+1}\otimes J^{(k-q-1)}(n,1),\ ImA_k=Im\tilde{A}_k\cap J^{(k)}(n,p).$$

Ортопроектор на образ

$$Q_k: J^{(k)}(n,p)\longrightarrow ImA_k$$

естественным образом продолжается до ортопроектора

$$\tilde{Q}_k: J^{(q+1)}(n,p)\otimes J^{(k-q-1)}(n,1)\longrightarrow Im\tilde{A}_k.$$

При этом $\tilde{Q}_k=Q_{q+1}\otimes E$. Запишем уравнение (8) в виде

$$A_k\varphi^{(k-q+1)}=g^{(k)}+Q_kR_k[\varphi^{(2)}\dots\varphi^{(k-q-1)}]+(E-Q_k)R_k[\varphi^{(2)}\dots\varphi^{(k-q-1)}].$$

Положим здесь

$$A_k\varphi^{(k-q+1)}=Q_kR_k[\varphi^{(2)}\dots\varphi^{(k-q-1)}] \qquad (9)$$

и

$$g^{(k)}=-(E-Q_k)R_k[\varphi^{(2)}\dots\varphi^{(k-q-1)}].$$

Тогда $g^{(k)}\in KerA_k^*$ и, следовательно, удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению. Пусть $A_{q+1}^{(-1)}$ – оператор, правый обратный на образе к оператору A_{q+1}. Тогда оператор

$$\tilde{A}_k^{(-1)} = A_{q+1}^{(-1)} \otimes E \quad (k \geq q+1)$$

является правым обратным на образе к оператору $\tilde{A}_k$. При этом

$$\|\tilde{A}_k^{(-1)}\| \leq \| A_{q+1}^{(-1)} \| = c,$$

где константа c не зависит от k. Сужение оператора $\tilde{A}_k^{(-1)}$ на подпространство $J^{(k)}(n,p)$ является правым обратным на образе к оператору A_k. Обозначим этот оператор через $A_k^{(-1)}$. Для решения уравнения (9) положим

$$\varphi^{(k-q+1)} = A_k^{(-1)} Q_k R_k [\varphi^{(2)} \dots \varphi^{(k-q-1)}].$$

Так как

$$\| A_k^{(-1)} \| \leq c, \quad \| Q_k \| \leq \| Q_{q+1} \|,$$

то доказательство теоремы завершается применением обычных мажорантных оценок (см. [6], с.233).

Литература

1. Белицкий Г.Р. О нормальных формах локальных отображений. – Успехи мат.наук, 1975, 30, вып. 1. 223 с.
2. Серр Ж.–П. Алгебры Ли и группы Ли. М., Мир, 1969. 375 с.
3. Leng S. Hilbert's nullstellensatz in infinite-dimensional space. – Proc. Amer. Math. Soc., 1952, N3, p. 407–410.
4. Брюно А.Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений. – Тр. Моск. мат. о-ва, 1971, 25, с.117–258.
5. Арнольд В.И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности. – Функцион.анализ, 1972, 6, №4, с.3–25.
6. Зигель К.Л. Лекции по небесной механике. М., Мир, 1969. 264 с.

УДК 517.974.5

А.Г. Брусенцев

О J–САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ ТИТЧМАРША – СИРСА

В статье определяются новые достаточные условия совпадения минимального L_m и максимального L_M операторов (по терминологии [1], J-самосопряженности L_m), порожденных в $L_2(R^n)$ дифференциальным выражением

$$L = (-\Delta)^m + Q(x) \tag{1}$$

с комплексным потенциалом $Q(x) \equiv p(x) + i r(x) \in C^{2m}(R^n)$.

Этому вопросу посвящено значительное количество работ (см., например, [2] – [7], в которых рассмотрены дифференциальные выражения и более общего, чем (1), вида. Однако обычно в этих работах отрицательная часть $Re\, Q(x) \equiv p(x)$, т.е. $p_-(x)$, подчинена условиям типа Титчмарша – Сирса, ограничивающим рост $p_-(x)$ при $|x| \to \infty$ независимо от поведения $Im\, Q(x) \equiv r(x)$. С другой стороны, В.Б.Лидским [8] впервые для случая $m = n = 1$ было показано, что оператор L_m является J-самосопряженным при некоторых условиях подчинения $p(x)$ мнимой части потенциала*. При этом $p_-(x)$ может расти значительно быстрее, чем это допускается условиями Титчмарша – Сирса. Настоящая статья и посвящена отысканию таких "отношений подчинения" между $p(x)$ и $r(x)$, гарантирующих J-самосопряженность L_m (1).

Для достаточно регулярных на бесконечности потенциалов $Q(x)$ налагаемые здесь условия подчинения менее ограничительны, чем в [5], [6], [8], [9] и, как показывают примеры, близки к необходимым.

1. <u>Определение 1.</u> Пару функций $\{f_1, f_2\} \subset C^1(R^n)$, $0 \le f_1 \le 1$, $f_2 \ge 1$ назовем слабо согласованной (или 0 – согласованной), если справедливы неравенства

$$f_1 |\nabla f_j| \le C f_2 f_j \qquad (j = 1, 2)^{**}. \tag{2}$$

Множество слабо согласованных пар обозначим через U_0.

<u>Определение 2.</u> Назовем пару функций f_1, f_2 k – согласованной при натуральном $k > 0$, если $\{f_1, f_2\} \in U_0$ и если найдется функция $\rho(x) \in C^k(R^n)$ такая, что:

а) $f_2(x) \le \rho(x) \to \infty \quad (|x| \to \infty)$;

б) $|D^\alpha \rho| / \rho f_2^{|\alpha|} \le b(x) f_1^{k-|\alpha|} \quad (|\alpha| = \overline{1,k})$,***

где $b(x)$ – такая ограниченная измеримая функция, что

$$\overline{\lim_{|x| \to \infty}}\, b(x) \le C \underline{\lim_{|x| \to \infty}}\, f_2^{-1}(x). \tag{3}$$

---

*Некоторые результаты в этом направлении для многомерного случая были затем получены в работах автора [5, 6], а для случая $m = n = 1$ – в работах Е.С.Биргера [9] и А.Г.Аленицына [10].

**Через C обозначаем положительную константу, значения кото- могут быть различны в разных формулах.

***Здесь и ниже полагаем $0^0 = 1$, т.е. всегда $f_1^0(x) \equiv 1$.

Множество k –согласованных пар функций обозначим через U_k. Очевидно, при $k=1,2,3,\ldots$ $U_k \subseteq U_{k-1}$.

Пример 1. Пусть функция $f(t) \in C^k(0,\infty)$ $(0 \le f(t) \le 1)$ удовлетворяет условиям

$$\left|\frac{d^j}{dt^j} f(t)\right| / f^{j-1}(t) \le C \quad (j=\overline{1,k}); \quad \int^{\infty} f^{k-1}(t)\,dt = \infty. \tag{4}$$

Тогда пара $\{f_1(x) \equiv f(|x|), f_2(x) \equiv 1\}$ – k – согласована. В сказанном нетрудно убедиться, положив

$$\rho(x) \equiv \int_0^{|x|} f^{k-1}(t)\,dt + 1 .$$

Пример 2. Пусть функция $1 \le r(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ принадлежит $C^k(R^n)$, и для некоторого $\chi \in [0, \frac{1}{k}]$ выполнены условия

$$|D^{\alpha} r(x)| = o(r^{1+\chi}(x)) \quad (|\alpha| = \overline{1,k}). \tag{5}$$

Тогда при каждом $0 < \vartheta \le 1$ пара функций

$$\{f_1 = \vartheta r^{-\frac{s-1}{k}}, \; f_2 \equiv r^{\frac{1}{k}}\} \qquad (k=2,3,\ldots)$$

является k –согласованной парой при $1 \le s \le \dfrac{(1-\chi)k}{k-1}$.

Действительно, слабая согласованность этой пары вытекает из (5). Отсюда же следует выполнение условий а), б) определения 2 с $\rho(x) \equiv r(x)$.

Лемма 1. Если пара функций f_1, f_2 слабо согласована, то при любом натуральном k справедливы неравенства

$$f_1 |\nabla(f_1^{k-j} f_2^j)| \le C f_1^{k-j} f_2^{j+1} \quad (j=\overline{0,k}). \tag{6}$$

Доказательство. Так как для x, при которых $f_1(x)=0$ неравенства (6) очевидны, можно считать $f_1(x)>0$. Поэтому неравенства (6) равносильны следующим:

$$|\nabla \ln(f_1^{k-j} f_2^j)| \le C f_2 f_1^{-1}. \tag{7}$$

В силу слабой согласованности f_1 и f_2 получим

$$|\nabla \ln f_1| \le C f_2 f_1^{-1}, \quad |\nabla \ln f_2| \le C f_2 f_1^{-1}.$$

Так как $\ln(f_1^{k-j}\cdot f_2^{j})=(k-j)\ln f_1+j\ln f_2$, то из последних двух неравенств получаем (7).

Лемма доказана.

2. На функциях $\varphi\in C_0^\infty(R^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$L_{\gamma,g}(\varphi,\varphi)=\int\{\gamma^{4m}(x)|\Delta^m\varphi|^2+g^{4m}(x)|\varphi|^2\}\,dx, \tag{8}$$

где $\gamma(x),\ g(x)\in C^1(R^n)$; $0\le\gamma(x)\le 1$; $g(x)\ge 1$.

Теорема 1. Если существует такая пара функций $\{\gamma,g\}\in U_{2m}$, что при некоторых $\varepsilon, K, N>0$ справедливо неравенство

$$\|L\varphi\|^2+K\|\varphi\|^2\ge\varepsilon L_{\gamma,g}(\varphi,\varphi),\ \varphi\in C_0^\infty(R^n,(N,\infty)),^{*} \tag{9}$$

то минимальный L_m и максимальный L_M операторы, отвечающие выражению L (1), совпадают, и для каждой функции $u(x)\in D_{L_M}$ сходятся интегралы

$$I_k^2[u]=\int_{R^n}\gamma^{2k}(x)g^{2(2m-k)}(x)|\nabla^k u|^2dx<\infty, \tag{10}$$

где $k=\overline{0,2m}$; $\nabla^{2p}=\Delta^p$; $\nabla^{2p+1}=\nabla\Delta^p$.

Теорема 1 – результат в духе работ [2 – 4, 6]. Отличительной его чертой является возможность вырождения "формы сравнения" $L_{\gamma,g}$ как на бесконечности $(\gamma(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0)$, так и на конечном расстоянии. Аналогичные теоремы работ [2 – 4, 6] в случае равномерно эллиптического выражения (1) такого вырождения не допускают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при условиях теоремы 1 для $u\in D_{L_M}$ сходятся интегралы (10). Введем выражения

$$I_j^2(\tau)=\int_{R^n}\varphi_j^2(x,\tau)|\nabla^j u|^2dx\quad (j=\overline{0,2m}),$$

где

$$\varphi_j(x,\tau)=\gamma^j(x)g^{2m-j}(x)\left(1-\frac{\rho(x)}{\tau}\right)_+^{2m+j},$$

а $\rho(x)$ – функция, фигурирующая в определении $2m$-согласованности $\{\gamma(x),g(x)\}$.

---

*Здесь и ниже $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(R^n)$, $C_0^\infty(R^n,(N,\infty))$ – множество функций из $C_0^\infty(R^n)$ с носителями вне шара $\{x:|x|\le N\}$.

Так как $\{\gamma, g\} \in U_{2m}$, то в силу леммы 1 получим неравенство

$$|\nabla \varphi_j| \leq C \varphi_{j-1},$$

откуда с помощью интегрирования по частям (ср. [4], лемма 3.3) находим, что при некоторых $a_j, b_j \geq 0$

$$I_j^2 \leq a_j I_{j-1} I_{j+1} + b_j I_{j-1} I_j \quad (j=\overline{1, 2m-1}). \tag{11}$$

Из этой системы неравенств следует (см. [4]), что для каждого $1 \leq j \leq 2m-1$ справедливо, по крайней мере, одно из соотношений:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{I_j(\tau_k)}{I_m(\tau_k)} = 0; \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{I_j(\tau_k)}{I_0(\tau_k)} < \infty. \tag{12}$$

Отсюда нетрудно получить, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $C(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$I_j^2 \leq \varepsilon I_{2m}^2 + C(\varepsilon) I_0^2 . \tag{13}$$

Далее нам понадобится формула Лейбница

$$\Delta^m (u \cdot v) = \sum_{k=0}^{2m} \binom{k}{2m} (\nabla^k u, \nabla^{2m-k} v),$$

где скобки (., .) означают скалярное произведение или просто произведение в зависимости от того, нечетное или четное k. Используя эту формулу, получаем для $\psi \in C_0^{2m}(R^n)$, $u \in D_{L_M}$

$$\|L(\psi u)\|^2 = \|\psi L u + \sum_{j=1}^{2m} \binom{j}{2m} (\nabla^j \psi, \nabla^{2m-j} u)\|^2 \leq$$

$$\leq 2\|\psi L u\| + 2 \sum_{j=1}^{2m} \binom{j}{2m} \|(\nabla^j \psi, \nabla^{2m-j} u)\|^2.$$

Подставляя вместо ψ функцию

$$\psi(x, \tau) = \left(1 - \frac{\rho(x)}{\tau}\right)_+^{4m} \tag{14}$$

и используя соотношение б) определения 2, получаем:

$$\|L(\psi u)\|^2 \le C(\|Lu\|^2 + \sum_{p=0}^{2m-1} I_{pb}^2(\tau)), \qquad (15)$$

где

$$I_{pb}^2(\tau) = \int_{R^n} b^2(x)\varphi_p^2(x,\tau)|\nabla^p u|^2\,dx.$$

С другой стороны оценим снизу $\mathcal{L}_{\gamma,g}(\psi u, \psi u)$, где ψ определена в (14), и получим

$$\mathcal{L}_{\gamma,g}(\psi u, \psi u) \ge [I_{2m}^2(\tau) + \int_{R^n} g^{4m}(1-\frac{\rho}{\tau})_+^{8m}|u|^2\,dx] - $$
$$- C\sum_{p=0}^{2m-1} I_{pb}^2(\tau).$$

Отсюда в силу условия $\rho(x) \ge g(x)$ и леммы 4.1 из работы [4, с.123] получаем для некоторой последовательности чисел $0 < \tau_k \to \infty$

$$\mathcal{L}_{\gamma,g}(\psi(x,\tau_k)u(x), \psi(x,\tau_k)u(x)) \ge I_{2m}^2(\tau_k) + I_0^2(\tau_k) - C\sum_{p=0}^{2m-1} I_{pb}^2(\tau_k).$$

Отсюда и из неравенств (9), (15) вытекает, что

$$I_{2m}^2(\tau_k) + I_0^2(\tau_k) \le C[\sum_{p=0}^{2m-1} I_{pb}^2(\tau_k) + 1]. \qquad (16)$$

В случае, когда $g(x)$ неограничена, согласно условию (3) определения $2b(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. При этом, если $I_p(\tau_k) \underset{k\to\infty}{\to} \infty$, то $I_{pb}(\tau_k) = o(I_p(\tau_k))$. Поэтому предположив, что последовательность $\{I_p(\tau_k)\}_{k=1}^{\infty}$ неограничена, в силу неравенства (13) получим противоречие с неравенством (16). Таким образом, $\overline{\lim}\, I_p(\tau_k) < \infty$ $(p=\overline{0,2m})$. При ограниченной функции $g(x)$, так как $I_0^2(\tau_k) \overset{k\to\infty}{\ge} C\|u\|^2$, неравенство (16) в силу соотношений (12) также приводит к ограниченности $I_p(\tau_k)$, из которой вытекает сходимость интегралов (10).

Основываясь на конечности этих интегралов, покажем, что $L_m = L_M$. Действительно, при $u \in \overset{o}{D}_{L_M}$

$$\varphi(x,\tau)u(x) \equiv [1 - (\frac{\rho(x)}{\tau})^{\frac{1}{\sqrt{\ln\tau}}}]_+^{2m} u(x) \in \overset{o}{D}_{L_M},$$

$$\varphi(x,\tau)u(x) \xrightarrow{L_2(R^n)} u(x) \quad (\tau \to \infty).$$

Здесь $\rho(x)$ – функция, сопоставленная паре $\{\gamma, g\}$ согласно определению 2. Учитывая это, получим

$$\|L(\varphi u)-L_M u\|^2 \le \|\varphi L_M u - L_M u\|^2 + C\|\sum_{j=1}^{2m} |\nabla^j \varphi(x,\tau)| |\nabla^{2m-j} u|\|^2 \le$$
$$\le \|\varphi L_M u - L_M u\|^2 + \frac{C}{\sqrt{\ln \tau}} \sum_{j=0}^{2m-1} I_j^2[u].$$

Отсюда $\| L(\varphi u) - L u\| \longrightarrow 0$ при $\tau \to \infty$, т.е. доказано, что $L_m = L_M$.

3. Укажем условия на потенциал $Q(x)$, достаточные для выполнения неравенства (9)

Теорема 2.

1. Пусть существует такая пара функций $\{\gamma, g\} \in U_{2m}$, что потенциал $Q(x)$ удовлетворяет соотношениям:

1) $1+\gamma^{2m}(x)|Q(x)| \ge \varepsilon g^{2m}(x) \quad (\varepsilon = const > 0)$;

2) $(1+\gamma^{4m})^{1/2}|\rho| \le (A+|Q|^2)^{1/2} \quad (A = const > 0)$;

3) $|\nabla r| = o(\gamma^{4m}(1+|Q|)^{\frac{2m+1}{2m}}) \quad (|x| \to \infty)$;

4) $|\nabla \rho| = o((1+|Q|)^{\frac{2m+1}{2m}})$.

Тогда оператор L_m J-самосопряжен $(L_m = L_M)$.

2. Теорема остается в силе при замене условия 2) менее ограничительным неравенством

2) $(1+\gamma^{4m})^{1/2}\rho \ge -(A+|Q|^2)^{1/2}$,

если дополнительно выполнено условие

5) $|\nabla \rho_+| = o(\gamma^{4m}(1+|Q|)^{\frac{2m+1}{2m}})$*.

Прежде чем доказывать теорему 2, приведем примеры потенциалов, удовлетворяющих ее условиям и не подпадающих под известные признаки J-самосопряженности.

Пример 1. Оператор L_m, отвечающий выражению

$$L = (-\Delta)^m + \{-h(1+|x|^2)^{s/2} + i(1+|x|^2)^{1/2}\}$$

---

* $\nabla\rho_+(x) = \nabla\rho(x)$ при $\rho(x) > 0$; $\nabla\rho_+(x) = 0$ при $\rho(x) \le 0$. $\rho_+(x) \in W_{2loc}^1(R^n)$.

J-самосопряжен при любых $l, h \geq 0$, если

$$s < \frac{2m(l+1)^{*}}{2m-1}.$$

Проверка условий 1)–4) теоремы 2 с $\gamma(x) \equiv \min\{1, h^{-1}\} \times (1+(x)^2)^{\frac{l-s}{4m}}$, $g(x) \equiv (1+|x|^2)^{\frac{l}{4m}}$ при $s > l$ и с $\gamma(x) \equiv 1$ и тем же $g(x)$ при $s \leq l$ не представляет труда; $2m$-согласованность указанных пар $\{\gamma, g\}$ проверяется непосредственно, если взять $\rho(x) = (1+|x|^2)^{l/4m}$ при $l > 0$ и $\rho(x) = \ln(1+|x|^2)$ при $l = 0$.

Замечание 1. Если $l > 0$, то оператор L_m примера 1 может не быть J-самосопряженным уже при $s = \frac{2m(l+1)}{2m-1}$. Так, в случае $m = n = 1$, $s = 2l+2$ $L_m \neq L_M$ при $h > \frac{4}{l^2}$, поскольку в этом случае все решения уравнения $Lu = 0$ принадлежат $L_2(-\infty, \infty)$. Последнее нетрудно доказать с помощью леммы 2 из работы [2].

Пример 2. Если функция $r(x) \in C^{2m}(R^n)$ такова, что $1 \leq r(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ и удовлетворяет условиям (5) при $k = 2m$, $\varkappa \in [0, \frac{1}{2m}]$, то оператор L_m, отвечающий выражению

$$L = (-\Delta)^m + (-hr^s + ir) \ (h = const > 0),$$

J-самосопряжен при $s \leq \dfrac{(1-\varkappa)2m}{2m-1}$.

Действительно, при сделанных предположениях нетрудно проверить выполнение условий 1)–4) теоремы 2 с $\gamma(x) \equiv \min\{1, h^{-1}\} r^{-\frac{s-1}{2m}}$, $g(x) \equiv r^{1/2m}$ при $s > 1$, с $\gamma \equiv 1$ и тем же $g(x)$ при $s < 1$. Выше доказана $2m$-согласованность соответствующих пар $\{\gamma, g\}$.

Замечание 2. Оператор L_m примера 2 может не быть J-самосопряженным при $s = \frac{2m}{2m-1}$, даже если условия (5) на $r(x)$ выполнены при любом $\varkappa > 0$. Например, при $m = n = 1$, $s = 2$, когда $r(x) = e^{|x|} \times (|x| \geq 1)$, $L_m \neq L_M$, если h достаточно велико. В этом же случае, когда $r(x) = e^{x^2}$, $L_m \neq L_M$ при любом $h > 0$. Справедливость замечания 2 вытекает из асимптотических формул для решений уравнения $-\frac{d^2u}{dx^2} + Q(x)u = 0$, приведенных в [10].

<u>Следствие</u>. Пусть функция $f(t) \in C^{2m}(0, \infty)$, $(0 \leq f(t) \leq 1)$ удовлетворяет условиям (4) с $k = 2m$, а потенциал $Q(x)$ – соотношениям

$$f^{2m}(|x|)/\rho(x)| = O(1+|r|); \tag{17}$$

---

*При $l = 0$ J-самосопряженность имеет место при $s = \frac{2m(l+1)}{2m-1}$.

$$|\nabla p(x)| = O((1+|Q|)^{\frac{2m+1}{2m}}); \tag{18}$$

$$|\nabla r(x)| = o(f^{4m}(|x|)(1+|Q|)^{\frac{2m+1}{2m}}). \tag{19}$$

Тогда оператор $L_m J$–самосопряжен.

Доказательство следствия. Проверим выполнение условий 1)–4) теоремы 2 с $g(x)\equiv 1$, $\gamma(x)\equiv \theta f(|x|)$, где $0<\theta\leq 1$. Условия 3), 4) совпадают с (19), (18), условие 1) очевидно; а $2m$ – согласованность пары $\{\theta f(|x|), 1\}$ установлена выше. Осталось проверить 2), которое выполнено вследствие (17), если положить $\theta^{4m} = \min[\frac{1}{2}M^{-2}, 1]$, где $M = \sup\{(1+|r|)^{-1} f^{2m}|p|\}$. Действительно, $(p^2+r^2+1)^{1/2} \geq (p^2+\frac{1}{2}(1+|r|^2)^{x})^{1/2} \geq (p^2+\frac{1}{2}M^{-2}p^2 f^{4m})^{1/2} \geq |p|(1+\theta^{4m}f^{4m})^{1/2}$. Следствие доказано. Это следствие для случая $m=n=1$ дает результат, близкий к упомянутой выше теореме 3 из работы [8].

Доказательство теоремы 2. Докажем сначала справедливость неравенства (9) при условиях варианта 1 теоремы 2. Воспользуемся тождеством

$$\|(-\Delta)^m\varphi + Q\varphi\|^2 = \|\Delta^m\varphi\|^2 + \|Q\varphi\|^2 + 2\mathrm{Re}\int_{R^n} p[(-\Delta)^m\varphi]\times$$

$$\times\bar\varphi\,dx + \sum_{l+p=2m-1} C_{lp}\int_{R^n}(\nabla r, \nabla^l\varphi_1\nabla^p\varphi_2)\,dx, \tag{20}$$

где C_{lp} – некоторые целочисленные константы, $\varphi_1 = \mathrm{Re}\,\varphi$, $\varphi_2 = \mathrm{Im}\,\varphi$. Обозначая $(1+\gamma^{4m}(x))^{-1/2}$ через $\theta(x)$ и учитывая условия 2), 3), получаем

$$\|[(-\Delta)^m + Q(x)]\varphi\|^2 + K\|\varphi\|^2 \geq \|\Delta^m\varphi\|^2 + \|Q\varphi\|^2 + K\|\varphi\|^2 -$$

$$-2\int\theta(x)(A+|Q|^2)^{1/2}|\Delta^m\varphi||\varphi|\,dx - C\int\sum_{l+s=2m-1} b(x)\gamma^{4m}(x)(A+$$

$$+|Q|^2)^{\frac{2m+1}{4m}}|\nabla^l\varphi||\nabla^s\varphi|\,dx,$$

где $b(x)\to 0$ $(|x|\to\infty)$. Положим теперь $K=1+A$ и обозначим для краткости $(A+|Q|^2)^{1/2} = V(x)$. Так как при $s+l=2m-1$

$$V^{\frac{2m+1}{2m}} = V^{\frac{2m-s}{2m}}\cdot V^{\frac{2m-l}{2m}},$$

то с помощью неравенства Буняковского–Шварца получим

$$\|(-\Delta)^m\varphi + Q\varphi\|^2 + K\|\varphi\|^2 \geq \|\Delta^m\varphi\|^2 - 2\int \theta(x)V(x)|\Delta^m\varphi| \times$$

$$\times|\varphi|dx + \|V\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2 - C\sum_{l=0}^{2m-1} I_{lb}^2[\varphi], \tag{21}$$

где

$$I_{lb}^2[\varphi] = \int_{R^n} b(x)\gamma^{4m}(x)\, V^{\frac{2m-l}{2m}}(x)|\nabla^l\varphi|^2\,dx. \tag{22}$$

Оценим снизу сумму первых трех слагаемых в правой части неравенства (21). Для этого заметим, что

$$|\Delta^m\varphi|^2 - 2\theta(x)|\Delta^m\varphi|\,V|\varphi| + V^2|\varphi|^2 =$$

$$= \theta(x)[|\Delta^m\varphi|^2 - V|\varphi|]^2 + \frac{(1+\gamma^{4m})^{1/2}-1}{(1+\gamma^{4m})^{1/2}}[|\Delta^m\varphi|^2 +$$

$$+ V^2|\varphi|^2] \geq \varepsilon\gamma^{4m}[|\Delta^m\varphi|^2 + V^2|\varphi|^2].$$

Отсюда и из (21) вытекает неравенство

$$\|(-\Delta)^m\varphi + Q\varphi\|^2 + K\|\varphi\|^2 \geq \varepsilon\int_{R^n}\gamma^{4m}[|\Delta^m\varphi|^2 + V^2\times$$

$$\times|\varphi|^2]dx + \|\varphi\|^2 - C\sum_{l=0}^{2m-1} I_{lb}^2[\varphi]. \tag{23}$$

Покажем, что из последнего неравенства для $\varphi\in C_0^\infty(R^n_?(N,\infty))$ при некотором $N>0$ следует оценка

$$\|L\varphi\|^2 + K\|\varphi\|^2 \geq \varepsilon\{\int_{R^n}\gamma^{4m}[|\Delta^m\varphi|^2 + V^2|\varphi|^2]dx + \|\varphi\|^2\}, \tag{24}$$

из которой в силу условия 1) вытекает неравенство (9) и утверждение варианта 1 теоремы 2. Для доказательства неравенства (24) заметим, что величины

$$\hat{I}_s^2[\varphi] = \int_{R^n}(1+\gamma V^{\frac{1}{2m}})^{2(2m-s)}\gamma^{2s}|\nabla^s\varphi|^2\,dx$$

удовлетворяют (если положить $I_j = \hat{I}_j[\varphi]$) системе неравенств (11) с константами $a_j, b_j \geq 0$, не зависящими от $\varphi\in C_0^\infty(R^n)$. Действительно, пара функций $\{\gamma,\ 1+\gamma V^{\frac{1}{2m}}\}\in U_0$, так как неравенства (2) при $f_1 = \gamma$, $f_2 = 1+\gamma V^{\frac{1}{2m}}$ следуют из условий 1), 3), 4) теоремы 2, а также из включения $\{\gamma, g\}\in U_0$. Поэтому в силу леммы 1 справедливы неравенства

$$|\nabla[(1+\gamma V^{\frac{1}{2m}})^{2m-s}\gamma^{s}]|\le C(1+\gamma V^{\frac{1}{2m}})^{2m-s+1}\gamma^{s-1},\ (s=1,\dots 2m),$$

откуда с помощью интегрирования по частям в выражении для $\hat{I}_s^2[\varphi]$ получим систему неравенств (11). Из этой системы, как упомянуто выше, при некотором $\varepsilon>0$ вытекают неравенства

$$\hat{I}_s^2[\varphi]\le\varepsilon\hat{I}_{2m}^2[\varphi]+C(\varepsilon)\hat{I}_0^2[\varphi]\quad(s=\overline{1,2m-1}).$$

Используя их, а также то, что $b(x)$ в выражении для $I_{sb}^2[\varphi]$ (22) стремится к нулю при $|x|\to\infty$, получаем для $\varphi\in C_0^\infty(R^n,(N,\infty))$

$$\sum_{s=0}^{2m-1} I_{sb}^2[\varphi]\le\varepsilon_N\{\hat{I}_{2m}^2[\varphi]+\hat{I}_0^2[\varphi]\}, \tag{25}$$

где $\varepsilon_N\to 0$ при $N\to\infty$.

Так как $\gamma^{4m}V^2+1\ge\varepsilon(1+\gamma V^{\frac{1}{2m}})^{4m}$ при некотором $\varepsilon>0$, то, выбирая достаточно большое $N>0$, из неравенств (23), (25) получаем неравенство (24) для $\varphi\in C_0^\infty(R^n,(N,\infty))$.

Тем самым вариант 1 теоремы 2 доказан. Вариант 2 доказывается точно также, но в основе оценок лежит вместо (20) тождество

$$\begin{aligned}\|(-\Delta)^m\varphi+Q\varphi\|^2&=\|\Delta^m\varphi\|^2+\|Q\varphi\|^2+2\mathrm{Re}\int_{R^n}\rho_-[(-\Delta)^m\varphi]\bar{\varphi}dx+\\&+2\int_{R^n}\rho_+|\nabla^m\varphi|^2dx+\sum_{l+p=2m-1}C_{lp}\int_{R^n}(\nabla r,\nabla^l\varphi_1\nabla^p\varphi_2)dx+\\&+\sum_{\substack{l+p=2m-1\\ j=1,2}}C_{lpj}\int_{R^n}(\nabla\rho_+,\nabla^l\varphi_j\nabla^p\varphi_j)dx\end{aligned} \tag{26}$$

с некоторыми целочисленными константами C_{lp}, C_{lpj}. Если $\rho_+(x)\in C^m(R^n)$, в справедливости этого тождества нетрудно убедиться, исходя из (20) с помощью интегрирования по частям. В общем случае оно выводится с помощью предельного перехода. Пусть $Q_\varepsilon=\rho_-+S_\varepsilon\rho_++ir$, где $S_\varepsilon\rho_+$ – усреднение ρ_+ (см. [11], с.39) с бесконечногладким ядром $\omega_\varepsilon(|x-y|)$. Тождество (26) справедливо при замене Q на Q_ε и ρ_+ на $S_\varepsilon\rho_+$. При $\varepsilon\to 0$ приходим к искомому результату.

Теорема 2 доказана.

В заключение отметим, что аналогичные результаты можно получить и для эллиптических выражений более общего, чем (1), вида.

Литература

1. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., Физматгиз, 1963. 339 с.
2. Рофе-Бекетов Ф.С. О неполуограниченных дифференциальных операторах. – Теория функций, функцион.анализ, 1966, вып.2, с.178-184.
3. Рофе-Бекетов Ф.С., Холькин А.М. Условия самосопряженности операторов эллиптического типа второго порядка общего вида. – Теория функций, функцион.анализ, 1973, вып 17, с.41-51.
4. Брусенцев А.Г., Рофе-Бекетов Ф.С. Условия самосопряженности сильно эллиптических систем произвольного порядка. – Мат.сб., 1974, 95, № 1, с.108-129
5. Брусенцев А.Г. Некоторые вопросы качественного спектрального анализа несамосопряженных эллиптических систем произвольного порядка. – Мат.физика и функцион.анализ, 1973, вып.4,с.93-116.
6. Брусенцев А.Г. О спектре несамосопряженных эллиптических систем произвольного порядка.–Диференц.уравнения, 1976, 12, №6, с.1040-1051.
7. Шевченко В.И. О совпадении минимального и максимального операторов, порожденных дифференциальным выражением высокого порядка. – Теория функций, функцион.анализ, 1975, вып. 23, с.142-150.
8. Лидский В.Б. Несамосопряженный оператор Штурма-Лиувилля с дискретным спектром. – Тр. Моск. мат. о-ва, 1960, 9,с.45-80.
9. Биргер Е.С. О несамосопряженном операторе $-y''+p(x)y$ на оси $(-\infty,\infty)$ – Докл. АН СССР, 1970, 192, №4, с.711-713.
10. Аленицын А.Г. О возмущении несамосопряженного оператора Шредингера с дискретным спектром. – Пробл. мат.физики, 1974, вып.7, с.8-21.
11. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К., Наук.думка, 1965. 798 с.

УДК 513.88:517:519

В.Я.Голодец

АСИМПТОТИЧЕСКИ АБЕЛЕВЫЕ W^*-АЛГЕБРЫ

В настоящей статье изучаются асимптотически абелевые W^*-алгебры с помощью асимптотических алгебр, введенных в /1-3/. В работе /3/ были рассмотрены примеры асимптотически абелевых неймановских алгебр M типа III относительно некоторой группы автомор-

$$L = (-\Delta)^m + Q(x) \qquad (1)$$

с комплексным потенциалом $Q(x) \equiv p(x) + ir(x) \in C^{2m}(R^n)$.

Этому вопросу посвящено значительное количество работ (см., например, [2] – [7], в которых рассмотрены дифференциальные выражения и более общего, чем (1), вида. Однако обычно в этих работах отрицательная часть $Re\,Q(x) \equiv p(x)$, т.е. $p_-(x)$, подчинена условиям типа Титчмарша – Сирса, ограничивающим рост $p_-(x)$ при $|x| \to \infty$ независимо от поведения $Im\,Q(x) \equiv r(x)$. С другой стороны, В.Б.Лидским [8] впервые для случая $m=n=1$ было показано, что оператор L_m является J –самосопряженным при некоторых условиях подчинения $p(x)$ мнимой части потенциала*. При этом $p_-(x)$ может расти значительно быстрее, чем это допускается условиями Титчмарша – Сирса. Настоящая статья и посвящена отысканию таких "отношений подчинения" между $p(x)$ и $r(x)$, гарантирующих J –самосопряженность L_m (1).

Для достаточно регулярных на бесконечности потенциалов $Q(x)$ налагаемые здесь условия подчинения менее ограничительны, чем в [5], [6], [8], [9] и, как показывают примеры, близки к необходимым.

1. Определение 1. Пару функций $\{f_1, f_2\} \subset C^1(R^n)$, $0 \le f_1 \le 1$, $f_2 \ge 1$ назовем слабо согласованной (или 0 – согласованной), если справедливы неравенства

$$f_1 |\nabla f_j| \le C f_2 f_j \qquad (j = 1, 2)^{**}. \qquad (2)$$

Множество слабо согласованных пар обозначим через U_0.

Определение 2. Назовем пару функций f_1, f_2 k – согласованной при натуральном $k>0$, если $\{f_1, f_2\} \in U_0$ и если найдется функция $\rho(x) \in C^k(R^n)$ такая, что:

а) $f_2(x) \le \rho(x) \to \infty \quad (|x| \to \infty)$;

б) $|D^\alpha \rho| / \rho f_2^{|\alpha|} \le b(x) f_1^{k-|\alpha|} \quad (|\alpha| = \overline{1,k})$,***

где $b(x)$ – такая ограниченная измеримая функция, что

$$\overline{\lim_{|x| \to \infty}}\, b(x) \le C \,\underline{\lim}_{|x| \to \infty}\, f_2^{-1}(x). \qquad (3)$$

---

*Некоторые результаты в этом направлении для многомерного случая были затем получены в работах автора [5, 6], а для случая $m=n=1$ – в работах Е.С.Биргера [9] и А.Г.Аленицына [10].

**Через C обозначаем положительную константу, значения которой могут быть различны в разных формулах.

***Здесь и ниже полагаем $0^0=1$, т.е. всегда $f_1^0(x) \equiv 1$.

Множество k-согласованных пар функций обозначим через U_k. Очевидно, при $k=1,2,3,\ldots$ $U_k \subseteq U_{k-1}$.

П р и м е р 1. Пусть функция $f(t)\in C^k(0,\infty)$ $(0\le f(t)\le 1)$ удовлетворяет условиям

$$\left|\frac{d^j}{dt^j} f(t)\right| f^{j-1}(t)\le C \quad (j=\overline{1,k}); \quad \int^{\infty} f^{k-1}(t)dt=\infty. \qquad (4)$$

Тогда пара $\{f_1(x)\equiv f(|x|), f_2(x)\equiv 1\}$ - k - согласована. В сказанном нетрудно убедиться, положив

$$\rho(x)\equiv \int_0^{|x|} f^{k-1}(t)dt+1 .$$

П р и м е р 2. Пусть функция $1\le r(x)\to\infty$ $(|x|\to\infty)$ принадлежит $C^k(R^n)$, и для некоторого $\chi\in[0, \frac{1}{k}]$ выполнены условия

$$|D^\alpha r(x)|=o(r^{1+\chi}(x)) \quad (|\alpha|=\overline{1,k}). \qquad (5)$$

Тогда при каждом $0<\vartheta\le 1$ пара функций

$$\{f_1\equiv\vartheta r^{-\frac{s-1}{k}}, f_2\equiv r^{\frac{1}{k}}\} \qquad (k=2,3,\ldots)$$

является k -согласованной парой при $1\le s\le \dfrac{(1-\chi)k}{k-1}$.

Действительно, слабая согласованность этой пары вытекает из (5). Отсюда же следует выполнение условий а), б) определения 2 с $\rho(x)\equiv r(x)$.

Лемма 1. Если пара функций f_1, f_2 слабо согласована, то при любом натуральном k справедливы неравенства

$$f_1|\nabla(f_1^{k-j} f_2^j)|\le C f_1^{k-j} f_2^{j+1} \quad (j=\overline{0,k}). \qquad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как для x, при которых $f_1(x)=0$ неравенства (6) очевидны, можно считать $f_1(x)>0$. Поэтому неравенства (6) равносильны следующим:

$$|\nabla \ln(f_1^{k-j} f_2^j)|\le C f_2 f_1^{-1}. \qquad (7)$$

В силу слабой согласованности f_1 и f_2 получим

$$|\nabla \ln f_1|\le C f_2 f_1^{-1}, \quad |\nabla \ln f_2|\le C f_2 f_1^{-1}.$$

Так как $\ln(f_1^{k-j}\cdot f_2^{j})=(k-j)\ln f_1+j\ln f_2$, то из последних двух неравенств получаем (7).

Лемма доказана.

2. На функциях $\varphi\in C_0^\infty(R^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$L_{\gamma,g}(\varphi,\varphi)=\int\{\gamma^{4m}(x)|\Delta^m\varphi|^2+g^{4m}(x)|\varphi|^2\}\,dx, \tag{8}$$

где $\gamma(x),\ g(x)\in C^1(R^n);\ 0\le\gamma(x)\le 1;\ g(x)\ge 1.$

Теорема 1. Если существует такая пара функций $\{\gamma,g\}\in U_{2m}$, что при некоторых $\varepsilon, K, N>0$ справедливо неравенство

$$\|L\varphi\|^2+K\|\varphi\|^2\ge\varepsilon L_{\gamma,g}(\varphi,\varphi),\ \varphi\in C_0^\infty(R^n,(N,\infty))^{*}, \tag{9}$$

то минимальный L_m и максимальный L_M операторы, отвечающие выражению L (1), совпадают, и для каждой функции $u(x)\in D_{L_M}$ сходятся интегралы

$$I_k^2[u]=\int_{R^n}\gamma^{2k}(x)g^{2(2m-k)}(x)|\nabla^k u|^2dx<\infty, \tag{10}$$

где $k=\overline{0,2m};\ \nabla^{2p}=\Delta^p;\ \nabla^{2p+1}=\nabla\Delta^p.$

Теорема 1 – результат в духе работ [2 – 4, 6]. Отличительной его чертой является возможность вырождения "формы сравнения" $\mathcal{L}_{\gamma,g}$ как на бесконечности $(\gamma(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0)$, так и на конечном расстоянии. Аналогичные теоремы работ [2 – 4, 6] в случае равномерно эллиптического выражения (1) такого вырождения не допускают.

Доказательство. Покажем, что при условиях теоремы 1 для $u\in D_{L_M}$ сходятся интегралы (10). Введем выражения

$$I_j^2(\tau)=\int_{R^n}\varphi_j^2(x,\tau)|\nabla^j u|^2dx\quad(j=\overline{0,2m}),$$

где

$$\varphi_j(x,\tau)=\gamma^j(x)g^{2m-j}(x)\left(1-\frac{\rho(x)}{\tau}\right)_+^{2m+j},$$

а $\rho(x)$ – функция, фигурирующая в определении $2m$-согласованности $\{\gamma(x),g(x)\}$.

---

*Здесь и ниже $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(R^n)$, $C_0^\infty(R^n,(N,\infty))$ – множество функций из $C_0^\infty(R^n)$ с носителями вне шара $\{x:|x|\le N\}$.

Так как $\{\gamma, g\} \in U_{2m}$, то в силу леммы 1 получим неравенство

$$|\nabla \varphi_j| \le C \varphi_{j-1},$$

откуда с помощью интегрирования по частям (ср. [4], лемма 3.3) находим, что при некоторых $a_j, b_j \ge 0$

$$I_j^2 \le a_j I_{j-1} I_{j+1} + b_j I_{j-1} I_j \quad (j = \overline{1, 2m-1}). \tag{11}$$

Из этой системы неравенств следует (см. [4]), что для каждого $1 \le j \le 2m-1$ справедливо, по крайней мере, одно из соотношений:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{I_j(\tau_k)}{I_m(\tau_k)} = 0; \quad \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{I_j(\tau_k)}{I_0(\tau_k)} < \infty. \tag{12}$$

Отсюда нетрудно получить, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $C(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$I_j^2 \le \varepsilon I_{2m}^2 + C(\varepsilon) I_0^2 . \tag{13}$$

Далее нам понадобится формула Лейбница

$$\Delta^m (u \cdot v) = \sum_{k=0}^{2m} \binom{k}{2m} (\nabla^k u, \nabla^{2m-k} v),$$

где скобки (., .) означают скалярное произведение или просто произведение в зависимости от того, нечетное или четное k. Используя эту формулу, получаем для $\psi \in C_0^{2m}(R^n)$, $u \in D_{L_M}$

$$\|L(\psi u)\|^2 = \|\psi L u + \sum_{j=1}^{2m} \binom{j}{2m} (\nabla^j \psi, \nabla^{2m-j} u)\|^2 \le$$

$$\le 2\|\psi L u\| + 2 \sum_{j=1}^{2m} \binom{j}{2m} \|(\nabla^j \psi, \nabla^{2m-j} u)\|^2 .$$

Подставляя вместо ψ функцию

$$\psi(x, \tau) = \left(1 - \frac{\rho(x)}{\tau}\right)_+^{4m} \tag{14}$$

и используя соотношение б) определения 2, получаем:

$$\| L(\psi u)\|^2 \leq C(\|Lu\|^2 + \sum_{p=0}^{2m-1} I_{pb}^2(\tau)), \qquad (15)$$

где

$$I_{pb}^2(\tau) = \int_{R^n} b^2(x)\varphi_p^2(x,\tau)|\nabla^p u|^2\,dx.$$

С другой стороны оценим снизу $\mathcal{L}_{\gamma,g}(\psi u, \psi u)$, где ψ определена в (14), и получим

$$\mathcal{L}_{\gamma,g}(\psi u, \psi u) \geq [I_{2m}^2(\tau) + \int_{R^n} g^{4m}(1-\frac{\rho}{\tau})_+^{8m}|u|^2\,dx] - \\ - C\sum_{p=0}^{2m-1} I_{pb}^2(\tau).$$

Отсюда в силу условия $\rho(x) \geq g(x)$ и леммы 4.1 из работы [4, с.123] получаем для некоторой последовательности чисел $0 < \tau_k \longrightarrow \infty$

$$\mathcal{L}_{\gamma,g}(\psi(x,\tau_k)u(x), \psi(x,\tau_k)u(x)) \geq I_{2m}^2(\tau_k) + I_0^2(\tau_k) - C\sum_{p=0}^{2m-1} I_{pb}^2(\tau_k).$$

Отсюда и из неравенств (9), (15) вытекает, что

$$I_{2m}^2(\tau_k) + I_0^2(\tau_k) \leq C[\sum_{p=0}^{2m-1} I_{pb}^2(\tau_k) + 1]. \qquad (16)$$

В случае, когда $g(x)$ неограничена, согласно условию (3) определения $2\,b(x) \longrightarrow 0$ при $|x| \longrightarrow \infty$. При этом, если $I_p(\tau_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, то $I_{pb}(\tau_k) = o(I_p(\tau_k))$. Поэтому предположив, что последовательность $\{I_p(\tau_k)\}_{k=1}^{\infty}$ неограничена, в силу неравенства (13) получим противоречие с неравенством (16). Таким образом, $\overline{\lim}\, I_p(\tau_k) < \infty\ (p=\overline{0,2m})$. При ограниченной функции $g(x)$, так как $I_0^2(\tau_k) \overset{k\to\infty}{\geq} C\|u\|^2$, неравенство (16) в силу соотношений (12) также приводит к ограниченности $I_p(\tau_k)$, из которой вытекает сходимость интегралов (10).

Основываясь на конечности этих интегралов, покажем, что $L_m = L_M$. Действительно, при $u \in \overset{\circ}{D}_{L_M}$

$$\varphi(x,\tau)u(x) \equiv [1 - (\frac{\rho(x)}{\tau})^{\frac{1}{\sqrt{\ln\tau}}}]_+^{2m} u(x) \in \overset{\circ}{D}_{L_M},$$

$$\varphi(x,\tau)u(x) \xrightarrow{L_2(R^n)} u(x) \quad (\tau \to \infty).$$

Здесь $\rho(x)$ – функция, сопоставленная паре $\{\gamma, g\}$ согласно определению 2. Учитывая это, получим

$$\|L(\varphi u)-L_M u\|^2 \le \|\varphi L_M u - L_M u\|^2 + C\|\sum_{j=1}^{2m} |\nabla^j \varphi(x,\tau)| |\nabla^{2m-j} u|\|^2 \le$$
$$\le \|\varphi L_M u - L_M u\|^2 + \frac{C}{\sqrt{\ln \tau}} \sum_{j=0}^{2m-1} I_j^2[u].$$

Отсюда $\| L(\varphi u) - L u\| \longrightarrow 0$ при $\tau \to \infty$, т.е. доказано, что $L_m = L_M$.

3. Укажем условия на потенциал $Q(x)$, достаточные для выполнения неравенства (9)

Теорема 2.

1. Пусть существует такая пара функций $\{\gamma, g\} \in U_{2m}$, что потенциал $Q(x)$ удовлетворяет соотношениям:

1) $1+\gamma^{2m}(x)|Q(x)| \ge \varepsilon g^{2m}(x) \quad (\varepsilon = const > 0)$;

2) $(1+\gamma^{4m})^{1/2}|\rho| \le (A+|Q|^2)^{1/2} \quad (A = const > 0)$;

3) $|\nabla r| = o(\gamma^{4m}(1+|Q|)^{\frac{2m+1}{2m}}) \quad (|x| \to \infty)$;

4) $|\nabla \rho| = o((1+|Q|)^{\frac{2m+1}{2m}})$.

Тогда оператор L_m J-самосопряжен $(L_m = L_M)$.

2. Теорема остается в силе при замене условия 2) менее ограничительным неравенством

2') $(1+\gamma^{4m})^{1/2}\rho \ge -(A+|Q|^2)^{1/2}$,

если дополнительно выполнено условие

5) $|\nabla \rho_+| = o(\gamma^{4m}(1+|Q|)^{\frac{2m+1}{2m}})$*.

Прежде чем доказывать теорему 2, приведем примеры потенциалов, удовлетворяющих ее условиям и не подпадающих под известные признаки J-самосопряженности.

Пример 1. Оператор L_m, отвечающий выражению

$$L = (-\Delta)^m + \{-h(1+|x|^2)^{s/2} + i(1+|x|^2)^{1/2}\}$$

---

* $\nabla \rho_+(x) = \nabla \rho(x)$ при $\rho(x) > 0$; $\nabla \rho_+(x) = 0$ при $\rho(x) \le 0$. $\rho_+(x) \in W^1_{2\,loc}(R^n)$.

J-самосопряжен при любых $l, h \geq 0$, если

$$s < \frac{2m(l+1)}{2m-1}^{*}.$$

Проверка условий 1)–4) теоремы 2 с $\gamma(x) \equiv \min\{1, h^{-1}\} \times (1+(x)^2)^{\frac{l-s}{4m}}$, $g(x) \equiv (1+|x|^2)^{\frac{l}{4m}}$ при $s > l$ и с $\gamma(x) \equiv 1$ и тем же $g(x)$ при $s \leq l$ не представляет труда; $2m$-согласованность указанных пар $\{\gamma, g\}$ проверяется непосредственно, если взять $\rho(x) = (1+|x|^2)^{l/4m}$ при $l > 0$ и $\rho(x) = \ln(1+|x|^2)$ при $l = 0$.

Замечание 1. Если $l > 0$, то оператор L_m примера 1 может не быть J-самосопряженным уже при $s = \frac{2m(l+1)}{2m-1}$. Так, в случае $m = n = 1$, $s = 2l+2$ $L_m \neq L_M$ при $h > \frac{4}{l^2}$, поскольку в этом случае все решения уравнения $Lu = 0$ принадлежат $L_2(-\infty, \infty)$. Последнее нетрудно доказать с помощью леммы 2 из работы [2].

Пример 2. Если функция $r(x) \in C^{2m}(R^n)$ такова, что $1 \leq r(x) \to \infty \ (|x| \to \infty)$ и удовлетворяет условиям (5) при $k = 2m$, $x \in [0, \frac{1}{2m}]$, то оператор L_m, отвечающий выражению

$$L = (-\Delta)^m + (-hr^s + ir) \ (h = const > 0),$$

J-самосопряжен при $s \leq \frac{(1-x)2m}{2m-1}$.

Действительно, при сделанных предположениях нетрудно проверить выполнение условий 1)–4) теоремы 2 с $\gamma(x) \equiv \min\{1, h^{-1}\} r^{-\frac{s-1}{2m}}$, $g(x) \equiv r^{1/2m}$ при $s > 1$, с $\gamma \equiv 1$ и тем же $g(x)$ при $s < 1$. Выше доказана $2m$-согласованность соответствующих пар $\{\gamma, g\}$.

Замечание 2. Оператор L_m примера 2 может не быть J-самосопряженным при $s = \frac{2m}{2m-1}$, даже если условия (5) на $r(x)$ выполнены при любом $x > 0$. Например, при $m = n = 1$, $s = 2$, когда $r(x) = e^{|x|} \times (|x| \geq 1)$, $L_m \neq L_M$, если h достаточно велико. В этом же случае, когда $r(x) = e^{x^2}$, $L_m \neq L_M$ при любом $h > 0$. Справедливость замечания 2 вытекает из асимптотических формул для решений уравнения $-\frac{d^2u}{dx^2} + Q(x)u = 0$, приведенных в [10].

<u>Следствие</u>. Пусть функция $f(t) \in C^{2m}(0, \infty)$, $(0 \leq f(t) \leq 1)$ удовлетворяет условиям (4) с $k = 2m$, а потенциал $Q(x)$ – соотношениям

$$f^{2m}(|x|)/\rho(x)/ = O(1+|r|); \qquad (17)$$

*При $l = 0$ J-самосопряженность имеет место при $s = \frac{2m(l+1)}{2m-1}$.

$$|\nabla p(x)| = O((1+|Q|)^{\frac{2m+1}{2m}}); \tag{18}$$

$$|\nabla r(x)| = o(f^{4m}(|x|)(1+|Q|)^{\frac{2m+1}{2m}}). \tag{19}$$

Тогда оператор L_m J–самосопряжен.

Доказательство следствия. Проверим выполнение условий 1)–4) теоремы 2 с $g(x)\equiv 1, \gamma(x)\equiv \theta f(|x|)$, где $0<\theta\le 1$. Условия 3), 4) совпадают с (19), (18), условие 1) очевидно; а $2m$ – согласованность пары $\{\theta f(|x|), 1\}$ установлена выше. Осталось проверить 2), которое выполнено вследствие (17), если положить $\theta^{4m} = \min[\frac{1}{2}M^{-2}, 1]$, где $M = \sup\{(1+|r|)^{-1} f^{2m}|p|\}$. Действительно, $(p^2+r^2+1)^{1/2} \ge (p^2+\frac{1}{2}(1+|r|)^2)^{1/2} \ge (p^2+\frac{1}{2}M^{-2}p^2 f^{4m})^{1/2} \ge$ $\ge |p|(1+\theta^{4m} f^{4m})^{1/2}$. Следствие доказано. Это следствие для случая $m=n=1$ дает результат, близкий к упомянутой выше теореме 3 из работы [8].

Доказательство теоремы 2. Докажем сначала справедливость неравенства (9) при условиях варианта 1 теоремы 2. Воспользуемся тождеством

$$\|(-\Delta)^m\varphi + Q\varphi\|^2 = \|\Delta^m\varphi\|^2 + \|Q\varphi\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\int_{R^n} p[(-\Delta)^m\varphi]\times$$

$$\times\bar{\varphi}\,dx + \sum_{l+p=2m-1} C_{lp}\int_{R^n} (\nabla r, \nabla^l\varphi_1\nabla^p\varphi_2)\,dx, \tag{20}$$

где C_{lp} – некоторые целочисленные константы, $\varphi_1 = \mathrm{Re}\,\varphi$, $\varphi_2 = \mathrm{Im}\,\varphi$. Обозначая $(1+\gamma^{4m}(x))^{-1/2}$ через $\theta(x)$ и учитывая условия 2), 3), получаем

$$\|[(-\Delta)^m + Q(x)]\varphi\|^2 + K\|\varphi\|^2 \ge \|\Delta^m\varphi\|^2 + \|Q\varphi\|^2 + K\|\varphi\|^2 -$$

$$-2\int\theta(x)(A+|Q|^2)^{1/2}|\Delta^m\varphi||\varphi|\,dx - C\int\sum_{l+s=2m-1} b(x)\gamma^{4m}(x)(A+$$

$$+|Q|^2)^{\frac{2m+1}{4m}}|\nabla^l\varphi||\nabla^s\varphi|\,dx,$$

где $b(x)\to 0$ $(|x|\to\infty)$. Положим теперь $K=1+A$ и обозначим для краткости $(A+|Q|^2)^{1/2} = V(x)$. Так как при $s+l=2m-1$

$$V^{\frac{2m+1}{2m}} = V^{\frac{2m-s}{2m}}\cdot V^{\frac{2m-l}{2m}},$$

то с помощью неравенства Буняковского–Шварца получим

$$\|(-\Delta)^m\varphi + Q\varphi\|^2 + K\|\varphi\|^2 \geq \|\Delta^m\varphi\|^2 - 2\int \theta(x)V(x)|\Delta^m\varphi| \times$$

$$\times |\varphi| dx + \|V\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2 - C\sum_{l=0}^{2m-1} I_{lb}^2[\varphi], \tag{21}$$

где

$$I_{lb}^2[\varphi] = \int_{R^n} b(x)\gamma^{4m}(x)\, V^{\frac{2m-l}{2m}}(x)|\nabla^l\varphi|^2\, dx. \tag{22}$$

Оценим снизу сумму первых трех слагаемых в правой части неравенства (21). Для этого заметим, что

$$|\Delta^m\varphi|^2 - 2\theta(x)|\Delta^m\varphi|\, V|\varphi| + V^2|\varphi|^2 =$$

$$= \theta(x)[|\Delta^m\varphi|^2 - V|\varphi|]^2 + \frac{(1+\gamma^{4m})^{1/2}-1}{(1+\gamma^{4m})^{1/2}}[|\Delta^m\varphi|^2 +$$

$$+ V^2|\varphi|^2] \geq \varepsilon\gamma^{4m}[|\Delta^m\varphi|^2 + V^2|\varphi|^2].$$

Отсюда и из (21) вытекает неравенство

$$\|(-\Delta)^m\varphi + Q\varphi\|^2 + K\|\varphi\|^2 \geq \varepsilon\int_{R^n}\gamma^{4m}[|\Delta^m\varphi|^2 + V^2 \times$$

$$\times |\varphi|^2]\, dx + \|\varphi\|^2 - C\sum_{l=0}^{2m-1} I_{lb}^2[\varphi]. \tag{23}$$

Покажем, что из последнего неравенства для $\varphi \in C_0^\infty(R^n(N,\infty))$ при некотором $N>0$ следует оценка

$$\|L\varphi\|^2 + K\|\varphi\|^2 \geq \varepsilon\{\int_{R^n}\gamma^{4m}[|\Delta^m\varphi|^2 + V^2|\varphi|^2]dx + \|\varphi\|^2\}, \tag{24}$$

из которой в силу условия 1) вытекает неравенство (9) и утверждение варианта 1 теоремы 2. Для доказательства неравенства (24) заметим, что величины

$$\hat{I}_s^2[\varphi] = \int_{R^n}(1+\gamma V^{\frac{1}{2m}})^{2(2m-s)}\gamma^{2s}|\nabla^s\varphi|^2\, dx$$

удовлетворяют (если положить $I_j = \hat{I}_j[\varphi]$) системе неравенств (11) с константами $a_j, b_j \geq 0$, не зависящими от $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$. Действительно, пара функций $\{\gamma, 1+\gamma V^{\frac{1}{2m}}\} \in U_0$, так как неравенства (2) при $f_1 = \gamma$, $f_2 = 1+\gamma V^{\frac{1}{2m}}$ следуют из условий 1), 3), 4) теоремы 2, а также из включения $\{\gamma, g\} \in U_0$. Поэтому в силу леммы 1 справедливы неравенства

$$|\nabla[(1+\gamma V^{\frac{1}{2m}})^{2m-s}\gamma^{s}]|\le C(1+\gamma V^{\frac{1}{2m}})^{2m-s+1}\gamma^{s-1},\ (s=1,\dots 2m),$$

откуда с помощью интегрирования по частям в выражении для $\hat{I}_s^2[\varphi]$ получим систему неравенств (11). Из этой системы, как упомянуто выше, при некотором $\varepsilon>0$ вытекают неравенства

$$\hat{I}_s^2[\varphi]\le\varepsilon\hat{I}_{2m}^2[\varphi]+C(\varepsilon)\hat{I}_0^2[\varphi]\quad(s=\overline{1,2m-1}).$$

Используя их, а также то, что $b(x)$ в выражении для $I_{sb}^2[\varphi]$ (22) стремится к нулю при $|x|\to\infty$, получаем для $\varphi\in C_0^\infty(R^n,(N,\infty))$

$$\sum_{s=0}^{2m-1}I_{sb}^2[\varphi]\le\varepsilon_N\{\hat{I}_{2m}^2[\varphi]+\hat{I}_0^2[\varphi]\},\tag{25}$$

где $\varepsilon_N\to 0$ при $N\to\infty$.

Так как $\gamma^{4m}V^2+1\ge\varepsilon(1+\gamma V^{\frac{1}{2m}})^{4m}$ при некотором $\varepsilon>0$, то, выбирая достаточно большое $N>0$, из неравенств (23), (25) получаем неравенство (24) для $\varphi\in C_0^\infty(R^n,(N,\infty))$.

Тем самым вариант 1 теоремы 2 доказан. Вариант 2 доказывается точно также, но в основе оценок лежит вместо (20) тождество

$$\begin{aligned}\|(-\Delta)^m\varphi+Q\varphi\|^2 &=\|\Delta^m\varphi\|^2+\|Q\varphi\|^2+2\mathrm{Re}\int_{R^n}\rho_-[(-\Delta)^m\varphi]\bar{\varphi}\,dx+\\ &+2\int_{R^n}\rho_+|\nabla^m\varphi|^2dx+\sum_{l+p=2m-1}C_{lp}\int_{R^n}(\nabla r,\nabla^l\varphi_1\nabla^p\varphi_2)\,dx+\\ &+\sum_{\substack{l+p=2m-1\\ j=1,2}}C_{lpj}\int_{R^n}(\nabla\rho_+,\nabla^l\varphi_j\nabla^p\varphi_j)\,dx\end{aligned}\tag{26}$$

с некоторыми целочисленными константами C_{lp}, C_{lpj}. Если $\rho_+(x)\in C^m(R^n)$, в справедливости этого тождества нетрудно убедиться, исходя из (20) с помощью интегрирования по частям. В общем случае оно выводится с помощью предельного перехода. Пусть $Q_\varepsilon=\rho_-+S_\varepsilon\rho_++ir$, где $S_\varepsilon\rho_+$ – усреднение ρ_+ (см. [11], с.39) с бесконечногладким ядром $\omega_\varepsilon(|x-y|)$. Тождество (26) справедливо при замене Q на Q_ε и ρ_+ на $S_\varepsilon\rho_+$. При $\varepsilon\to 0$ приходим к искомому результату.

Теорема 2 доказана.

В заключение отметим, что аналогичные результаты можно получить и для эллиптических выражений более общего, чем (1), вида.

Литература

1. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., Физматгиз, 1963. 339 с.
2. Рофе-Бекетов Ф.С. О неполуограниченных дифференциальных операторах. – Теория функций, функцион.анализ, 1966, вып.2, с.178–184.
3. Рофе-Бекетов Ф.С., Холькин А.М. Условия самосопряженности операторов эллиптического типа второго порядка общего вида. – Теория функций, функцион.анализ, 1973, вып 17, с.41–51.
4. Брусенцев А.Г., Рофе-Бекетов Ф.С. Условия самосопряженности сильно эллиптических систем произвольного порядка. – Мат.сб., 1974, 95, № 1, с.108–129
5. Брусенцев А.Г. Некоторые вопросы качественного спектрального анализа несамосопряженных эллиптических систем произвольного порядка. – Мат.физика и функцион.анализ, 1973, вып.4,с.93–116.
6. Брусенцев А.Г. О спектре несамосопряженных эллиптических систем произвольного порядка.–Диференц.уравнения, 1976, 12, №6, с.1040–1051.
7. Шевченко В.И. О совпадении минимального и максимального операторов, порожденных дифференциальным выражением высокого порядка. – Теория функций, функцион.анализ, 1975, вып. 23, с.142–150.
8. Лидский В.Б. Несамосопряженный оператор Штурма–Лиувилля с дискретным спектром. – Тр. Моск. мат. о-ва, 1960, 9,с.45–80.
9. Биргер Е.С. О несамосопряженном операторе $-y''+p(x)y$ на оси $(-\infty,\infty)$ – Докл. АН СССР, 1970, 192, №4, с.711–713.
10. Аленицын А.Г. О возмущении несамосопряженного оператора Шредингера с дискретным спектром. – Пробл. мат.физики, 1974, вып.7, с.8–21.
11. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К., Наук.думка, 1965. 798 с.

УДК 513.88:517:519

В.Я.Голодец

АСИМПТОТИЧЕСКИ АБЕЛЕВЫЕ W^*-АЛГЕБРЫ

В настоящей статье изучаются асимптотически абелевые W^*-алгебры с помощью асимптотических алгебр, введенных в /1–3/. В работе /3/ были рассмотрены примеры асимптотически абелевых неймановских алгебр M типа III относительно некоторой группы автоморфизмов Γ, причем предполагалось, что на M существует точное нормальное (т.н.) Γ-инвариантное состояние. В этом случае, как было показано в [3], асимптотическая алгебра C_M^U (U-свободный ультрафильтр на N) содержит в качестве W^*-подалгебры алгебру, изоморфную M.

В данном исследовании рассматриваются асимптотически абелевые алгебры типа П и Ш в общей ситуации, т.е. не предполагается наличие т.н. Γ-инвариантного состояния на M. Оказывается, что и в этом случае алгебра C_M^U (см. теорему 3.1) содержит в качестве W^*-подалгебры алгебру, изоморфную M. Отсюда ввиду результатов [3] непосредственно следует, что алгебра типа Ш$_0$ (как и П$_\infty$) не могут быть асимптотически абелевыми.

Если обозначить через C_M – множество всех ограниченных по норме последовательностей $\bar{x}=(x_n)$ из M (т.е. $\bar{x}\in\bar{M}=l^\infty(M)$ в обозначениях [3] таких, что $\Pi_U(\bar{x})F_U\in C_M^U$ для любого свободного ультрафильтра U на N, то C_M – C^*-алгебра, элементами которой являются центральные последовательности (ц.п.) в M (см. [2]). В настоящей статье доказано, что C_M содержит все нетривиальные ц.п. $\bar{x}=(x_n)$ из M, для которых (x_n^*) – также нетривиальные ц.п. в M.

Мы исследуем также вопрос о существовании т.н. Γ-инвариантного состояния на M в предположении, что M является асимптотически абелевой относительно Γ (Γ-ас.аб.), а Γ – аменабельная группа. При довольно общих предположениях о действии Γ в M на этот вопрос получен утвердительный ответ.

Наконец, с помощью свойства „L" Л.Пуканского в работе сформулировано необходимое и достаточное условие для того, чтобы $C_M^U\neq C$.

В дальнейшем мы сохраним обозначения и терминологию работ [2, 3].

1. Начнем с обсуждения свойства L и $C_M^U\neq C$.

<u>Определение 1.1</u> [4]. Пусть M – фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Говорят, что M обладает свойством L, если в M существует ц.п. унитарных операторов (u_n) такая, что $w-\lim_{n\to\infty} u_n=0$.

Понятно, что если M обладает свойством L и $(u_n)\in C_M$, то $C_M^U\neq C$.

<u>Теорема 1.2.</u> Если $C_M^U\neq C$, то M обладает свойством L.

Предпошлем доказательству теоремы две леммы, имеющие самостоятельный интерес.

<u>Лемма 1.3.</u> Пусть (x_n) – ограниченная по норме последовательность элементов из M и существует постоянная C $(0<C<\infty)$ такая, что для любого $\varepsilon>0$ всегда найдется ц.п. (x_n^ε) элементов из M, обладающая свойствами:

а) $\|x_n^\varepsilon\| < C$ (C не зависит от ε),

б) при достаточно больших n $\|(x_n - x_n^\varepsilon)\xi\| < \varepsilon$, где ξ – циклический отделяющий вектор для M. Тогда (x_n) – ц.п. в M.

Доказательство. Пусть a – аналитический элемент из M (см. [3], замечание 1.4.2). Тогда $\sigma_{-i/2}(a) = \Delta^{1/2} a \Delta^{-1/2} \in M$. Если положить

$$a'_\xi = j_\xi \sigma_{-i/2}(a^*) j_\xi,$$

то

$$a\xi = a'_\xi \xi, \qquad a'_\xi \in M'.$$

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \|[x_n, a]\xi\| = 0. \tag{1.1}$$

Пусть $C_1 = \max\{\|a\|, \|a'_\xi\|\}$. Для $\varepsilon > 0$ выберем ц.п. (x_n^ε) так, чтобы выполнялись предположения а) и б) леммы. Тогда при достаточно больших n имеем оценку

$$\|[x_n, a]\xi\| \le \|[x_n^\varepsilon, a]\xi\| + \|a\|\cdot\|(x_n - x_n^\varepsilon)\xi\| + \|a'_\xi\|\cdot\|(x_n - x_n^\varepsilon)\xi\|$$

$$\le \|[x_n^\varepsilon, a]\xi\| + 2C_1\varepsilon.$$

Так как (x_n^ε) – ц.п., то первое слагаемое стремится к нулю при $n\to\infty$, а так как C_1 не зависит от $\varepsilon > 0$, то из произвольности ε вытекает (1.1).

Пусть a – произвольный элемент. Тогда поскольку множество аналитических элементов в M образует $*$-подалгебру M_0, причем $M_0'' = M$ [8], то по теореме Капланского о плотности для $\varepsilon > 0$ существует оператор $a_\varepsilon \in M_0$ такой, что

$$\|(a - a_\varepsilon)\xi\| < \varepsilon, \quad \|a_\varepsilon\| \le 2\|a\|. \tag{1.2}$$

Тогда

$$\|[x_n, a]\xi\| \le \|[x_n, a_\varepsilon]\xi\| + \|[x_n^\varepsilon, a - a_\varepsilon]\xi\| + \|[x_n - x_n^\varepsilon, a - a_\varepsilon]\xi\|.$$

В силу (1.1) первое слагаемое стремится к нулю при $n\to\infty$, второе – стремится к нулю, так как (x_n^ε) – ц.п. в M, а третье – в силу предположений леммы и (1.2) допускает следующую оценку для достаточно больших n:

$$\|[x_n - x_n^{\varepsilon}, a-a_{\varepsilon}]\xi\| \le (2C+3\|a\|)\varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что при достаточно больших n

$$\|[x_n, a]\xi\| < \varepsilon(2C+3\|a\|+1).$$

В силу произвольности ε ($C, \|a\|$ не зависят от ε) мы делаем вывод о справедливости леммы.

<u>Лемма 1.4.</u> Пусть $\bar{x}=(x_n)\in\tilde{M}$ и $A=\Pi(\bar{x})E\in C_M^U$, тогда (x_n) содержит подпоследовательность (x_{n_k}), которая является ц.п. в M.

Доказательство. Обозначим через $(C_M^U)_0$ – $*$-подалгебру аналитических элементов в C_M^U. Так как $(C_M^U)_0'' = C_M^U$, то согласно теореме Капланского о плотности для $\varepsilon_n = 1/2^n$ существует оператор $A_n\in(C_M^U)_0$, для которого

$$\langle\!\langle (A-A_n)\xi_U \rangle\!\rangle < \varepsilon_n, \quad \|A_n\| \le 2\|A\|. \tag{1.3}$$

Поскольку $A_n\in(C_M^U)_0$, то существуют $(A_n)'_\xi\in\Pi(\bar{M})'=R'$ такие, что

$$A_n\xi_U = (A_n)'_\xi\,\xi_U.$$

Так как $A_n\in C_M^U$, то согласно лемме 1.2.2 [2] существует последовательность $\bar{x}^n=(x_k^n)$ такая, что $\Pi(\bar{x}^n)E=A_n$. Ввиду того, что $R'=j_U R j_U = j_U\,\Pi(\bar{N})E_U\,j_U$ [2], существует и последовательность $\bar{x}'^n = (x_k'^n)\in\bar{M}'$, для которой $(A_n)'_\xi = \Pi(\bar{x}'^n)E_U$.

В силу соображений, приведенных при доказательстве леммы 2.2.2 [2], с учетом (1.3) можно предполагать, что для всех $n\in\mathbb{N}$

$$\sup_{k,n}\|x_k^n\| < C \qquad (C=2\|A\|+1). \tag{1.4}$$

Пусть S –счетная $*$-подалгебра M такая, что $S''=M$. Так как M действует в сепарабельном гильбертовом пространстве, то подобная подалгебра S существует. Рассмотрим C^*- подалгебру D алгебры $\bar{M}$, порожденную последовательностями $\bar{x}^\#_{\cdot}(\bar{x}^{n\#}), \bar{1}, \bar{S}=(S,S,\ldots)$, где $s\in S$. В силу леммы 1.2.1 [3] существует такая последовательность индексов n_s, что если $\bar{y}\in D$, то

$$\langle\Pi(\bar{y})\xi_U,\xi_U\rangle = \lim_{s\to\infty}\rho(y_{n_s}) \quad (\bar{y}=(y_n)\in D), \tag{1.5}$$

причем, принимая во внимание свойства ультрафильтра, можно предполагать, что (n_i) выбрана таким образом, чтобы

$$\lim_{i\to\infty}\|(x_{n_i}^k - x_{n_i}'^k)\xi\| = \langle\!\langle(\Pi(\bar{x})-\Pi(\bar{x}'))\xi_U\rangle\!\rangle = 0. \tag{1.6}$$

Из (1.5) можно вывести соотношения:

$$\lim_{i\to\infty} \|(x_{n_i} - x_{n_i}^k)\xi\| = \langle\langle (\Pi(\bar{x}) - \Pi(\bar{x}^k))\xi_U \rangle\rangle \leq 1/2^k, \qquad (1.7)$$

$$\lim_{i\to\infty} \|[x_{n_i}^k, s]\xi\| = \langle\langle [\Pi(\bar{x}^k), \Pi(\bar{s})]\xi_U \rangle\rangle = 0 \ (s \in S). \qquad (1.8)$$

Рассмотрим последовательность $(x_{n_i}^k)_{i=1}^{\infty}$. В силу (1.6) и (1.8) благодаря лемме 1.3.2 [2] $(x_{n_i}^k)_{i=1}^{\infty}$ – ц.п. в M. Но тогда из (1.7) и (1.4) следует, что (x_{n_i}) удовлетворяет всем условиям леммы 1.3. Поэтому (x_{n_i}) – ц.п. в M.

Лемма 1.4 доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $C_M^U \neq C$, а p – проектор из C_M^U такой, что $(p\xi_U, \xi_U) = 1/2$. Подобный проектор существует, так как $C_M^U \neq C$ не содержит минимальных проекторов. Согласно замечанию 2.4.5 [2], в $\bar{M}$ существует последовательность проекторов $\bar{p} = (p_n)$ такая, что $p = \Pi(\bar{p})E$, причем $(p_n\xi, \xi) = 1/2$. Поскольку $p \in C_M^U$, то в силу леммы 1.4 (p_n) содержит подпоследовательность (p_{n_s}), которая является ц.п. в M. Положим $u_s = 2p_{n_s} - 1$. Тогда u_s – унитарный оператор из M, $(u_s\xi, \xi) = 0$, а (u_s) – ц.п. в M. Докажем, что $w\text{-}\lim_{s\to\infty} u_s = 0$. Действительно, так как u_s – ц.п., то все ее слабые предельные точки имеют вид λI, где $\lambda \in C$, а поскольку $(u_s\xi, \xi) = 0$ при $s \in N$, то $\lambda(\xi, \xi) = 0$ и $\lambda = 0$. Это и означает, что M обладает свойством L.

Теорема доказана.

Замечание. Справедлива теорема, почти обратная теореме 1.2 (см. теорему 3.5).

2. Перейдем к рассмотрению асимптотически абелевых W^*-алгебр. Напомним, что W^*-алгебра M называется асимптотически абелевой (ас.аб.), если существует последовательность $\bar{\gamma} = (\gamma_n)$ –автоморфизмов M такая, что для любых $x, y \in M$ $s\text{-}\lim[\gamma_n(x), y] = 0$. Если $\gamma_n \in \Gamma$, где Γ – группа автоморфизмов M, то говорят, что M является Γ–асимптотически абелевой. Как и в [3], удобно обозначить через $\bar{M}_\gamma$ – C^*–подалгебру $\bar{M} = l^\infty(M)$, элементами которой являются последовательности $\gamma(\bar{x}) = (\gamma_n(x))$, где $x \in M$.

В этом пункте докажем несколько вспомогательных утверждений об ас.аб. W^*–алгебрах.

Утверждение 2.1. Если M – ас.аб. фактор типа Ш (или II_∞), то для всякого проектора $p \in M$ ц.п. $\bar{\gamma}(p) = (\gamma_n(p))$ не содержит тривиальной подпоследовательности.

<u>Лемма 2.2.</u> Пусть $M_2 - I_2$ – подфактор M с матричными единицами e_{ij} $(i,j = 1,2)$, $M_2^c = M_2' \cap M$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $s \in N$, что существует I_2 – подфактор $M_2 \subset M_2^c$ с матричными единицами ..., причем

$$\|(\gamma_n(e_{ij})-f_{ij})\xi\|<\varepsilon \qquad (i,j=1,2)$$

и

$$|\rho(e_{ij}f_{kl})-\rho(e_{ij})\rho(f_{kl})|<\varepsilon \quad (i,j,k,l=1,2).$$

Доказательство. Так как M – ас.аб., то $\overline{\gamma(e_{ij})}=(\gamma_n(e_{ij}))$ – ц.п. в M. Положим $u_{ij}^n=e_{11}\gamma_n(e_{ij})e_{11}+e_{21}\gamma_n(e_{ij})e_{12}$. Очевидно, что $u_{ij}^n\in M_2^C$, а поскольку $s-\lim\limits_{n\to\infty}(u_{ij}^n-\gamma_n(e_{ij}))=0$, то (u_{ij}^n) – ц.п. в M, причем $\Pi_U(\bar{u}_{ij})E_U=\Pi_U(\overline{\gamma(e_{ij})})E_U$, где $\bar{u}_{ij}=(u_{ij}^n)$. Более того, поскольку $[\Pi_U(\overline{\gamma(e_{ij})}),\Pi_U(\bar{e}_{ij})]E_U=0$, то

$$\Pi(\bar{u}_{kl})\Pi(\bar{u}_{ij})E_U=\delta_{li}\Pi(\bar{u}_{kl})E_U=\delta_{li}\Pi(\overline{\gamma(e_{kl})})E_U. \tag{2.1}$$

Рассмотрим оператор $\Pi(\bar{u}_{11})$. В силу (2.1)

$$\begin{aligned}&\Pi(\bar{u}_{11})\Pi(\bar{u}_{11})E_U=\Pi(\bar{u}_{11})E_U,\\&\Pi(\bar{u}_{11})\Pi(\bar{u}_{12})E_U=\Pi(\bar{u}_{12})E_U,\\&\Pi(\bar{u}_{11})\Pi(\bar{u}_{2i})\xi_U=0 \quad (i=1,2).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Далее заметим, что $\bar{u}_{11}=(u_{11}^n)$ – самосопряженный элемент из $\bar{M}_2^C$. Обозначим через K коммутативную W^*- подалгебру $\bar{M}_2^C=l^\infty(M_2^C)$, порожденную $\bar{u}_{11}$. Будем рассматривать K как AW^*- алгебру [9] и через I_k обозначим идеал в K, элементы $\bar{a}$ которого удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}&\Pi(\bar{a})E_U=0,\\&\Pi(\bar{a})\Pi(\bar{u}_{12})E_U=0,\\&\Pi(\bar{a})\Pi(\bar{u}_{2i})E_U=0 \quad (i=1,2).\end{aligned}$$

В силу (2.2) $\bar{u}_{11}^2-\bar{u}_{11}\in I_k$, причем $\bar{u}_{11}^*=\bar{u}_{11}$. Согласно теореме 3.2 [9], в K существует проектор $\bar{p}_1=(p_{1,n})$ такой, что $\bar{p}_1-\bar{u}_{11}\in I_k$, т.е. для $p_1=\Pi(\bar{p}_1)$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned}&p_1E_U=\Pi(\bar{u}_{11})E_U,\\&p_1\Pi(\bar{u}_{12})E_U=\Pi(\bar{u}_{11})\Pi(\bar{u}_{12})E_U=\Pi(\bar{u}_{12})E_U \quad (\text{см.}(2.1)),\\&p_1\Pi(\bar{u}_{2i})E_U=\Pi(\bar{u}_{2i})E_U \quad (i=1,2)\end{aligned} \tag{2.3}$$

Положим $P_2 = I - P_1$. Из (2.3) вытекает

$$P_2 \Pi(\bar{u}_{2i}) E_U = \Pi(\bar{u}_{2i}) E_U \quad (i = 1,2)$$

и, следовательно,

$$P_2 E_U = (I - P_1) E_U = (I - \Pi(\bar{u}_{11})) E_U = \Pi(\bar{u}_{22}) E_U, \tag{2.4}$$

поскольку $\Pi(\bar{u}_{ii}) E_U = \Pi(\gamma(e_{ii})) E_U \quad (i = 1,2)$.

Рассмотрим теперь операторы $A = P_1 \Pi(\bar{u}_{12}) P_2$ и $A^* = P_2 \Pi(\bar{u}_{21}) P_1$. Учитывая предыдущие формулы, получаем

$$\begin{gathered} P_1 \Pi(\bar{u}_{12}) P_2 E_U = P_1 \Pi(\bar{u}_{12}) \Pi(\bar{u}_{22}) E_U = P_1 \Pi(\bar{u}_{12}) E_U = \Pi(\bar{u}_{12}) E_U, \\ P_2 \Pi(\bar{u}_{21}) P_1 E_U = \Pi(\bar{u}_{21}) E_U \end{gathered} \tag{2.5}$$

и, более того,

$$\begin{gathered} A^* A E_U = P_2 E_U, \\ A A^* E_U = P_1 E_U. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Положим, $A^* A = |A|^2$, $A A^* = |A^*|^2$ и докажем равенства:

$$\begin{gathered} |A| E_U = P_2 E_U, \\ |A^*| E_U = P_1 E_U. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Заметим, что из определения $|A|$ следует $P_2 |A|^2 = |A|^2$. Так как $\| u_{ij}^n \| \le 1$, то $\| \Pi(\bar{u}_{ij}) \| \le 1$, поэтому $\| A \| \le 1$. Следовательно,

$$0 < |A|^2 \le |A| \le P_2,$$

откуда вытекает, что

$$\langle\!\langle (P_2 - |A|) \xi_U \rangle\!\rangle^2 = \langle (P_2 - |A|)^2 \xi_U, \xi_U \rangle \le \langle (P_2 - |A|^2)^2 \xi_U, \xi_U \rangle = \langle\!\langle (P_2 - |A|^2) \xi_U \rangle\!\rangle^2.$$

Но ввиду (2.6) правая, а следовательно, и левая части этого неравенства равны нулю. Отсюда следует справедливость первого соотношения (2.7). Второе равенство доказывается аналогично.

Пусть $A = V' |A|$ – полярное разложение для A, где V' – частичная изометрия с начальным проектором $P_2' \le P_2$ и конечным $- P_1' \le P_1$.

Так как

$$0 < |A| \leq p_2' \leq p_2 ,$$

то из (2.7), повторяя только что приведенное рассуждение, получаем

$$p_2' E_U = p_2 E_U$$

и аналогично

$$p_1' E_U = p_1 E_U . \tag{2.8}$$

Принимая во внимание (2.5), находим, что

$$\begin{gathered} V' E_U = V' p_1' E_U = V' p_1 E_U = V' |A| E_U = A E_U = \Pi(\bar{u}_{12}) E_U , \\ V'^{*} E_U = \Pi(\bar{u}_{21}) E_U . \end{gathered} \tag{2.9}$$

Как уже отмечалось, $p_1 = \Pi(\bar{p}_1)$ (здесь $\bar{p}_1 = (\rho_{1,n}) \in \bar{M}_2^c$, а $\rho_{1,n}$ – проекторы из M_2^c). Следовательно, $p_2 = \Pi(\bar{p}_2)$, где $\bar{p}_2 = 1 - \bar{p}_1 \in \bar{M}_2^c$. Положим, $w_n = \rho_{1,n} u_{12}^n \rho_{2,n}$. Тогда $A = \Pi(\bar{w})$, где $\bar{w} = (w_n)$ и $w_n \in M_2^c$. Если $w_n = v_n' |w_n|$ – полярное разложение для $w_n \in M_2^c$, где $v_n', |w_n| \in M_2^c$, то $V' = \Pi(\bar{v}')$, где $\bar{v}' = (v_n') \in \bar{M}_2^c$. Пусть $\rho_{1,n}' \leq \rho_{1,n}$ и $\rho_{2,n}' \leq \rho_{2,n}$ – конечный и начальный проекторы для v_n' (понятно, что $\rho_{i,n}' \in M_2^c$ $(i=1,2)$). Рассмотрим проекторы $\rho_1^n = \rho_{1,n} - \rho_{1,n}'$, $\rho_2^n = \rho_{2,n} - \rho_{2,n}'$ из M_2^c. Можно предположить, что $\rho_1^n, \rho_2^n \neq 0$ для $n \in N$. Тогда в M_2^c существует частичная изометрия v_n'', для которой $v_n''^{*} v_n'' = \rho_2^n$, $v_n'' v_n''^{*} = \rho_1^n$. Положим $\bar{v}'' = (v_n'')$. В силу (2.8)

$$\Pi(\bar{v}'') E_U = \Pi(\bar{v}'') \Pi(\bar{q}_2) E_U = 0 , \tag{2.10}$$

где $\bar{q}_2 = (\rho_2^n)$, и аналогично

$$\Pi(\bar{v}''^{*}) E_U = 0 . \tag{2.11}$$

Пусть $v_n = v_n' + v_n''$. Тогда v_n – частичная изометрия в M_2^c с начальным проектором $\rho_{2,n}$ и конечным – $\rho_{1,n}$. Если $\bar{v} = (v_n) \in M_2^c$, то в силу (2.9)–(2.11)

$$\begin{gathered} \Pi(\bar{v}) E_U = \Pi(\bar{v}') E_U = \Pi(\bar{u}_{12}) E_U = \Pi(\overline{\gamma(e_{12})}) E_U , \\ \Pi(\bar{v}^{*}) E_U = \Pi(\overline{\gamma(e_{21})}) E_U . \end{gathered} \tag{2.12}$$

Но (2.12) означает, что

$$\lim_{n\in U}\|(v_n-\gamma_n(l_{12}))\xi\|=\lim_{n\in U}\|(v_n^*-\gamma_n(e_{21}))\xi\|=0,$$

а (2.4) –

$$\lim_{n\in U}\|(p_{1,n}-\overline{\gamma(e_{11})})\xi\|=\lim_{n\in U}\|(p_{2,n_k}-\gamma_{n_k}(e_{12}))\xi\|=0.$$

Следовательно, существует подпоследовательность индексов $n_k (k\in N)$, для которой

$$\lim_{k\to\infty}\|(v_{n_k}-\gamma_{n_k}(e_{12}))\xi\|=\lim_{k\to\infty}\|(v_{n_k}^*-\gamma_{n_k}(e_{21}))\xi\|=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\|(p_{1,n_k}-\gamma_{n_k}(e_{11})\xi\|=\lim_{k\to\infty}\|(p_{2,n_k}-\gamma_{n_k}(e_{22}))\xi\|=0. \qquad (2.13)$$

Поскольку $(\gamma_n(e_{ij}))_{n=1}^{\infty}$ – ц.п., то $(\gamma_{n_k}(e_{ij}))$ – также ц.п. Тогда ввиду (2.13) (v_{n_k}), $(v_{n_k}^*)$, (p_{i,n_k}) – также ц.п. в M_2^c, причем v_{n_k}, $v_{n_k}^*$ и p_{i,n_k} $(i=1,2)$ – матричные единицы I_2-подфактора M_2^c. Из существования таких ц.п. легко вытекают утверждения леммы.

Доказательство закончено.

В качестве следствия из леммы 2.2 вытекает

<u>Лемма 2.3</u>. Пусть $M_2\subset M$ – такой же I_2-подфактор, как и в лемме 2.2. Тогда существует ц.п. операторов (f_{ij}^n) из M, обладающая свойствами:

1) $f_{ij}^n f_{kl}^n=\delta_{jk}f_{il}^n$, т.е. $f_{ij}^n (i,j=1,2)$ образуют I_2-подфактор $M_2^n\subset M$;

2) f_{ij}^n и f_{kl}^m – попарно коммутируют при $m\neq n$;

3) существуют $k_n\in N$ такие, что

$$\|(f_{ij}^n-\gamma_{k_n}(e_{ij}))\xi\|<1/2^n;$$

4) $|\rho(af_{ij}^n)-\rho(a)\rho(f_{ij}^n)|<1/2^n;\ a=\prod_{s=1}^{p} f_{i_s,j_s}^{k_s}\ (1\le p,\ k_s<n)$.

Доказательство утверждения 2.1. Пусть для некоторого проектора $p\in M$ ц.п. $\gamma(p)=(\gamma_n(p))$ содержит тривиальную ц.п. Без ограничения общности можно предполагать, что $\gamma(p)\in T_M$. Тогда $s\text{-}\lim_{n\to\infty}(\gamma_n(p)-\lambda_n)=0$, где $\lambda_n\in\mathbb{C}, |\lambda_n|<C<\infty$, и $\Pi_U(\overline{\gamma(p)})E_U=\lambda E_U (\lambda=\lim_{n\in U}\lambda_n)$. Отсюда легко следует, что $\lambda=0$ или $\lambda=1$. Пусть для определенности $\lambda=1$, тогда $\Pi_U(\overline{\gamma(1-p)})E_U=0$. Так как p и $1-p$ – проекторы из M, а M – бесконечный фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве, то p и $1-p$ эквивалентны относительно M, т.е. существует частичная изометрия $u\in M$, для которой $u^*u=p, uu^*=1-p$. Понятно, что u порождает I_2-подфактор M, который обозначим через M_2. Положим $e_{11}=p$, $e_{22}=1-p$, $e_{21}=u$, $e_{12}=u^*$ и применим предыдущую лемму. Так как $\Pi(\overline{f(e_{ll})})E_U=E_U$, то последовательность (f_{ij}^n) можно выбрать таким образом, чтобы дополнительно к свойствам 1)–4) леммы 2.3 выполнялось требование

$$1-1/2^n<\rho(f_{11}^n)<1\,. \tag{2.14}$$

Рассмотрим последовательность проекторов $f_n=\prod_{s=1}^n f_{11}^s$ и докажем, что $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f$ существует. Действительно,

$$\|(f_{n+m}-f_n)\xi\|\le\|f_n(\prod_{s=n+1}^{m+n}f_{11}^s-1)\xi\|^2\le\|(\prod_{s=n+1}^{m+n}f_{11}^s-1)\xi\|^2=1-\rho(\prod_{s=n+1}^{m+n}f_{11}^s). \tag{2.15}$$

В силу 4) леммы 2.3

$$|\rho(\prod_{s=n+1}^{m+n}f_{11}^s)-\prod_{s=n+1}^{m+n}\rho(f_{11}^s)|<1/2^n\,, \tag{2.16}$$

а благодаря (2.14) произведение $\prod_{s=1}^{\infty}\rho(f_{11}^s)$ сходится и поэтому $\prod_{s=n+1}^{m+n}\rho(f_{11}^s)$ при достаточно больших n мало отличается от 1. Но тогда из (2.15) и (2.16) вытекает, что для произвольного $\varepsilon>0$ при достаточно больших n и любых m

$$\|(f_{m+n}-f_n)\xi\|<\varepsilon\,.$$

Пусть $f=s\text{-}\lim f_n$. Тогда f – ненулевой проектор из M, а так как $\{u_n\}$ – ц.п. в M, где $u_n=f_{12}^n+f_{21}^n$ и поэтому $u_n^*=u_n, u_nu_n=1$, то

$$\lim_{n\to\infty}u_nfu_n=f\ne 0\,.$$

С другой стороны, поскольку $f_{i2}^nf=ff_{2j}^n=0$ и $f_{kl}^nff_{ij}^n\to 0$, если $l\ne i$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}u_nfu_n=\lim_{n\to\infty}f_{21}^nff_{12}^n=\lim_{n\to\infty}ff_{22}^n=0\,.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение.

З а м е ч а н и е 2.4. Если M – фактор с т.н. состоянием ρ, то M не может содержать последовательности $(u_n)\in\bar{M}$ со свойствами:

1) $(u_n^{\#})$ – ц.п. в M;

2) u_n – частичная изометрия в M, причем $u_n^* u_n + u_n u_n^* = 1$, $u_n u_n = 0$;

3) $\lim_{n\to\infty} \rho(u_n^* u_n) = 1$.

Лемма 2.5. Пусть M – фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, ρ – т.н. состояние на M. Тогда $\bar M = l^\infty(M)$ не может содержать элемент $\bar u = (u_n)$ со свойствами:

1) u_n – частичная изометрия;

2) проекторы $q_n' = u_n u_n^*$ и $q_n = u_n^* u_n$ попарно ортогональны,

$\lim_{n\to\infty} \rho(q_n') = 0$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \rho(q_n) > 0$;

3) $(u_n^{\#}), (q_n)$ – ц.п. в M (а значит (q_n') и (p_n), где $p_n = 1 - q_n - q_n'$ – также ц.п. в M).

Приведем набросок доказательства. Пусть $M_3 - I_3$ –подфактор M, матричные единицы e_{ij}' $(i,j = 1,2,3)$ которого $e_{11}' = q_1'$, $e_{22}' = q_1$, $e_{33}' = p_1$, $e_{12}' = u_1$. Так как $(u_n^{\#}), (q_n)$ – ц.п. в M, то $v_n^{\#} = \sum_{i=1}^{3} e_{i1} u_n^{\#} e_{1i}$, $r_n = \sum_{i=1}^{3} e_{i1} q_n e_{1i}$ – также ц.п. в M, причем $v_n^{\#}, r_n \in M_1^c = M_1' \cap M$. Как и при доказательстве леммы 2.2, определим проектор $P_2 = \Pi(\bar p_2)$, где $\bar p_2 = (p_{2,n})$, $p_{2,n} \in M_1^c$, для которого

$$P_2 E_U = \Pi(\bar r) E_U = \Pi(\bar q) E_U,$$

где $\bar q = (q_n)$.

Положим $P_1 = I - P_2$ и рассмотрим операторы $A = P_1 \Pi(\bar v) P_2$ и $A^* = P_2 \Pi(\bar v^*) P_1$, где $\bar v = (v_n)$. Понятно, что $A^* E_U = 0$. Как и при доказательстве леммы 2.2, можно установить, что

$$|A| E_U = P_2 E_U, \quad |A^*| E_U = 0.$$

Пусть $A = V'|A|$ – полярное разложение для A, где V' – частичная изометрия с начальным проектором $P_2' \le P_2$ и конечным – $P_1' \le P_1$. Тогда

$$P_2' E_U = P_2 E_U, \quad P_1' E_U = 0, \quad P_1' P_2' = 0, \quad V' E_U = \Pi(\bar v) E_U.$$

Положим $w_n = p_{1,n} v_n p_{2,n}$, где $\bar p_2 = (p_{2,n})$, $\bar p_1 = (p_{1,n})$, $p_{1,n} = I - p_{2,n}$ и $\bar p_2 \in \bar M_1^c$. Тогда $A = \Pi(\bar w)$, где $\bar w = (w_n)$. Если $w_n = v_n' |w_n|$ – полярное разложение для w_n, то $V' = \Pi(\bar v')$, где $\bar v' = (v_n') \in \bar M_1^c$, а $p_{1,n}' = v_n' v_n'^* \le p_{1,n}$, $p_{2,n}' = v_n'^* v_n' \le p_{2,n}$ и $P_i' = \Pi(\bar p_i')$, где $\bar p_i' = (p_{i,n}')$, $i = 1,2$. Положим $P_3 = \Pi(\bar p_3')$, где $p_{3,n}' = 1 - p_{1,n}' - p_{2,n}'$. Теперь, повторяя доказательство леммы 2.2, можно для произвольного $\varepsilon > 0$ доказать существование таких попарно ортогональных проекторов e_{11}^2, e_{22}^2, e_{33}^2 и частично изометрического оператора e_{12}^2 из M_1^c, где $e_{11}^2 = e_{12}^2 e_{21}^2$, $e_{22}^2 = e_{21}^2 e_{12}^2$ и $e_{21}^2 = (e_{12}^2)^*$, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$

$$\|(u_n - e_{12}^2)^\# \xi\| < \varepsilon, \ \|(q_n' - e_{11}^2)\xi\| < \varepsilon, \ \|(q_n - e_{22}^2)\xi\| < \varepsilon,$$
$$|\rho(e_{ii}^1 e_{kk}^2) - \rho(e_{ii}^1)\rho(e_{kk}^2)| < \varepsilon,$$
$$0 < \rho(e_{11}^2) < \varepsilon .$$

Понятно, что в M_1^c существует I_3-подфактор M_3, матричные единицы $e_{ii}^2 (i = 1,2,3)$ и e_{12}^2, e_{21}^2 которого уже определены. Поэтому можно рассмотреть фактор $M_2^c = M_1^c \cap M_2'$ и продолжить индукцию.

В результате построим последовательность операторов e_{ij}^k $(i,j=1,2,3)$, $k \in \mathbb{N}$ из M со свойствами:

а) e_{ij}^k – матричные единицы I_3 – подфактора $M_k \subset M$;

б) e_{ij}^k попарно коммутируют между собой при разных k;

в) существуют такие $k_n \in \mathbb{N}$, что

$$\|(u_{k_n} - e_{12}^n)\xi\| < 1/2^{n+1}, \ \|(q_{k_n} - e_{22}^n)\xi\| < 1/2^{n+1}, \ \|(q'_{k_n} - e_{11}^n)\xi\| < 1/2^{n+1};$$

г) $\rho(e_{11}^n) < 1/2^n$;

д) $|\rho(a e_{tt}^n) - \rho(a)\rho(e_{tt}^n)| < 1/2^{n+1}$, $a = \prod_{s=1}^{p} e_{i_s j_s}^{k_s}$ $(1 \le k_s, p < n)$.

Но тогда, если положить $e_k = e_{22}^k + e_{33}^k$ и $f_k = \prod_{s=1}^{k} e_s$, то $s\text{-}\lim f_k = f$ существует и $f > 0$. (См. доказательство леммы 2.3.). Положим $v_k = e_{12}^k + e_{21}^k + e_{33}^k$. Очевидно, (v_k) – ц.п. в M, поскольку согласно предположению 3) леммы 2.5 и свойства в), (e_{12}^k), (e_{21}^k) и (e_{33}^k) – ц.п. в M. Далее, так как $v_k^* = v_k$, то должно быть

$$s - \lim_{k \to \infty} v_k f v_k = f .$$

С другой стороны, поскольку $e_{21}^k f = 0$, а $s - \lim_k f e_{21}^k = s\text{-}\lim e_{21}^k f = 0$, то

$$s - \lim_{k \to \infty} v_k f v_k = s - \lim_{k \to \infty} f e_{33}^k \neq f .$$

Так как ввиду предположения 2) леммы 2.5 $s\text{-}\lim_{k \to \infty} e_{33}^k \neq 1$, то получается противоречие, которое доказывает лемму.

3. После приготовлений предыдущего пункта доказывается следующая важная

Теорема 3.1. Если M – ас.аб. фактор, $\bar{M}_\gamma = \{\overline{\gamma(x)} = (\gamma_n(x)) : x \in M\}$ – C^*-подалгебра $\bar{M} = l^\infty(M)$, то для любого свободного ультрафильтра U на $\mathbb{N}$ $[\Pi_U(\bar{M}_\gamma), E_U] = 0$, $\Pi_U(\bar{M}_\gamma)E_U \subseteq C_M^U$ и $\Pi_U(\overline{\gamma(p)})E_U > 0$, где p – произвольный проектор из M и $p > 0$. Таким образом, $\bar{M}_\gamma \subset C_M$ (C_M определена в начале статьи).

Доказательство. Пусть $P = \Pi_U(\overline{\gamma(p)})$. Положим $\Phi_N(P) = E_U P E_U + (I - E_U) P (I - E_U)$. $\Phi_N(P)$ является самосопряженным оператором из $\Pi_U(\bar{N})$ (см. [3], лемма 1.2.3). Докажем, что $P-\varphi_N(P)=0$. Предположим противное и обозначим $A=(I-E_U)PE_U$. Тогда $A^*=E_UP(I-E_U)$ и $P-\varphi_N(P)=A+A^*$. Так как

$$[P,\Pi(\bar{x})]E_U=0 \qquad (\bar{x}\in\bar{M}_d), \tag{3.1}$$

то, учитывая $[\Pi(\bar{x}),E_U]=0$, $\bar{x}\in\bar{M}_d$, получаем

$$[\varphi_N(P),\Pi(\bar{x})]E_U=0.$$

Отсюда следует

$$\varphi_N(P)E_U\in C_M^U . \tag{3.2}$$

Из (3.1) и $[\Pi(\bar{x}),E_U]=0$ $(\bar{x}\in\bar{M}_d)$ находим

$$[A,\Pi(\bar{x})]E_U=0 \qquad (\bar{x}\in\bar{M}_d) \tag{3.3}$$

Докажем равенство

$$[A^*A,\Pi(\bar{x})]E_U=0. \tag{3.4}$$

Так как ввиду (3.1)

$$E_UP\Pi(\bar{x})=E_U\Pi(\bar{x})P \qquad (\bar{x}\in M_d),$$

то, учитывая (3.3), запишем

$$\begin{aligned}A^*A\Pi(\bar{x})E_U&=A^*\Pi(\bar{x})AE_U=E_UP(I-E_U)\Pi(\bar{x})AE_U=\\&=E_UP\Pi(\bar{x})(I-E_U)AE_U=E_0\Pi(\bar{x})PAE_U=\\&=\Pi(\bar{x})EP(I-E)AE_U=\Pi(\bar{x})A^*AE_U,\end{aligned}$$

что и доказывает (3.4). Следовательно, $A^*A\in C_M^U$, а поэтому

$$|A|=(A^*A)^{1/2}\in C_M^U .$$

Выберем удобную параметризацию для A. Так как $|A|\in C_M^U$, то, согласно лемме 1.2.3 [3], существует $\bar{d}=(d_n)\in\bar{N}_+$ такой, что

$$|A|E_U=\Pi_U(\bar{d})E_U .$$

Пусть $A=U|A|$ – полярное разложение для A. Согласно лемме 1.2.2 [3], существует $\bar{y}=(y_n)\in\bar{M}$, для которого $U\xi_U=\Pi(\bar{y})\xi_U$. Рассмотрим векторы ξ_U и $\eta_U = \Pi(\bar{y})\xi_U \sim (y_n \xi)$. Повторяя доказательство леммы 2.2.2 [2], применительно к ξ_U и η_U (вместо ξ_U как в [2]) можно доказать существование элемента $\bar{V}=(v_n)\in\bar{M}$, для которого

$$\Pi(\bar{v})\xi_U = U\xi_U, \quad \Pi(\bar{v})\eta_U = U\eta_U = 0;$$
$$\Pi(\bar{v})^*\eta_U = U^*\eta_U, \quad \Pi(\bar{v}^*)\xi_U = U^*\eta_U = 0. \tag{3.5}$$

Так как $\eta_U = U\xi_U = \Pi(\bar{v})\xi_U$, то

$$\Pi(\bar{v}^*\bar{v})\xi_U = \Pi(\bar{v}^*)\eta_U = U^*U\xi_U = Q\xi_U, \tag{3.6}$$

где $Q=U^*U$ – проектор из C_M^U, для которого $Q|A| = |A|$. Следовательно, $\bar{v}^*\bar{v}=(v_n^* v_n)\in\bar{N}$. Положим $v_n^* v_n = |v_n|^2$ и пусть $\tilde{q}_n$ – минимальный проектор из M, для которого $\tilde{q}_n|v_n| = |v_n|$. Согласно лемме 2.2.3 [2] (см. также [2], замечание 2.4.5), существует элемент $\bar{q}'=(q_n')\in\bar{N}$, где q_n' – проекторы из M, и $q_n' \leq \tilde{q}_n$ такой, что

$$\Pi_U(\bar{q}')E_U = Q .$$

Рассмотрим полярное разложение $v_n = w_n|v_n|$ для v_n и положим $u_n' = w_n q_n'$, $\bar{u}'=(u_n')$. Очевидно, что

$$\Pi_U(\bar{u}')E = \Pi_U(\bar{w}\bar{q}')E = \Pi(\bar{w})QE = \Pi(\bar{w})\Pi(|\bar{v}|)E =$$
$$= \Pi(\bar{v})E = UE = U \quad (|\bar{v}| = (|v_n|))^{*)}.$$

Пусть p_n' – конечный проектор для u_n' и $\bar{p}'=(p_n')$. Тогда из (3.5) следует, что $\Pi(\bar{p}')E_U = 0$, и поэтому $\Pi(1-\bar{p}')\Pi(\bar{q}')\Pi(1-\bar{p}')E = \Pi(\bar{q}')E$ или

$$\lim_{n\in U} \|(q_n' - (1-p_n')q_n'(1-p_n'))\xi\| = 0 .$$

В силу замечания 2.4.5 [2] существует элемент $\bar{r}=(r_n)$, где r_n проекторы из $M(n\in\mathbb{N})$ и

$$r_n p_n' = 0$$

такой, что r_n принадлежит коммутативной W^*-подалгебре $\bar{M}$, порожденной $(1-\bar{p}')\bar{q}'(1-\bar{p}')$, причем $\Pi(\bar{r})E = \Pi(\bar{q}')E = Q$.

Понятно, что $\bar{r}, \bar{q}' \in \bar{N}$, поэтому $\bar{q}'\bar{r}\in\bar{N}$ и $\Pi(\bar{q}'\bar{r})E = \Pi(\bar{q}')E\Pi(\bar{r})E = Q^2 = Q$. Пусть $q_n' r_n = O_n|q_n' r_n|$ – полярное разложение для $q_n' r_n$, где

---

*) Так как $\bar{v}^*\bar{v}\in\bar{N}$, то $[B^2, E_U] = 0$, где $B^2 = \Pi(\bar{v}^*\bar{v})$. Следовательно, поскольку $B^2 E_U = Q$, то $BE_U = Q$.

O_n – частичная изометрия. Тогда $q_n = O_n^* O_n \le r_n, q_n p_n' = 0, O_n O_n^* \le q_n'$, причем, если $\bar{O} = (O_n)$, то

$$\Pi(\bar{O})E = \Pi(\bar{O})QE = \Pi(\bar{O})\Pi(|\bar{q}'\bar{r}|)E = \Pi(\bar{q}'\bar{r})E = Q.$$

Теперь положим $u_n = u_n' O_n, q_n = u_n^* u_n = O_n^* u_n' u_n' O_n = O_n^* O_n, p_n = u_n u_n^*$ и $\bar{u} = (u_n), \bar{q} = (q_n), \bar{p} = (p_n)$. Тогда

$$q_n p_n = 0 \quad (q_n \le r_n,\ p_n \le p_n',\ r_n p_n' = 0), \tag{3.7}$$

$$\lim_{n \in U} \rho(p_n) = 0, \tag{3.8}$$

$$\Pi(\bar{u})E = \Pi(\bar{u}')\Pi(\bar{O})E = \Pi(\bar{u}')QE = U, \tag{3.9}$$

$$\Pi(\bar{q})E = \Pi(\bar{u}^* \bar{u})E = \Pi(\bar{O}^* \bar{O})E = Q. \tag{3.9'}$$

Введем обозначения $a_n = u_n d_n$ и $\bar{a} = (a_n)$. Учитывая, что $|A| \in C_M^U$ и (3.9), получаем

$$\Pi(\bar{a})E_U = \Pi(\bar{u})\Pi(\bar{d})E_U = \Pi(\bar{u})|A|E_U = \Pi(\bar{u})E_U|A| = U|A| = A$$

и

$$\Pi(\bar{a}^*)\Pi(\bar{a})E_U = |A|^2.$$

Итак, нужная параметризация для A выбрана. Сделаем

З а м е ч а н и е 3.2. Пусть $E_U P E_U = \Pi_U(\bar{b})E_U$, где $\bar{b} = (b_n) \in \bar{N}$. Тогда

$$PE_U = (A + E_U P)E_U \qquad \text{или} \qquad AE_U = PE_U - E_U P E_U.$$

Последнее означает, что

$$\lim_{n \in U} \|(a_n - \gamma_n(p) + b_n)\xi\| = 0.$$

Так как в силу (3.2) $E_U \varphi_N(P) = \Pi_U(\bar{b})E_U \in C_M^U$, то существует такая последовательность индексов n_k, что (b_{n_k}) – ц.п. в M (см. лемму 1.4) и, более того,

$$\lim_{k \to \infty} \|(a_{n_k} - \gamma_{n_k}(p) + b_{n_k})\xi\| = 0.$$

Но поскольку $(\gamma_n(p))$ – ц.п. в M, то $(\gamma_{n_k}(p) - b_{n_k})$ – также ц.п. в M. Следовательно, и (a_{n_k}) – ц.п. в M, эквивалентная $(\gamma_{n_k}(p) - b_{n_k})$.

Поэтому без ограничения общности в дальнейшем можно предполагать, что a_n – ц.п. в M.

Вернемся к доказательству теоремы. Наша цель состоит в том, чтобы из (u_n) и (q_n) извлечь подпоследовательности, которые являлись бы ц.п. в M и имели бы одинаковые индексы. Докажем сначала, что

$$[U, \Pi(\bar{x})]E_U = 0 \qquad (\bar{x} \in \bar{M}_d). \tag{3.10}$$

Через Q_n обозначим подпроектор Q из C_M^U, для которого $1/n\, Q_n \le Q_n|A|$. Тогда $H_n = |A|^{-1}Q_n \in C_M^U$ и $AH_n = UQ_n = U_n$. Поэтому, принимая во внимание (3.3) и учитывая, что $[H_n, E_U] = [\Pi(\bar{x}), E_U] = 0\ (\bar{x} \in \bar{M}_d)$, получаем равенство для $\bar{x} \in \bar{M}_d$:

$$\Pi(\bar{x})U_n E_U = \Pi(\bar{x})AH_n E_U = \Pi(\bar{x})AE_U H_n = A\Pi(\bar{x})H_n E_U = U_n \Pi(\bar{x})E_U.$$

Следовательно,

$$\Pi(\bar{x})UE_U = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \Pi(\bar{x})U_n E_U = s\text{-}\lim U_n \Pi(\bar{x})E_U = U\Pi(\bar{x})E_U$$

и (3.10) имеет место, причем

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} AH_n = s\text{-}\lim_{n\to\infty} UQ_n = U.$$

Положим $H_n = \Pi_U(\bar{h}^n)E_U$, где $\bar{h}^n = (h_s^n) \in \bar{N}$. Поскольку $H_n \in C_M^U$, то для каждого n существуют аналитические операторы $H_{n,k} = \Pi(\bar{h}^{n,k})E_U$ из C_M^U, где $\bar{h}^{n,k} = (h_s^{n,k} \in N)$ такие, что

$$\langle\!\langle (H_n - H_{n,k})\xi_U \rangle\!\rangle < 1/2^k; \tag{3.11}$$

$$H_{n,k}\xi_U = H'_{n,k}\xi_U,\ H'_{n,k} = \Pi(\bar{h}'^{n,k}) \in \Pi(\bar{M})',\ \bar{h}'^{n,k} = (h_s'^{n,k}),\ h_s'^{n,k} \in M'; \tag{3.12}$$

$$\sup_{s,k} \| h_s^{n,k} \| < C < \infty. \tag{3.13}$$

Пусть S – счетная $*$-подалгебра M с единицей такая, что $S'' = M$. Через D обозначим C^*-подалгебру $\bar{M} = l^\infty(M)$, порожденную элементами $\bar{s} = (s, s, \ldots)$, где $s \in S$, $\bar{a} = (a_n)$, $\bar{h} = (h_s^n)$, $\bar{h}^{n,k} = (h_i^{n,k})$; $\bar{u} = (u_n)$. Кроме того, включим в D элементы $\bar{q}^n = (q_i^n)$ и $\bar{u}^n = (u_i^n)$, $n \in \mathbb{N}$, где $\Pi(\bar{q}^n)E_U = Q_n$, $\Pi(\bar{u}^n)E_U = U_n = UQ_n$, причем q_i^n – подпроектор q_n, а $u_i^n = u_n q_i^n$. Тогда D содержит счетное всюду плотное подмножество относительно нормы, и, согласно лемме 1.2.1 [3], существует подпоследовательность индексов (n_i) такая, что для любого $\bar{d} = (d_i) \in D$

$$\rho_U(\bar{d}) = \lim_{i\to\infty} \rho(d_{n_i}), \tag{3.14}$$

а также (ввиду (3.12))

$$\lim_{i\to\infty} \|(h^{n,k}_{n_i} - h'^{n,k}_{n_i})\xi\| = 0 \quad (\sup_s \|h'^{n,k}_s\| < \infty) \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{3.15}$$

Поскольку $H_{n,k} \in C^U_M$, то из (3.14) следует, что для $s \in S$

$$\lim_{i\to\infty} \|[h^{n,k}_{n_i}, s]\xi\| = \langle\!\langle [H^{n,k}, \Pi(\bar{s})]\xi_U \rangle\!\rangle = 0, \tag{3.16}$$

а в силу (3.11)

$$\lim_{i\to\infty} \|(h^n_{n_i} - h^{n,k}_{n_i})\xi\| = \langle\!\langle (H_n - H_{n,k})\xi_U \rangle\!\rangle < 1/2^k. \tag{3.17}$$

Так как $u^n = (u^n_i) \in D$ и $U_n E_U = \Pi(\bar{u}^n)\xi_U = AH_n$, то

$$\lim_{i\to\infty} \|(a_{n_i} h^n_{n_i} - u^n_{n_i})\xi\| = \langle\!\langle (AH_n - U_n)\xi_U \rangle\!\rangle = 0, \tag{3.18}$$

а поскольку $\bar{u}^k, \bar{u} \in D$, то

$$\lim_{i\to\infty} \|(u_{n_i} - u^k_{n_i})\xi\| = \lim_{i\to\infty} \|u_{n_i}(q_{n_i} - q^k_{n_i})\xi\| = \lim_{i\to\infty} \|(q_{n_i} - q^k_{n_i})\xi\| = \tag{3.19}$$
$$= \rho_U(Q - Q_k).$$

Докажем, что (u_n) – ц.п. В силу (3.13), (3.15) и (3.16) $(h^{n,k}_{n_i})^\infty_{i=1}$ – ц.п. (см. [2], лемма 1.3.2). Так как (a_n) – ц.п. (см. замечание 3.2), то для любого $y \in M$

$$\|[a_{n_i} h^{n,k}_{n_i}, y]\xi\| \le \|a_{n_i}[h^{n,k}_{n_i}, y]\xi\| + \|[a_{n_i}, y]h^{n,k}_{n_i}\xi\| \le$$
$$\le C_1\|[h^{n,k}_{n_i}, y]\xi\| + C_2\|[a_{n_i}, y]\xi\| + C_3\|(h^{n,k}_{n_i} - h'^{n,k}_{n_i})\xi\|,$$

где $C_1 = \sup_i \|a_i\|$, $C_2 = \sup_i \|h'^{n,k}_i\|$, $C_3 = 2\max(C_i, \|y\|)$. Понятно, что первое слагаемое стремится к нулю при $i \to \infty$, поскольку $(h^{n,k}_{n_i})^\infty_{i=1}$ – ц.п., второе – так как (a_{n_i}) – ц.п., третье – ввиду (3.15). Таким образом, $(a_{n_i} h^{n,k}_{n_i})^\infty_{i=1}$ – ц.п. в M.

При достаточно больших n_i в силу (3.17)

$$\|(a_{n_i} h^n_{n_i} - a_{n_i} h^{n,k}_{n_i})\xi\| \le C_1\|(h^n_{n_i} - h^{n,k}_{n_i})\xi\| < C_1/2^k, \tag{3.20}$$

а благодаря (3.13)

$$\|a_{n_i} h^{n,k}_{n_i}\| \le C_1 C < \infty, \tag{3.21}$$

где $C_1 C$ не зависит от n_i и k. Ввиду (3.20) и (3.21) из леммы 1.5 выводим, что $(a_{n_i} h^k_{n_i})$ – ц.п. в M. Но тогда, согласно (3.18),

$(u^k_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ – также ц.п. в $M(k\in N)$. Поскольку

$$\|u^k_{n_i}\| = \|u_{n_i} q^k_{n_i}\| \le 1,$$

то, учитывая (3.19) и вспоминая, что $s\text{-}\lim_{n\to\infty} Q_n = Q$, из леммы 1.3 выводим, что (u_{n_i}) – ц.п. в M.

Итак, (u_{n_i}) – ц.п. В силу (3.8) $s\text{-}\lim_{i\to\infty} p_{n_i} = 0$, но тогда $(u^*_{n_i})$ – также ц.п. в M. Можно предполагать, что индексы n_i выбраны таким образом, что и (q_{n_i}) – ц.п. в M (так как $Q = \Pi(\bar q)E \in C^U_M$, то для правильного выбора индексов (n_i) нужно было бы расширить C^* –алгебру D, включив туда $\bar q = (q_n)$ и $\bar r^i = (r^i_n)$, где $\Pi(\bar r^i)E_U$ – аналитические элементы из C^U_M, для которых $s\text{-}\lim_{i\to\infty}\Pi(\bar r^i)E_U = Q$, а затем поступить в соответствии с доказательством леммы 1.4). Но тогда если $t_{n_i} = I - q_{n_i} - p_{n_i}$, то t_{n_i} – проектор (см. (3.7)), а (t_{n_i}) – ц.п. в M. Таким образом, $(u^*_{n_i}), (q_{n_i})$ и (t_{n_i}) – ц.п. в M. Существование таких ц.п. противоречит лемме 2.5. Следовательно, $A = 0$ и $P = \varphi_N(P)$. Поэтому $[E_U, P] = 0$, а в силу (3.1) $E_U P \in C^U_M$ для $P = \Pi(\overline{\gamma(p)})$, где p – произвольный проектор из M. Отсюда $[\Pi(\tilde M_\gamma), E_U] = 0$ и $\Pi(\tilde M_\gamma)E \subset C^U_M$. Осталось заметить, что в силу утверждения 2.1 случай $PE_U = \lambda E_U$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, исключен для $p \ne 0,1$.

Теорема доказана.

Из теоремы можно извлечь ряд любопытных следствий.

<u>Следствие 3.3.</u> Если $\bar x = (x_n)$ – ц.п. в M и $X = \Pi(\bar x)$, то $(I - E_U)XE_U = 0$. Если $\bar x^* = (x^*_n)$ – нетривиальные ц.п. в M, то $\bar x \in C_M / T_M$, где C_M определена в начале статьи, а T_M – множество тривиальных ц.п. в M.

Действительно, пусть $A = (I-E)XE$. Как и при доказательстве теоремы $[A, \Pi(\bar y)]E_U = 0$ для $\bar y \in M_d$. Отсюда следует, что $A^*A = |A|^2 \in C^U_M$. Повторяя почти дословно доказательство теоремы 3.1 можно придти к выводу, что $A = 0$. Более того, если $\bar x^*$ – нетривиальная ц.п. в M, то $(I-E)X^*E = 0$, а потому $EX(I-E) = 0$. Таким образом, $X = EXE + (I-E)X(I-E)$ и $[X, E_U] = 0$, следовательно $\bar x = (x_n) \in \bar N$, но тогда $\bar x \in C_M$.

<u>Следствие 3.4.</u> $\Pi_U(\tilde M_\gamma)E_U$ – подфактор C^U_M, $*$ – изоморфный M.

Доказательство. Так как ξ_U – циклический отделяющий вектор для C^U_M, то C^U_M – конечная, либо σ – конечная собственно бесконечная W^* –алгебра, а $x \to \Pi_U(\overline{\gamma(x)})E_U$ есть $*$ –изоморфизм M в C^U_M. Согласно теореме 7 [7] это отображение σ – слабо непрерывно, $\Pi_U(\tilde M_\gamma)E_U$ – подфактор C^U_M *).

Доказательство закончено.

<u>Теорема 3.5.</u> Факторы типа III_0, как и II_∞, не являются ас.аб. (случай II_∞ рассмотрен в [4], случай III_0 сформулирован в качестве проблемы в [5]).

*) Если M – конечный или собственно бесконечный фактор.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно следствию 1.5.4 и теореме 1.5.5[3] алгебра C_M^U для фактора M типа III_0 (а также II_∞) либо коммутивна, либо имеет тип II_1. Поэтому C_M^U не может содержать в качестве подфактора фактор типа III_0 (или бесконечную $*$-алгебру, как в случае II_∞). Отсюда и из следствия 3.4 вытекает справедливость теоремы.

Теорема 3.6. Условимся говорить, что фактор M обладает свойством L^*, если в M существуют ц.п. унитарных операторов (u_n) и (u_n^*) такие, что $w\text{-}\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ (ср. с определением 1.1). Для того, чтобы $C_M^U \neq \mathbb{C}$ необходимо и достаточно, чтобы M обладал свойством L^*. Более того, если $\overline{\lim_{n\to\infty}} \|[u_n, u_n^*]\xi\| > 0$, то $C_M^U \neq Z(C_M^U)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно следствию 3.3 $\Pi(\bar{u})^* E_U \in C_M^U$, где $\bar{u} = (u_n)$. Нужно показать, что случай $UE_U = \lambda E_U$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, исключен. Предположим противное. Тогда, с одной стороны,

$$\langle\langle (U-\lambda)\xi_U \rangle\rangle = \lim_{n\in U} \|(u_n-\lambda)\xi\|^2 = 0.$$

С другой, – поскольку $w\text{-}\lim_n u_n = 0$, то

$$\lim_{n\in U} \|(u_n-\lambda)^2\xi\|^2 = 2 - 2\lim_{n\in U} \mathrm{Re}\,\bar{\lambda}(u_n\xi, \xi) = 2.$$

Противоречие доказывает, что $UE_U \neq \lambda E_U$. Обратное утверждение доказано в теореме 1.3.

Доказательство закончено.

Теорема 3.7.*) Пусть Γ – аменабельная группа [6] автоморфизмов фактора M. Предположим, что элементы $\gamma \in \Gamma$ занумерованы так, что $\gamma_0 = e$, и для любых $x, y \in M$

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} [\gamma_n(x), y] = 0 .$$

Тогда на M существует Γ – инвариантное т.н. состояние.

Приведем основные моменты доказательства, предположив для простоты, что Γ – свободная циклическая группа с образующей γ. Общий случай рассматривается аналогично с учетом [6, §2.4, 2.6].

Итак, рассмотрим C^*-алгебру $\bar{M} = l^\infty(M)$ ограниченных по норме последовательностей $\bar{x} = (x_n)$, где $x_n \in M$. Определим на $\bar{M}$ состояние, положив

$$\mu_U(\bar{x}) = \lim_{n\in U} \mu_n(\rho(x_n)),$$

где ρ – т.н. состояние на M; $(\rho(x_n)) \in l^\infty$; U – свободный ультра-

*) Доказана совместно с Н.Нессоновым.

фильтр на N; μ_n – функционал на l^{∞} такой, что если $\bar{\alpha}=(\alpha_n)\in l^{\infty}$, то

$$\mu_n(\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_n .$$

Построим с помощью μ_U представление Π_μ алгебры $\bar{M}$ в гильбертовом пространстве H_μ. Тогда $\mu_U(\bar{x})=(\Pi_\mu(\bar{x})\xi_\mu,\xi_\mu)$, где ξ_μ – вектор из H_μ, для которого $\|\xi_\mu\|=1$ и $[\Pi_\mu(\bar{M})\xi_\mu]=H_\mu$. Заметим, что если $\bar{x}\in\bar{M}_d$, то

$$\mu_U(\bar{x})=\rho(x_1),\quad \bar{x}=(x_n)\in\bar{M}_d .$$

Поэтому $\Pi_\mu(\bar{M}_d)\sim M$.

Более того, можно проверить, что все результаты [2] переносятся и для рассматриваемого случая и можно определить, как и в [2], асимптотическую алгебру C_M^{μ}. (При этом нужно воспользоваться аналогом хорошо известного утверждения: если $\bar{\alpha}=(\alpha_n)\in l^{\infty}$ и $\alpha_n\geq 0$, $\lim\limits_{n}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=0$, то существует подпоследовательность (α_{n_k}) такая, что $\lim\limits_{k}\alpha_{n_k}=0$). Оказывается, что остаются справедливыми и результаты раздела 1 [3]. Из аналога теоремы 3.1 следует, что $\Pi_\mu(\bar{M}_\gamma)E_\mu$ – подфактор C_M^{μ}, изоморфный M. Но тогда сужение μ_U на $\Pi_\mu(\bar{M}_\gamma)E_\mu$ – т.н. состояние на $\Pi_\mu(\bar{M}_\gamma)\sim M$, а из конструкции μ_U следует, что μ_U – Γ-инвариантное состояние на $\Pi_\mu(\bar{M}_\gamma)$.

Это доказывает теорему.

Литература

1. Голодец В.Я. Асимптотическая алгебра, ее применение к изучению модулярных операторов и их спектральных свойств. – Докл. АН СССР, 1975, 220, №1, с.15–18.
2. Голодец В.Я. Спектральные свойства модулярных операторов и множество асимптотических отношений. – Изв. АН СССР. Сер. мат., 1975, 39, №9, с.635–656.
3. Голодец В.Я. Асимптотическая алгебра, ее свойства и некоторые применения. – В кн.: Вопросы математической физики и функционального анализа. К., 1976, с.55–71.
4. Claser M.S. Asymptotic abeliannes of infinite factors.– Trans. Amer. Math. Soc., 1973, 178, p.147–163.
5. Connes A., Woods F.G. Existence de facteurs infinis asymtotiquement abeliens. – C. r. Acad. Sci. A, 1974, 279, N6, p.189–191.
6. Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах. М., Мир, 1973. 136 с.
7. Takesaki M. On the conjugate space of operator algebra.– Tohoku Math. J., 1958, N 40, p.194–203.

8. Takesaki M. Tomita's theory of modular hilbert algebras and its appl. - Lect. Notes Math., 1970, 128, p. 136 - 153.
9. Wright F.B. A reduction for algebras of finite type. - Ann. Math., 1954, 60, p. 560 - 570.

УДК 517.946

Р. Н. Давыдов

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

В данной статье рассматривается класс операторов Штурма-Лиувилля с комплексным ограниченным потенциалом, удовлетворяющим n-му аналогу стационарного уравнения Кортевега-де Фриса (КдФ). Для этого класса операторов, который возник при решении уравнения КдФ [1,2], получен явный вид спектральной матрицы и спектральной функции соответственно на оси и на полуоси. Из устного сообщения известно, что аналогичные формулы независимо получил И.М.Кричевер.

1. Следуя [1], рассматриваем оператор

$$M[y]=2N(x,z)\frac{dy}{dx}-N'_x(x,z)y\ , \qquad (1.1)$$

который переводит решения уравнения

$$L[y]\equiv y''(x)-q(x)y(x)=zy(x)\,. \qquad (1.2)$$

в функции $M[y]$, удовлетворяющие уравнению

$$L\{M[y]\}-zM[y]=K[q]y=\{N'''_{xxx}-4N'_x(q-z)-2Nq'\}y. \qquad (1.3)$$

Если функция $N(x,z)$ удовлетворяет уравнению

$$N'''_{xxx}(x,z)-4N'_x(x,z)(q(x)-z)-2N(x,z)q'(x)=0,$$

то оператор M переводит решения уравнения (1.1) в решения того же уравнения.

Если искать функцию $N(x,z)$ в виде такого полинома по z

$$N_n(x,z)=\sum_{k=0}^{n} n_k(x)\,z^{n-k},$$

чтобы коэффициент при y в правой части (1.3) не зависел от z, то для n_k получим систему уравнений

$$-4n_0'=0,\quad -4n_k'=n_{k-1}'''-4n_{k-1}'q-2n_{k-1}q'\quad (k=1,2,\dots,n),$$

$$K^n[q]=2n_n q'+4n_n' q-n_n'''.$$

Исходя из общего вида полинома $N_n(x,z)$ [1], нетрудно показать, что коэффициенты n_k суть полиномы от функций $\sigma_{2j+1}(x)$, $j=0,1,\dots,n-1$, которые определяются из рекуррентных соотношений

$$\sigma_1(x)=q(x),\quad \sigma_m(x)=-\sigma_{m-1}'(x)-\sum_{j=1}^{m-1}\sigma_{m-1-j}(x)\sigma_j(x)$$

и являются, в свою очередь, полиномами от $q(x), q'(x),\dots,q^{(2n-2)}(x)$.

Таким образом, для существования оператора $M[y]$ вида (1.1) с полиномиальным по z коэффициентом $N_n(x,z)$ необходимо, чтобы потенциал $q(x)$ удовлетворял дифференциальному уравнению

$$K^n[q]=0. \tag{1.4}$$

В дальнейшем уравнение (1.4) будем называть n-м аналогом стационарного уравнения КдФ.

Пусть $q(x)$ – ограниченная комплексная функция, удовлетворяющая уравнению (1.4), а $\psi_1(x,z)\in L^2(-\infty,0]$, $\psi_2(x,z)\in L^2[0,\infty)$ суть решения уравнения (1.2). Такие решения, как известно, существуют для всех z таких, что

$$\operatorname{Im} z<\inf_x \operatorname{Im} q(x)=r_0$$

или

$$\operatorname{Im} z>\sup_x \operatorname{Im} q(x)=r_1,$$

и их можно представить в виде

$$\psi_i(x,z)=\omega_2(x,\sqrt{z})+m_i(z)\,\omega_1(x,\sqrt{z}),\quad (i=1,2),$$

где $\omega_1(x,\sqrt{z}),\omega_2(x,\sqrt{z})$ – решения (1.2), удовлетворяющие условиям

$\omega_1(0,\sqrt{z}) = \omega_2'(0,\sqrt{z}) = 1$, $\omega_1'(0,\sqrt{z}) = \omega_2(0,\sqrt{z}) = 0$, а $m_1(z)$ и $m_2(z)$ – функции Вейля, голоморфные вне полосы $r_0 \le Im\, z \le r_1$. Покажем, что в нашем случае функции $m_i(z)$ можно аналитически продолжить на плоскость с $n+1$ разрезом.

Заметим, что функции $\varphi_i(x,z) = M_n[\psi_i(x,z)]$ будут, очевидно, также решениями (1.2), интегрируемыми с квадратом на соответствующих полуосях. Действительно, для каждого $A\,(0<A<\infty)$

$$0 \le \int_{-A}^{0} |\psi_1'(x,z)|^2 dx = Re\, \psi_1'\bar{\psi}_1\Big|_{-A}^{0} - Re \int_{-A}^{0} \psi_1''(x,z)\overline{\psi_1(x,z)}\,dx =$$

$$= Re\, \psi_1'\bar{\psi}_1\Big|_{-A}^{0} - \int_{-A}^{0} Re(q(x)-z)|\psi_1(x,z)|^2 dx \le$$

$$\le Re\, \psi_1'\bar{\psi}_1\Big|_{-A}^{0} + \int_{-A}^{0} |Re(q(x)-z)|\,|\psi_1(x,z)|^2 dx .$$

Интеграл в правой части последнего неравенства ограничен равномерно по A,

$$Re\, \psi_1'\bar{\psi}_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}|\psi_1(x,z)|^2 ,$$

а так как $\psi_1(x,z) \in L^2(-\infty,0]$, то существует такая последовательность $\{A_n\}_1^\infty$, $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, что $\left\{\frac{d}{dx}|\psi_1(x,z)|^2\right\}_{x=-A_n} \ge 0$. Переходя к пределу по $A_n \to \infty$, получаем

$$0 \le \int_{-\infty}^{0} |\psi_1'(x,z)|^2 dx \le Re\, \psi_1'(0,z)\overline{\psi_1(0,z)} + \int_{-\infty}^{0} |Re(q(x)-z)|\,|\psi_1(x,z)|^2 dx < \infty,$$

т.е. $\psi_1'(x,z) \in L^2(-\infty,0]$. Если функция $q(x)$, удовлетворяющая уравнению (1.4), ограничена вместе с достаточным числом производных, то $N_n(x,z)$ и $N_n'(x,z)$ суть полиномы по z с ограниченными по x коэффициентами. Таким образом,

$$\varphi_1(x,z) = 2N_n(x,z)\psi_1'(x,z) - N_n'(x,z)\psi_1(x,z) \in L^2(-\infty,0] .$$

Аналогично доказывается, что $\varphi_2(x,z) \in L^2[0,\infty)$.

По теореме Вейля имеется альтернатива, либо любое решение (1.2) на полуоси суммируемо с квадратом, либо существует единственное решение, суммируемое с квадратом. Очевидно, в первом случае должно существовать отличное от нуля решение $\psi(x,z) \in L^2(-\infty,\infty)$. Однако если вещественная часть $q(x)$ ограничена, то для всех z таких, что

$$Re\, z < \inf_x Re\, q(x)$$

не существует нетривиального решения (1.2) из $L^2(-\infty,\infty)$. Следовательно, имеет место случай предельной точки, и существует единственное с точностью до множителя решение из $L^2(-\infty,0]$ и единственное решение из $L^2[0,\infty)$. Таким образом,

$$\varphi_i(x,z)=a_i(z)(\omega_2(x,\sqrt{z})+m_i(z)\omega_1(x,\sqrt{z}))$$

и

$$m_i(z)=\frac{\varphi_i(0,z)}{\varphi_i'(0,z)}=\frac{2N_n(0,z)-N_n'(0,z)m_i(z)}{[N_n'(0,z)+2N_n(0,z)(q(0)-z)-N''(0,z)]m_i(z)},$$

откуда

$$m_i(z)=\frac{-N_n'(0,z)\pm\sqrt{N_n'^2(0,z)+2N_n(0,z)\{2N_n(0,z)(q(0)-z)-N_n''(0,z)\}}}{2N_n(0,z)(q(0)-z)-N_n''(0,z)}. \quad (1.5)$$

Обозначим

$$R_{n+1}(z)=2N_n(0,z)(q(0)-z)-N_n''(0,z),$$

$$Q_{n-1}(z)=-N_n'(0,z),\ P_{2n+1}(z)=Q_{n-1}^2(z)+2N_n(0,z)R_{n+1}(z).$$

Для полного определения $m_i(z)$, например в полуплоскости $Im\,z>r_1$, нужно оговорить выбор ветви корня. С этой целью заметим, что для $\psi_i(x,z)$ справедливы равенства

$$\int_0^\infty\left(1-\frac{Im\,q(x)}{Im\,z}\right)\psi_2(x,z)\overline{\psi_2(x,z)}dx=-\frac{Im\,m_2(z)}{Im\,z}<\infty,$$

$$\int_{-\infty}^0\left(1-\frac{Im\,q(x)}{Im\,z}\right)\psi_1(x,z)\overline{\psi_1(x,z)}dx=\frac{Im\,m_1(z)}{Im\,z}<\infty.$$

Отсюда следует, что если только мнимая часть z достаточно велика по модулю, то $Im\,m_1(z)$ имеет одинаковый знак с $Im\,z$, а $Im\,m_2(z)$ - противоположный. Исходя из асимптотики для функций Вейля при $z\to\infty$, следующей из формулы (1.5), имеем

$$m_i(z)\sim\frac{\pm\sqrt{-4n_0^2z^{2n+1}}}{-2n_0z^{n+1}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)\right). \quad (1.6)$$

Сопоставим функции $m_1(z)$ ту ветвь, значения которой лежат в верхней полуплоскости, когда $Im z \to +\infty$ (при этом в формуле (1.5) пишем знак плюс перед корнем), а функции $m_2(z)$ – другую ветвь (в формуле (1.5) – знак минус).

Пусть все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n+1}$ полинома $P_{2n+1}(z)$ лежат внутри некоторой окружности $C_R(|z|=R)$. Соединим один из корней разрезом с бесконечно удаленной точкой так, чтобы разрез не пересекал части окружности C_R, лежащей в полуплоскости $Re z<0$, и не выходил из полосы $r_0<z<r_1$. Остальные корни соединим попарно разрезами внутри окружности таким образом, чтобы $\sqrt{P_{2n+1}(z)}$ был однозначной функцией на плоскости с разрезами. Теперь можно продолжить $m_i(z)$ в полуплоскость $Im z<r_0$, причем там $Im\, m_1(z)<0$, а $Im\, m_2(z)>0$. Таким образом, функции $m_1(z)$ и $m_2(z)$ аналитичны и ограничены в плоскости с $n+1$ указанным разрезом, исключая конечное число полюсов.

В самосопряженном случае функции $m_i(z)$ можно аналитически продолжить на плоскость с разрезами вдоль вещественной оси. Действительно, в этом случае функции Вейля голоморфны в полуплоскостях $Im z>0$ и $Im z<0$, и, следовательно, все их особые точки вещественны. Перенумеруем корни полинома $P_{2n+1}(z)$ в порядке возрастания – $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_{2n+1}$ и проведем разрезы вдоль вещественной оси, соединяя попарно λ_1 и λ_2, λ_3 и λ_4 и т.д. От точки λ_{2n+1} разрез проведем до $+\infty$. Из вида полинома $P_{2n+1}(z)$ следует, что на разрезах $P_{2n+1}(\lambda)<0$, а в лакунах – отрезках вещественной оси, дополнительных к разрезам, $P_{2n+1}(z)>0$. А так как справедливо равенство

$$2R_{n+1}(z)N_n(z)=P_{2n+1}(z)-Q_{n-1}^2(z),$$

то полюсы функций $m_i(z)$ могут лежать только в лакунах

$$(-\infty,\lambda_1],[\lambda_2,\lambda_3],\ldots,[\lambda_{2n},\lambda_{2n+1}].$$

2. Рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля на оси

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda^2 y(x)\,(-\infty<x<\infty) \tag{2.1}$$

с потенциалом, удовлетворяющим неравенству

$$|Im\, q(x)|<C. \tag{2.2}$$

Как известно, решения $\omega_1(x,\lambda), \omega_2(x,\lambda)$ можно выразить через $\cos\lambda x$ и $\frac{\sin\lambda x}{\lambda}$ с помощью операторов преобразования

$$\omega_1(x,\lambda)=\cos\lambda x+\int_{-x}^{x}K(x,t)\cos\lambda t\,dt,$$

$$\omega_2(x,\lambda)=\frac{\sin\lambda x}{\lambda}+\int_{-x}^{x}K(x,t)\,\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\,dt,$$

$$\cos\lambda x=\omega_1(x,\lambda)+\int_{-x}^{x}L(x,t)\omega_1(t,\lambda)\,dt, \tag{2.3}$$

$$\frac{\sin\lambda x}{\lambda}=\omega_2(x,\lambda)+\int_{-x}^{x}L(x,t)\omega_2(t,\lambda)\,dt\ .$$

Следовательно, можно ввести для финитных $f(x)\in L^2(-\infty,\infty)$ ω-преобразования Фурье

$$\omega_i(f,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\omega_i(x,\lambda)\,dx,$$

где $\omega_i(f,\lambda)$ – четные целые функции экспоненциального типа.

Распространяя результаты [3] на случай всей оси, можно показать, что для каждого уравнения (2.1) существует спектральная матрица обобщенных функций (R_{ij}) такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)\,dx=\sum_{i,j=1}^{2}(R_{ij},\omega_i(f,\lambda)\omega_j(g,\lambda)), \tag{2.4}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – произвольные финитные функции из $L^2(-\infty,\infty)$. Обобщенные функции R_{ij} связаны с ядром $L(x,t)$ преобразования (2.3) формулами

$$R_{11}=\frac{1}{\pi}[1+C(L)],\qquad R_{12}=\frac{1}{\pi}C(L'_t)\ ,$$

$$R_{21}=\frac{1}{\pi}C(L'_x),\qquad R_{22}=\frac{\lambda^2}{\pi}[1+C(M)]\ .$$

Здесь $C(A)$ – $\cos$ –преобразование функции $A(x)$, а

$$L(x)\equiv L(x,0),\qquad L'_t\equiv\left\{\frac{\partial}{\partial t}L(x,t)\right\}_{t=0},$$

$$L'_x(x)\equiv\left\{\frac{\partial}{\partial x}L(x,t)\right\}_{t=0},\ M(x)\equiv-\int_0^x L'_t(\xi)\,d\xi .$$

Если функции $\omega_1(f,\lambda)$ и $\lambda\,\omega_2(f,\lambda)$ суммируемы на вещественной оси, то

$$f(x)=\sum_{i,j=1}^{2}(R_{ij},\omega_i(f,\lambda)\omega_j(x,\lambda))\ . \tag{2.5}$$

Обозначим через D множество всех финитных функций, имеющих абсолютно непрерывную третью производную и суммируемую с квадратом на оси четвертую производную.

Если $f(x)\in D$, то $\omega_1(f,\lambda)=O(|\lambda|^{-2})$, а $\omega_2(f,\lambda)=O(|\lambda|^{-3})$, и, значит, для всех $f(x)\in D$ справедливо равенство (2.5), откуда непосредственно следует, что

$$f(0)=\sum_{i=1}^{2}(R_{i1},\ \omega_i(f,\lambda)), \tag{2.6}$$

$$f'(0)=\sum_{i=1}^{2}(R_{i2},\ \omega_i(f,\lambda)).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(x,z)=\frac{\psi_2(x,z)}{m_2(z)-m_1(z)}\int_{-\infty}^{x}f(\xi)\psi_1(\xi,z)d\xi+\frac{\psi_1(x,z)}{m_2(z)-m_1(z)}\int_{x}^{\infty}f(\xi)\psi_2(\xi,z)d\xi.$$

Легко заметить, что

$$\varphi(0,z)=\frac{1}{m_2(z)-m_1(z)}\left[m_2(z)\int_{-\infty}^{0}f(\xi)\psi_1(\xi,z)d\xi+m_1(z)\int_{0}^{\infty}f(\xi)\psi_2(\xi,z)d\xi\right], \tag{2.7}$$

$$\varphi'_x(0,z)=\frac{1}{m_2(z)-m_1(z)}\left[\int_{-\infty}^{0}f(\xi)\psi_1(\xi,z)d\xi+\int_{0}^{\infty}f(\xi)\psi_2(\xi,z)d\xi\right]. \tag{2.8}$$

Выражая $\psi_i(\xi,z)$ через $\omega_i(\xi,\sqrt{z})$ и вводя функции

$$m_{11}(z)=\frac{m_1(z)\,m_2(z)}{m_2(z)-m_1(z)},\quad m_{12}(z)=\frac{m_2(z)}{m_2(z)-m_1(z)},$$

$$m_{21}(z)=\frac{m_1(z)}{m_2(z)-m_1(z)},\quad m_{22}(z)=\frac{1}{m_2(z)-m_1(z)},$$

перепишем (2.7), (2.8) так:

$$\varphi(0,z)=m_{11}(z)\,\omega_1(f,\sqrt{z})+m_{12}(z)\omega_2(f,\sqrt{z})-\int_{0}^{\infty}f(\xi)\omega_2(\xi,\sqrt{z})d\xi, \tag{2.9}$$

$$\varphi'_x(0,z)=m_{21}(z)\omega_1(f,\sqrt{z})+m_{22}(z)\omega_2(f,\sqrt{z})+\int_{0}^{\infty}f(\xi)\,\omega_1(\xi,\sqrt{z})d\xi. \tag{2.10}$$

С другой стороны

$$\int_{-\infty}^{0}f(\xi)\psi_1(\xi,z)d\xi=\frac{1}{z}\int_{-\infty}^{0}f(\xi)L[\psi_1(\xi,z)]d\xi=$$

$$=\frac{1}{z}\left(-f(0)+m_1(z)f'(0)+\int_{-\infty}^{0}L[f(\xi)]\psi_1(\xi,z)\,d\xi\right)=$$

$$= \frac{1}{z}\left(-f(0)+m_1(z)f'(0)-\frac{g(0)}{z}+\frac{m_1(z)g'(0)}{z}\right.+\frac{1}{z}\int_{-\infty}^{0} L[g(\xi)]\psi_1(\xi,z)d\xi),$$

$$\int_0^{\infty} f(\xi)\psi_2(\xi,z)d\xi = \frac{1}{z}\left(f(0)-m_2(z)f'(0)\right)+$$

$$+\frac{1}{z^2}\left(g(0)-m_2(z)g'(0)+\int_0^{\infty} L[g(\xi)]\psi_2(\xi,z)d\xi\right),$$

где $g(\xi) = L[f(\xi)]$.

Следовательно,

$$\varphi(0,z) = \frac{1}{z}\left(-f(0)-\frac{g(0)}{z}+\frac{m_2(z)\int_{-\infty}^{0} L[g]\psi_1 d\xi + m_1(z)\int_0^{\infty} L[g]\psi_2 d\xi}{z(m_2(z)-m_1(z))}\right),$$

$$\varphi'_x(0,z) = \frac{1}{z}\left(-f'(0)-\frac{g'(0)}{z}+\frac{\int_{-\infty}^{0} L[g]\psi_1 d\xi + \int_0^{\infty} L[g]\psi_2 d\xi}{z(m_2(z)-m_1(z))}\right).$$

Для класса потенциалов, рассмотренных в п.1, была получена асимптотика (1.6). Ясно, что

$$m_2(z)-m_1(z) = O\left(\frac{1}{\sqrt{|z|}}\right).$$

Отсюда, наконец, находим

$$\varphi(0,z) = \frac{1}{z}\left(-f(0)+o(1)\right), \tag{2.11}$$

$$\varphi'_x(0,z) = \frac{1}{z}\left(-f'(0)+o(1)\right). \tag{2.12}$$

В силу определения функций $\psi_1(\xi,z), \psi_2(\xi,z)$ их вронскиан нигде вне полосы $r_0-\varepsilon \le \operatorname{Im} z \le r_1+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ не обращается в нуль и $W(\psi_1,\psi_2)=m_2(z)-m_1(z)$. Таким образом, $\varphi(0,z)$, $\varphi'_x(0,z)$ – голоморфные функции вне полосы $r_0 \le \operatorname{Im} z \le r_1$, и, значит, справедливо тождество

$$\int_{-N+i(r_1+\varepsilon)}^{N+i(r_1+\varepsilon)} \varphi(0,z)dz + \int_{C_N^+}\varphi(0,z)dz + \int_{N+i(r_0-\varepsilon)}^{-N+i(r_0-\varepsilon)} \varphi(0,z)dz + \int_{C_N^-}\varphi(0,z)dz = 0,$$

где через C_N^+ обозначена полуокружность, лежащая в верхней полуплоскости, диаметром которой служит отрезок $-N\le \operatorname{Re} z\le N$, $\operatorname{Im} z = r_1+\varepsilon$, а C_N^- симметрична C_N^+ относительно прямой $\operatorname{Im} z=(r_1+r_0)/2$.

В силу (2.11)

$$\lim_{N\to\infty}\int_{C_N^+}\varphi(0,z)dz=\lim_{N\to\infty}\int_{C_N^-}\varphi(0,z)dz=-\pi i f(0),$$

откуда

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\int_{-N+i(r_1+\varepsilon)}^{N+i(r_1+\varepsilon)}\varphi(0,z)dz+\int_{N+i(r_0-\varepsilon)}^{-N+i(r_0-\varepsilon)}\varphi(0,z)dz\right\}=2\pi i f(0). \qquad (2.13)$$

Действуя далее так же как в [3], и учитывая, что

$$\int_{-\infty+ia}^{\infty+ia}e^{-\delta z^2}\int_0^\infty f(\xi)\omega_i(\xi,\sqrt{z})d\xi+\int_{-\infty+ib}^{\infty+ib}e^{-\delta z^2}\int_0^\infty f(\xi)\omega_i(\xi,\sqrt{z})d\xi=0,$$

получаем из (2.9) и (2.13)

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{-\infty+i(r_1+\varepsilon)}^{\infty+i(r_1+\varepsilon)}e^{-\delta z^2}\left[m_{11}(z)\omega_1(f,\sqrt{z})+m_{12}(z)\omega_2(f,\sqrt{z})\right]\times\right.$$

$$\left.\times dz+\int_{+\infty+i(r_0-\varepsilon)}^{-\infty+i(r_0-\varepsilon)}e^{-\delta z^2}\left[m_{11}(z)\omega_1(f,\sqrt{z})+m_{12}(z)\omega_2(f,\sqrt{z})\right]dz\right\}.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{-\infty+i(r_1+\varepsilon)}^{\infty+i(r_1+\varepsilon)}e^{-\delta z^2}\left[m_{21}(z)\omega_1(f,\sqrt{z})+m_{22}(z)\omega_2(f,\sqrt{z})\right]\times\right.$$

$$\left.\times dz+\int_{+\infty+i(r_0-\varepsilon)}^{-\infty+i(r_0-\varepsilon)}e^{-\delta z^2}\left[m_{21}(z)\omega_1(f,\sqrt{z})+m_{22}(z)\omega_2(f,\sqrt{z})\right]dz\right\}.$$

В случае ограниченного потенциала можно избавиться от суммирующего множителя $e^{-\delta z^2}$. Так, если $Re\, q(x) > \alpha$, то функции $m_{ij}(z)$ голоморфны в области $Re z < \alpha$. Следовательно, контур интегрирования можно стянуть на контур γ, который должен охватывать область $Re z > \alpha, r_0 - \varepsilon < Im z < r_1 + \varepsilon$, начинаясь в точке $\infty + i(r_0 - \varepsilon)$ и кончаясь в точке $\infty + i(r_1 + \varepsilon)$.

Таким образом, мы доказали, что на всех векторах

$$\vec{\omega}(f, \sqrt{z}) = (\omega_1(f, \sqrt{z}), \omega_2(f, \sqrt{z})),$$

являющихся ω-преобразованиями Фурье функций $f(x) \in D$, спектральная матрица R задачи Штурма-Лиувилля на оси с ограниченным потенциалом, удовлетворяющим n-му аналогу стационарного уравнения КдФ (1.4), может быть задана формулами

$$(R_{jk}, \omega_k(f, \sqrt{z})) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma m_{jk}(z) \omega_k(f, \sqrt{z}) dz.$$

В силу результатов п.1 функции $m_{ij}(z)$ аналитичны в плоскости с $n+1$ разрезом и явно выражаются через полиномы $N(0,z)$, $N'_x(0,z)$, $N''_{xx}(0,z)$:

$$m_{11}(z) = \frac{N_n(0,z)}{\sqrt{P_{2n+1}(z)}}, \quad m_{12}(z) = \frac{N'_n(0,z)}{2\sqrt{P_{2n+1}(z)}} + \frac{1}{2},$$

$$m_{21}(z) = \frac{N'_n(0,z)}{2\sqrt{P_{2n+1}(z)}} - \frac{1}{2}, \quad m_{22}(z) = \frac{-2N_n(0,z)(q(0)-z) + N''_n(0,z)}{2\sqrt{P_{2n+1}(z)}}.$$

Следовательно, контур интегрирования γ можно стянуть на берега разрезов. Учитывая приращение аргумента подынтегральной функции при обходе λ_i, получаем

$$(R_{ij}, \omega_j(f, \sqrt{z})) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} \int_{C_k} \frac{M_{ij}(\zeta) \omega_j(f, \sqrt{\zeta})}{\sqrt{-\det M(\zeta)}} d\zeta, \tag{2.15}$$

где интегрирование ведется по линии разреза C_k от точки λ_{2k-1} до точки λ_{2k}, матрица $M(\zeta)$ имеет вид

$$M(\zeta) = (M_{ij}(\zeta)) = \begin{pmatrix} 2N_n(0,\zeta) & N'_n(0,\zeta) \\ N'_n(0,\zeta) & -2N_n(0,\zeta)(q(0)-\zeta) + N''_n(0,\zeta) \end{pmatrix},$$

а под $\sqrt{-\det M(\zeta)}$ понимается значение корня при $z \to \zeta$ слева, если двигаться по контуру интегрирования от точки λ_{2k-1} к точке λ_{2k}.

Таким образом, оказывается, что R – матрица регулярных обобщенных функций, определяемых формулой (2.15).

В самосопряженном случае контуры интегрирования C_k являются отрезками вещественной оси – $[\lambda_1,\lambda_2],[\lambda_3,\lambda_4],\dots,[\lambda_{2n+1},\infty)$.

Приведем вид спектральной функции для краевой задачи Штурма–Лиувилля на полуоси с условием в нуле:

$$y(0)=1, \quad y'(0)=h.$$

Этот результат непосредственно вытекает из теоремы 5 [3] и вида функции Вейля $m_2(z)$ для случая ограниченного потенциала, удовлетворяющего уравнению (1.4):

$$(R,\omega_1(f,\sqrt{z}))=\frac{-1}{\pi i}\sum_{k=0}^{n}\int_{C_k}\frac{\sqrt{P_{2n+1}(z)}\ \omega_1(f,\sqrt{z})dz}{R_{n+1}(z)-h(2N_n'(0,z)+2hN_n(0,z))}-$$

$$-\sum Res\,\frac{\omega_1(f,\sqrt{z})[-N_n'(0,z)-\sqrt{P_{2n+1}(z)}\,]}{R_{n+1}(z)-hN_n'(z)-h\sqrt{P_{2n+1}(z)}}.$$

Здесь C_k – те же контуры, что и в (2.15), а вычеты берутся по всем полюсам. Самосопряженный случай для $N_n'(0,z)\equiv 0$ впервые рассмотрел Н.И.Ахиезер [5].

Литература

1. Марченко В.А.Периодическая задача Кортевега–де Фриса. – Мат. сб., 1974, 95, №3, с.331–356.
2. Новиков С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриса. Ч.1.– Функц. анализ, 1974, 8, вып.3, с.54–66.
3. Марченко В.А. Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка. – Матем. сб. 1960, 52, №2, с.739–788.
4. Лидский В.Б. Несамосопряженный оператор типа Штурма–Лиувилля с дискретным спектром. – Тр. Моск. мат. о–ва, 1960, 9, с.45–79.
5. Ахиезер Н.И. Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов. – Докл. АН СССР, 1961, 141, №2, с.263–266.

УДК 517.946

В.А.Козел, В.П.Котляров

КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0$

Введение

После первых работ В.А.Марченко [1] и С.П.Новикова [2], в которых были развиты два подхода к решению периодической задачи для уравнения Кортевега–де Фриса, появился ряд работ, посвященных этому кругу вопросов (см. [3]). В частности, в работах А.Р.Итса, В.Б.Матвеева [4,6], Б.А.Дубровина, С.П.Новикова [5] были получены явные формулы для так называемых конечнозонных решений (периодических и почти периодических) уравнения КдФ и нелинейного уравнения Шредингера. Эти формулы получены на пути развития идеи Н.И.Ахиезера [7], использованной им для решения некоторых обратных задач, связанных с оператором Хилла. При этом существенную роль играла самосопряженность соответствующих обратных задач.

Многие физически интересные нелинейные уравнения оказываются связанными с несамосопряженными операторами, для которых исследование условий разрешимости периодической обратной задачи часто оказывается мало эффективным. Поэтому в несамосопряженном случае для получения формул для конечнозонных решений нелинейных уравнений удобнее применять другой подход, не использующий спектральную теорию операторов. Этот подход сочетает в себе с одной стороны, применение методов работы [1], позволяющих описывать конечнозонные решения с помощью автономных систем нелинейных дифференциальных уравнений (см., например, [9, 10], а с другой, – использование идей работ [4, 8] при интегрировании таких автономных систем уравнений и получении явных формул.

В данной работе будет дано полное изложение результатов, полученных таким путем для уравнения "*Sine-Gordon*"

$$u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0, \tag{1}$$

для которого основные результаты опубликованы в [9, 11]. Такой подход применялся также и в работах [10, 12] для нелинейного уравнения Шредингера.

Следует отметить, что в последнее время И.М.Кричевером [13, 14] предложен алгебро-геометрический метод построения конечнозонных решений для тех нелинейных уравнений, которые возникают в схеме В.Е.Захарова и А.Б.Шабата [15]. Для уравнения (1) модификацию этого метода дал А.Р.Итс, который получил явные формулы для решений этого уравнения, совпадающие с нашими формулами, полученными ранее в [11].

1. Конечнозонные потенциалы

Как известно [16], в методе обратной задачи с уравнением (1) ассоциируется пара Лакса линейных операторов L и M, обладающих тем свойством, что формальное равенство $L_t=[L,M]\equiv LM-ML$ эквивалентно уравнению (1). Оператор L имеет вид

$$L=I\frac{d}{dx}+V(x,t);\ I=\begin{pmatrix} J & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix} A, & C\\ C, & 0\end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

$$J=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad A=\frac{i}{4}\begin{pmatrix} 0 & w\\ w & 0\end{pmatrix},\quad C=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{iu/2} & 0\\ 0 & e^{-iu/2}\end{pmatrix},$$

где $u=u(x,t)$ и $w=w(x,t)$, вообще говоря комплекснозначные функции.

Пусть 4-х компонентная вектор-функция $\varphi(x)$ является решением уравнения $L\varphi=\lambda\varphi$, где $\lambda\neq 0$ – произвольное комплексное число. Здесь и далее в этом параграфе нас будет интересовать зависимость потенциала V только от x. В силу вырожденности оператора L это уравнение эквивалентно

$$J\psi_x' + A\psi + \frac{1}{\lambda}H\psi = \lambda\psi, \tag{1.2}$$

где $H=C^2$, а $\psi=\psi(x)$ – 2-х компонентная вектор-функция. Записав последнее уравнение в виде

$$\psi_x' = -B\psi, \tag{1.3}$$

где $B=\lambda J-JA-\frac{1}{\lambda}JH$, дадим следующее

Определение. Матричная функция $V(x)$ называется конечнозонным потенциалом оператора L, если матричное уравнение

$$\Psi_x'=[\Psi,B]\equiv\Psi B-B\Psi \tag{1.4}$$

имеет нетривиальное решение, полиномиально зависящее от λ и обладающее свойством $Sp\,\Psi=0$.

Отметим, что такое определение конечнозонности не требует периодичности матрицы $V(x)$ и в периодическом случае является эквивалентным определению работы [10] для несамосопряженного оператора Дирака, а также эквивалентно необходимым и достаточным условиям конечнозонности оператора Штурма-Лиувилли, установленным в работе [4].

Пусть ψ_{ik} $(i,k=1,2)$ – элементы матрицы Ψ. Тогда уравнение (1.4) эквивалентно системе дифференциальных уравнений для функций $\psi_{12}(x)$, $\psi_{21}(x)$, $\psi_-(x)=(\psi_{11}-\psi_{22})/2i$, $\psi_+(x)=(\psi_{11}+\psi_{22})/2$,

$$i\psi_-' = \left(\lambda - \frac{e^{iu}}{16\lambda}\right)\psi_{12} + \left(\lambda - \frac{e^{-iu}}{16\lambda}\right)\psi_{21},$$

$$i\psi_{12}' = 2\left(\lambda - \frac{e^{-iu}}{16\lambda}\right)\psi_- + \frac{w}{2}\psi_{12}, \qquad (1.5)$$

$$i\psi_{21}' = 2\left(\lambda - \frac{e^{iu}}{16\lambda}\right)\psi_- - \frac{w}{2}\psi_{21}.$$

$$\psi_+' = 0.$$

Очевидно, что всякое полиномиальное по λ матричное решение уравнения (1.4) единственным образом определяет полиномиальное решение системы (1.5) и наоборот.

В работе [9] описано все множество полиномиальных решений системы (1.5), которые имеют вид

$$\psi_- = \sum_{k=1}^{N_1}\psi_-^{(k)}\lambda^{2k-1},\ \psi_{12} = \sum_{k=0}^{N_2}\psi_{12}^{(k)}\lambda^{2k},\ \psi_{21} = \sum_{k=0}^{N_3}\psi_{21}^{(k)}\lambda^{2k}. \qquad (1.6)$$

Иными словами, установлены необходимые и достаточные условия, при которых полиномы (1.6) удовлетворяют системе уравнений (1.5). Эти условия таковы:

1) $N_1 = N_2 = N_3 = N \quad (N = 0, 1, 2, \ldots)$;

2) $\psi_{12}^{(N)} = -\psi_{21}^{(N)} = const$,

$$e^{iu}\psi_{12}^{(0)} + e^{-iu}\psi_{21}^{(0)} = 0; \quad w = -4\psi_-^{(N)}/\psi_{12}^{(N)};$$

3) коэффициенты полиномов (1.6) удовлетворяют нелинейной автономной системе дифференциальных уравнений:

$$i(\psi_-^k)' = \psi_{12}^{k-1} + \psi_{21}^{k-1} + \frac{1}{16}(-\psi_{12}^0\psi_{21}^0)^{-1/2}(\psi_{21}^0\psi_{12}^k - \psi_{12}^0\psi_{21}^k),$$

$$i(\psi_{12}^k)' = 2\psi_-^k - \frac{1}{8}(-\psi_{12}^0\psi_{21}^0)^{-1/2}\psi_{12}^0\psi_-^{k+1} - \frac{2\psi_-^N}{\psi_{12}^N}\psi_{12}^k, \qquad (1.7)$$

$$i(\psi_{21}^k)' = 2\psi_-^k + \frac{1}{8}(-\psi_{12}^0\psi_{21}^0)^{-1/2}\psi_{21}^0\psi_-^{k+1} + 2\psi_-^N\psi_{21}^k/\psi_{12}^N.$$

Любое решение (1.6) системы (1.7) определяет полиномиальное решение уравнения (1.4), удовлетворяющее условию

$$S\Psi(-\lambda)S = -\Psi(\lambda), \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Таким образом, указанные выше необходимые и достаточные условия описывают все конечнозонные потенциалы, при которых уравнение (1.4) имеет полиномиальное по λ решение вида (1.8). Легко заметить, что других конечнозонных потенциалов не существует. Действительно, пусть $V(x)$ – произвольный конечнозонный потенциал. Тогда, по определению, уравнение (1.4) имеет какое-нибудь полиномиальное решение $\Psi(\lambda)$, но в силу свойства матрицы B

$$SB(-\lambda)S = B(\lambda)$$

полином $S\Psi(-\lambda)S$ также удовлетворяет (1.4), следовательно, матрица $\Psi(\lambda)-S\Psi(-\lambda)S$ является полиномиальным решением (1.4), удовлетворяющим (1.8).

Приведенные рассуждения позволяют уточнить определение конечнозонного потенциала: потенциал $V(x)$ назовем N-зонным, если существует полиномиальное по λ решение уравнения (1.4) вида (1.6), где $N_1 = N_2 = N_3 = N$, и не существует полиномиального решения вида (1.6) меньшей степени.

Сформулированные необходимые и достаточные условия 1)–3) позволяют не только описать класс конечнозонных потенциалов оператора L, но и найти все такие потенциалы путем решения автономной системы уравнений (1.7). Отметим, что если начальные условия для системы (1.7) выбраны так, что

$$J\overline{\Psi(0,\bar{\lambda})}J = -\Psi(0,\lambda), \tag{1.9}$$

то в силу леммы 3 работы [9] вытекает существование при всех $-\infty<x<\infty$ ограниченных и бесконечно дифференцируемых конечнозонных потенциалов $V(x)$, порождаемых вещественными функциями $u(x)$ и $w(x)$, причем соответствующее полиномиальное решение $\Psi(x,\lambda)$ уравнения (1.4) обладает свойством (1.9) при всех $x\in(-\infty,\infty)$.

В дальнейшем нам понадобится представление решений уравнения (1.4) через фундаментальную матрицу уравнения (1.2). Пусть $\Psi(x,\lambda)$ – любое решение уравнения (1.4), а $\Phi(x,\lambda)$ – фундаментальное решение уравнения (1.2), нормированное на единичную матрицу при $x=0$. Рассмотрим матрицу $C(x,\lambda)=\Phi^{-1}(x,\lambda)\Psi(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)$. Легко показать, что

$$C'_x=\Phi^{-1}(\Psi'_x-\Psi B+B\Psi)\Phi \quad ,$$

и потому в силу (1.4) матрица $C=C(\lambda)$ не зависит от x, а для матрицы $\Psi(x,\lambda)$ имеем представление

$$\Psi(x,\lambda)=\Phi(x,\lambda)C(\lambda)\Phi^{-1}(x,\lambda) \ . \tag{1.10}$$

2. Задача Коши для уравнения "Sine-Gordon" в классе конечнозонных потенциалов

Как показано в [9] для того, чтобы оператор $\hat{M}=\frac{\partial}{\partial t}+M$, где

$$M=\begin{pmatrix} \frac{iw}{4} & -\left(\lambda+\frac{e^{-iu}}{16\lambda}\right) \\ \lambda+\frac{e^{iu}}{16\lambda} & -\frac{iw}{4} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

переводил решения уравнения (1.2) снова в решения этого уравнения, необходимо и достаточно, чтобы функции $u=u(x,t)$, $w=w(x.t)$ удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{aligned} &u_t+u_x-w=0 \ , \\ &w_t-w_x+\sin u=0 \ , \end{aligned} \tag{2.2}$$

эквивалентной уравнению (1). Используя это свойство оператора $\hat{M}$, так же, как и в работе [9], получим уравнение для фундаментальной матрицы $\Phi(x,t,\lambda)$ уравнения (1.2):

$$\dot{\Phi}(x,t,\lambda)=\Phi(x,t,\lambda)M(0,t,\lambda)-M(x,t,\lambda)\Phi(x,t,\lambda).$$

Из этого уравнения с учетом представления (1.10) имеем

$$\dot{\Psi}(x,t,\lambda)=[\Psi(x,t,\lambda),M(x,t,\lambda)]+\Phi\{\dot{C}(t,\lambda)-[C(t,\lambda),M(0,t,\lambda)]\}\Phi^{-1}. \tag{2.3}$$

Теорема 1. Пусть $V(x)$ – конечнозонный потенциал оператора L, порожденный вещественными функциями $u(x)$ и $w(x)$. Тогда задача Коши для системы уравнений (2.2)$(x,t\in(-\infty,\infty))$ с начальными данными $u(x), w(x)$ разрешима единственным образом, причем это решение при каждом $t\in(-\infty,\infty)$ также порождает конечнозонный потенциал $V(x,t)$ оператора L.

Доказательство. Поскольку начальные данные $u(x)$ и $w(x)$ по условию теоремы являются вещественными функциями и порождены конечнозонным потенциалом $V(x)$, найдется полиномиальное по λ решение $\Psi_0(x,\lambda)$ вида (1.8) уравнения (1.4), обладающее свойством

$$J\overline{\Psi_0(x,\bar\lambda)}J = -\Psi_0(x,\lambda). \tag{2.4}$$

Это свойство легко следует из линейности уравнения (1.4) и того, что

$$J\overline{B(x,\bar\lambda)}J = -B(x,\lambda) .$$

Для того чтобы найти решение задачи Коши для системы (2.2), воспользуемся уравнением (2.3) и предположим, что

$$\dot C(t,\lambda) = [C(t,\lambda), M(0,t,\lambda)] . \tag{2.5}$$

Тогда будем иметь

$$\dot\Psi(x,t,\lambda) = [\Psi(x,t,\lambda), M(x,t,\lambda)], \tag{2.6}$$

$$\Psi(x,0,\lambda) = \Psi_0(x,\lambda), \tag{2.7}$$

где $\Psi_0(x,\lambda)$ – описанное выше полиномиальное по λ решение уравнения (1.4). В силу леммы 1 работы [9] задача (2.6), (2.7), для которой уравнение (2.6) в компонентах $\psi_-, \psi_{12}, \psi_{21}$ принимает вид

$$\begin{aligned} i\dot\psi_- &= \left(\lambda + \frac{e^{iu}}{16\lambda}\right)\psi_{12} + \left(\lambda + \frac{e^{-iu}}{16\lambda}\right)\psi_{21} , \\ i\dot\psi_{12} &= 2\left(\lambda + \frac{e^{-iu}}{16\lambda}\right)\psi_- + \frac{w}{2}\psi_{12} , \\ i\dot\psi_{21} &= 2\left(\lambda + \frac{e^{iu}}{16\lambda}\right)\psi_- - \frac{w}{2}\psi_{21} , \end{aligned} \tag{2.8}$$

имеет единственное полиномиальное по λ решение. При этом коэффициенты полиномов удовлетворяют при каждом фиксированном x такой автономной системе уравнений по переменной t:

$$i\dot{\psi}_-^k = \psi_{12}^{k-1} + \psi_{21}^{k-1} - \frac{1}{16}(-\psi_{12}^0\psi_{21}^0)^{-1/2}(\psi_{21}^0\psi_{12}^k - \psi_{12}^0\psi_{21}^k),$$

$$i\dot{\psi}_{12}^k = 2\psi_-^k + \frac{1}{8}(-\psi_{12}^0\psi_{21}^0)^{-1/2}\psi_{12}^0\psi_-^{k+1} - 2\frac{\psi_-^N}{\psi_{12}^N}\psi_{12}^k\ , \qquad (2.9)$$

$$i\dot{\psi}_{21}^k = 2\psi_-^k - \frac{1}{8}(-\psi_{12}^0\psi_{21}^0)^{-1/2}\psi_{21}^0\psi_-^{k+1} + 2\frac{\psi_-^N}{\psi_{12}^N}\psi_{21}^k\ .$$

Поэтому с учетом (2.4) в силу теорем 2 и 3 работы [9] будем иметь вещественное, определенное при всех $x, t \in (-\infty, \infty)$ решение задачи Коши для системы (2.2), которое, согласно условиям 2), представляется через коэффициенты полиномов ψ_-, ψ_{12} по формулам

$$u(x,t) = i\ln\{\psi_{12}^0(x,t)/|\psi_{12}^0(0,0)|\}, \qquad (2.10)$$

$$w(x,t) = -4\psi_-^N(x,t)/\psi_{12}^N(0,0)\ . \qquad (2.11)$$

Но так как соответствующие полиномиальным решениям уравнений (1.5) и (2.8) автономные системы уравнений (1.7) и (2.9) являются совместными [9], то найденные полиномы $\psi_-(x,t,\lambda)$, $\psi_{12}(x,t,\lambda)$, $\psi_{21}(x,t,\lambda)$ удовлетворяют по переменной x системе уравнений (1.5), и тем самым потенциал $V(x,t)$, порожденный решением (2.10), (2.11) задачи Коши (2.2), является конечнозонным при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Остается показать, что сделанное предположение (2.5) выполняется автоматически. Это вытекает из теоремы единственности решения задачи Коши для системы (2.2) в классе вещественных функций, определенных при $x \in (-\infty, \infty)$ и $t \in [0, T]$. Такую теорему легко доказать, воспользовавшись методом последовательных приближений для нелинейного интегрального уравнения, эквивалентного задаче Коши для системы (2.2). Используя эту теорему, получаем, что, с одной стороны, для матрицы $\Psi(x,t,\lambda)$ имеет место уравнение (2.6), а с другой, — справедливо общее уравнение (2.3). Вычитая одно из другого, получаем, что равенство (2.5) необходимо должно выполняться.

Теорема доказана.

Замечание. В случае, если начальные данные $u(x)$ и $w(x)$ не вещественны, имеет место утверждение теоремы 1 для всех t, принадлежащих окрестности нуля.

Таким образом, из доказанного вытекает, что всякое совместное решение автономных систем (1.7) и (2.9) порождает по формулам (2.10) и (2.11) однопараметрическое семейство конечнозонных потенциалов $V(x,t)$ оператора L. При этом функции $u(x,t)$ и $W(x,t)$ являются решением системы (2.2) или, что то же самое, функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1). Такие решения будем называть конечнозонными решениями уравнения "Sine-Gordon".

3. Явные формулы для конечнозонных решений уравнения "Sine-Gordon"

Пусть вещественная функция $u(x,t)$ является конечнозонным решением уравнения (1). Тогда, согласно определению таких решений, системы (1.5), (2.8), в которых $W=u_t+u_x$, имеют при всех x и t полиномиальное по λ решение вида

$$\psi_-(x,t,\lambda)=\sum_{k=1}^{N}\psi_-^k(x,t)\lambda^{2k-1},\ \psi_{12}(x,t,\lambda)=\sum_{k=0}^{N}\psi_{12}^k(x,t)\lambda^{2k},\psi_{21}(x,t,\lambda)=\sum_{k=0}^{N}\psi_{21}(x,t)\lambda^{2k},$$

удовлетворяющее дополнительному условию

$$\psi_-(x,t,\lambda)=\overline{\psi_-(x,t,\bar\lambda)},\ \psi_{12}(x,t,\lambda)=-\overline{\psi_{21}(x,t,\bar\lambda)}\ . \tag{3.1}$$

Нетрудно также проверить, что каждая из систем (1.5) и (2.8) сохраняет величину

$$P(\lambda)=\sum_{k=0}^{2N}P_k\lambda^{2k}=\psi_-^2-\psi_{12}\psi_{21}\ . \tag{3.2}$$

Пусть $\pm\lambda_j(x,t)(j=1,2,\dots,N)$ – нули полинома ψ_{12} и $\mu_j(x,t)=\lambda_j^2(x,t)$. Тогда формула (2.10) приводится к виду

$$u(x,t)=i\ln\left[\frac{(-1)^N}{\sqrt{P_0}}\prod_{j=1}^{N}\mu_j(x,t)\right]. \tag{3.3}$$

Рассмотрим вторые уравнения систем (1.5), (2.8), умножив их на λ и сделав замену $z=\lambda^2$. С учетом соотношения (3.1) имеем

$$iD_k\psi=2\left[1-\frac{(-1)^{k+N}}{16z\sqrt{P_0}}\prod_{j=1}^{N}\mu_j\right]f+\frac{W}{2}\psi, \tag{3.4}$$

где D_1, D_2 – операции дифференцирования по переменным t и x соответственно

$$\psi(x,t,z)=\psi_{12}(x,t,\lambda),\ f(x,t,z)=\lambda\psi_-(x,t,\lambda)\ .$$

Разделив обе части уравнений (3.4) на полином $\psi(x,t,z)=\prod_{j=1}^{N}(z-\mu_j)$ (здесь и далее будем считать, что $\psi_{12}^{N}=1$), получим

$$iD_k \ln\psi = 2\left[1-\frac{(-1)^{k+N}}{16z\sqrt{P_0}}\prod_{j=1}^{N}\mu_j\right]\frac{f(x,t,z)}{\psi(x,t,z)}+\frac{w}{2}\ .$$

Умножим обе части последнего равенства на $(z-\mu_n)(n=1,2,\dots,N)$ и устремим $z\to\mu_n$, тогда

$$D_k\mu_n = 2i\left[1-\frac{(-1)^{k+N}}{16\sqrt{P_0}}\prod_{j\neq n}\mu_j\right]\frac{f(x,t,\mu_n)}{\prod\limits_{j\neq n}(\mu_n-\mu_j)}\ ,$$

и так как из соотношения (3.2) следует, что $f(x,t,\mu_n)=\sqrt{\mu_n P(\mu_n)}$, то окончательно получим

$$D_k\mu_n = 2i\left[1-\frac{(-1)^{k+N}}{16\sqrt{P_0}}\prod_{j\neq n}\mu_j\right]\frac{\sqrt{\mu_n P(\mu_n)}}{\prod\limits_{j\neq n}(\mu_n-\mu_j)}\ . \qquad (3.5)$$

При выводе уравнений (3.5) предполагается, что полином $\psi(x,t,z)$ имеет простые нули. Это предположение, по крайней мере локально, всегда оправдано тем, что в дальнейшем будем считать

$$\mu_n(0,0)\neq\mu_j(0,0),\ n\neq j\ .$$

Кроме того, предположим, что полином $zP(z)$ также имеет простые нули. Отметим, что из условий (3.1) и равенства (3.2) следует расположение нулей $P(z)$ в комплексной плоскости z сопряженными парами (четное число их может находиться на отрицательной полуоси).

Системы уравнений (3.5) интегрируются известным [8] отображением Абеля. В связи с этим системы уравнений (3.5) следует рассматривать на гиперэллиптической римановой поверхности R функции $\sqrt{zP(z)}$. Начальные данные $\mu_j(0,0)$ $(j=1,2,\dots,N)$ как точки R определены той ветвью функции $\sqrt{zP(z)}$, которая при $z=\mu_j(0,0)$ должна быть равной $\sum\limits_{k=1}^{N}\psi_-^k(0,0)\mu_j^k(0,0)$.

Пусть $E_i\ (i=1,2,\dots,2N)$ – нули полинома $P(z)$. Рассмотрим реализацию поверхности R в виде двулистной поверхности наложения плоскости комплексной переменной z с непересекающимися разрезами по отрезкам $[E_{2j-1},E_{2j}]$ $(j=1,2,\dots,N)$ и какому-либо лучу $[0,\infty)$. Выберем в качестве циклов a_j простые замкнутые кривые, лежащие на верхнем листе и охватывающие разрезы $[E_{2j-1}, E_{2j}]$, в качестве циклов b_j – кривые, начинающиеся на берегах разрезов $[E_{2j-1}, E_{2j}]$, проходящие по верхнему листу до разреза $[0,\infty)$ и возвращающиеся по нижнему листу в исходные точки. Ориентация циклов устанавливается обычным образом.

Введем на R базис $\omega_j(z)$ абелевых интегралов первого рода

$$\omega_j(z)=\int\limits_{\infty}^{z}\frac{h_j(\xi)d\xi}{\sqrt{\xi P(\xi)}}\qquad \left(h_j(\xi)=\sum_{i=0}^{N-1}c_{ij}\xi^i;\ j=1,2,\ldots,N\right),$$

определенный условием

$$\oint\limits_{a_j}d\omega_k(z)=\delta_{kj}\quad (k,j=1,2,\ldots,N).$$

Тогда отображение Абеля для уравнений (3.5) имеет вид

$$\vartheta_j(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\omega_j(\mu_n(x,t)). \tag{3.6}$$

Подстановка (3.6) в уравнения (3.5) приводит к уравнениям для функций $\vartheta_j(x,t)$:

$$D_k\vartheta_j=2i\sum_{i=0}^{N-1}c_{ij}\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu_n^i}{\prod\limits_{l\neq n}(\mu_n-\mu_l)}\left[1-\frac{(-1)^{k+N}}{16\sqrt{p_0}}\prod_{l\neq n}\mu_l\right].$$

Легко заметить, что

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\mu_n^i\Big/\prod_{l\neq n}(\mu_n-\mu_l)\right]=\sum_{n=1}^{N}\operatorname*{res}_{z=\mu_n}\left\{z^i\Big/\prod_{l=1}^{N}(z-\mu_l)\right\},$$

откуда следует

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu_n^i}{\prod\limits_{l\neq n}(\mu_n-\mu_l)}=\begin{cases}(-1)^{N+1}\left(\prod\limits_{l=1}^{N}\mu_l\right)^{-1}, & i=-1;\\ 0, & 0\le i<N-1;\\ 1, & i=N-1.\end{cases}$$

С учетом последнего свойства уравнения для функций $\vartheta_j(x,t)$ принимают вид

$$D_k\vartheta_j(x,t)=2i\left(c_{N-1,j}+(-1)^k c_{0j}/16\sqrt{p_0}\right).$$

Следовательно,

$$\vartheta_j(x,t) = \alpha_j x + \beta_j t + \vartheta_j(0,0),$$

где

$$\alpha_j = 2i(c_{N-1,j} + c_{0j}/16\sqrt{p_0}); \qquad \beta_j = 2i(c_{N-1,j} - c_{0j}/16\sqrt{p_0}).$$

Таким образом, точки $\mu_n(x,t)$ являются решением проблемы обращения Якоби

$$\sum_{n=1}^{N} \omega_j(\mu_n(x,t)) = \alpha_j x + \beta_j t + \sum_{n=1}^{N} \omega_j(\mu_n(0,0)) . \qquad (3.7)$$

Из проблемы обращений (3,7), следуя методу, изложенному в [...], можно в терминах θ-функций получить явную формулу для функции $\sum_{n=1} \ln \mu_n$, через которую, согласно (3.3), выражается конечнозонное решение уравнения (1).

Пусть $\|B_{ij}\|$ – матрица B-периодов базиса $\omega_j(z)$. Рассмотрим θ-функцию

$$\theta(\vec{u}) = \theta(u_1,\ldots,u_N) = \sum_{m_1,\ldots,m_N} \exp[\pi i \sum_{i,j=1}^{N} B_{ij} m_i m_j + 2\pi i \sum_{j=1}^{N} u_j m_j],$$

где суммирование производится по всем целым числам $m_1,\ldots,m_N$. Обозначим через $\hat{R}$ разрезанную по a-циклам поверхность R и введем θ-функцию Римана:

$$\theta(z) = \theta(e_1 - \omega_1(z), \ldots, e_N - \omega_N(z)) , \qquad (3.8)$$

$$e_j = \alpha_j x + \beta_j t + \gamma_j , \quad \gamma_j = \sum_{i=1}^{N} \omega_j(\mu_i(0,0)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} B_{ij} - \frac{j}{2} . \qquad (3.9)$$

Как известно [17], функция $\theta(z)$ регулярна на $\hat{R}$, и ее нули решают проблему обращения (3.7), т.е. совпадают с точками $\mu_j(x,t)$.

Требование простоты нулей полинома $\psi(0,0,z)$ приводит к отсутствию сопряженных пар среди точек $\mu_j(x,t)$ при достаточно малых x и t, что обеспечивает нетривиальность θ-функции Римана $(\theta(z) \neq 0)$. (Напомним, что сопряженной называется пара точек поверхности R вида $(z, \sqrt{zP(z)}), (z, -\sqrt{zP(z)})$).

Рассмотрим функцию $\ln z$, которая на поверхности R с указанным выше каноническим рассечением является нормированным абелевым интегралом третьего рода с полюсами в точках $z=0$, $z=\infty$ и вычетами соответственно + 2 и – 2. Очевидно, что B-периоды этого интеграла равны $\pm 2\pi i$ (Мы не фиксируем здесь определенный знак, так как далее видно, что это не играет особой роли.) Для выделения однозначной ветви $\ln z$ проведем в области $\hat{R}$ разрез по кривой S, которая соединяет точки 0 и ∞, не пересекает a-циклов и b-циклов и не проходит через точки $\mu_j(0,0)$ $(j=1,2,\dots,N)$. Обозначим через $S^+(S^-)$ – левый (правый) берег разреза по направлению движения от точки 0 к точке ∞ и для достаточно малых $\varepsilon>0, \frac{1}{r}>0$ рассмотрим замкнутый контур $\Gamma_{\varepsilon r}$, состоящий из последовательно проходимых кривых $S^+_{\varepsilon r}, 0_r, S^-_{\varepsilon r}, 0_\varepsilon$, где $S^\pm_{\varepsilon r}\in S^\pm$, $\varepsilon<|z|<r$, а 0_ε (0_r) – кривая в окрестности точки $0(\infty)$, которую параметрический гомеоморфизм $\tau_0=\sqrt{z}\,(\tau_\infty=\frac{1}{\sqrt{z}})$ отображает в окружность $|\tau_0|=\sqrt{\varepsilon}\,(|\tau_\infty|=\frac{1}{\sqrt{r}})$, что в переменной z эквивалентно $|z|=\varepsilon\,(|z|=r)$.

Согласно теореме о вычетах, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\Big[\int_{\partial\hat{R}}\ln z\, d\ln\theta(z)+\int_{\Gamma_{\varepsilon r}}\ln z\, d\ln\theta(z)\Big]=\sum_{j=1}^{N}\ln\mu_j(x,t),$$

где через $\partial\hat{R}$ обозначена граница области $\hat{R}$. Вычисляем слагаемые, стоящие в левой части последнего равенства, используя известные формулы скачков для абелевых интегралов третьего рода и граничные соотношения для θ – функции.

Пусть $\sigma_j^2=1$ $(j=1,\dots,N)$ и $\sigma_j 2\pi i$ – B-периоды интеграла $\ln z$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\hat{R}}\ln z\, d\ln\theta(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{N}\Big[\int_{a_j}\ln z\, d\ln\theta(z)-\int_{a_j}(\ln z+\sigma_j 2\pi i)\times$$

$$\times d\ln\theta(z)+2\pi i\int_{a_j}(\ln z+\sigma_j 2\pi i)\,d\omega_j(z)\Big]=\sum_{j=1}^{N}\int_{a_j}\ln z\, d\omega_j(z)+2\pi i\sum_{j=1}^{N}\sigma_j m_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\int_{a_j}\ln z\, d\omega_j(z)\quad+\;2k\pi i\,,$$

где m_j, k – целые числа. Аналогичным образом, используя соотношение

$$\ln z\Big|_{S^-}-\ln z\Big|_{S^+}=4\pi i$$

и непрерывность $\theta(z)$-функции на S, для второго слагаемого имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon r}}\ln z\, d\ln\theta(z)=-2\int_{S^+_{\varepsilon r}}d\ln\theta(z)\;+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{|\tau|=\sqrt{\varepsilon}} \ln\tau\, d\ln\theta_0(\tau)-\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{|\tau|=\frac{1}{\sqrt{r}}} \ln\tau\, d\ln\theta_\infty(\tau)\,,$$

где $\theta_0(\tau)$ и $\theta_\infty(\tau)$ – элементы функции $\theta(z)$ в окрестности точек 0 и ∞ на $\hat{R}$.

Учитывая, что $\theta(z)$ регулярна всюду на $\hat{R}$ и не обращается в нуль в точках 0 и ∞, легко проследить, что при $\varepsilon\to 0$, $r\to\infty$ последние два интеграла в правой части этого равенства стремятся к нулю.

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{N}\ln\mu_j(x,t)=2\ln\frac{\theta(0)}{\theta(\infty)}+\sum_{j=1}^{N}\oint\limits_{a_j}\ln z\, d\omega_j(z)+2k\pi i\ . \qquad (3.10)$$

Замечая, что соотношение Римана [17] в нашем случае дает

$$\frac{1}{2}\oint\limits_{b_j} d\ln z = 2\pi i\,\omega_j(0),\ \ \omega_j(0)=\frac{1}{2}\sigma_j\,,$$

а также учитывая периодичность θ-функции по всем переменным с периодом 1, объединяем равенство (3.10) с (3.3), (3.8), (3.9) и окончательно получаем

$$u(x,t)=2i\ln\frac{\theta(\vec{\alpha}x+\vec{\beta}t+\vec{\gamma}+\vec{\delta})}{\theta(\vec{\alpha}x+\vec{\beta}t+\vec{\gamma})}+C+2k\pi, \qquad (3.11)$$

где вектор $\vec{\delta}=(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})$, а константа C определяется по поверхности R так:

$$C=i\Big[\sum_{j=1}^{N}\oint\limits_{a_j}\ln z\, d\omega_j(z)-\ln\big((-1)^N\sqrt{P_0}\,\big)\Big]\,.$$

Изложенные выше результаты обобщает

Теорема 2. Пусть заданы попарно различные комплексные числа $E_j\ (j=1,2,\dots,2N)$ и $\mu_i^0=\mu_i(0,0)\ \ (i=1,2,\dots,N)$. Если эти числа таковы, что

$$\prod_{j=1}^{2N}(z-E_j)-\prod_{i=1}^{N}(z-\mu_i^0)(z-\bar{\mu}_i^0)=zf^2(z)\ , \qquad (3.12)$$

где $f(z)$ – полином степени $N-1$ с вещественными коэффициентами, то функция $u(x,t)$, определенная формулой (3.11), является конечнозонным, бесконечно дифференцируемым и вещественным решением уравнения (1).

З а м е ч а н и е 1. Вещественность решения $u(x,t)$ обеспечивается условием (3.12). При отсутствии этого условия формула (3.11) справедлива и дает, вообще говоря, комплекснозначные решения уравнения (1).

З а м е ч а н и е 2. Из вида векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ вытекает, что решение $u(x,t)$ уравнения (1) зависит на самом деле от $\xi=\frac{x+t}{2}$ и $\eta=\frac{x-t}{2}$, и потому функция $v(\xi,\eta)=u(x,t)$ удовлетворяет "половинному" уравнению

$$v_{\xi\eta} = \sin v . \tag{3.13}$$

Отсюда немедленно вытекает, что множества конечнозонных решений "половинного" (3.13) и "полного" (1) уравнений совпадают.

В заключение приведем явные формулы для конечнозонных потенциалов оператора L. Согласно (1.1), достаточно указать формулы для функций $\exp(iu(x)/2)$ и $w(x)$, порождающих потенциал $V(x)$. В силу теорем 1 и 2 для конечнозонных потенциалов имеем

$$e^{iu(x)/2} = \frac{\theta(\vec{\alpha}x+\vec{\beta}t_0+\vec{\gamma})}{\theta(\vec{\alpha}x+\vec{\beta}t_0+\vec{\gamma}+\vec{\delta})}(-1)^k e^{iC/2} ,$$

$$w(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(2i\ln\frac{\theta(\vec{\alpha}x+\vec{\beta}t+\vec{\gamma}+\vec{\delta})}{\theta(\vec{\alpha}x+\vec{\beta}t+\vec{\gamma})}\right)\Bigg|_{t=t_0} ,$$

где t_0 – фиксированное число. В силу теоремы 1 эти формулы определяют на самом деле однопараметрическое семейство конечнозонных потенциалов. Отметим, что из периодичности θ-функции, как функции многих переменных, вытекает, что конечнозонные потенциалы $V(x,t)$ оператора L, порожденные вещественными функциями $u(x,t)$ и $w(x,t)$, представляют собой почти периодические функции от x и t.

Л и т е р а т у р а

1. Марченко В.А. Периодическая задача Кортевега–де Фриса. – Мат.сб., 1974, 95, вып.3, с.331–356.
2. Новиков С.П. Периодическая задача для уравнений Кортевега–де Фриса. – Функцион.анализ, 1974, 8, вып.3, с.54–66.
3. Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриса. Конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия. – Успехи мат.наук, 1976, 31, вып.1, с.55–136.

4. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриса. – Теорет., и мат. физика, 1975, 23, № 1, с.51-67.

5. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно-периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриса. – Журн. эксперим. и теорет. физики, 1974, 67, № 6, с.2131-2143.

6. Итс А.Р. Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений. – Вестн. ЛГУ им.А.А.Жданова. Сер. математика, механика, астрономия, 1976, № 7, вып.2, с.57-69.

7. Ахиезер Н.И. Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов. – Докл. АН СССР, 1961, 141, № 2, с.263-266.

8. Дубровин Б.А. Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов. – Функцион.анализ, 1975, 9, вып.1, с.65-67.

9. Козел В.А. Об одном классе решений уравнения "Sine – Gordon". – В кн.: Вопросы математической физики и функционального анализа. К., 1976, с.132-139.

10. Котляров В.И. Периодическая задача для нелинейного уравнения Шредингера. – В кн.: Вопросы математической физики и функционального анализа. К., 1976, с.121-131.

11. Козел В.А., Котляров В.П. Почти-периодические решения уравнения $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$. – Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 10, с.878-881.

12. Итс А.Р., Котляров В.П. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера. – Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 11, с.965-968.

13. Кричевер И.М. Алгебро-геометрическая конструкция уравнений Захарова-Шабата. – Докл. АН СССР, 1976, 227, № 2, с.291-294.

14. Кричевер И.М. Алгебраические кривые и коммутирующие матричные дифференциальные операторы. – Функцион.анализ, 1976, 10, вып.2, с.75-76.

15. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. – Функцион.анализ, 1974, 8, вып.3, с.43-53.

16. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., Фадеев Л.Д. Полное описание решений уравнения "Sine – Gordon". – Докл. АН СССР, 1974, 219, № 6, с.1334-1337.

17. Зверович Э.И. Краевые задачи теории аналитических функций. – Успехи мат.наук, 1971, 26, вып.1, с.68-113.

УДК 517.2

Д.Ш. Лундина

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Известно, что для собственных значений краевых задач, порождаемых уравнением Штурма-Лиувилля

$$-y'' + v(x)y - \mu y = 0 \tag{1}$$

и регулярными граничными условиями при $k \to \infty$ справедливы асимптотические разложения вида

$$\sqrt{\mu_k} = k + a + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{c_j}{k^j} + o(k^{-n-1}) \,, \tag{2}$$

если потенциал $v(x)$ имеет n производных. В случае разделенных граничных условий справедливо также обратное утверждение: если собственные значения двух различных задач допускают асимптотические разложения типа (2), то потенциал $v(x)$ имеет по крайней мере $(n-1)$ производную. В этом случае известна точная зависимость между числом производных у функции $v(x)$ и точностью асимптотических формул.

Для общих регулярных задач такой зависимости нет: потенциал может быть разрывным, несмотря на то, что для собственных значений двух краевых задач асимптотические формулы вида (2) верны при любом n. Рассмотрим на сегменте $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ краевую задачу, определяемую уравнением (1) с комплекснозначным потенциалом $v(x)$ и граничными условиями

$$\begin{gathered} a_1 y'\left(-\frac{\pi}{2}, \lambda\right) + b_1 y'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) + a_0 y\left(-\frac{\pi}{2}, \lambda\right) + b_0 y\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) = 0, \\ d_1 y'\left(-\frac{\pi}{2}, \lambda\right) + c_1 y'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) + d_0 y\left(-\frac{\pi}{2}, \lambda\right) + c_0 y\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

и предположим, что $I(1,2) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{vmatrix} \neq 0$.

В настоящей работе выясняется, какие свойства потенциала необходимы и достаточны для того, чтобы собственные значения двух задач вида (1)-(3) допускали асимптотические разложения любой заданной точности (теорема 2).

Для описания этих свойств потенциала удобно ввести пространство $W_2^n[-\frac{\pi}{2},0][0,\frac{\pi}{2}]$, состоящее из функций, сужения которых на сегменты $[-\frac{\pi}{2},0],[0,\frac{\pi}{2}]$ принадлежат соответственно пространствам $W_2^n[-\frac{\pi}{2},0]$, $W_2^n[0,\frac{\pi}{2}]$. Иными словами, введенное пространство состоит из функций, имеющих n сумммируемых с квадратом производных на отрезках $[-\frac{\pi}{2},0],[0,\frac{\pi}{2}]$, предельные значения которых в точках $+0$ и -0 не обязательно совпадают.

Итак, предположим, что $v(x)\in W_2^n[-\frac{\pi}{2},0][0,\frac{\pi}{2}]$, и определим на сегменте $[0,\frac{\pi}{2}]$ функции $v^+(x)=v(x)$ и $v^-(x)=v(-x)$. Очевидно, что $v^\pm(x)\in W_2^n[0,\frac{\pi}{2}]$. Рассмотрим на отрезке $[0,\frac{\pi}{2}]$ уравнения

$$-y''+v^\pm(x)y-\mu y=0 \qquad (1')$$

и условимся решения этих уравнений и все функции, через которые они выражаются, снабжать знаками "$\pm$". Как известно*, при всех $\lambda=\sqrt{\mu}$ уравнение $(1')$ имеет фундаментальную систему решений $y^\pm(x,\lambda)$, $y^\pm(x,-\lambda)$ вида

$$y^\pm(x,\lambda)=\exp\left[i\lambda x+\int_0^x \sigma^\pm(t,\lambda)\,dt\right], \qquad (4)$$

где

$$\sigma^\pm(t,\lambda)=\frac{p^{\pm\prime}(t,\lambda)}{p^\pm(t,\lambda)};$$

$$p^\pm(t,\lambda)=1+\frac{u_1^\pm(t)}{i\lambda}+\ldots+\frac{u_n^\pm(t)}{(i\lambda)^n}+\frac{u_{n+1}^\pm(t,\lambda)}{(i\lambda)^{n+1}};$$

$$u_1^\pm(t)=\frac{1}{2}\int_0^t v(\xi)\,d\xi; \qquad (5)$$

$$u_k^\pm(t)=-\frac{1}{2}\int_0^t L^\pm[u_{k-1}^\pm](\xi)\,d\xi \qquad (k\leq 2);$$

$$L^\pm\equiv\frac{d^2}{dx^2}-v^\pm(x),$$

а функция $u_{n+1}^\pm(t,\lambda)$ удовлетворяет уравнению

---

*Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. К, 1972. 219 с.

$$u^{\pm}_{n+1}(t,\lambda)=\int_0^t \sin\lambda(t-\xi)e^{-i\lambda(t-\xi)}L^{\pm}[u^{\pm}_n](\xi)d\xi + \tag{6}$$
$$+\int_0^t \frac{\sin\lambda(t-\xi)}{\lambda} v^{\pm}(\xi)u^{\pm}_{n+1}(\xi,\lambda)e^{-i\lambda(t-\xi)}d\xi .$$

Как известно,

$$u^{\pm}_{n+1}(t,\lambda)-c^{\pm}_1(t)+\frac{c^{\pm}_2(t)}{i\lambda}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}\int_0^t e^{-2i\lambda(t-\xi)}v^{\pm(n)}(\xi)d\xi+$$
$$+\frac{\rho^{\pm}_{n+1}(t,\lambda)}{i\lambda}, \tag{7}$$

$$A^{\pm}(t,\lambda)-i\lambda u^{\pm}_{n+1}(t,\lambda)+u^{\pm\prime}_{n+1}(t,\lambda)=i\lambda\Big[d^{\pm}_1(t)+\frac{d^{\pm}_2(t)}{i\lambda}+\dots+$$
$$+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\int_0^t e^{-2i\lambda(t-\xi)}v^{\pm(n)}(\xi)d\xi\Big]+\zeta^{\pm}_{n+1}(t,\lambda),$$

где $\rho^{\pm}_{n+1}(t,\lambda),\zeta^{\pm}_{n+1}(t,\lambda)$ – по λ функции экспоненциального типа степени, не превышающей $2t$, суммируемые с квадратом на вещественной оси.

Обозначим через $\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_k,\dots$ собственные значения граничной задачи (1)–(3)

Теорема 1. Если $v(x)\in W^n_2[-\frac{\pi}{2},0][0,\frac{\pi}{2}]$ и $I(2,1)=1$, то для собственных значений задачи (1)–(3) при $k\to\infty$ справедливы асимптотические разложения

$$\sqrt{\mu_k}=k+\sum_{1\le 2j+1\le n+3}\frac{p_{2j+1}+(-1)^k s_{2j+1}}{k^{2j+1}}+$$

$$+\frac{(-1)^k}{2\pi i}\cdot\frac{1}{(2ik)^{n+1}}\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}}[v^{+(n)}(t)+v^{-(n)}(t)][e^{2ikt}(-1)^n+e^{-2ikt}]\times$$
$$\times dt-\frac{1}{2ik}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[v^{+(n)}(t)m^{+}+v^{-(n)}(t)m^{-}][e^{2ikt}(-1)^{n+1}+e^{-2ikt}]dt-$$
$$-\frac{r_1+(-1)^k r_2}{2ik}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t[v^{+(n)}(t)+v^{-(n)}(t)][e^{2ikt}(-1)^{n+1}+e^{-2ikt}]dt\Big]+$$
$$+\frac{\gamma(k)}{k^{n+2}}+\frac{\varepsilon_k(a_1,\dots,c_0)}{k^{n+3}},$$

где

$$p_1=\frac{2}{\pi}\left[u_1^+\left(\frac{\pi}{2}\right)+u_1^-\left(\frac{\pi}{2}\right)+I(3,2)+I(4,1)\right];$$

$$s_1=\frac{2}{\pi}\left[I(4,2)+I(3,1)\right],\quad r_1=-4p_1,\quad r_2=-4s_1;$$

$$m^{\pm}=2\left[u_1^{\mp}\left(\frac{\pi}{2}\right)\pm\left(I(3,2)-I(4,1)\right)\right],$$

а числа $\gamma(k)$ не зависят от параметров граничной задачи (1)-(3) и $\sum|\gamma(k)|^2<\infty$, $\sum|\varepsilon_k(a_1,\dots)|^2<\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любое решение уравнения (1) представимо в виде

$$y(x,\lambda)=\begin{cases} X_1^+y^+(x,\lambda)+X_2^+y^+(x,-\lambda), & x\in[0,\frac{\pi}{2}];\\ X_1^-y^-(-x,\lambda)+X_2^-y^-(-x,-\lambda), & x\in[-\frac{\pi}{2},0].\end{cases}$$

Поскольку $y(+0,\lambda)=y(-0,\lambda)$, $y'(+0,\lambda)=y'(-0,\lambda)$, то должны выполняться равенства

$$\begin{cases} X_1^++X_2^+=X_1^-+X_2^-,\\ X_1^+(i\lambda+\sigma^+(0,\lambda))+X_2^+(-i\lambda+\sigma^+(0,-\lambda))=\\ =-X_1^-(i\lambda+\sigma^-(0,\lambda))-X_2^-(-i\lambda+\sigma^-(0,-\lambda)).\end{cases}$$

При написании этих равенств учтено, что в силу формулы (4) $y^{\pm}(0,\pm\lambda)=1$, $y^{\pm\prime}(0,\lambda)=\pm i\lambda+\sigma^{\pm}(0,\pm\lambda)$. Присоединяя к этим двум уравнениям граничные условия (3), получаем систему из четырех однородных уравнений относительно коэффициентов X_1^+, X_2^+, X_1^-, X_2^-. Приравнивая определитель этой системы к нулю, после простых преобразований приходим к уравнению

$$F(\lambda)+C(\lambda)+C(-\lambda)+B(\lambda)e^{i\lambda\pi}+B(-\lambda)e^{-i\lambda\pi}=0, \tag{8}$$

где

$$F(\lambda)=[I(4,2)+I(3,1)][2i\lambda+\sigma^+(0,\lambda)-\sigma^+(0,-\lambda)]\times$$
$$\times[2i\lambda+\sigma^-(0,\lambda)-\sigma^-(0,-\lambda)], \tag{9}$$

$$C(\lambda) = [\sigma^+(0,-\lambda) + \sigma^-(0,\lambda)] \times$$

$$\times \Big\{ \rho^+\left(\tfrac{\pi}{2},\lambda\right)\rho^-\left(\tfrac{\pi}{2},-\lambda\right)\left[I(3,4) + (I(3,2)+I(1,4))i\lambda + I(1,2)(i\lambda)^2\right] +$$

$$+ \rho^{+\prime}\left(\tfrac{\pi}{2},\lambda\right)\rho^-\left(\tfrac{\pi}{2},-\lambda\right)\left[I(3,2) + I(1,2)\,i\lambda\right] + \qquad (10)$$

$$+ \rho^+\left(\tfrac{\pi}{2},\lambda\right)\rho^{-\prime}\left(\tfrac{\pi}{2},-\lambda\right)\left[I(4,1) + I(2,1)\,i\lambda\right] +$$

$$+ \rho^{+\prime}\left(\tfrac{\pi}{2},\lambda\right)\rho^{-\prime}\left(\tfrac{\pi}{2},-\lambda\right) I(2,1) \Big\},$$

$$B(\lambda) = [2i\lambda - \sigma^+(0,-\lambda) - \sigma^-(0,-\lambda)] \times$$

$$\times \Big\{ \rho^+\left(\tfrac{\pi}{2},\lambda\right)\rho^-\left(\tfrac{\pi}{2},\lambda\right)\left[I(3,4) + (I(3,2)+I(4,1))i\lambda + I(2,1)(i\lambda)^2\right] +$$

$$+ \rho^{+\prime}\left(\tfrac{\pi}{2},\lambda\right)\rho^-\left(\tfrac{\pi}{2},\lambda\right)\left[I(3,2) + I(2,1)\,i\lambda\right] + \qquad (11)$$

$$+ \rho^+\left(\tfrac{\pi}{2},\lambda\right)\rho^{-\prime}\left(\tfrac{\pi}{2},\lambda\right)\left[I(4,1) + I(2,1)\,i\lambda\right] +$$

$$+ \rho^{+\prime}\left(\tfrac{\pi}{2},\lambda\right)\rho^{-\prime}\left(\tfrac{\pi}{2},\lambda\right) I(2,1) \Big\}.$$

В формулах (9)-(11) через $I(k,l)$ обозначен определитель, составленный из k-го и l-го столбцов матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_0 & b_0 \\ d_1 & c_1 & d_0 & c_0 \end{pmatrix}$. Распишем подробнее выражения (9)-(11), полагая $I(2,1) = 1$, что, очевидно, не ограничивает общности. Заметим, что, согласно (5), (6), $u_k^{\pm}(0) = 0$ $(k \geqslant 1)$, $u_{n+1}^{\pm}(0,\lambda) = u_{n+1}^{\pm\prime}(0,\lambda) = 0$ и поэтому

$$\frac{1}{i\lambda}[\sigma^{\pm}(0,\lambda) - \sigma^{\pm}(0,-\lambda)] = 2\sum_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{u_{2j-1}^{\pm\prime}(0)}{(i\lambda)^{2j}}.$$

Отсюда следует

$$\frac{F(\lambda)}{(i\lambda)^3} = \sum_{j=0}^{p} \frac{\tilde{b}_{2j+1}}{\lambda^{2j+1}}, \qquad (12)$$

где $\quad p = 4\left[\frac{n+1}{2}\right]; \qquad \tilde{b} = \frac{1}{i}\left[I(4,2) + I(3,1)\right].$

Аналогичным образом для выражений $\frac{B(\lambda)}{(i\lambda)^3}$ и $\frac{C(\lambda)}{(i\lambda)^3}$, используя равенства (5), получаем

$$\frac{B(\lambda)}{(i\lambda)^3} = 2\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_j}{\lambda^j} + \tilde{R}_S(\lambda)\right], \tag{13}$$

$$\frac{C(\lambda)}{(i\lambda)^3} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\tilde{c}_j}{\lambda^j} + O\left(\frac{A^{\pm}(\frac{\pi}{2}, \lambda)}{(i\lambda)^{n+4}}\right), \tag{14}$$

где $\quad \tilde{a}_1 = \frac{1}{i}\left[u_1^+\left(\frac{\pi}{2}\right) + u_1^-\left(\frac{\pi}{2}\right) + I(3,2) + I(4,1)\right];$

$$\tilde{R}_S(\lambda) = \frac{A^+(\frac{\pi}{2}, \lambda)}{(i\lambda)^{n+2}}\left(1 + \frac{u_1^-(\frac{\pi}{2}) + I(3,2)}{i\lambda}\right) +$$

$$+ \frac{A^-(\frac{\pi}{2}, \lambda)}{(i\lambda)^{n+2}}\left(1 + \frac{u_1^+(\frac{\pi}{2}) + I(4,1)}{i\lambda}\right) + \tag{15}$$

$$+ I(4,1)\frac{u_{n+1}^+(\frac{\pi}{2}, \lambda)}{(i\lambda)^{n+2}} + I(3,2)\frac{u_{n+1}^-(\frac{\pi}{2}, \lambda)}{(i\lambda)^{n+2}} + O\left(\frac{A^{\pm}(\frac{\pi}{2}, \lambda)}{(i\lambda)^{n+4}}\right).$$

Пусть $\mu_k = \lambda_k^2$ – собственные значения задачи (1)–(3), для которой уравнение (8) является характеристическим. Заметим, что это уравнение в силу равенств (12)–(14) по теореме Руше имеет корни вида $\lambda_k = k + \theta_k, \theta_k = O(\frac{1}{k})$, причем числа θ_k удовлетворяют уравнению

$$(-1)^k\left[\sin\theta_k\pi + e^{i\theta_k\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{(k+\theta_k)^j} - e^{-i\theta_k\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{(-k-\theta_k)^j}\right] +$$

$$+ \sum_{j=0}^{p}\frac{b_{2j+1}}{(k+\theta_k)^{2j+1}} + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{c_j}{(k+\theta_k)^j} - \sum_{j=2}^{\infty}\frac{c_j}{(-k-\theta_k)^j} =$$

$$- (-1)^{k-1}\left\{e^{i\theta_k\pi}R_S(k+\theta_k) - e^{-i\theta_k\pi}R_S(-k-\theta_k)\right\},$$

где

$$a_1 = \frac{\tilde{a}_1}{2i} = -\frac{1}{2}\left[u_1^+\left(\frac{\pi}{2}\right) + u_1^-\left(\frac{\pi}{2}\right) + I(3,2) + I(4,1)\right];$$

$$b_1 = \frac{\tilde{b}_1}{4i} = -[I(4,2) + I(3,1)]; \tag{16}$$

$$R_S(k+\theta_k) = \frac{1}{2i}\tilde{R}_S(k+\theta_k).$$

Обозначим через $\theta_l(y)$ $(l=0,1)$ решение уравнения

$$(-1)^l\Big[\sin\theta_l(y)\pi + e^{i\theta_l(y)\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j y^j}{(1+y\theta_l(y))^j} -$$

$$-e^{-i\theta_l(y)\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j(-y)^j}{(1+y\theta_l(y))^j}\Big] + \sum_{j=0}^{p}\frac{b_{2j+1}\,y^{2j+1}}{(1+y\theta_l(y))^{2j+1}} + \tag{17}$$

$$+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{c_j y^j}{(1+y\theta_l(y))^j} - \sum_{j=2}^{\infty}\frac{c_j(-y)^j}{(1+y\theta_l(y))^j} = 0,$$

обращающееся в нуль при $y=0$. Функция $\theta_l(y)$ $(l=0,1)$ аналитична в некоторой окрестности $y=0$, нечетна и $\theta_l'(0)\pi + 2a_1 + (-1)^l b_1 = 0$. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что при $|y| < \delta$

$$\theta_l(y) = p_1(l)y + \sum_{j=1}^{\infty} p_{2j+1}(l)\,y^{2j+1} \quad (l=0,1), \tag{18}$$

причем по формулам (16)

$$p_1(l) = -\frac{1}{\pi}[2a_1 + (-1)^l b_1] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[u_1^+\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + u_1^-\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + I(3,2) + I(4,1) + (-1)^l\big(I(4,2) + I(3,1)\big)\Big]. \tag{19}$$

Положим в уравнении (17) $y = \frac{1}{2k+l}$ $(l=0,1)$ и вычтем это уравнение из уравнения (8):

$$(-1)^l\Big[\theta_{2k+l} - \theta_l\Big(\frac{1}{2k+l}\Big)\Big]\pi\Big(1+O\Big(\frac{1}{k^2}\Big)\Big) = (-1)^{l-1}\Big[e^{i\theta_{2k+l}\pi}R_S(2k+$$

$$+l+\theta_{2k+l}) - e^{-i\theta_{2k+l}\pi}R_S(-(2k+l) - \theta_{2k+l})\Big]. \tag{20}$$

Распишем подробнее правую часть этого равенства. Используя формулы (15), (16), (7) и замечая, что $(k+\theta_k)^{-p}=k^{-p}(1+O(\frac{1}{k^2})), p\geq 1$, находим

$$e^{i\theta_{2k+1}\pi}R_S(2k+1+\theta_{2k+1})=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{2i\,[2i\,(2k+1)]^{n+1}}\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}}[v^{+(n)}(t)+v^{-(n)}(t)]e^{2i(2k+1)t}dt+$$

$$+\frac{1}{2i(2k+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}v^{+(n)}(t)[m^{+}+t\,n(1)]e^{2i(2k+1)t}dt+ \tag{21}$$

$$+\frac{1}{2i(2k+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}v^{-(n)}(t)[m^{-}+tn(1)]e^{2i(2k+1)t}dt\Big]+$$

$$+\frac{\gamma_0(2k+1+\theta_{2k+1})}{(2k+1)^{n+2}}+\frac{\delta_0(2k+1+\theta_{2k+1})}{(2k+1)^{n+3}}+R_0\left(\frac{1}{2k+1}\right),$$

где

$$m^{\pm}=2\left[u_1^{\mp}\left(\frac{\pi}{2}\right)\pm(I(3,2)-I(4,1))\right];$$

$$n(1)=-4\rho_1(1)=-\frac{4}{\pi}\left[u_1^{+}\left(\frac{\pi}{2}\right)+u_1^{-}\left(\frac{\pi}{2}\right)+I(3,2)+\right.$$

$$\left.+I(4,1)+(-1)^{1}(I(4,2)+I(3,1))\right];$$

$\gamma_0(\lambda)$, $\delta_0(\lambda)$ – функции экспоненциального типа, суммируемые с квадратом на вещественной оси, а $R_0\left(\frac{1}{2k+1}\right)$ – регулярная добавка, имеющая вид

$$R_0\left(\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2i}\left[\left(\frac{d_1^{+}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(i(2k+1))^{n+1}}+\ldots\right)\left(1+\frac{u_1^{-}\left(\frac{\pi}{2}\right)+I(3,2)}{i(2k+1)}\right)+\ldots\right].$$

Так как $\theta_{2k+1}=O\left(\frac{1}{2k+1}\right)$, то $\gamma_0(2k+1+\theta_{2k+1})=\gamma_0(2k+1)+\frac{\gamma_1(2k+1)}{2k+1}$, причем $\sum|\gamma_0(2k+1)|^2<\infty$, $\sum|\gamma_1(2k+1)|^2<\infty$.
Пользуясь этим фактом и предыдущей формулой, находим

$$e^{i\theta_{2k+l}\pi} R_S(2k+l+\theta_{2k+l}) - e^{-i\theta_{2k+l}\pi} R_S(-(2k+l)-\theta_{2k+l}) =$$

$$= \frac{(-1)^l}{2i[2i(2k+l)]^{n+1}} \Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}} [v^{+(n)}(t)+v^{-(n)}(t)][e^{2i(2k+l)t}(-1)^n +$$

$$+ e^{-2i(2k+l)t}]dt - \frac{n(l)}{2i(2k+l)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [v^{+(n)}(t)+v^{-(n)}(t)]t[e^{2i(2k+l)t}(-1)^{n+1}+e^{-2i(2k+l)t}]\times$$

$$\times dt - \frac{1}{2i(2k+l)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [v^{+(n)}(t)m^+ + v^{-(n)}(t)m^-][e^{2i(2k+l)t}(-1)^{n+1}+e^{-2i(2k+l)t}]dt \Big] +$$

$$+ \frac{\gamma(2k+l)}{(2k+l)^{n+2}} + \frac{\delta(2k+l,\ \theta_{2k+l})}{(2k+l)^{n+3}} + R\left(\frac{1}{2k+l}\right) \quad (l=0,1), \qquad (22)$$

причем числа $\gamma(2k+l)$ не зависят от параметров краевой задачи (1)–(3) и $\sum|\gamma(2k+l)|^2<\infty$, $\sum|\delta(2k+l+\ldots|^2<\infty$. Равенства (18), (20), (22) показывают, что

$$\theta_{2k+l} = \sum_{1\le 2j+1\le n+3} \frac{t_{2j+1}(l)}{(2k+l)^{2j+1}} + \frac{(-1)^{l-1}}{2\pi i[2i(2k+l)]^{n+1}} \times$$

$$\times \Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}} [v^{+(n)}(t)+v^{-(n)}(t)][e^{2i(2k+l)t}(-1)^n + e^{-2i(2k+l)t}]dt -$$

$$- \frac{1}{2i(2k+l)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [v^{+(n)}(t)m^+ + v^{-(n)}(t)m^-][e^{2i(2k+l)t}(-1)^{n+1}+e^{-2i(2k+l)t}]\times$$

$$\times dt - \frac{n(l)}{2i(2k+l)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t[v^{+(n)}(t)+v^{-(n)}(t)][e^{2i(2k+l)t}(-1)^{n+1}+e^{-2i(2k+l)t}]\times$$

$$\times dt\Big] + \frac{\gamma(2k+l)}{(2k+l)^{n+2}} + \frac{\varepsilon_k(a_1,\ldots,c_0)}{(2k+l)^{n+3}} \qquad (l=0,1).$$

Положим

$$\frac{1}{2}[t_{2j+1}(0) + t_{2j+1}(1)] = p_{2j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[t_{2j+1}(0)-t_{2j+1}(1)\right]=s_{2j+1}\,.$$

$$n(0)+n(1)=r_1\,, \tag{23}$$

$$n(0)-n(1)=r_2\;.$$

Тогда, согласно предыдущему, будем иметь

$$\sqrt{\mu_k}=k+\sum_{1\le 2j+1\le n+3}\frac{p_{2j+1}+(-1)^k s_{2j+1}}{k^{2j+1}}+\frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i\,(2ik)^{n+1}}\times$$

$$\times\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}}[v^{+(n)}(t)+v^{-(n)}(t)][e^{2ikt}(-1)^n+e^{-2ikt}]\,dt-$$

$$-\frac{1}{2ik}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[v^{+(n)}(t)m^{+}+v^{-(n)}(t)m^{-}][e^{2ikt}(-1)^{n+1}+e^{-2ikt}]\,dt- \tag{24}$$

$$-\frac{r_1+(-1)^k r_2}{2ik}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,[v^{+(n)}(t)+v^{-(n)}(t)][e^{2ikt}(-1)^{n+1}+e^{-2ikt}]\,dt\Big]+$$

$$+\frac{\gamma(k)}{k^{n+2}}+\frac{\varepsilon_k(a_1,\ldots,c_0)}{k^{n+3}}\,,$$

причем в силу (19), (21), (23)

$$p_1=\frac{2}{\pi}\left[u_1^{+}\left(\frac{\pi}{2}\right)+u_1^{-}\left(\frac{\pi}{2}\right)+I(3,2)+I(4,1)\right];$$

$$s_1=\frac{2}{\pi}\left[I(4,2)+I(3,1)\right];$$

$$r_1=-4p_1\,,\qquad r_2=-4s_1\,;$$

$$m^{\pm}=2\left[u_1^{\mp}\left(\frac{\pi}{2}\right)\pm\left(I(3,2)-I(4,1)\right)\right];$$

числа $\gamma(k)$ не зависят от параметров граничной задачи (1)-(3) и $\sum|\gamma(k)|^2<\infty$, $\sum|\varepsilon_k(a_1,\dots,c_0)|^2<\infty$.

Теорема доказана.

Замечание. Из доказанной теоремы, в частности, следует, что

$$\sqrt{\mu_k}=k+\sum_{1\le 2j+1\le n+2}\frac{p_{2j+1}+(-1)^k s_{2j+1}}{k^{2j+1}}+$$

$$+\frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i(2ik)^{n+1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[v^{+(n)}(t)+v^{-(n)}(t)][e^{2ikt}(-1)^n+e^{-2ikt}]dt+$$

$$+\frac{\alpha_k}{k^{n+2}}, \qquad (25)$$

где $$\sum|\alpha_k|^2<\infty.$$

Рассмотрим наряду с задачей (1)-(3) вторую граничную задачу (1)-($\hat{3}$), для которой $\hat{I}(2,1)=1$ и $I(3,2)-I(4,1)-[\hat{I}(3,2)-\hat{I}(4,1)]=\Delta m\neq 0.$

Пусть $\nu_0,\nu_1,\dots,\nu_k,\dots$ – спектр этой граничной задачи.

Теорема 2. Для того, чтобы комплекснозначная функция $V(x)\in L_2\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ принадлежала пространству $W_2^n[-\frac{\pi}{2},0][0,\frac{\pi}{2}]$, необходимо и достаточно выполнение для собственных значений μ_k и ν_k краевых задач (1)-(3) и (1)-($\hat{3}$) асимптотических равенств

$$\sqrt{\mu_k}=k+\sum_{1\le 2j+1\le n+2}\frac{m_{2j+1}+(-1)^k n_{2j+1}}{k^{2j+1}}+\frac{\omega_k}{k^{n+1}},$$

$$\sqrt{\mu_k}-\sqrt{\nu_k}=\sum_{1\le 2j+1\le n+3}\frac{l_{2j+1}+(-1)^k q_{2j+1}}{k^{2j+1}}+\frac{\theta_k}{k^{n+2}}, \qquad (26)$$

где $$\sum|\omega_k|^2<\infty;\quad \sum|\theta_k|^2<\infty.$$

Доказательство. Из формулы (24) следует, что

$$\sqrt{\mu_k}-\sqrt{\nu_k}=\sum_{1\le 2j+1\le n+3}\frac{\Delta p_{2j+1}+(-1)^k\Delta s_{2j+1}}{k^{2j+1}}+\frac{(-1)^k}{2\pi i(2ik)^{n+2}}\times$$

$$\times\left[\Delta m\int_0^{\frac{\pi}{2}}[v^{+(n)}(t)-v^{-(n)}(t)][e^{2ikt}(-1)^{n+1}+e^{-2ikt}]dt+(\Delta r_1+(-1)^k\Delta r_2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\times\right.$$

$$\times\Big[v^{+(n)}(t)+v^{-(n)}(t)\Big]\Big[e^{2ikt}(-1)^{n+1}+e^{-2ikt}\Big]dt\Big]+\frac{\Delta\varepsilon_k(a_1,\hat{a}_1,\ldots)}{k^{n+3}},$$

где

$$\Delta p_{2j+1}=p_{2j+1}-\hat{p}_{2j+1};\quad \Delta s_{2j+1}=s_{2j+1}-\hat{s}_{2j+1};\ \Delta r_i=r_i-\hat{r}_i\ \ (i=1,2),$$

а $\Delta m=m^{+}-\hat{m}^{+}=-(m^{-}-\hat{m}^{-})\neq 0$ по предположению. Необходимость условий теоремы следует из этой формулы и формулы (25). Докажем достаточность. Предположим, что $v(x)\in W_2^m[-\frac{\pi}{2},0][0,\frac{\pi}{2}]$, но $v(x)\,\bar{\in}\,W_2^{m+1}[-\frac{\pi}{2},0][0,\frac{\pi}{2}]\,(m<n)$. Для определенности предположим, что $m=2l$. Тогда по теореме 1

$$\sqrt{\mu_k}=k+\sum_{1\le 2j+1\le m+2}\frac{p_{2j+1}+(-1)^k s_{2j+1}}{k^{2j+1}}+\frac{(-1)^{k-1}}{4i(2ik)^{m+1}}C_{2k}^m+\frac{d_k}{k^{m+2}},$$

$$\sqrt{\mu_k}-\sqrt{\nu_k}=\sum_{1\le 2j+1\le m+3}\frac{\Delta p_{2j+1}+(-1)^k\Delta s_{2j+1}}{k^{2j+1}}+\frac{(-1)^{k-1}}{4(2ik)^{m+2}}\times$$

$$\times\Big[\Delta m\cdot S_{2k,1}^m+(\Delta r_1+(-1)^k\Delta r_2)S_{2k,2}^m\Big]+\frac{\Delta\varepsilon_k}{k^{m+3}},$$

где

$$C_{2k}^m=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[v^{+(m)}(t)+v^{-(m)}(t)\Big]\cos 2kt\,dt;$$

$$S_{2k,1}^m=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[v^{+(m)}(t)-v^{-(m)}(t)\Big]\sin 2kt\,dt;$$

$$S_{2k,2}^m=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\Big[v^{+(m)}(t)+v^{-(m)}(t)\Big]\sin 2kt\,dt.$$

Сравнивая эти формулы с условиями (26), находим:

1) $p_{2j+1}+(-1)^k s_{2j+1}=m_{2j+1}+(-1)^k n_{2j+1}$, $1\le 2j+1\le m+1$,

$$c_{2k}^m=\frac{\Delta_k}{k}, \quad \text{причем} \quad \Sigma|\Delta_k|^2<\infty;$$

2) $\Delta p_{2j+1}+(-1)^k\Delta s_{2j+1}=l_{2j+1}+(-1)^k q_{2j+1}$, $1\le 2j+1\le m+1$,

$$\Delta m S_{2k,1}^m+(\Delta r_1+(-1)^k\Delta r_2)S_{2k,2}^m=\frac{d_k}{k}+\frac{\xi_k}{k},$$

где $d_k=-(\Delta p_{m+3}+(-1)^k\Delta s_{m+3})$, а $\Sigma|\xi_k|^2<\infty$. Из условия 1) следует

$$v^{+(m)}(t)+v^{-(m)}(t)-\Sigma\frac{\Delta_k}{k}\cos 2kt\in W_2^1[0,\tfrac{\pi}{2}],$$

а значит, $t[v^{+(m)}(t)+v^{-(m)}(t)]\in W_2^1[0,\frac{\pi}{2}]$ и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}t[v^{+(m)}(t)+v^{-(m)}(t)]\sin 2kt\,dt=\frac{r}{k}+\frac{\varphi_k}{k},$$

где $\Sigma|\varphi_k|^2<\infty$.

Отсюда и из условия 2) заключаем, что

$$\Delta m[v^{+(m)}(t)-v^{-(m)}(t)]=\Sigma\frac{\xi_k+\varphi_k}{k}\sin 2kt-$$

$$-(\Delta p_{m+3}+\Delta s_{m+3}+(\Delta r_1+\Delta r_2)r)\Sigma\frac{\sin 2\cdot 2lt}{2l}-$$

$$-(\Delta p_{m+3}-\Delta s_{m+3}+(\Delta r_1-\Delta r_2)r)\Sigma\frac{\sin 2(2l-1)t}{2l-1}.$$

Замечая, что

$$\Sigma\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}\,(0\le x\le 2\pi),\quad \Sigma\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\frac{\pi}{4}\,(0<x<\pi),$$

получаем

$$\Delta m[v^{+(m)}(t)-v^{-(m)}(t)]\in W_2^1[0,\tfrac{\pi}{2}].$$

Так как $\Delta m \neq 0$, то тем самым показано, что $V^{+(m)}(t)-V^{-(m)}(t)\in W_2^1[0,\frac{\pi}{2}]$. Но так как $V^{+(m)}(t)+V^{-(m)}(t)\in W_2^1[0,\frac{\pi}{2}]$, то $V^{\pm(m)}(t)\in W_2^1[0,\frac{\pi}{2}]$, и, следовательно, $V(t)\in W_2^{m+1}[-\frac{\pi}{2},0][0,\frac{\pi}{2}]$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

УДК 517.4

Л.А.Пастур, А.Л.Фиготин

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СЛУЧАЙНЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. В статье исследуются эргодические свойства распределения собственных значений случайных самосопряженных операторов. Простым, но типичным примером доказываемых ниже предложений является следующее утверждение.

Рассмотрим случайный матричный оператор H, действующий в $l^2(-\infty,+\infty)$ согласно формуле:

$$(Hx)_k = \eta_k x_{k+1} + \xi_k x_k + \eta_{k-1} x_{k-1}, \tag{1}$$

где $x\in l^2(-\infty,+\infty)$, а $\eta_k, \xi_k\ (k\in\mathbb{Z})$ – вещественные метрически транзитивные случайные процессы [1].

Пусть $H_n\ (n=1,2,\dots)-(2n+1)$ – мерная матрица с элементами $(H_n)_{km}=H_{km}$, где $|k|,|m|\leq n$. Введем нормированные функции распределения собственных значений $N_n(\lambda)$ так, что $(2n+1)N_n(\lambda)$ – число собственных значений H_n, меньших λ. Тогда существует такая неслучайная $N(\lambda)$, что в точках непрерывности $N(\lambda)$ с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} N_n(\lambda) = N(\lambda). \tag{2}$$

Если, кроме того, известно, что H с вероятностью 1 – существенно самосопряженный оператор, то для $N(\lambda)$ справедлива формула

$$N(\lambda) = \underline{M}\{(E_\lambda l_0, l_0)\}, \tag{3}$$

где E_λ – разложение единицы для H, M – символ математического ожидания, а $(l_0)_k=\delta_{0k}$.

Приведенное утверждение можно рассматривать как обобщение теоремы Г.Сегё [7] об асимптотическом распределении собственных значений теплицевых форм.

П. Начнем с изучения многомерных матриц, являющихся обобщением многомерных матриц Якоби [2]. Они представляют собой симметрические операторы, действующие в пространстве $l^2(Z^s)$ согласно формуле

$$(Hx)_k = \sum_{|r|\le R_0} \eta_k^{(r)} x_{k+r} \qquad (4)$$

1) $k, r \in Z^s$; $|k| = \max_{1\le j\le s} |k_j|$, где $k = (k_1, \dots, k_s)$;

2) для $k, r \in Z^s$ и $|r| \le R_0$ $\eta_{k-r}^{(r)} = \eta_k^{(-r)}$ (условие симметричности H);

3) $\{\eta_k^{(r)}\}(k \in Z^s)$ – вещественные метрически транзитивные случайные поля (м.т.с.п.) [1] при $|r| \le R_0$. При $s=1$ операторы указанного вида задаются бесконечными в обе стороны матрицами, в которых отличные от нуля матричные элементы расположены на главной и R_0, ближайших с обеих сторон к главной диагоналях. В частности, при $R_0=1$ получим операторы вида (1), т.е. обычную матрицу Якоби.

Рассмотрим $(2n+1)^s$ – мерные матрицы H_n с элементами $(H_n)_{km} = (H)_{km}$; $k m \in Z^s, |k|, |m| \le n$. Введем нормированные функции распределения собственных значений $N_n(\lambda)$ так, что $(2n+1)^s N_n(\lambda)$ - число собственных значений H_n, меньших λ. Обозначим через E_λ разложение единицы для H, а через l_0 – такой вектор из $l^2(Z^s)$ что $(l_0)_k = \delta_{0k}$.

Теорема 2.1. Пусть H – случайный оператор вида (5) и $|\eta_0^{(r)}| \le C(|r| \le R_0)$ с вероятностью 1. Тогда существует такая неслучайная $N(\lambda)$, что

1°) с вероятностью 1 $\lim_{n\to\infty} N_n(\lambda) = N(\lambda)$ в точках непрерывности $N(\lambda)$;

2°) $N(\lambda) = \underline{M}\{(E_\lambda l_0, l_0)\}$.

Теорема 2.2. Пусть H – случайный оператор вида (4) и $\eta_0^{(r)} \le C$ $(|r| \le R_0)$ конечные с вероятностью 1.

Тогда существует такая неслучайная $N(\lambda)$, что

1°) с вероятностью 1 $\lim_{n\to\infty} N_n(\lambda) = N(\lambda)$ в точках непрерывности $N(\lambda)$.

Если, кроме того, H – существенно самосопряженный оператор с вероятностью 1, то имеет место

2°) $N(\lambda) = M\{(E_\lambda l_0, l_0)\}$. (5)

Поскольку в условиях теоремы 2.1 симметрический оператор H с вероятностью 1 ограничен, а поэтому существенно самосопряжен, то теорема 2.1 является частным случаем теоремы 2.2. Однако наш метод доказательства будет состоять в том, что сначала докажем теорему 2.1, а затем более общий случай, составляющий содержание теоремы 2.2, получим путем некоторого предельного перехода с использованием теоремы 2.1.

Наряду с операторами вида (4) будем рассматривать операторы вида

$$(Hx)_k = \eta_k \sum_{i=1}^{s} x_{k+d_i} + \sum_{i=1}^{s} \eta_{k-d_i} x_{k-d_i} + \xi_k x_k, \qquad (6)$$

где $\quad k, d_i \in \mathbb{Z}^s$ и $(d_i)_j = \delta_{ij} \ (1 \le i, \ j \le s)$.

Операторы вида (6), очевидно, представляют частный случай операторов вида (4). Чтобы избежать громоздких обозначений, сформулированные теоремы будут доказываться для H вида (6). Эти доказательства, как легко видеть, почти дословно сохраняются для H вида (4).

Доказательству теоремы 2.1. предпошлем две леммы.

Лемма 2.1 (сходимость моментов). Пусть p – натуральное число, тогда с вероятностью 1 $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^p dN_n(\lambda) = M\{(H^p l_0, l_0)\}$.

Положим $h_{km} = (H)_{km}, k m \in \mathbb{Z}^s$. Из определения $N_n(\lambda)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^p dN_n(\lambda) = (2n+1)^{-s} Sp H_n^p,$$

$$Sp H_n^p = \sum_{|k|, |l_j| \le n} h_{k, l_1} h_{l_1, l_2} \dots h_{l_{p-2}, l_{p-1}} h_{l_{p-1}, k}. \qquad (7)$$

Учитывая специальный вид H, последнюю сумму представляем так. Обозначим $m_j = l_j - k \ (1 \le j \le p-1)$. Тогда суммирование в (7) производим по тем k и m_j, которые удовлетворяют

$$|k| \le n, \ |m_1| \le 1, \ |m_2 - m_1| \le 1, \dots, |m_{p-2} - m_{p-1}| \le 1, |m_{p-1}| \le 1. \ (8)$$

При $1 \le j \le p-1$ $|m_j| = |(m_j - m_{j-1}) + \dots + (m_2 - m_1) + m_1| \le j < p$.

Множество наборов $(m_1, \dots, m_{p-1})$, удовлетворяющих (8), обозначаем M_p. M_p конечно и имеет $\varkappa_p$ элементов.

$$\sum_{|k|, |l_j| \le n} h_{k, l_1} h_{l_1, l_2} \dots h_{l_{p-1}, k} = \sum_{(m_1, \dots, m_{p-1}) \in M_p} \sum_{|k| \le n} h_{k, k+m_1} \dots h_{k+m_{p-1}, k} - \Delta_n,$$

где Δ_n – сумма таких "лишних" произведений вида $h_{k, k+m_1} \dots h_{k+m_{j-1}, k+m_j} \dots h_{k+m_{p-1}, k}$, что $\exists j \ (1 \le j \le p-1): |k + m_j| > n, \ |k| \le n$. Оценим число слагаемых в Δ_n. Если $|k+m_j| > n$ и $|k| \le n$, то, учитывая $|m_j| \le p-1$, получаем $|k| + p \ge |k| + |m_j| \ge |k + m_j| > n$. Откуда $|k| > n - p$. Но $|k| \le n$, следовательно, число слагаемых в сумме Δ_n не превосходит $\varkappa_p [(2n+1)^s - (2(n-p)+1)^s]$, т.е. меньше, чем $C_p (2n+1)^{s-1}$, где $0 < C_p < \infty$. Так как, согласно условиям теоремы, $\|H\| \le C'$, то $|\Delta_n| \le$ $\le C_p C'^p (2n+1)^{s-1}$. Рассмотрим $h_{k, k+m_1} \dots h_{k+m_{p-1}, k}$, где $(m_1, \dots, m_{p-1}) \in M_p$.

Тогда либо $h_{k,k+m_1}\dots h_{k+m_{p-1},k}=0$ при $k\in Z^s$, либо $h_{k,k+m_1}\dots h_{k+m_{p-1},k}=$ $=\eta_{k+r_1}\dots\eta_{k+r_q}\xi_{k+r_{q+1}}\dots\xi_{k+r_p}$, где $r_1,\dots,r_p\in Z^s$, и набор $(r_1,\dots,r_p)$ однозначно связан с набором $(m_1,\dots,m_{p-1})$, причем некоторым наборам $(m_1,\dots,m_{p-1})$ отвечает произведение $h_{k,k+m_1}\dots h_{k+m_{p-1},k}=0$. Следовательно, если через N_p обозначить множество наборов $(r_1,\dots,r_p)$, то число элементов в N_p меньше, чем в M_p, т.е. N_p конечно. Из эргодической теоремы [3] $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^{-s}\sum_{|k|\le n}\eta_{k+r_1}\dots\xi_{k+r_p}=\underline{M}\{\eta_{r_1}\dots\xi_{r_p}\}$ с вероятностью 1, где $\eta_{r_1}\dots\xi_{r_p}=h_{0,m_1}\dots h_{1\dots p-1,0}$, причем набор $(r_1,\dots,r_p)$ соответствует $(m_1,\dots,m_{p-1})$. Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^{-s}\Delta_n=0$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)^{-s}\sum_{|k|,|l_j|\le n}h_{k,l_1}\dots h_{l_{p-1},k}=\sum_{(m_1,\dots,m_{p-1})\in M_p}\lim_{n\to\infty}(2n+1)^{-s}\sum_{|k|\le n}h_{k,k+m_1}\dots$$

$$\dots h_{k+m_{p-1},k}=\sum_{(r_1,\dots,r_p)\in N_p}\lim_{n\to\infty}\sum_{|k|\le n}\eta_{k+r_1}\dots\xi_{k+r_p}=\sum_{(r_1,\dots,r_p)\in N_p}\underline{M}\{\eta_{r_1}\dots\xi_{r_p}\}=$$

$$=\sum_{(m_1,\dots,m_{p-1})\in M_p}\underline{M}\{h_{0,m_1}\dots h_{m_{p-1},0}\}=M\{(H^p l_0,l_0)\}.$$

Отметим, что $(H^p l_0,l_0)$ выражается через η_k и ξ_k, т.е. $(H^p l_0,l_0)$ - измеримая случайная величина.

Лемма 2.2. 1°) $(E_\lambda l_0,l_0)$ - измеримая случайная величина.
2°) Если $f(\lambda)\in C(R)$, то

$$M\left\{\int_{-C}^{C}f(\lambda)d(E_\lambda l_0,l_0)\right\}=\int_{-C}^{+C}f(\lambda)\,dM\{(E_\lambda l_0,l_0)\}.$$

Доказательство легко получаем из леммы 2.1 с помощью стандартных методов аппроксимации ступенчатых функций полиномами и наоборот.

Доказательство теоремы 2.1. Из лемм 2.1, 2.2 и теорем Хелли следует, что с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-C'}^{C'}\lambda^p dN_n(\lambda)=\int_{-C'}^{C'}\lambda^p dM\{(E_\lambda l_0,l_0)\}=\int_{-C'}^{C'}\lambda^p dN(\lambda)$$

при $p=0,1,2,\dots$

Учитывая, что $N_n(\lambda)$ и $N(\lambda)$ равны 1 при $\lambda>C'$ и 0 при $\lambda<-C'$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}N_n(\lambda)=N(\lambda)=M\{(E_\lambda l_0,l_0)\}$ в точках непрерывности $N(\lambda)$.

Теорема 2.1 доказана.

Доказательство 1°) теоремы 2.2. Пусть

$$\chi_j(t)=\begin{cases}t, & |t|\le j,\\ 0, & |t|>j\end{cases},\ \text{где}\ j=1,2,\dots$$

Введем $H_n^{(j)}=\{\chi_j(h_{km})\}_{|k|,|m|\le n}, H^{(j)}=H_\infty^{(j)}, E_\lambda^{(j)}$ – разложение единицы для $H^{(j)}$ и $N_n^{(j)}$ – нормированная функция распределения собственных значений $H_n^{(j)}$. Очевидно, что $\{\chi_j(\eta_k)\}, \{\chi_j(\xi_k)\}(k\in\mathbb{Z}^s)$ – м.т.с п. По теореме 2.1 с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} N_n^j(\lambda)=N^{(j)}(\lambda)=M\{(E_\lambda^{(j)}l_0,l_0)\} \tag{9}$$

при всех λ за исключением, быть может, счетного множества. Всегда можно выбрать подпоследовательность $\{j'\}$ и $\Lambda\subset\mathbb{R}$ так, что $\mathbb{R}-\Lambda$ счетно, (8) имеет место при $\lambda\in\Lambda$ и $\lim_{j'\to\infty} N^{(j')}(\lambda)$ существует при $\lambda\in\Lambda$. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что j пробегает только значения последовательности $\{j'\}$.
Если бы удалось показать, что с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty} N_n^{(j)}(\lambda)=\lim_{j\to\infty}\lim_{n\to\infty} N_n^{(j)}(\lambda), \tag{10}$$

то теорема 2.2. Была бы доказана, так как $\lim_{j\to\infty}\lim_{n\to\infty} N_n^{(j)}=\lim_{j\to\infty} N^{(j)}(\lambda)$ существует и неслучаен, а $\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty} N_n^{(j)}(\lambda)=\lim_{n\to\infty} N_n(\lambda)$.
Но соотношение (10) является следствием равенства

$$\lim_{j_1,j_2\to\infty}\sup_{n\ge1}|N_n^{(j_1)}(\lambda)-N_n^{(j_2)}(\lambda)|=0. \tag{11}$$

Действительно, допустим, что (11) верно с вероятностью 1. Пусть Ω_1 таково, что для $\omega\in\Omega_1$ справедливо (11) и $\lim_{n\to\infty} N_n^{(j)}(\lambda,\omega)=N^{(j)}(\lambda)(\lambda\in\Lambda)$ при всех $j\in\{j'\}$.

Докажем, что имеет место

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty} N_n^{(j)}(\lambda,\omega)=\lim_{j\to\infty} N^{(j)}(\lambda)=N(\lambda)(\lambda\in\Lambda). \tag{12}$$

Отметим прежде всего, что

$$\lim_{j\to\infty} N_n^{(j)}=N_n(\lambda), \tag{13}$$

так как при $j\ge\max_{|k|\le n+1}\{|\xi_k|,|\eta_k|\}$ $N_n^{(j)}(\lambda)\equiv N_n(\lambda)$.

Зададимся $\varepsilon>0$, фиксированным $\lambda\in\Lambda$ и $\omega\in\Omega_1$. Тогда выберем $D_1>0$ так, что при $j>D_1$ $|N^{(j)}(\lambda)-N(\lambda)|<\frac{\varepsilon}{3}$. (14)
Из (11) следует, что $\exists D_2>D_1: \forall j>D_2\ |N_n^{(j)}(\lambda)-N^{(D_2)}(\lambda)|\le\frac{\varepsilon}{3}$.
Переходя в этом неравенстве к пределу по j и учитывая (13), получаем $\forall n\ge1\ |N_n(\lambda)-N_n^{(D_2)}(\lambda)|\le\frac{\varepsilon}{3}$. Так как $D_2>D_1$, то из (14) $|N^{(D_2)}(\lambda)-N(\lambda)|\le\frac{\varepsilon}{3}$. Пользуясь теоремой 2.1, выберем N так, чтобы при $n>N$ $|N_n^{(D_2)}(\lambda)-N^{(D_2)}(\lambda)|\le\frac{\varepsilon}{3}$. Из последних трех неравенств при $n>N$ получаем

$$|N_n(\lambda)-N(\lambda)|\le|N_n(\lambda)-N_n^{(D_2)}(\lambda)|+|N_n^{(D_2)}(\lambda)-N^{(D_2)}(\lambda)|+|N^{(D_2)}(\lambda)-N(\lambda)|\le\varepsilon.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} N_n(\lambda,\omega)=N(\lambda)\,(\lambda\in\Lambda,\omega\in\Omega_1)$. Но из последнего равенства следует, что $\lim_{n\to\infty} N_n(\lambda)=N(\lambda)$ с вероятностью 1 во всех точках непрерывности $N(\lambda)$.

Доказательство теоремы 2.2 свелось к доказательству (11) или леммы 2.3.

Лемма 2.3. С вероятностью 1 $\lim_{j_1,j_2\to\infty}\sup_{n\ge1}|N_n^{(j_1)}(\lambda)-N_n^{(j_2)}(\lambda)|=0$.

Для оценки $|N_n^{(j_1)}(\lambda)-N_n^{(j_2)}(\lambda)|$ воспользуемся известным из теории матриц фактом: если A и B – эрмитовы матрицы порядка q, ν – ранг A–B, а $N_A(\lambda)$ и $N_B(\lambda)$ – нормированные функции распределения собственных значений A и B соответственно, то $|N_A(\lambda)-N_B(\lambda)|\le\nu q^{-1}$. Оценим $\nu_n(j_1,j_2)$ – ранг $H_n^{(j_1)}-H_n^{(j_2)}$, где для определенности положим $j_1>j_2$. Введем функции

$$\chi_{j_1j_2}(t)=\begin{cases}t, & t\in(j_1,j_2],\\ 0, & t\,\bar{\in}\,(j_1,j_2]\end{cases}\quad\text{и}\quad \chi(t)=\begin{cases}1, & t\ne0,\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

Матрица $\{\chi_{j_1,j_2}(h_{km})\}_{|k|,|m|\le n}$ равна $H_n^{(j_1)}-H_n^{(j_2)}$. Очевидно, что $\nu_n(j_1,j_2)$ не превосходит числа отличных от О элементов матрицы $H_n^{(j_1)}-H_n^{(j_2)}$, т.е.

$$\nu_n(j_1,j_2)\le\sum_{|k|,|m|\le n}\chi(\chi_{j_1j_2}(h_{km}))\le$$

$$\le\sum_{|k|\le n+1}\Big\{\chi(\chi_{j_1j_2}(\xi_k))+\sum_{i=1}^{s}[\chi(\chi_{j_1j_2}(\eta_{k-d_i}))+\chi(\chi_{j_1j_2}(\eta_{k+d_i}))]\Big\}\le$$

$$\le\sum_{|k|\le n+1}\chi(\chi_{j_1j_2}(\xi_k))+2s\sum_{|k|\le n+2}\chi(\chi_{j_1j_2}(\eta_k)).$$

Следовательно,

$$|N_n^{(j_1)}(\lambda)-N_n^{(j_2)}(\lambda)|\le(2n+1)^{-s}\Big[\sum_{|k|\le n+1}\chi(\chi_{j_1j_2}(\xi_k))+2s\sum_{|k|\le n+2}\chi(\chi_{j_1j_2}(\eta_k))\Big].$$

Если $j_1,j_2\ge j$, то

$$|N_n^{(j_1)}(\lambda)-N_n^{(j_2)}(\lambda)|\le(2n+1)^{-s}\Big[\sum_{|k|\le n+1}\chi(\chi_{+\infty;j}(\xi_k))+2s\sum_{|k|\le n+2}\chi(\chi_{+\infty j}(\eta_k))\Big].$$

По эргодической теореме имеет место

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)^{-s}\Big[\sum_{|k|\le n+1}\chi(\chi_{+\infty,j}(\xi_k))+2s\sum_{|k|\le n+2}\chi(\chi_{+\infty,j}(\eta_k))\Big]=$$

$$= M\{\chi(\chi_{+\infty,j}(\xi_0))\} + 2sM\{\chi(\chi_{+\infty,j}(\eta_0))\} = P(|\xi_0|>j) + 2sP(|\eta_0|>j), \qquad (15)$$

где $P(|\xi_0|>j)$ и $P(|\eta_0|>j)$ – вероятности того, что $|\xi_0|$ и $|\eta_0|$ соответственно больше j. Зададимся $\varepsilon>0$. Так как ξ_0 и η_0 конечны с вероятностью 1, то можно выбрать $D>0$ так, чтобы $P(|\xi_0|>j) \le 4^{-1}(2s+1)^{-1}\varepsilon$ и $P(|\eta_0|>D) \le 4^{-1}(2s+1)^{-1}\varepsilon$. Обозначим через Ω' подмножество вероятностного пространства Ω, для элементов которого (15) справедливо при всех j, на котором все ξ_k, η_k $(k\in Z^s)$ конечны, $P(\Omega')=1$. Тогда при любом фиксированном $\omega\in\Omega'$ и $j>D$ $\exists N$: $\forall n>N$ и $j_1 j_2>j$

$$(2n+1)^{-s}\Big[\sum_{|k|\le n+1}\chi(\chi_{j_1,j_2}(\xi_k)) + 2s\sum_{|k|\le n+2}^{\cdot}\chi(\chi_{j_1 j_2}(\eta_k))\Big] \le$$

$$\le \varepsilon/2 + P(|\xi_0|>j) + 2sP(|\eta_0|>j).$$

Выберем теперь j_0 так, чтобы $j_0>j$ и $j_0 \ge \sup_{|k|\le N+1}\{|\xi_k|,|\eta_k|\}$. Тогда $\forall n\ge N$: $|N_n^{(j_1)}(\lambda)-N_n^{(j_2)}(\lambda)|=0$, если $j_1,j_2>j_0$. Следовательно, $\forall j_1, j_2>j_0$ и $\forall n$:

$$|N_n^{(j_1)}(\lambda)-N_n^{(j_2)}(\lambda)| \le \frac{\varepsilon}{2} + P(|\xi_0|>j) + 2sP(|\eta_0|>j) \le \varepsilon .$$

Последнее означает, что при всех $\omega\in\Omega'$, т.е. с вероятностью 1

$$\lim_{j_1,j_2\to\infty}\ \sup_{n\ge 1}|N_n^{(j_1)}(\lambda)-N_n^{(j_2)}(\lambda)|=0.$$

Доказательство 2°) теоремы 2.2. Воспользуемся известным утверждением [4]. Если $H^{(j)}$, H – самосопряженные операторы, определенные на плотном в гильбертовом пространстве линейном многообразии D, и для $u\in D$ $\lim_{j\to\infty} H^{(j)}u = Hu$, то $s-\lim_{j\to\infty} E_\lambda^{(j)} = E_\lambda$ в точках непрерывности E_λ. Рассматриваемые нами $H^{(j)}$ и H с вероятностью 1 удовлетворяют условиям этого утверждения, если в качестве D взять множество финитных последовательностей. Следовательно, $\lim_{j\to\infty}(E_\lambda^{(j)} l_0, l_0) = (E_\lambda l_0, l_0)$, если λ –точка непрерывности E_λ. Если теперь перейти от функций по λ $(E_\lambda^{(j)} l_0, l_0)$ к ассоциированным с ними мерам Лебега-Стилтьеса $\mu^{(j)}$, то легко показать $\lim_{j\to\infty} M\{\mu^{(j)}\} = M\{\mu^{\infty}\}$ в смысле слабой сходимости мер, что означает $\lim_{j\to\infty} M\{(E_\lambda^{(j)} l_0, l_0)\} = M\{(E_\lambda l_0, l_0)\}$ в точках непрерывности $M\{(E_\lambda l_0, l_0)\}$. Но $M\{(E_\lambda^{(j)} l_0, l_0)\} = N^{(j)}(\lambda)$. Последнее предельное соотношение и лемма 2.3 завершают доказательство 2°) теоремы 2.2.

Теорема 2.2 доказана полностью.

Ш. Рассмотрим случайный оператор Шредингера в R^3

$$H = -\Delta + q(x), \tag{16}$$

где $q(x)$ – случайное метрически транзитивное поле. Пусть V – куб с центром в начале координат, в котором задан случайный оператор*)

$$H_V \psi = (-\Delta + q(x))\psi, \quad \psi + \sigma \frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\partial V} = 0 \quad (0 \le \sigma \le \infty). \tag{17}$$

Введем нормированные функции распределения собственных значений $N_V(\lambda)$ так, что $V N_V(\lambda)$ – число собственных значений H_V, меньших λ. В [6] доказано, что если с вероятностью 1 $q(x) \ge \lambda > -\infty$, то существует с вероятностью 1 неслучайный предел $\lim_{V\to\infty} N_V(\lambda)$.

Теоремы 3.1 и 3.2 обобщают это утверждение.

Пусть μ_V – мера Лебега-Стилтьеса ассициированная с $N_V(\lambda)$.

Теорема 3.1. Если с вероятностью 1 $q \in C(R^3)$ и $M\{|q^3(0)|\} < \infty$, то с вероятностью 1 существует предел $\lim_{V\to\infty} \mu_V = \mu$, где μ – неслучайная мера, не зависящая от граничных условий в (17).

Доказательство теоремы 3.1 разбивается на несколько лемм.

Лемма 3.1. Пусть $r_V(x, y; \tau)$ – функция Грина задачи

$$-(\Delta + i\tau) r_V(x, y; \tau) = \delta(x - y), \quad r_V + \sigma \frac{\partial r_V}{\partial n}\Big|_{\partial V} = 0,$$

а $r_V(\tau)$ – интегральный оператор с ядром $r_V(x; y; \tau)$. Тогда

а) $$\int_V |r_V(x, y; \tau)|^2 dy \le V^{-1}\, Sp\; r_V(\tau) r_V^+(\tau);$$

б) $$V^{-1}\, Sp\; r_V(\tau) r_V^+(\tau) \le V^{-1}\, Sp\; \tilde r_V(\tau) \tilde r_V^+(\tau),$$

где $\tilde r_V$ – функция Грина задачи Неймана $(\sigma = \infty)$;

в) при всех достаточно больших V и $\tau \ge 1$ $V^{-1} Sp\; \tilde r_V(\tau) \tilde r_V^+(\tau) \le \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\sqrt{\tau}}$.

Доказательство леммы 3.1 получается путем элементарных, но не-

*) Объем куба V будем обозначать также V.

сколько громоздких оценок известных из [5] выражений для соответствующих функций Грина и поэтому опускается. Введем в рассмотрение вспомогательные операторы $H^{(n)}$ и $H_V^{(n)}$, которые отличаются от H и H_V заменой $q(x)$ на $q_n(x)=\max\{-n,q(x)\}$, а также соответствующие $\mu_V^{(n)}$. Как было показано в [6], с вероятностью 1 существует $\lim\limits_{V\to\infty}\mu_V^{(n)}=\mu^{(n)}$, где $\mu^{(n)}$ – неслучайная мера. Пусть $\rho_V^{(n)}(\tau)=\int_R(\lambda^2+\tau^2)^{-1}\mu_V^{(n)}(d\lambda)$. Это равенство можно записать иначе, если рассмотреть функции Грина $R_V^{(n)}(x,y,\tau)$ задачи

$$(-\Delta+q_n(x)-i\tau)R_V^{(n)}(x;y;\tau)=\delta(x-y),\ R_V^{(n)}+\sigma\frac{\partial R_V^{(n)}}{\partial n}\Big|_{\partial V}=0\ ,$$

а именно:

$$\rho_V^{(n)}(\tau)=V^{-1}Sp\,R_V^{(n)}(\tau)R_V^{(n)+}(\tau)=V^{-1}\int_V\int_V|R_V^{(n)}(x,y;\tau)|^2dx\,dy.$$

Лемма 3.2.

а) $\rho_V^{(n)}(\tau)\leq 2\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)(1+C_V\tau^{-2})$

при $V\geq 8\pi^3$, где $C_V=V^{-1}\int_V q^2(x)\,dx$;

б) для $\lambda\geq 1$ $\mu_V^{(n)}\{[-\lambda,\lambda]\},\ \mu_V\{[-\lambda,\lambda]\}\leq 8(1+C_V)\lambda^{3/2}$

и $\mu^{(n)}\{[-\lambda,\lambda]\}\leq 8(1+C)\lambda^{3/2}$, где $C=M\{q^2(0)\}$.

$R_V^{(n)}(x;y;\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$R_V^{(n)}(x;y;\tau)=r_V(x;y;\tau)-\int_V r_V(x,u;\tau)q_n(u)R_V^{(n)}(u,y;\tau)du$$

или в операторной форме

$$R_V^{(n)}(\tau)=r_V(\tau)-r_V(\tau)q_nR_V^{(n)}(\tau)\ . \qquad (18)$$

В целях упрощения вида выкладок символы n,V,τ у $R_V^{(n)}(\tau)$ и $r_V(\tau)$ будем иногда опускать. Домножая (18) на $R_V^{(n)+}(\tau)$ справа и, пользуясь неравенством Шварца и леммой 3.1, получаем

$$Sp\,RR^+\leq\left(\int_{V^2}|r(x,u)|^2du\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{V^2}|R(u,x)|^2du\,dx\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\int_{V^2}|r(x,u)|^2q_n^2(u)\,du\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{V^2}du\,dx\left|\int_V R(u,y)R(y,x)dy\right|^2\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq(Sp\,rr^+)^{1/2}(Sp\,RR^+)^{1/2}+(V^{-1}Sp\,rr^+)^{1/2}\left(\int_V q_n^2(u)du\right)^{1/2}\frac{1}{\tau}(Sp\,RR^+)^{1/2}.$$

Откуда, учитывая б) и в) леммы 3.1, запишем

$$V^{-1} Sp\, RR^{+} \le 2\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\left(1+\tau^{-2}V^{-1}\int_V q^2(x)\,dx\right),$$

где, обозначив $C_V = V^{-1}\int_V q^2(x)\,dx$, получим а). Из а) следует б). Действительно,

$$\int_{\mathbb{R}} (\alpha^2+\tau^{-2})^{-1}\mu_V^{(n)}(d\alpha) = \rho_V^{(n)}(\tau) \le 2\left(\tau^{-2}+\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\left(1+C_V\tau^{-2}\right),$$

откуда

$$(\lambda^2+\tau^{-2})^{-1}\mu_V^{(n)}\{[-\lambda,\lambda]\} \le 2\left(\tau^{-2}+\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\left(1+C_V\tau^{-2}\right).$$

Положив $\tau=\lambda$, будем иметь б) для $\mu_V^{(n)}$. Принимая во внимание предельные соотношения

$$\lim_{V\to\infty}\mu_V^{(n)}=\mu^{(n)},\quad \lim_{n\to\infty}\mu_V^{(n)}=\mu_V \quad\text{и}\quad \lim_{V\to\infty}V^{-1}\int_V q^2(x)\,dx = \underline{M}\{|q^2(0)|\},$$

которые верны с вероятностью 1, получаем б). Причем $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_V^{(n)}=\mu_V$, так как с вероятностью 1 при достаточно большом n $q_n \equiv q$ в V и $\mu_V^{(n)}=\mu_V$.

Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3.

$$|\rho_V^{(n_1)}(\tau)-\rho_V^{(n_2)}(\tau)| \le \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\sqrt{1+\frac{C_V}{\tau^2}}\left(\gamma_V^{(1)}(n_1,n_2)+\tau^{-2}\gamma_V^{(2)}(n_1,n_2)\right)^{1/2},$$

где C_V взято из леммы 3.2, $\gamma_V^{(1)}(n_1,n_2)=(16V)^{-1}\int_V |q_{n_1}(x)-q_{n_2}(x)|^3dx$ и

$$\gamma_V^{(2)}(n_1,n_2)=\frac{1}{16}\left(V^{-1}\int_V |q_{n_1}(x)-q_{n_2}(x)|^3dx\right)^{1/3}\left(V^{-1}\int_V |q^3(x)|\,dx\right)^{2/3}.$$

Пусть для определенности $n_1\le n_2$. Для упрощения вида выкладок переобозначим $R_V^{(n_1)}(\tau)$, $R_V^{(n_2)}(\tau)$ и $q_{n_1}-q_{n_2}$ соответственно R_1, R_2 и Δq. Тогда

$$|\rho_V^{(n_1)}(\tau)-\rho_V^{(n_2)}(\tau)| = V^{-1}\left|\int_{V^2}|R_1(x,y)|^2dx\,dy-\int_{V^2}|R_2(x,y)|^2dx\,dy\right| \le$$

$$\le V^{-1}\left[\left(\int_{V^2}|R_1(x,y)|^2dx\,dy\right)^{1/2}+\left(\int_{V^2}|R_2(x,y)|^2dx\,dy\right)^{1/2}\right]\left(\int_{V^2}|R_1(x,y)-\right.$$

$$\left.-R_2(x,y)|^2dx\,dy\right)^{1/2}=\left(\sqrt{\rho_V^{(n_1)}(\tau)}+\sqrt{\rho_V^{(n_2)}(\tau)}\right)\sqrt{V^{-1}Sp(R_1-R_2)(R_1^{+}-R_2^{+})}\,. \quad (19)$$

Так как $R_2-R_1=R_1\Delta q R_2$, $\Delta q>0$ и $\|R_1\|, \|R_2\|\le\tau^{-1}$, то

$$Sp(R_2-R_1)(R_2^{+}-R_1^{+}) = Sp\,R_1\Delta q R_2(R_2^{+}-R_1^{+}) \le$$

$$\leq |Sp\, R_1 \Delta q\, R_2 R_2^+| + |Sp\, R_1 \Delta q\, R_2 R_1^+| \leq \frac{1}{\tau}(Sp\, \Delta q\, R_2 R_2^+ + Sp\, \Delta q\, R_1 R_1^+). \quad (20)$$

Оценим $Sp\,\Delta q\, RR^+ (R=R_1, R_2)$, пользуясь леммой 3.1 и $\|RR^+\| \leq \tau^{-2}$:

$$Sp\,\Delta q\, RR^+ = Sp\,\Delta q\,(rR^+ - rq_n RR^+) \leq$$

$$\leq \int_{V^2} \Delta q(x)|r(x,y)||R(y,x)|dx\,dy + \int_{V^2} \Delta q(x)|r(x,y)||q_n(y)||RR^+(y,x)| \times$$
$$\times dy\,dx \leq \left(\int_{V^2}|\sqrt{\Delta q(x)}\, r(x,y)|^2 dx\,dy\right)^{1/2}\left(\int_{V^2}|\sqrt{\Delta q(x)}\, R(x,y)|^2 dx\,dy\right)^{1/2} +$$
$$+\left(\int_{V^2}|\sqrt{\Delta q(x)}\, r(x,y) q_n(y)|^2 dx\,dy\right)^{1/2}\left(\int_{V^2}|\sqrt{\Delta q(x)}\, RR^+(x,y)|^2 dx\,dy\right)^{1/2},$$

т.е.

$$Sp\,\Delta q\, RR^+ \leq 2\left(V^{-1}\int_V \Delta q(x)dx\; Sp\, rr^+ + \tau^{-2}|Sp\,\Delta q\, r q_n^2 r^+|\right). \quad (21)$$

Произведем оценку $Sp\,\Delta q\, r q_n^2 r^+$, пользуясь неравенством Гельдера и леммой 3.1:

$$Sp\,\Delta q\, r q_n^2 r^+ = \int_{V^2} \Delta q(x)|r(x,y)|^2 q_n^2(y)\,dy\,dx =$$
$$= \int_{V^2}(\Delta q(x)|r(x,y)|^{\frac{2}{3}})(q_n^2(y)|r(x,y)|^{\frac{4}{3}})\,dx\,dy \leq$$
$$\leq \left(\int_{V^2}\Delta q^3(x)|r(x,y)|^2 dx\,dy\right)^{1/3}\left(\int_{V^2}|q_n^3(y)||r(x,y)|^2 dx\,dy\right)^{2/3} \leq$$
$$\leq V^{-1} Sp\, rr^+\left(\int_V \Delta q^3(x)dx\right)^{1/3}\left(\int_V |q^3(x)|dx\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (22)$$

Из (20), (21) и (22) следует

$$Sp\,(R_2-R_1)(R_2^+-R_1^+) \leq 4\tau^{-1}V^{-1} Sp\, r_V r_V^+\left[\int_V \Delta q(x)dx + \tau^{-2}\left(\int_V \Delta q^3(x)dx\right)^{1/3}\left(\int_V |q^3(x)| \times dx\right)^{2/3}\right]. \quad (23)$$

Разделив (23) на V, получим из пункта а) леммы 3.2 и соотношения (19) утверждение леммы 3.3.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3.1.

Из последовательности мер $\mu^{(n)}$ $(n=1,2,\ldots)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Поэтому, не уменьшая общности, будем считать, что $\lim_{n\to\infty} \mu^{(n)} = \mu$. Отметим, что μ удовлетворяет условию б) леммы 3.2. Введем

$$\rho^{(n)}(\tau) = \int_R (\lambda^2+\tau^2)^{-1}\mu^{(n)}(d\lambda) \text{ и } \rho(\tau) = \int_R (\lambda^2+\tau^2)^{-1}\mu(d\lambda).$$

Пусть Ω' – подмножество пространства реализаций Ω, для которого

$$\lim_{V\to\infty}\rho_V^{(n)}(\tau)=\rho^{(n)}(\tau),\ \lim_{V\to\infty}V^{-1}\int_V q^2(x)dx=M\{q^2(0)\},$$

$$\lim_{V\to\infty}\gamma_V^{(1)}(n_1,n_2)=\frac{1}{16}M\{|q_{n_1}(0)-q_{n_2}(0)|^3\},$$

$$\lim_{V\to\infty}\gamma_V^{(2)}(n_1,n_2)=\frac{1}{16}M^{1/3}\{(q_{n_1}(0)-q_{n_2}(0))^3\}M^{2/3}\{|q^3(0)|\}.$$

Очевидно, что $P(\Omega')=1$. Зафиксируем $\omega\in\Omega'$. Учитывая вид $\gamma_V^{(1)}(n_1,n_2)$ и $\gamma_V^{(2)}(n_1,n_2)$, всегда можно для $\varepsilon>0$ выбрать такое N и V_0, что при $n_1,n_2>N$ и $V>V_0$ будут выполняться неравенства

$$|\rho^{(N)}(\tau)-\rho(\tau)|\le\frac{\varepsilon}{3},\ |\rho_V^{(n_1)}(\tau)-\rho_V^{(n_2)}(\tau)|\le\frac{\varepsilon}{3},\ |\rho_V^{(N)}(\tau)-\rho^{(N)}(\tau)|\le\frac{\varepsilon}{3}.$$

Принимая во внимание $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_V^{(n)}(\tau)=\rho^{(n)}(\tau)$, получаем при $V\ge V_0$ $|\rho_V(\tau)-\rho(\tau)|\le\varepsilon$, т.е. с вероятностью 1 $\lim\limits_{V\to\infty}\rho_V(\tau)=\rho(\tau)$, или

$$\lim_{V\to\infty}\int_{\mathbb{R}}(\lambda^2+\tau^2)^{-1}\mu_V(d\lambda)=\int_{\mathbb{R}}(\lambda^2+\tau^2)^{-1}\mu(d\lambda),$$

где μ – неслучайная мера. Полученное равенство верно с вероятностью 1 для любого $q(x)$ с $M\{|q^3(0)|\}<\infty$. Переходя от $q(x)$ к $q(x-a)$, получаем с вероятностью 1

$$\lim_{V\to\infty}\int_{\mathbb{R}}[(\lambda-a)^2+\tau^2]^{-1}\mu_V(d\lambda)=\int_{\mathbb{R}}[(\lambda-a)^2+\tau^2]^{-1}\mu(d\lambda). \qquad (24)$$

Отсюда и условия леммы 3.2 б) уже легко установить, что с вероятностью 1 $\lim\limits_{V\to\infty}\mu_V=\mu$, где μ – неслучайная мера.

Теорема 3.1 доказана.

Для формулировки теоремы 3.2 обозначим через $E(x,y,\lambda)$, $E^{(n)}(x,y;\lambda)$ и $E_V^{(n)}(x,y;\lambda)$ спектральные функции соответственно H, $H^{(n)}$ и $H_V^{(n)}$, т.е. ядра разложений единицы этих операторов, а через ν, $\nu^{(n)}$ и $\nu_V^{(n)}$ – меры, ассоциированные соответственно с $E(0,0;\lambda)$, $E^{(n)}(0;0;\lambda)$ и $E_V^{(n)}(0;0;\lambda)$.

Теорема 3.2. Если выполнены условия теоремы 3.1 и с вероятностью 1 H – существенно самосопряженный оператор, то

$$\mu=M\{\nu\}. \qquad (25)$$

Из доказательства теоремы 3.1 известно, что $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu^{(n)}$, где $\mu^{(n)} = M\{\nu^{(n)}\}$. Следовательно, требуется установить, что

$$\lim_{n\to\infty} M\{\nu^{(n)}\} = M\{\nu\}.$$

<u>Лемма 3.4</u>. С вероятностью 1 $\lim_{n\to\infty} \nu^{(n)} = \nu$. Для доказательства леммы 3.4 достаточно показать, что $\lim_{n\to\infty} E^{(n)}(0;0;\lambda) = E(0;0;\lambda)$ в точках непрерывности $E(0;0;\lambda)$. Как упоминалось в доказательстве 2°) теоремы 2.2, $s\text{-}\lim_{n\to\infty} E_\lambda^{(n)} = E_\lambda$ в точках непрерывности E_λ. Поэтому для доказательства требуемого равенства достаточно установить, что семейство функций $E^{(n)}(x;y;\lambda)$ при фиксированном λ равностепенно непрерывно в окрестности U точки $(0,0)$. Более того, можно установить, что семейство $E_V^{(n)}(x;y;\lambda)$ равностепенно непрерывно в U. Доказательство последнего утверждения по существу следует схеме, предложенной Б.М.Левитаном в Приложении к [5], в котором показывается равностепенная непрерывность $E_V(x;y;\lambda)$. Ввиду большого объема элементарных выкладок это доказательство не приводится.

<u>Лемма 3.5</u>.

а) $\tau > 1$ $\int_{R^3} |R^{(n)}(0;x;\tau)|^2 dx \le \frac{c}{\tau}$, где $M\{c\} < \infty$;

б) $\nu^{(n)}\{[-\lambda,\lambda]\} \le 2c\lambda^{3/2}$ при $\lambda > 1$

Из $R^{(n)}(0,x;\tau) = r(0,x;\tau) - \int_{R^3} r(0,u;\tau) q_n(u) R^{(n)}(u,x;\tau)du$, опуская в $R^{(n)}(u,x;\tau)$ и $r(x,u;\tau)$ символы n и τ, получаем

$$\int |R(0,x)|^2 dx \le \left(\int |r(0,x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int |R(0,x)|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int |r(0,u) q_n(u)|^2 du\right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(\int du \left|\int R(u,x) R(0,x) dx\right|^2\right)^{1/2} \le \left(\int |r(0,x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int |R(0,x)|^2 dx\right)^{1/2} + \tau^{-1} \left(\int |r(0,u) q_n(u)|^2 \times\right.$$
$$\left.\times du\right)^{1/2} \left(\int |R(0,x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Из последнего неравенства

$$\int |R(0,x)|^2 dx \le \left[\left(\int |r(0,x)|^2 dx\right)^{1/2} + \tau^{-1}\left(\int |r(0,u) q_n(u)|^2 du\right)^{1/2}\right]^2 \le$$
$$\le 2\left(\int |r(0,x)|^2 dx + \tau^{-2} \int |r(0,u)|^2 q^2(u) du\right).$$

При $\tau > 1$ $\sqrt{\tau} \int |r(0,x;\tau)|^2 dx \le c_1 < \infty$. Поэтому из последнего неравенства следует

$$\int |R^{(n)}(0,x;\tau)|^2 dx \le c\tau^{-\frac{1}{2}}, \text{ где } c = 2\left[c_1 + \int |r(0;x;1)|^2 q^2(x) dx\right].$$

и $M\{c\} = 2[c_1 + M\{q^2(0)\} \int |r(0;x;1)|^2 dx]$, т.е. а) доказано.

Заметим, что $\int_{R^3} |R^{(n)}(0,x;\tau)|^2 dx = \int_R (\alpha^2 + \tau^2)^{-1} \nu^{(n)}(d\alpha)$.

Из а) имеем $\int_{|\alpha|\le\lambda} (\alpha^2+\tau^2)^{-1} \nu^{(n)}(d\alpha) \le \int_R (\alpha^2+\tau^2)^{-1} \nu^{(n)}(d\alpha) \le c\tau^{-\frac{1}{2}}$.

Следовательно, $\nu^{(n)}\{[-\lambda,\lambda]\}(\lambda^2+\tau^2)\le c\tau^{-\frac{1}{2}}$. Положив $\tau=\lambda$, получим б), что завершает доказательство леммы.

Пусть $f(\lambda)$ – произвольная непрерывная финитная функция. Рассмотрим $\int f(\lambda)\nu^{(n)}(d\lambda)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} M\{\int f(\lambda)\nu^{(n)}(d\lambda)\} = M\{\lim_{n\to\infty}\int f(\lambda)\nu^{(n)}(d\lambda)\} = M\{\int f(\lambda)\nu(d\lambda)\} \quad (26)$$

Последняя цепочка равенств имеет место в силу теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла, условия которой выполнены в силу леммы 5.4 и условия б) леммы 5.5.

Справедливость (26) для указанного класса означает выполнение равенства $\lim_{n\to\infty} M\{\nu^{(n)}\} = M\{\nu\}$, что завершает доказательство теоремы 3.2.

1У. В П, Ш было установлено, что в случае существенной самосопряженности H с вероятностью 1 имеют место формулы (5), (2), (25).

Здесь для определенного класса случайных симметрических операторов будет доказано, что индекс дефекта этих операторов с вероятностью 1 равен О или ∞.

Определения. 1. Ω – вероятностное пространство, $\mathcal{U}$ – аддитивная абелева группа.
2. $T_\alpha\{\alpha\in\mathcal{U}\}$ – мультипликативная группа метрически транзитивных операторов в Ω, изоморфная $\mathcal{U}$.
3. H – гильбертово пространство;
$U_\alpha(\alpha\in\mathcal{U})$ – мультипликативная группа унитарных операторов в H, изоморфная $\mathcal{U}$ и неприводимая, т.е. которая не имеет отличных от нулевого конечномерных инвариатных подпространств в H.
4. $H(\omega)(\omega\in\Omega)$ – семейство случайных симметрических операторов с общей областью определения D, инвариатной относительно U_α, для которых 1°) $H(T_\alpha\omega)=U_\alpha H(\omega)U_\alpha^{-1}$; 2°) $\forall x,y\in H(x,H(\omega)y)$ – измеримая по ω функция;
$P(\omega)$ – проектор на дефектное подпространство оператора $H(\omega)$, т.е. на $(H(\omega)-zI)D^\perp$, $\operatorname{Im} z\neq 0$.

Теорема 4. Пусть существует $D'\subset D$ такое, что D' счетно, $\langle D'\rangle$[*)] плотно в H, и с вероятностью 1 $HD\subseteq H\langle D'\rangle$. Тогда с вероятностью 1 $\dim P(\omega)$ равно 0 или ∞.

Доказательство теоремы 4 разбивается на следующие утверждения:
1°) $P(T_\alpha\omega)=U_\alpha P(\omega)U_\alpha^{-1}\ (\alpha\in\mathcal{U})$;
2°) $\forall x,y\in H:(x,P(\omega)y)$ – измеримая по ω функция;
3°) $\forall x,y\in H: M\{(x,P(\omega)y)\}=(x,Qy)$, где $\|Q\|\le 1$,
$$Q\gtrless 0 \quad \text{и} \quad U_\alpha Q U_\alpha^{-1}=Q(\alpha\in\mathcal{U});$$
4°) $\dim P(\omega)$ равна 0 или ∞ с вероятностью 1.

*) $\langle D'\rangle$ – пространство конечных линейных комбинаций векторов из D.

Утверждение 1°) легко проверяется.

Обозначим элементы D' через $\{l_k\}_1^\infty$. Тогда конечные линейные комбинации векторов $f_k(\omega)=(H(\omega)-zI)l_k (k=1,2,\ldots)$ плотны в $(H(\omega)-zI)D$. Очевидно, что $\forall x\in H: (x, f_k(\omega)), \|f_k(\omega)\|$ – измеримые по ω функции. Применив к $\{f_k(\omega)\}_1^\infty$ процесс ортогонализации Грамма–Шмидта, получим ортонормированную систему $\{\hat{f}_k(\omega)\}_1^\infty$, измеримую по ω, т.е. $\forall x\in H: (x, \hat{f}_k(\omega))$ – измеримая по ω функция $(k=1,2,\ldots)$.

Следовательно, $(x,[I-P(\omega)]y)=\sum_{k=1}^\infty (x,\hat{f}_k(\omega))(\hat{f}_k(\omega),y)$ – измеримая по ω функция для любых x и y из H. Откуда $P(\omega)$ – измеримый по ω оператор, что доказывает утверждение 2°).

Справедливость утверждения 3°) легко устанавливается из определений. Заметим, что $\dim P(\omega)=Sp P(\omega)$. Из утверждения 1°) следует $Sp P(T_\alpha\omega)=Sp P(\omega)$, что означает $Sp P(\omega)=M\{Sp P(\omega)\}$ с вероятностью 1. Пусть $\{u_m\}_1^\infty$ – произвольный ортонормированный базис в H. Тогда $Sp P(\omega)=\sum_{m=1}^\infty (u_m, P(\omega)u_m)=Sp Q$. Если Q имеет собственное значение $\lambda_0>0$, т.е. $Ql_0=\lambda_0 l_0$, то из утверждения 3°) собственное подпространство Q, соответствующее λ_0, инвариантно относительно $U_\alpha (\alpha\in\mathcal{U})$ и, следовательно, бесконечномерно. В этом случае $\sum_{m=1}^\infty (u_m, P(\omega)u_m)=\infty$, что видно, если базис $\{u_m\}_1^\infty$ содержит базис рассматриваемого собственного подпространства Q. Если $Q\neq 0$ и не имеет положительных собственных значений, то с вероятностью 1 $\dim P(\omega)=\infty$, так как $Sp P(\omega)=Sp Q=\infty$. Если же $Q=0$, то $\dim P(\omega)=Sp Q=0$ с вероятностью 1.

Теорема 4 доказана.

Теорема 4 справедлива, в частности, для H из П и случайных операторов Шредингера $-\Delta+q(x)$ в R^s с метрически транзитивным случайным полем $q(x)$. Например, для H из 1 из условия $Pr\{p_0=0\}=0$ вытекает, что индекс дефекта H равен нулю, так как он не превосходит 2, т.е. H – существенно самосопряженный (с.с.) оператор с вероятностью 1. Случайный оператор Шредингера в R^1 также с.с., так как всегда его индекс дефекта не больше 2 [4]. При $s>1$ теорема 4 не гарантирует с.с. $H=-\Delta+q(x) (x\in R^s)$. Для этого случая справедливо следующее утверждение.

<u>Теорема 5</u>. Пусть $H=-\Delta+q(x) (x\in R^s)$, где $q(x)$ – случайное метрически транзитивное поле, причем с вероятностью 1 $q\in C^s(R^s)$. Если существует $\alpha>\alpha_s=\max\{1,\frac{s}{2}\}$ такое, что

$$M\{|q_-(0)|^\alpha\},\ M\{|\frac{\partial}{\partial x_1}q_-(0)|^\alpha\},\ldots,M\{|\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_s}q_-(0)|^\alpha\}<\infty,$$

$q_-(x)=\chi(-q(x))$, где $\chi\in C^\infty(R^1)$ и $\chi(t)=\begin{cases}0, & t<0^{*)}\\ t, & t>1\end{cases}$,

---

*) $\chi\geq 0$.

то с вероятностью 1 H – существенно самосопряженный оператор.

Доказательство теоремы 5. Для доказательства теоремы 5 воспользуемся известным критерием с.с. Титчмарша–Сирса: если для достаточно больших $\|x\| q_-(x) \le k\|x\|^2$, то H – с.с. оператор.

Пусть $n \in \mathbb{Z}^s$, $|x| = \max_{1\le j\le s} |x_j|$ и $\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_s^2$, где $x \in \mathbb{R}^s$. Введем кубы $V_n = \{x \in \mathbb{R}^s \,|\, |x-n| \le \frac{1}{2}\}(n \in \mathbb{Z}^s)$, $a_n = \min_{x\in V_n}\|x\|$ и рассмотрим $Q_n = \sup_{x \in V_n} |q_-(x)|$. Если показать, что с вероятностью 1 существуют такие k и N, что при $\|n\| > N$ $Q_n \le k a_n^2$, то, согласно сформулированному выше критерию, H будет с.с. оператором с вероятностью 1.

Действительно, пусть $A_n = \{\omega \in \Omega / Q_n \le k a_n^2\}$. Нужно показать, что $Pr\{\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{\|n\|\ge m} A_n\} = 1$. Для справедливости последнего равенства по лемме Бореля–Кантелли достаточно установить, что $\sum_{\|n\|>1} Pr\{\bar{A}_n\} < \infty$, где $\bar{A}_n$ – событие, дополнительное к A_n. Согласно неравенству Чебышева, $Pr\{\bar{A}_n\} \le k^{-\alpha} a_n^{-2\alpha} M\{Q_n^\alpha\} = k^{-\alpha} a_n^{-2\alpha} M\{Q_0^\alpha\}$. Так как $a_n \sim \|n\|$ при $\|n\| \to \infty$, то следует показать, что $M\{Q_0^\alpha\} \sum_{\|n\|>n} \|n\|^{-2\alpha} < \infty$. При $\alpha > \alpha_s$ $\sum_{\|n\|>1} \|n\|^{-2\alpha} < \infty$. Следовательно, нужно проверить, что $M\{Q_0^\alpha\} < \infty$. Оценим Q_0^α:

$$Q_0 \le |q_-(0)| + \left|\frac{\partial}{\partial x_1} q_-(0)\right| + \ldots + \left|\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{s-1}} q_-(0)\right| + $$

$$+ \int_{-1/2}^{1/2} \cdots \int_{-1/2}^{1/2} \left|\frac{\partial}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial}{\partial y_s} q_-(y_1, \ldots, y_s)\right| dy_1 \ldots dy_s \,;$$

$$Q_0^\alpha \le (s+1)^\alpha \Big[|q_-(0)|^\alpha + \left|\frac{\partial}{\partial x_1} q_-(0)\right|^\alpha + \ldots + \left|\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{s-1}} q_-(0)\right|^\alpha +$$

$$+ \left(\int_{-1/2}^{1/2} \cdots \int_{-1/2}^{1/2} \left|\frac{\partial}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial}{\partial y_s} q_-(y_1, \ldots, y_s)\right| dy_1 \ldots dy_s \right)^\alpha \Big] \le$$

$$\le (s+1)^\alpha \Big[|q_-(0)|^\alpha + \left|\frac{\partial}{\partial x_1} q_-(0)\right|^\alpha + \ldots + \left|\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{s-1}} q_-(0)\right|^\alpha +$$

$$+ \int_{-1/2}^{1/2} \cdots \int_{-1/2}^{1/2} \left|\frac{\partial}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial}{\partial y_s} q_-(y_1, \ldots, y_s)\right|^\alpha dy_1 \ldots dy_s \Big] .$$

Последнее неравенство обеспечивает $M\{Q_0^\alpha\} < \infty$ при сформулированных выше условиях и потому завершает доказательство теоремы 5.

Л и т е р а т у р а

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М., Наука, 1965. 655 с.
2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К., Наук. думка, 1965. 798 с.
3. Данфорд Н., Шварц Р. Линейные операторы. В 3-х т. Т.1. М., Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972. 470 с.
5. Титчмарш Э. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. В 2-х т. Т.2. М., Иностр.лит., 1961. 55 с.
6. Пастур Л.А. Спектры случайных самосопряженных операторов. – Успехи мат.наук, 1973, вып.1, с.3-64.
7. Гренандер У., Сегё Г. Теплицевы формы и их приложения. М., Изд-во иностр.лит., 1961. 308 с.

УДК 517.4

И.Д.Чуешов

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ФЕЙНМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Как известно [1-3], фейнмановскому интегралу по траекториям в случае квантовой механики можно придать строгий смысл, если существует сильный предел последовательности

$$(\exp(-i\tau H_0)\exp(-i\tau V))^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{1}$$

где $H_0 = -\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, V – оператор умножения на функцию $V(x)$, $\tau = \frac{T}{n}$, $T>0$. Однако существование этого предела удается доказать, накладывая довольно жесткие условия на потенциал V [3]. В связи с этим в работе автора [4] изучались предельные точки последовательности типа (1) в слабой топологии некоторого гильбертова пространства в случае, когда H_0 и V – произвольные самосопряженные операторы. В настоящей статье такое изучение проведено для некоторого класса нестационарных потенциалов $V(t)$. Рассмотрена также нельсоновская процедура (см. [1]) перехода к комплексным массам. Предельные точки изучаются как для вещественных, так и для комплексных масс. В случае комплексных масс получено достаточное условие единственности предельной точки и доказана ее аналитичность по массе. В случае вещественных масс изучено поведение предельных точек, когда потенциал $V(t)$ становится малым.

Пусть H_0 – положительный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{F}$ и семейство самосопряженных операторов $V(t)(0 \le t \le T)$ таково, что вектор-функция $V(t)\,h$ сильно непрерывна на $[0,T]$ при $h \in \mathcal{D} = D(H_0) \cap (\bigcap_t D(V(t)))$.

Нам потребуется оснащение $\mathcal{F}_+ \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_-$, где $\mathcal{F}_+ = D(H_0^{1/2})$ с нормой $\|\cdot\|_+ = \|(H_0+I)^{1/2}\cdot\|$, а $\mathcal{F}_-$ – пополнение пространства $\mathcal{F}$ по норме $\|\cdot\|_- = \|(H_0+I)^{-1/2}\cdot\|$.

Пусть $\Phi = L^2(0,T;\mathcal{F})$, $\Phi_\pm = L^2(0,T;\mathcal{F}_\pm)$. Скалярные произведения в Φ_+, Φ, Φ_- будем обозначать $\langle\cdot,\cdot\rangle_+$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_-$, а для норм примем обозначения $|\cdot|_+$, $|\cdot|$, $|\cdot|_-$. Ясно, что $\Phi_+ \subset \Phi \subset \Phi_-$ является оснащением.

Пусть n – натуральное число, $\tau = \frac{T}{n}$ и

$$W_n^\omega(k) = \exp(-\omega\tau H_0)\exp(-i\tau V(\xi_k)),$$

где $k\tau \le \xi_k < (k+1)\tau$, $k = 0,1,\dots,n-1$, $\mathrm{Re}\,\omega \ge 0$.

Отметим, что введение комплексного множителя ω соответствует в квантовой механике переходу к комплексным массам (см. [1]).

Определим на $[0,T]$ семейство оператор-функций

$\Psi_n^\omega(t) = \prod_{i=k}^{0} W_n^\omega(i)$, если $k\tau \le t < (k+1)\tau$, $k = 0,1,\dots,n-1$.

Ясно, что $\|\Psi_n^\omega(t)\| \le 1$. Нетрудно проверить (см. [4]), что последовательность $\{\Psi_n^\omega(t)\}$ слабо компактна в Φ при любом $\mathrm{Re}\,\omega \ge 0$, и каждая ее слабая предельная точка задается некоторой сильно измеримой сжимающей операторной функцией $\Psi^\omega(t)$.

Настоящая статья посвящена изучению слабых предельных точек $\Psi^\omega(t)$: установлена их связь с соответствующим динамическим уравнением; показано, что при некоторых условиях на $V(t)$, $\Psi^\omega(t)$ единственна и аналитически зависит от ω при $\mathrm{Re}\,\omega > 0$.

Введем класс $\mathcal{L}$ таких сильно непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ вектор-функций, что:

а) для всех $t \in [0,T]$, $g(t) \in \mathcal{D}$ $g(T) = 0$;

б) существуют такие $0 < \alpha \le 1$ и $\varepsilon > 0$, что для всех $s \in [0,T]$

$$\|H_0(g(t) - g(t'))\| \le C|t-t'|^\alpha,$$

$$\|V(s)(g(t) - g(t'))\| \le C|t-t'|^\alpha;$$

как только $|t-t'| < \varepsilon$;

в) для любой функции $g(t) \in \mathcal{L}$, $\|V(s)^2 g(t)\| \le C(g)$.

Теорема 1. При $Re\,\omega \geq 0$ каждая слабая предельная точка $\psi^{\omega}(t)$ последовательности $\{\psi_n^{\omega}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ для любого $h \in \mathcal{F}$ и любого $g(t) \in \mathcal{X}$ удовлетворяет уравнению

$$-\int_0^T (\psi^{\omega}(t)h, g'(t))dt + \int_0^T (\psi^{\omega}(t)h, (\bar{\omega} H_0 - iV(t))g(t))dt = (h, g(0)). \quad (2)$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что

$$-\int_0^T (\psi_n^{\omega}(t)h, g'(t))dt = \sum_{k=0}^{n-1}((W_n^{\omega}(k+1)-1)\prod_{i=k}^{0} W_n^{\omega}(i)h, g((k+1)\tau)) +$$

$$+(W_n^{\omega}(0)h, g(0)) = \int_0^T \left(\frac{W_n^{\omega}([\frac{t}{\tau}]+1)-1}{\tau}\psi_n^{\omega}(t)h, g(t)\right)dt + (W_n^{\omega}(0)h,$$

$$g(0)) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{W_n^{\omega}(k+1)-1}{\tau}\prod_{i=k}^{0} W_n^{\omega}(i)h, \int_{k\tau}^{(k+1)\tau}(g((k+1)\tau)-g(t))dt\right).$$

Так как $\tau^{-1}\|(W_n^{\omega}(k+1)-1)^* g\| \leq \|H_0 g\| + \|V(\xi_{k+1})g\|$, то последняя сумма оценивается величиной

$$\|h\|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\{\|H_0(g((k+1)\tau - g(t))\| + \|V(\xi_{k+1})(g((k+1)\tau)-g(t))\|\}dt,$$

и в силу б) есть $O(\tau^{\alpha})$. Точно так же проверяется, что

$$(W_n^{\omega}(0)h,\ g(0)) = (h, g(0)) + O(\tau).$$

Поэтому

$$-\int_0^T (\psi_n^{\omega}(t)h, g'(t))dt = \int_0^T \left(\psi_n^{\omega}(t)h, \frac{W_n^{\omega}([\frac{t}{\tau}]+1)^* - 1}{\tau} \times \right. \\ \left. \times g(t)\right)dt + (h, g(0)) + O(\tau^{\alpha}). \quad (3)$$

Покажем, что при каждом фиксированном t

$$-(\bar{\omega} H_0 - iV(t))g(t) = s\text{-}\lim_{\tau \to 0} \tau^{-1}(W_n^{\omega}([\tfrac{t}{\tau}]+1)^* - 1)g(t).$$

Для этого достаточно доказать, что при $\tau \to 0$

$$\tau^{-1}(e^{i\tau V_{\tau}(t)} - 1)g(t) - iV(t)g(t) \to 0,$$

где $V_{\tau}(t) = V(\xi_{[\frac{t}{\tau}]+1})$. Но из спектральной теоремы и свойства в) следует, что

$$\tau^{-1}\|(e^{i\tau V_\tau(t)}-1-i\tau V_\tau(t))g(t)\| \le \tau C(g) .$$

Таким образом, устремляя $\tau \to 0$, из (3) получаем (2).

В дальнейшем будем предполагать, что существуют такие C_1 и C_2, что

$$|(V(t)\varphi,\varphi)| \le C_1(H_0\varphi,\varphi)+C_2(\varphi,\varphi),\ t\in[0,T]. \tag{4}$$

Введем в оснащении $\Phi_+ \subset \Phi \subset \Phi_-$ операторы:

$\Lambda u = \frac{du}{dt} = u'$ с областью определения

$$D(\Lambda,\Phi_-)=\{u\in\Phi_- :\ u'\in\Phi_-,\ u(0)=0\};$$

$\Lambda^* u = -\frac{du}{dt} = -u'$ с областью определения

$$D(\Lambda^*,\Phi_-)=\{u\in\Phi_- : u'\in\Phi_-,\ u(T)=0\};$$

$M_\omega(Re\,\omega>0)$, действующие из Φ_+ в Φ_- по формуле $(M_\omega\psi)(t) = (\omega H_0+iV(t)+1)\psi(t)$ почти всюду на $[0,T]$.

Теорема 2. Пусть $Re\,\omega>0$. Если линеал $\mathcal{L}$ плотен в пространстве $\Phi_+\cap D(\Lambda^*,\Phi_-)$ по норме $|\cdot|_+ + |\Lambda^*\cdot|_-$, то существует сильно непрерывная операторнозначная функция $\psi^\omega(t)$, обладающая такими свойствами.

1. Для любых $f_1,\ f_2 \in \Phi$

$$\langle\psi^\omega f_1, f_2\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle\psi^\omega_n f_1, f_2\rangle .$$

2. Для любого $h\in\mathcal{F}$, вектор-функция $\psi^\omega(t)h$ лежит в Φ_+, и в Φ_- в смысле обобщенных функций

$$\frac{d}{dt}\psi^\omega(t)h=-(\omega H_0+iV(t))\psi^\omega(t)h .$$

3. ψ^ω является ограниченной голоморфной при $Re\,\omega>0$ оператор-функцией в Φ.

Доказательство опирается на три леммы, приведенные ниже.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases}\dfrac{d\psi}{dt}=-(\omega H_0+iV(t))\psi; \\ \psi|_{t=0}=h, \quad 0\le t\le T .\end{cases} \tag{5}$$

Лемма 3. При $Re\,\omega > 0$ существует единственная функция $\psi^{\omega}(t) \in \Phi_+$, непрерывная по норме пространства $\mathcal{F}$ и удовлетворяющая уравнению (5) в смысле обобщенных функций. Функция $\omega \to \psi^{\omega}$ является голоморфной в полуплоскости $Re\,\omega > 0$ и со значениями в Φ_+.

Доказательство. С помощью замены $u(t) = e^{-t}\psi(t)$ от уравнения (5) перейдем к уравнению

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -(\omega H_0 + iV(t) + 1)\,u; \\ u\big|_{t=0} = h, \quad 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Так как $H_0 \geqslant 0$ и имеет место (4), то к оператору $\omega H_0 + iV(t) + 1$ применима теорема 4.1 [5, гл.3]. Она гарантирует существование и единственность решения $u^{\omega} \in \Phi_+$ этой задачи. Кроме того, из результатов [5, гл.3] следует непрерывность решения $u^{\omega}(t)$ по норме пространства $\mathcal{F}$, и для любого $h \in \mathcal{F}_+$ имеет место формула

$$u^{\omega} = h - (\Lambda + M_{\omega})^{-1} M_{\omega} h.$$

Из этой формулы нетрудно извлечь голоморфность функции $\omega \to u^{\omega}$ в правой полуплоскости и, следовательно, голоморфность решения задачи (5).

Лемма 4. При $Re\,\omega > 0$ и $h \in \mathcal{F}_+$ существует число K, независящее от n и такое, что

$$|\psi_n^{\omega} h|_+^2 = \int_0^T \|\psi_n^{\omega}(t) h\|_+^2\, dt \le K \|h\|^2 . \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть $P_{\tau}^{\omega} = exp\{-\tau\omega H_0\}$. В [6] доказано, что

$$\tau \|P_{\tau}^{\omega} w\|_+^2 \le \frac{1}{2Re\,\omega}\left(\|w\|^2 - \|P_{\tau}^{\omega} w\|^2\right) + \tau\|w\|^2 .$$

Отсюда нетрудно извлечь соотношение (6).

Из этой леммы следует, что последовательность $\{\psi_n^{\omega} h\}$ слабо компактна в Φ_+. Легко заметить, что множества слабых предельных точек последовательности $\{\psi_n^{\omega} h\}$ в Φ и Φ_+ совпадают $(Re\,\omega > 0)$. Поэтому каждая слабая предельная точка последовательности $\{\psi_n^{\omega}(t) h\}$ лежит в Φ_+ и удовлетворяет соотношению (2) при $Re\,\omega > 0$.

Подставляя в (2) вместо $g(t)$ функцию $e^{-t} g(t)$ и учитывая, что $\mathcal{L} \subset \Phi_+ \cap D(\Lambda^*, \Phi_-)$, для функции $u^{\omega} = e^{-t}\psi^{\omega}(t) h$ получаем

$$\langle u^{\omega}, \Lambda^* g\rangle + \langle M_{\omega} u^{\omega}, g\rangle = (h, g(0)), \quad g \in \mathcal{L} . \qquad (7)$$

Формула (7) справедлива для любой функции g из $\Phi_+ \cap D(\Lambda^*, \Phi_-)$. Это вытекает из плотности линеала $\mathcal{L}$ в $\Phi_+ \cap D(\Lambda^*, \Phi_-)$ по норме $|\cdot|_+ + |\Lambda^*|_-$.

Лемма 5. Существует единственная функция $u^\omega \in \Phi_+$ для любых $g \in \Phi_+ \cap D(\Lambda^*, \Phi_-)$, удовлетворяющая уравнению

$$\langle u^\omega, \Lambda^* g\rangle + \langle M_\omega u^\omega, g\rangle = (h, g(0)).$$

Доказательство. Пусть существует такая функция $w \in \Phi_+$, что

$$\langle w^\omega, \Lambda^* g\rangle = -\langle M_\omega w^\omega, g\rangle .$$

Тогда функционал $g \to \langle w^\omega, \Lambda^* g\rangle$ непрерывен на $D(\Lambda^*, \Phi_+)$ в топологии пространства Φ_+. Поэтому в силу леммы 1.3 [5] $w^\omega \in D(\Lambda, \Phi_-)$. Следовательно,

$$\langle \Lambda w^\omega + M_\omega w, g\rangle = 0 .$$

А так как $\Phi_+ \cap D(\Lambda^*, \Phi_-)$ плотно в Φ_+, получаем, что

$$\Lambda w^\omega + M_\omega w^\omega = 0 .$$

Из леммы 3 следует, что $w^\omega = 0$.

Лемма 5 влечет единственность слабой предельной точки ψ^ω последовательности $\{\psi_n^\omega\}$ и совпадение функции $\psi^\omega(t)h$ с решением задачи (5), даваемым леммой 3.

Теорема 2 полностью доказана.

Пример. Пусть $\mathcal{F} = L^2(R^n)$, $H_0 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ с естественной областью определения и $V(t)$ – оператор умножения на такую вещественную функцию $V(x,t)$, что выполнено (4) и

1) существует такая функция $f(x) \in L^4_{loc}$, что

$$|V(t,x)| \leq f(x), \quad t \in [0,T] ;$$

2) функция $t \to V(t,x)$ непрерывна почти при каждом $x \in R^n$.

Отметим, что соотношение (4) выполняется, например, если $n=3$ и $|V(t,x)| \leq g(x)$, $g \in (L^2 + L^\infty)(R^3)$ (7).

Все изложенное выше справедливо, если положить $\mathcal{L} = C_0^\infty(R^n \times [0,T])$. Действительно, покажем, что $\mathcal{L}$ плотно в $\Phi_+ \cap D(\Lambda^*, \Phi_-)$ по норме $|\cdot|_+ + |\Lambda^* \cdot|_-$. Рассуждения проведем в несколько этапов.

1. Пусть $v(t) \in \Phi_+ \cap D(\Lambda^*, \Phi_-)$ и $\rho_n(x) - \delta$ – последовательность из $C_0^\infty(R^n)$. Тогда $v_n(t) = \int_{R^n} v(t,y)\rho_n(x-y)\,dy$ сходится к $v(t)$ по норме $|\cdot|_+ + |\Lambda^* \cdot|_-$.

2. Каждую из функций $v_n(t)$ можно приблизить функциями со значениями в $C_0^\infty(R^n)$.

3. Пусть $v(t)\in \Phi_+ \cap D(\Lambda^*, \Phi_-)$ и для любого $t\in[0,T)$, $v(t)\in C_0^\infty(R^n)$. Положим

$$v_h(t)=\begin{cases} v(t+h), & 0\le t\le T-h \\ 0, & T-h<t\le T \end{cases} \quad (h>0).$$

Ясно, что $v_h(t)\in \Phi_+\cap D(\Lambda^*, \Phi_-)$ и $v_h(t)\to v(t)$ при $h\to 0$.

4. И, наконец, каждую функцию $v_h(t)$ можно приблизить последовательностью

$$v_{h,m}(t)=\int_0^{T-h}\delta_m(t-\tau)\,v_h(\tau)\,d\tau\,,\quad m>h^{-1}$$

где $\delta_m(\tau)$ – такая δ-последовательность из $C_0^\infty(R)$, что

$$supp\,\delta_m(\tau)\subset[-1/m\,,\,1/m]\,.$$

Ясно, что $v_{h,m}(t)\in C_0^\infty(R^n\times[0,T))$.

Проверка того, что класс $\mathcal{L}=C_0^\infty(R^n\times[0,T))$ обладает свойствами а) – в) не представляет особого труда.

В заключение приведем одну теорему о возмущениях.

Теорема 6. Пусть $\{F_n(t)\}$ – последовательность сильно измеримых сжимающих оператор-функций, удовлетворяющих уравнениям

$$-\int_0^T(F_n(t)h,g'(t))dt+i\int_0^T(F_n(t)h,(H_0+V_n(t))g(t))dt=(h,g(0)),\qquad (8)$$
$$n=1,2,\dots,$$

для всех $h\in\mathcal{F}$ и $g(t)$, принадлежащих некоторому классу $\mathcal{L}$ функций, обращающихся в нуль при $t=T$ (H_0, $V_n(t)$ – самосопряженные операторы). Предположим, что $\mathcal{L}$ содержит все функции вида $f(t)\,g$, где $f(t)\in C_0^1(0,T)$, $g\in G$ (G – ядро в смысле Т.Като [7] оператора H_0), и для любого $g\in G$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\|V_n(t)g\|^2dt=0\,.\qquad (9)$$

Тогда в пространстве $L^2(0,T;\mathcal{F})$

$$exp\{-itH_0\}=s-\lim_{n\to\infty}F_n(t)\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F(t)$ – некоторая слабая предельная точка последовательности $\{F_n(t)\}$ в пространстве

$L^2(0,T;\mathcal{F})$. Переходя в (8) по подпоследовательности к пределу, в силу (9) имеем, что

$$-\int_0^T (F(t)h, g'(t))dt + i\int_0^T (F(t)h, H_0 g(t))dt = (h, g(0)). \qquad (10)$$

Рассмотрим вектор-функцию $u_n(t) = \int \delta_n(t-\tau)F(\tau)h d\tau$, где $\delta_n(t)$, – такая δ-последовательность из $C_0^\infty(R)$, что носитель каждой из функций лежит в $[-1/n, 1/n]$. Очевидно, что $u_n(t)$ сильно непрерывно дифференцируема и

$$u_n'(t) = \int_{t-1/n}^{t+1/n} \delta_n'(t-\tau)F(\tau)h d\tau.$$

Поэтому на основании (10) имеем, что при $t\in(\frac{1}{n}, T-\frac{1}{n})$

$$u_n(t)\in D(H_0), \frac{d}{dt}u_n(t) = -iH_0 u_n(t). \qquad (11)$$

Но задача Коши на отрезке $[\varepsilon, T-\varepsilon]$ при $n>\varepsilon^{-1}$ для уравнения (11) имеет единственное решение. Поэтому при $t\in[\varepsilon, T-\varepsilon]$

$$u_n(t) = \exp\{-i(t-\varepsilon)H_0\}u_n(\varepsilon).$$

Устремляя $n\to\infty$, получаем, что почти при всех t и ε

$$F(t)h = \exp\{-i(t-\varepsilon)H_0\}F(\varepsilon)h. \qquad (12)$$

Если в (10) положить $g(t) = \int_t^T f(t)dt\cdot g$, то получим

$$(F(t)h, g) = (h, g) - i\int_0^t (F(t)h, H_0 g)dt$$

почти всюду. Следовательно, можно считать, что $F(t)$ является слабо непрерывной оператор-функцией и $F(0) = I$. Поэтому из (12) вытекает, что

$$F(t)h = \exp\{-itH_0\}h.$$

Следовательно, $F_n(t)$ слабо в пространстве $\Phi = L^2(0,T;\mathcal{F})$ сходится к $F(t) = \exp\{-itH_0\}$ при $n\to\infty$. А поэтому

$$T^{1/2}\|h\| = |F(\cdot)h| \le \underline{\lim}_{n\to\infty}|F_n(\cdot)h| \le \overline{\lim}_{n\to\infty}|F_n(\cdot)h| \le T^{1/2}\|h\|.$$

Следовательно,

$$|F(\cdot)h| = \lim_{n \to \infty} |F_n(\cdot)h|.$$

Значит в пространстве $L^2(0,T;F)$

$$s - \lim_{n \to \infty} F_n(t) = \exp(-itH_0).$$

Из этой теоремы, в частности, следует, что в ранее рассмотренном примере при $\mathrm{Re}\,\omega = 0$ каждая слабая предельная точка последовательности $\{\psi_n^n\}$ стремится к $\exp\{-it(\mathrm{Im}\,\omega)H_0\}$, если $V(t,x) \to 0$ почти при всех x и t.

Литература

1. Nelson E. Feynman integrals and the Schrödinger equation. - J. Math. Phys., 1964, 5, p.332-343.
2. Гестрин Г.Н. Об интеграле Фейнмана. - Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1970. вып.12, с.69-81.
3. Далецкий Ю.Л. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями. - Успехи мат.наук, 1962, 17, вып.5, с.3-115.
4. Чуешов И.Д. О слабых предельных точках фейнмановских интегральных произведений. - Функцион.анализ и его приложения, 1978, 12, вып.1, с.90-91.
5. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., Мир, 1971. 371 с.
6. Faris W.G. The product formula for semigroups defined by Friedrichs extensions. - Pacif. J. Math., 1967, 22, p. 47-70.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972. 740 с.

литичность по массе. В случае вещественных масс изучено поведение предельных точек, когда потенциал $V(t)$ становится малым.

Пусть H_0 – положительный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{F}$ и семейство самосопряженных операторов $V(t)(0 \le t \le T)$ таково, что вектор-функция $V(t)h$ сильно непрерывна на $[0,T]$ при $h \in \mathcal{D} = D(H_0) \cap (\bigcap_t D(V(t)))$.

Нам потребуется оснащение $\mathcal{F}_+ \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_-$, где $\mathcal{F}_+ = D(H_0^{1/2})$ с нормой $\|\cdot\|_+ = \|(H_0+I)^{1/2}\cdot\|$, а $\mathcal{F}_-$ – пополнение пространства $\mathcal{F}$ по норме $\|\cdot\|_- = \|(H_0+I)^{-1/2}\cdot\|$.

Пусть $\Phi = L^2(0,T;\mathcal{F})$, $\Phi_\pm = L^2(0,T;\mathcal{F}_\pm)$. Скалярные произведения в Φ_+, Φ, Φ_- будем обозначать $\langle\cdot,\cdot\rangle_+$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_-$, а для норм примем обозначения $|\cdot|_+$, $|\cdot|$, $|\cdot|_-$. Ясно, что $\Phi_+ \subset \Phi \subset \Phi_-$ является оснащением.

Пусть n – натуральное число, $\tau = \frac{T}{n}$ и

$$W_n^\omega(k) = \exp(-\omega\tau H_0)\exp(-i\tau V(\xi_k)),$$

где $k\tau \le \xi_k < (k+1)\tau$, $k = 0,1,\dots,n-1$, $Re\,\omega \ge 0$.

Отметим, что введение комплексного множителя ω соответствует в квантовой механике переходу к комплексным массам (см. [1]).

Определим на $[0,T]$ семейство оператор-функций

$\psi_n^\omega(t) = \prod_{i=k}^{0} W_n^\omega(i)$, если $k\tau \le t < (k+1)\tau$, $k = 0,1,\dots,n-1$.

Ясно, что $\|\psi_n^\omega(t)\| \le 1$. Нетрудно проверить (см. [4]), что последовательность $\{\psi_n^\omega(t)\}$ слабо компактна в Φ при любом $Re\,\omega \ge 0$, и каждая ее слабая предельная точка задается некоторой сильно измеримой сжимающей операторной функцией $\psi^\omega(t)$.

Настоящая статья посвящена изучению слабых предельных точек $\psi^\omega(t)$: установлена их связь с соответствующим динамическим уравнением; показано, что при некоторых условиях на $V(t)$, $\psi^\omega(t)$ единственна и аналитически зависит от ω при $Re\,\omega > 0$.

Введем класс $\mathcal{L}$ таких сильно непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ вектор-функций, что:

а) для всех $t \in [0,T]$, $g(t) \in \mathcal{D}$ $g(T) = 0$;

б) существуют такие $0 < \alpha \le 1$ и $\varepsilon > 0$, что для всех $s \in [0,T]$

$$\|H_0(g(t) - g(t'))\| \le C|t-t'|^\alpha,$$

$$\|V(s)(g(t) - g(t'))\| \le C|t-t'|^\alpha;$$

как только $|t-t'| < \varepsilon$;

в) для любой функции $g(t) \in \mathcal{L}$, $\|V(s)^2 g(t)\| \le C(g)$.

Теорема 1. При $Re\,\omega \geq 0$ каждая слабая предельная точка $\psi^{\omega}(t)$ последовательности $\{\psi_n^{\omega}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ для любого $h \in \mathcal{F}$ и любого $g(t) \in \mathcal{X}$ удовлетворяет уравнению

$$-\int_0^T(\psi^{\omega}(t)h, g'(t))dt + \int_0^T(\psi^{\omega}(t)h, (\bar{\omega} H_0 - iV(t))g(t))dt = (h, g(0)). \quad (2)$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что

$$-\int_0^T(\psi_n^{\omega}(t)h, g'(t))dt = \sum_{k=0}^{n-1}((W_n^{\omega}(k+1)-1)\prod_{i=k}^{0} W_n^{\omega}(i)h, g((k+1)\tau)) +$$

$$+ (W_n^{\omega}(0)h, g(0)) = \int_0^T\left(\frac{W_n^{\omega}([\frac{t}{\tau}]+1)-1}{\tau}\psi_n^{\omega}(t)h, g(t)\right)dt + (W_n^{\omega}(0)h,$$

$$g(0)) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{W_n^{\omega}(k+1)-1}{\tau}\prod_{i=k}^{0} W_n^{\omega}(i)h, \int_{k\tau}^{(k+1)\tau}(g((k+1)\tau)-g(t))dt\right).$$

Так как $\tau^{-1}\|(W_n^{\omega}(k+1)-1)^* g\| \leq \|H_0 g\| + \|V(\xi_{k+1})g\|$, то последняя сумма оценивается величиной

$$\|h\|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\{\|H_0(g((k+1)\tau - g(t))\| + \|V(\xi_{k+1})(g((k+1)\tau)-g(t))\|\}dt,$$

и в силу б) есть $O(\tau^{\alpha})$. Точно так же проверяется, что

$$(W_n^{\omega}(0)h,\ g(0)) = (h, g(0)) + O(\tau).$$

Поэтому

$$-\int_0^T(\psi_n^{\omega}(t)h, g'(t))dt = \int_0^T\left(\psi_n^{\omega}(t)h, \frac{W_n^{\omega}([\frac{t}{\tau}]+1)^* - 1}{\tau} \times \right.$$
$$\left. \times g(t)\right)dt + (h, g(0)) + O(\tau^{\alpha}). \quad (3)$$

Покажем, что при каждом фиксированном t

$$-(\bar{\omega} H_0 - iV(t))g(t) = s - \lim_{\tau \to 0} \tau^{-1}(W_n^{\omega}([\tfrac{t}{\tau}]+1)^* - 1)g(t).$$

Для этого достаточно доказать, что при $\tau \to 0$

$$\tau^{-1}(e^{i\tau V_\tau(t)} - 1)g(t) - iV(t)g(t) \to 0,$$

где $V_\tau(t) = V(\xi_{[\frac{t}{\tau}]+1})$. Но из спектральной теоремы и свойства в) следует, что

$$\tau^{-1}\|(e^{i\tau V_\tau(t)}-1-i\tau V_\tau(t))g(t)\| \le \tau C(g) .$$

Таким образом, устремляя $\tau\to 0$, из (3) получаем (2).

В дальнейшем будем предполагать, что существуют такие C_1 и C_2, что

$$|(V(t)\varphi,\varphi)| \le C_1(H_0\varphi,\varphi)+C_2(\varphi,\varphi),\ t\in[0,T]. \tag{4}$$

Введем в оснащении $\Phi_+\subset\Phi\subset\Phi_-$ операторы:

$\Lambda u=\frac{du}{dt}=u'$ с областью определения

$$D(\Lambda,\Phi_-)=\{u\in\Phi_-:\ u'\in\Phi_-,\ u(0)=0\};$$

$\Lambda^* u=-\frac{du}{dt}=-u'$ с областью определения

$$D(\Lambda^*,\Phi_-)=\{u\in\Phi_-:u'\in\Phi_-,\ u(T)=0\};$$

$M_\omega(\mathrm{Re}\,\omega>0)$, действующие из Φ_+ в Φ_- по формуле $(M_\omega\psi)(t)=(\omega H_0+iV(t)+1)\psi(t)$ почти всюду на $[0,T]$.

Теорема 2. Пусть $\mathrm{Re}\,\omega>0$. Если линеал $\mathcal{L}$ плотен в пространстве $\Phi_+\cap D(\Lambda^*,\Phi_-)$ по норме $|\cdot|_+ + |\Lambda^*\cdot|_-$, то существует сильно непрерывная операторнозначная функция $\psi^\omega(t)$, обладающая такими свойствами.

1. Для любых $f_1,f_2\in\Phi$

$$\langle\psi^\omega f_1,f_2\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle\psi_n^\omega f_1,f_2\rangle .$$

2. Для любого $h\in\mathcal{F}$, вектор-функция $\psi^\omega(t)h$ лежит в Φ_+, и в Φ_- в смысле обобщенных функций

$$\frac{d}{dt}\psi^\omega(t)h=-(\omega H_0+iV(t))\psi^\omega(t)h .$$

3. ψ^ω является ограниченной голоморфной при $\mathrm{Re}\,\omega>0$ оператор-функцией в Φ.

Доказательство опирается на три леммы, приведенные ниже.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases}\dfrac{d\psi}{dt}=-(\omega H_0+iV(t))\psi;\\[2mm] \psi|_{t=0}=h,\quad 0\le t\le T .\end{cases} \tag{5}$$

Лемма 3. При $Re\,\omega > 0$ существует единственная функция $\psi^{\omega}(t) \in \Phi_+$, непрерывная по норме пространства $\mathcal{F}$ и удовлетворяющая уравнению (5) в смысле обобщенных функций. Функция $\omega \to \psi^{\omega}$ является голоморфной в полуплоскости $Re\,\omega > 0$ и со значениями в Φ_+.

Доказательство. С помощью замены $u(t) = e^{-t}\psi(t)$ от уравнения (5) перейдем к уравнению

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -(\omega H_0 + iV(t) + 1)\,u; \\ u\big|_{t=0} = h, \quad 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Так как $H_0 \geq 0$ и имеет место (4), то к оператору $\omega H_0 + iV(t) + 1$ применима теорема 4.1 [5, гл.3]. Она гарантирует существование и единственность решения $u^{\omega} \in \Phi_+$ этой задачи. Кроме того, из результатов [5, гл.3] следует непрерывность решения $u^{\omega}(t)$ по норме пространства $\mathcal{F}$, и для любого $h \in \mathcal{F}_+$ имеет место формула

$$u^{\omega} = h - (\Lambda + M_{\omega})^{-1} M_{\omega} h.$$

Из этой формулы нетрудно извлечь голоморфность функции $\omega \to u^{\omega}$ в правой полуплоскости и, следовательно, голоморфность решения задачи (5).

Лемма 4. При $Re\,\omega > 0$ и $h \in \mathcal{F}_+$ существует число K, независящее от n и такое, что

$$|\psi_n^{\omega} h|_+^2 = \int_0^T \|\psi_h^{\omega}(t) h\|_+^2 dt \le K \|h\|^2 . \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть $P_{\tau}^{\omega} = exp\{-\tau\omega H_0\}$. В [6] доказано, что

$$\tau \|P_{\tau}^{\omega} w\|_+^2 \le \frac{1}{2 Re\,\omega} (\|w\|^2 - \|P_{\tau}^{\omega} w\|^2) + \tau \|w\|^2 .$$

Отсюда нетрудно извлечь соотношение (6).

Из этой леммы следует, что последовательность $\{\psi_n^{\omega} h\}$ слабо компактна в Φ_+. Легко заметить, что множества слабых предельных точек последовательности $\{\psi_n^{\omega} h\}$ в Φ и Φ_+ совпадают $(Re\,\omega > 0)$. Поэтому каждая слабая предельная точка последовательности $\{\psi_n^{\omega}(t) h\}$ лежит в Φ_+ и удовлетворяет соотношению (2) при $Re\,\omega > 0$.

Подставляя в (2) вместо $g(t)$ функцию $e^{-t} g(t)$ и учитывая, что $\mathcal{L} \subset \Phi_+ \cap D(\Lambda^*, \Phi_-)$, для функции $u^{\omega} = e^{-t}\psi^{\omega}(t) h$ получаем

$$\langle u^{\omega}, \Lambda^* g\rangle + \langle M_{\omega} u^{\omega}, g\rangle = (h, g(0)), \quad g \in \mathcal{L} . \qquad (7)$$

Формула (7) справедлива для любой функции g из $\Phi_+\cap D(\Lambda^*,\Phi_-)$. Это вытекает из плотности линеала $\mathcal{L}$ в $\Phi_+\cap D(\Lambda^*,\Phi_-)$ по норме $|\cdot|_+ + |\Lambda^*|_-$.

Лемма 5. Существует единственная функция $u^\omega\in\Phi_+$ для любых $g\in\Phi_+\cap D(\Lambda^*,\Phi_-)$, удовлетворяющая уравнению

$$\langle u^\omega,\Lambda^* g\rangle+\langle M_\omega u^\omega, g\rangle=(h,g(0)).$$

Доказательство. Пусть существует такая функция $w\in\Phi_+$, что

$$\langle w^\omega,\Lambda^* g\rangle=-\langle M_\omega w^\omega, g\rangle.$$

Тогда функционал $g\to\langle w^\omega,\Lambda^* g\rangle$ непрерывен на $D(\Lambda^*,\Phi_+)$ в топологии пространства Φ_+. Поэтому в силу леммы 1.3 [5] $w^\omega\in D(\Lambda,\Phi_-)$. Следовательно,

$$\langle \Lambda w^\omega+M_\omega w, g\rangle=0.$$

А так как $\Phi_+\cap D(\Lambda^*,\Phi_-)$ плотно в Φ_+, получаем, что

$$\Lambda w^\omega+M_\omega w^\omega=0.$$

Из леммы 3 следует, что $w^\omega=0$.

Лемма 5 влечет единственность слабой предельной точки ψ^ω последовательности $\{\psi_n^\omega\}$ и совпадение функции $\psi^\omega(t)h$ с решением задачи (5), даваемым леммой 3.

Теорема 2 полностью доказана.

Пример. Пусть $\mathcal{F}=L^2(R^n)$, $H_0=-\sum\limits_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ с естественной областью определения и $V(t)$ – оператор умножения на такую вещественную функцию $V(x,t)$, что выполнено (4) и

1) существует такая функция $f(x)\in L^4_{loc}$, что

$$|V(t,x)|\le f(x),\quad t\in[0,T];$$

2) функция $t\to V(t,x)$ непрерывна почти при каждом $x\in R^n$.

Отметим, что соотношение (4) выполняется, например, если $n=3$ и $|V(t,x)|\le g(x)$, $g\in(L^2+L^\infty)(R^3)$ (7).

Все изложенное выше справедливо, если положить $\mathcal{L}=C_0^\infty(R^n\times[0,T])$. Действительно, покажем, что $\mathcal{L}$ плотно в $\Phi_+\cap D(\Lambda^*,\Phi_-)$ по норме $|\cdot|_+ + |\Lambda^*\cdot|_-$. Рассуждения проведем в несколько этапов.

1. Пусть $v(t)\in\Phi_+\cap D(\Lambda^*,\Phi_-)$ и $\rho_n(x)-\delta$ – последовательность из $C_0^\infty(R^n)$. Тогда $v_n(t)=\int_{R^n}v(t,y)\rho_n(x-y)\,dy$ сходится к $v(t)$ по норме $|\cdot|_+ + |\Lambda^*\cdot|_-$.

2. Каждую из функций $v_n(t)$ можно приблизить функциями со значениями в $C_0^\infty(R^n)$.

3. Пусть $v(t)\in\mathcal{P}_+\cap D(\Lambda^*,\mathcal{P}_-)$ и для любого $t\in[0,T)$, $v(t)\in C_0^\infty(R^n)$. Положим

$$v_h(t)=\begin{cases} v(t+h), & 0\le t\le T-h \\ 0, & T-h<t\le T \end{cases} \quad (h>0).$$

Ясно, что $v_h(t)\in\mathcal{P}_+\cap D(\Lambda^*,\mathcal{P}_-)$ и $v_h(t)\to v(t)$ при $h\to 0$.

4. И, наконец, каждую функцию $v_h(t)$ можно приблизить последовательностью

$$v_{h,m}(t)=\int_0^{T-h}\delta_m(t-\tau)\,v_h(\tau)\,d\tau\,, \quad m>h^{-1}$$

где $\delta_m(\tau)$ – такая δ-последовательность из $C_0^\infty(R)$, что

$$supp\,\delta_m(\tau)\subset[-1/m,\,1/m].$$

Ясно, что $v_{h,m}(t)\in C_0^\infty(R^n\times[0,T))$.

Проверка того, что класс $\mathcal{L}=C_0^\infty(R^n\times[0,T))$ обладает свойствами а) – в) не представляет особого труда.

В заключение приведем одну теорему о возмущениях.

Теорема 6. Пусть $\{F_n(t)\}$ – последовательность сильно измеримых сжимающих оператор-функций, удовлетворяющих уравнениям

$$-\int_0^T(F_n(t)h,g'(t))dt+i\int_0^T(F_n(t)h,(H_0+V_n(t))g(t))dt=(h,g(0)), \quad n=1,2,\ldots, \tag{8}$$

для всех $h\in\mathcal{F}$ и $g(t)$, принадлежащих некоторому классу $\mathcal{L}$ функций, обращающихся в нуль при $t=T$ (H_0, $V_n(t)$ – самосопряженные операторы). Предположим, что $\mathcal{L}$ содержит все функции вида $f(t)\,g$, где $f(t)\in C_0^1(0,T)$, $g\in G$ (G – ядро в смысле Т.Като [7] оператора H_0), и для любого $g\in G$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\|V_n(t)g\|^2dt=0. \tag{9}$$

Тогда в пространстве $L^2(0,T;\mathcal{F})$

$$exp\{-itH_0\}=s-\lim_{n\to\infty}F_n(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F(t)$ – некоторая слабая предельная точка последовательности $\{F_n(t)\}$ в пространстве

$L^2(0,T;\mathcal{F})$. Переходя в (8) по подпоследовательности к пределу, в силу (9) имеем, что

$$-\int_0^T (F(t)h, g'(t))dt + i\int_0^T (F(t)h, H_0 g(t))dt = (h, g(0)). \qquad (10)$$

Рассмотрим вектор-функцию $u_n(t)=\int\delta_n(t-\tau)F(\tau)hd\tau$, где $\delta_n(t)$, – такая δ-последовательность из $C_0^\infty(R)$, что носитель каждой из функций лежит в $[-1/n, 1/n]$. Очевидно, что $u_n(t)$ сильно непрерывно дифференцируема и

$$u_n'(t) = \int_{t-1/n}^{t+1/n} \delta_n'(t-\tau)F(\tau)hd\tau.$$

Поэтому на основании (10) имеем, что при $t\in(\frac{1}{n}, T-\frac{1}{n})$

$$u_n(t)\in D(H_0), \frac{d}{dt}u_n(t) = -iH_0u_n(t). \qquad (11)$$

Но задача Коши на отрезке $[\varepsilon, T-\varepsilon]$ при $n>\varepsilon^{-1}$ для уравнения (11) имеет единственное решение. Поэтому при $t\in[\varepsilon, T-\varepsilon]$

$$u_n(t) = exp\{-i(t-\varepsilon)H_0\}u_n(\varepsilon).$$

Устремляя $n\to\infty$, получаем, что почти при всех t и ε

$$F(t)h = exp\{-i(t-\varepsilon)H_0\}F(\varepsilon)h. \qquad (12)$$

Если в (10) положить $g(t)=\int_t^T f(t)dt\cdot g$, то получим

$$(F(t)h,g) = (h,g) - i\int_0^t (F(t)h, H_0 g)dt$$

почти всюду. Следовательно, можно считать, что $F(t)$ является слабо непрерывной оператор-функцией и $F(0)=I$. Поэтому из (12) вытекает, что

$$F(t)h = exp\{-itH_0\}h.$$

Следовательно, $F_n(t)$ слабо в пространстве $\Phi=L^2(0,T;\mathcal{F})$ сходится к $F(t)=exp\{-itH_0\}$ при $n\to\infty$. А поэтому

$$T^{1/2}\|h\| = |F(\cdot)h| \le \underline{\lim}_{n\to\infty}|F_n(\cdot)h| \le \overline{\lim}_{n\to\infty}|F_n(\cdot)h| \le T^{1/2}\|h\|.$$

Следовательно,

$$|F(\cdot)h| = \lim_{n\to\infty} |F_n(\cdot)h|.$$

Значит в пространстве $L^2(0,T;\ F)$

$$s - \lim_{n\to\infty} F_n(t) = \exp(-itH_0).$$

Из этой теоремы, в частности, следует, что в ранее рассмотренном примере при $Re\,\omega = 0$ каждая слабая предельная точка последовательности $\{\varphi_n^n\}$ стремится к $\exp\{-it(Im\,\omega)H_0\}$, если $V(t,x)\to 0$ почти при всех x и t.

Литература

1. Nelson E. Feynman integrals and the Schrödinger equation.- J. Math. Phys., 1964, 5, p.332-343.
2. Гестрин Г.Н. Об интеграле Фейнмана. – Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1970. вып.12, с.69–81.
3. Далецкий Ю.Л. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями. – Успехи мат.наук, 1962, 17, вып.5, с.3–115.
4. Чуешов И.Д. О слабых предельных точках фейнмановских интегральных произведений. – Функцион.анализ и его приложения, 1978, 12, вып.1, с.90–91.
5. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., Мир, 1971. 371 с.
6. Faris W.G. The product formula for semigroups defined by Friedrichs extensions. - Pacif. J. Math., 1967, 22, p. 47 - 70.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972. 740 с.

УДК 517.55

О непрерывности типа целой функции многих переменных по одной из них. Агранович П.З. – В кн.: Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. Сб.науч.тр. К., 1978, с. 3–12.

Рассматривается целая функция конечного порядка от многих комплексных переменных и доказывается, что тип этой функции непрерывен по одной из переменных.

Список лит.: 5 назв.

УДК 534.1:539.3

Асимптотическое представление решений уравнений теории цилиндрических оболочек в окрестности точки ветвления. Бабенко В.И. – В кн.: Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. Сб.науч.тр. К., 1978, с. 13–29.

Методом, предложенным в статье, определяются основные асимптотики для критической нагрузки и для зависимости нагрузка-деформация в начальной послекритической стадии.

Список лит.: 7 назв.

УДК 513.8

Нормальные формы формальных рядов и ростков аналитических отображений. Белицкий Г.Р. – В кн.: Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. Сб.науч.тр. К., 1978, с. 29–47.

Предложена нормальная форма элемента пространства относительно фильтрующегося действия группы. Общая схема применяется к пространству формальных степенных рядов, в котором действуют различные группы преобразований координат.

Список лит.: [illegible] назв.

УДК 517.974.5

О J-самосопряженности эллиптических операторов, не удовлетворяющих условиям Титчмарша-Сирса. Брусенцев А.Г. – В кн.: Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. Сб.науч.тр. К., 1978, с. 47–58.

Доказана существенная J-самосопряженность в $L_2(R^n)$ оператора

$$L\varphi=(-\Delta)^m\varphi+Q(x)\varphi, \quad \varphi\in C_0^\infty(R^n)$$

с комплексным потенциалом $Q(x)$ при некоторых условиях, связывающих величины $Re\,Q(x)$ и $Im\,Q(x)$. На примерах показано, что эти условия близки к необходимым.

Список лит.: 11 назв.

УДК 513.88:517:519

Асимптотические абелевые W^*-алгебры. Голодец В.Я. – В кн.: Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. Сб.науч.тр. К., 1978, с. 58–77.

В статье изучаются асимптотически абелевые W^*-алгебры M с помощью асимптотических алгебр C_M^U, введенных в предыдущих работах автора. Доказано, что C_M^U содержит в качестве W^*-подалгебры алгебру, изоморфную M^M Отсюда, в частности, следует, что M не может иметь типа $\overline{\overline{III}}_0$ (и $\overline{\overline{II}}_\infty$). Исследован вопрос о существовании точного нормального Γ-инвариантного состояния ρ на M, где Γ – группа автоморфизмов M, относительно которой M является асимптотически абелевой. Кроме того, доказано, что C_M^U содержит операторы, отвечающие всем нетривиальным центральным последовательностям (x_n), для которых (x_n^*) – также нетривиальные центральные последовательности. В терминах свойства "L" Пуканского сформулировано необходимое и достаточное условие для того, чтобы $C_M^U\neq C$.

Список лит.: 9 назв.

УДК 517.946

О спектральной функции одного класса несамосопряженных операторов Штурма–Лиувилля. Давыдов Р.Н. .– В кн.: Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. Сб. науч.тр. К., 1978, с. 78–88.

Рассматривается класс операторов Штурма–Лиувилля с комплексным ограниченным потенциалом, удовлетворяющим n–му аналогу стационарного уравнения Кортевега–де Фриса. Для этого класса операторов получен явный вид спектральной матрицы и спектральной функции соответственно на оси и полуоси.

Список лит.: 5 назв.

УДК 517.946

Конечнозонные решения уравнения $u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0$. Козел В.А., Котляров В.П. – В кн.: Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. Сб.науч.тр.К.,1978,с. 89–103.

В работе найден новый класс решений уравнения

$$u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0 . \tag{1}$$

Для таких решений получены следующие явные формулы:

$$u(x,t)=2i\ln\frac{\theta(\vec{\alpha}x+\vec{\beta}t+\vec{\gamma}+\vec{\delta})}{\theta(\vec{\alpha}x+\vec{\beta}t+\vec{\gamma})}+C+2\pi m,$$

где $\theta(\vec{v})$ – N–мерная θ–функция; $\vec{\delta}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})$, $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ – N–мерные постоянные векторы; C – некоторая постоянная; m – любое целое число.

Доказано, что решение задачи Коши для уравнения (1) принадлежит этому классу, если начальные данные являются аналогами конечнозонных потенциалов.

Список лит.: 17 назв.

УДК 517.2

Точная асимптотика для собственных значений одного класса краевых задач Штурма–Лиувилля. Лундина Д.Ш. – В кн.: Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. Сб.науч.тр. К, 1978, с.104–117.

Рассматривается краевая задача, порождаемая уравнением Штурма–Лиувилля $-y''+v(x)y-\mu y=0$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$ и граничными условиями вида

$$a_1y'\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)+b_1y'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+a_0y\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)+b_0y\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{vmatrix}\neq 0,$$
$$d_1y'\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)+c_1y'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+d_0y\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)+c_0y\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=0,$$

где $a_i,\dots,c_i$ $(i=1,0)$ – произвольные комплексные числа; $v(x)$ – комплекснозначная функция из $L_2\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Установлена точная зависимость между числом производных у функции $v(x)$ на каждом из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ и видом асимптотических формул для собственных значений граничных задач указанного типа.

УДК 517.4

Эргодические свойства распределения собственных значений некоторых классов случайных самосопряженных операторов. Пастур Л.А., Фиготин А.Л. – В кн.: Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. Сб.научн.тр. К., 1978, с.117–133.

Рассматриваются бесконечные многомерные обобщенные матрицы Якоби $H=\{H_{km}\}, k,m\in\mathbb{Z}^s$, на диагоналях которых стоят метрически транзитивные случайные последовательности. Показано, что нормированные функции распределения собственных значений "усеченных" матриц H_N, т.е. $(2N+1)^s$ -мерных матриц с элементами $(H_N)_{k,m}=H_{k,m}$, $|k|,|m|\leq N$, с вероятностью 1 стремятся к неслучайной функции при $N\to\infty$. Если симметрический оператор H является существенно самосопряженным с вероятностью 1, то эта функция равна математическому ожиданию $(E_\lambda)_{0,0}$, где E_λ – разложение единицы оператора H.

Аналогичные утверждения доказаны для случая трехмерного уравнения Шредингера, потенциал которого является метрически транзитивным случайным полем.

Список лит.: 7 назв.

УДК 517.4

Об интеграле Фейнмана для уравнения Шредингера с нестационарным потенциалом. Чуешов И.Д. – В кн.: Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. Сб.науч.тр., К., 1978. с. 133–141.

Обсуждается вопрос о построении интеграла Фейнмана в случае некоторого класса нестационарных потенциалов. Доказано, что каждая слабая предельная точка в некотором гильбертовом пространстве интегральных произведений Фейнмана является слабым решением задачи Коши для соответствующего уравнения Шредингера. Изучаются свойства этих решений.

Список лит.: 7 назв.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Сборник научных трудов

Печатается по постановлению ученого совета
Физико-технического института низких температур АН УССР

Редактор В.Я.Пекуровский
Оформление художника Д.Д.Грибова
Художественный редактор Н.Е.Петриченко
Технический редактор Е.Г.Вегер
Корректор Н.Н.Щеглова

Информ. бланк №2177.

Подп.к печ. 26.05.78. БФ 00248. Формат 60х84/16. Бумага офс. №2. Усл. печ.л. 8,6. Уч.-изд.л. 6,37. Тираж 500 экз.
Заказ 8-602. Цена 65 коп.

Издательство "Наукова думка", 252601, Киев-4, ГСП, Репина, 3.
Киевская книжная типография научной книги Республиканского производственного объединения "Полиграфкнига" Госкомиздата УССР.
252004, Киев-4, Репина, 4.